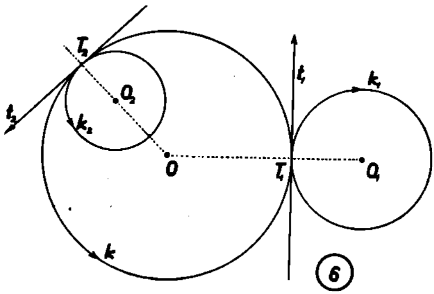
3.

ŘEŠENÍ APOLLONIOVY ÚLOHY ZALOŽENÁ NA SPECIÁLNÍCH VZTAZÍCH.

A. Zavedení cyklu. Uvidíme, že ú. A. (*kkk*) vyhovuje obecně nejvýše osm reálných kružnic výsledných, které se dají seřaditi v čtyři dvojice. Toto seřadění není náhodné, o čemž se přesvědčíme, zavedeme-li do úlohy kružnice orientované neboli cykly.[1]) Každé kružnici lze totiž



přisouditi dva smysly, navzájem opačné, ve kterých lze otáčením bodu kružnici vytvořiti. Vznikne t. zv. orientovaná kružnice (t. j. se smyslem), jež se zove cyklus. Smysl otáčení proti pohybu ruček hodinových označujeme jako kladný a příslušný cyklus se nazývá kladný. Při opačném smyslu je cyklus záporný. Smysl cyklů označujeme v obrazech šipkou (obr. 6); poloměr cyklu kladného považujeme též za kladný, poloměr cyklu záporného za záporný. I tečny cyklů se stávají orientovanými, a to tak, že mají smysl jediný, určený smyslem cyklu v dotykovém bodě, jak vidíme v obr. 6 u tečny t_1 v bodě T_1 nebo u t_2 v bodě T_2 cyklu k.

[1]) Zavedl franc. matematik E. Laguerre (1834—1886).

V témž obrazci je viděti, že dva cykly, které se dotýkají vně (k a k_1 v T_1), musí být opačného smyslu, majíce v T_1 společnou tečnu, jejíž smysl určený cyklem k musí být v souhlase i se smyslem druhého cyklu k_1. Při dotyku vnitřním (k a k_2 v T_2) musí být oba cykly smyslu stejného; kdyby tomu tak nebylo, nastal by v tomto bodě dotyk t. zv. nevlastní, který se v našich úvahách nevyskytne. Ve větách o cyklech není třeba proto mluviti o způsobu dotyku (vnitřním a vnějším) a vyjádření vět je kratší. Poznáme snadno, že dva cykly mohou mít jen dvě společné tečny a že mají jen jediný střed podobnosti.

Mimo to lze poznati, že tří cyklů mohou se dotýkati jen dva cykly, a to vede při ú. A. právě k dvojicím uvedeným na počátku.

Ve svých úvahách zavedení orientovaných kružnic vždycky zvlášť vytkneme. —

K řešení ú. A. vedou, jak již bylo v úvodu řečeno, planimetrické vlastnosti kružnic, které se zakládají na podobnosti, resp. homothetii, na polárnosti a pak na mocnosti bodu ke kružnici a z ní vyplývající vlastnosti chordály (potenční přímky) a potenčního (chordálného) středu.

Základní věty, užívající těchto pojmů, jsou známé ze středoškolského učiva; odvodíme proto jen potřebné věty další.

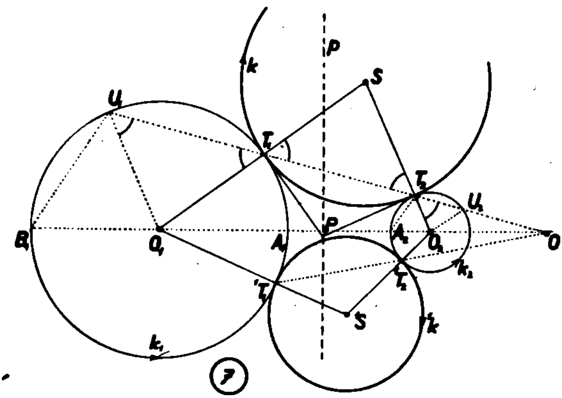
a) Mějme dvě orientované kružnice — v obr. 7 jsou to cykly kladné $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ — se středem podobnosti v bodě O. Lze snadno dokázati větu:

Dotýká-li se cyklus dvou daných cyklů, pak spojnice dotykových bodů prochází středem podobnosti daných cyklů.

Jsou-li v obr. body T_1 a T_2 dotykové, pak protíná spojnice T_1T_2 cyklus k_1 ještě v bodě U_1. Úhly v obr. žatržené jsou vesměs stejné, takže zvláště $\sphericalangle O_1U_1O = \sphericalangle O_2T_2O$; proto poloměry O_1U_1 a O_2T_2 jsou úsečky rovnoběžné a tedy homothetické. Spojnice U_1T_2 homotheticky sdružených bodů U_1

a T_2 jde pak skutečně středem podobnosti O. Je to také důsledek věty uvedené sub e).

Naopak protneme-li dané dva cykly paprskem homothetie ve čtyřech bodech T_1, U_1 a T_2, U_2, pak vždy dva průsečíky na různých cyklech ležící, které nejsou spolu homothetické,[2]) t. j. T_1, T_2 nebo U_1, U_2, určují cyklus, který se v těchto bodech daných cyklů dotýká. Z rovnosti zatržených úhlů vyplývá zase naopak rovnost úseček $ST_1 = ST_2$, t. j. poloměrů dotykového cyklu k.



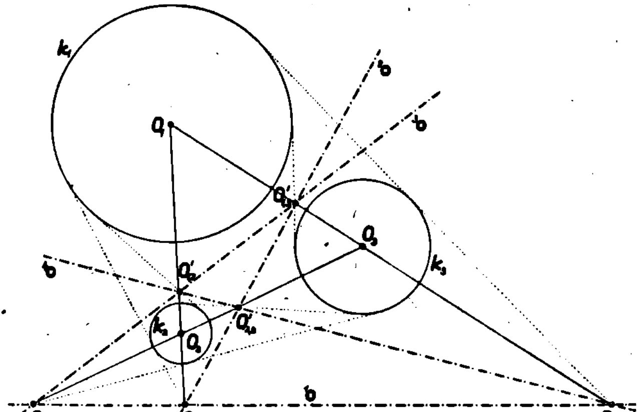
b) Sestrojíme-li v témž obrazci tečny cyklu k v bodech T_1 a T_2, protnou se v pólu P dotykové sečny T_1T_2 a platí $\overline{PT}_1 = \overline{PT}_2$; mocnost bodu P vzhledem k cyklům k_1 a k_2 je stejná, čili bod P náleží jejich chordále p. To vyplývá rovněž ze známé vlastnosti chordál tří kružnic.

Můžeme tedy říci, a to bez zřetele na smysl cyklů: Dotýká-li se kružnice k dvou kružnic k_1, k_2, pak pól spojnice dotykových bodů vzhledem ke kružnici k leží na chordále kružnic k_1, k_2 a naopak.

[2]) Nazývají se někdy inversně sdružené, nebo krátce inversní podle středu O.

c) Z této věty a z vlastnosti sdružených pólů[3]) plyne hned další věta:

Pól chordály dvou kružnic vzhledem ke kružnici třetí, která se prvých dvou dotýká, leží na spojnici dotykových bodů.



8

d) Z obr. 7 můžeme napsati známým způsobem rovnice:

$$\overline{OT_1} \, . \, \overline{OU_1} = \overline{OA_1} \, . \, \overline{OB_1}$$

$$\frac{\overline{OT_2}}{\overline{OU_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_1}}.$$

Znásobením obou rovnic dostáváme:

$$\overline{OT_1} \, . \, \overline{OT_2} = \overline{OA_1} \, . \, \overline{OA_2}.$$

Jestliže se v témž obraze dotýká další cyklus ${}^1k$ obou daných v bodech ${}^1T_1$ a ${}^1T_2$, pak platí podobně:

[3]) Viz J. Vojtěch: GV, 62.

$$\overline{O^1T_1}\,.\,\overline{O^1T_2} = \overline{OA_1}\,.\,\overline{OA_2},$$

čili

$$\overline{OT_1}\,.\,\overline{OT_2} = \overline{O^1T_1}\,.\,\overline{O^1T_2}.$$

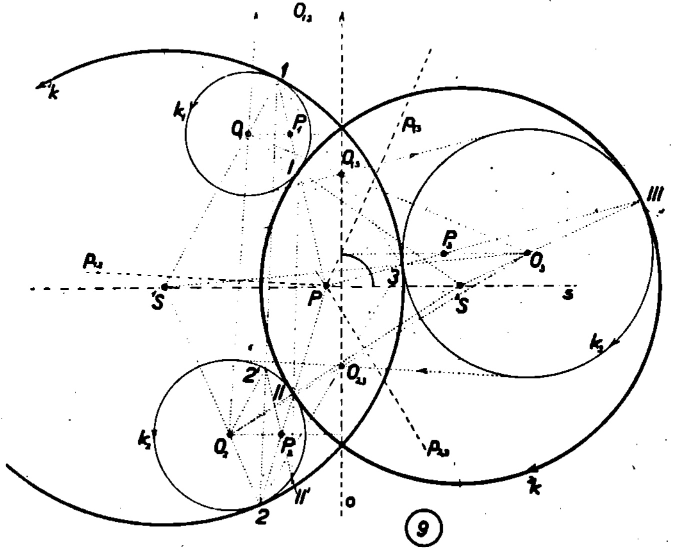
To znamená, že bod O má stejnou mocnost k oběma cyklům k i ${}^1k$ i ke všem ostatním, které se cyklů k_1 a k_2 dotýkají, a že leží na chordále cyklů k, ${}^1k$ i na chordále každé jiné takové dvojice.

Platí tedy: Jestliže se dva cykly dotýkají současně dvou jiných cyklů, pak chordála jedné dvojice cyklů dotykových jde středem podobnosti druhé dvojice cyklů.

e) Nyní uvedeme větu Mongeovu: Šest středů podobnosti tří kružnic tvoří vrcholy úplného čtyrstranu; jedna strana obsahuje tři vnější středy podobnosti a ostatní tři strany spojují vždy jeden vnější střed s dvěma vnitřními. Jsou to čtyři osy podobnosti tří kružnic, jedna vnější a tři vnitřní (obr. 8). Důkaz této věty jest proveden v GV, str. 52.

B. S těmito větami vystačíme, abychom provedli **Gergonnovo řešení ú. A.**

Rozbor: Dané tři kružnice $k_i(O_i)$, $i = 1, 2, 3$, orientujme v cykly — v obr. 9, na př. v pořadí $(++-)$. Dotýkají-li se dva výsledné cykly ${}^1k({}^1S)$ a ${}^2k({}^2S)$ daných cyklů, pak podle věty sub d) prochází chordála oněch cyklů středy podobnosti dvojic k_1, k_2, resp. k_2, k_3 a k_3, k_1, čili je osou podobnosti o daných cyklů. Z téže věty pak plyne, že střed podobnosti dvojice ${}^1k$, ${}^2k$ leží na chordále p_{12} dvojice k_1, k_2, rovněž i na chordále dvojice k_2, k_3 i k_3, k_1, čili jest potenčním středem P daných cyklů. A proto: Středy ${}^1S$, ${}^2S$ výsledných cyklů leží na kolmici s, spuštěné s potenčního středu P daných cyklů na jejich osu podobnosti. Podle věty sub c) spojnice dotykových bodů 1, I cyklu ${}^1k$ a ${}^2k$ s cyklem k_1 prochází pólem P_1 osy podobnosti o, jakožto chordály dvojice ${}^1k$, ${}^2k$, vzhledem k cyklu k_1. A podle věty sub a) táž spojnice *II* jde středem podobnosti dvojice ^1k, $^2k_2$, t. j. bodem P. Rovněž pak spojnice dotykových bodů výsledných cyklů s cyklem k_2 a k_3 spojují pól P_2, resp. P_3 téže osy o vzhledem k daným cyklům k_2, resp. k_3 s potenčním středem P.



Konstrukce: K daným třem cyklům sestrojíme osu podobnosti o a jejich potenční střed P. Určíme dále póly P_i osy o vzhledem k daným cyklům k_i.

Spojnice PP_i protnou cykly k_i v dotykových jejich bodech s dvěma cykly hledanými ^1k a ^2k, jejichž středy ^1S a ^2S snadno již doplníme.

Důkaz, že cykly ^1k a ^2k takto sestrojené skutečně vyhovují žádaným podmínkám, můžeme provésti takto:

Body P_1 a P_2 jakožto póly osy podobnosti o vzhledem k cyklům k_1 a k_2 jsou body homothetické dle středu O_{12} ve vztahu určeném homothetickými cykly k_1 a k_2, ježto osa o je paprskem homothetie.

Vedeme-li proto bodem P_2 sečnu cyklu k_2 rovnoběžnou se sečnou $1I$, t. j. přímkou PP_1, protne k_2 v bodech $2'$ a II', které jsou homothetické s body 1, resp. I; paprsky homothetie $12'$ a $I\,II'$ protnou k_2 ještě v bodech (2), resp. (II), inversních s 1, resp. s I. Spojnice $(2)(II)$ prochází nutně bodem P_2, jak plyne z konstrukce poláry bodu O_{12} vzhledem ke k_2, kdybychom ji sestrojovali užitím úplného čtyrrohu $(2)2'(II)II'$. Polára ta musí jít právě bodem P_2, který je pólem přímky o, na níž bod O_{12} leží. Spojnice inversních dvojic bodů $1, I$ a $(2), (II)$ protínají se však nutně na chordále p_{12} cyklů k_1, k_2 (dle věty Ad), tedy v bodě P, kterým byla vedena spojnice $1I$, od níž jsme vyšli. Je tedy spojnice $(2)(II)$ totožná se spojnicí PP_2 a body (2), (II), získané jako inversní s body 1, I, jsou totožné s body 2, II sestrojenými původně na PP_2.

Stejně dokážeme, že body 3, resp. III jsou inversní s body 1, resp. I na homothetických cyklech k_3 a k_1 a že též body 2, resp. II jsou inversní s body 3, resp. III na homothetických cyklech k_2 a k_3.

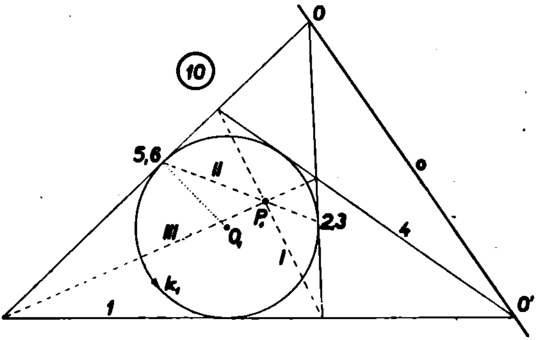
Proto cyklus ^1k dotýkající se k_1 v bodě 1 a jdoucí bodem 2, dotýká se v tomto bodě i k_2 (podle věty Aa). Podobně i cyklus, dotýkající se na př. k_1 v bodě 1 a jdoucí bodem 3, dotýká se v tomto bodě i cyklu k_3.

Avšak tento cyklus je totožný s cyklem ^1k prve určeným, což plyne hned z toho, že trojúhelníky $1\,2\,3$ a $O_1O_2O_3$ jsou v poloze perspektivní (osou perspektivnosti jest o), takže spojnice perspektivně sdružených vrcholů: O_11, O_22 a O_33 protínají se dle věty Desarguesovy[4]) v jediném bodě ^1S, středu to výsledného cyklu ^1k.

Podobně jest tomu u cyklu ^2k. —

[4]) Věta ta zní: Jsou-li dva trojúhelníky v poloze takové, že průsečíky odpovídajících si stran jsou na přímce, procházejí spojnice odpovídajících si vrcholů jediným bodem, a naopak. Objevil ji francouzský geometr Desargues († 1662) a lze ji

P o z n á m k y k e k o n s t r u k c i. a) Na obr. 9 jest provedena tato konstrukce úplně, ale k sestrojení výsledných cyklů bylo použito skutečně jen pólu P_1, jímž určeny dotykové body *1* a *I* na cyklu k_1. Dotykový bod *2* na cyklu k_2 můžeme sestrojiti dle věty sub a) i bez pólu P_2. Středem O_2 vedeme v cyklu k_2 poloměr $O_2 2'$ rovnoběžný s $O_1 1$. Spojnice *12'* protne k_2 již v bodě *2*. Spojnice pak $O_2 2$ určí na $O_1 1$ hledaný střed ${}^1S$; podobně i ${}^2S$.



Dalších pólů P_2 a P_3 bylo by možno použíti ke k o n t r o l e přesnosti, zrovna tak jako středné $s \equiv {}^1S{}^2S$, která musí jít bodem P kolmo k o; tato osa o jest pak chordálou cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$. —

b) Pro sestrojení pólů P_i osy o, která ani nemusí být vyrýsována, jest výhodná tato konstrukce, jsou-li společné tečny daných cyklů s cyklem na př. k_1 reálné (obr. 10). D v ě ú h l o p ř í č k y č t y r s t r a n u, u r č e n é h o č t y ř m i t e č n a m i c y k l u k_1, p r o t í n a j í s e v p ó l u P_1 t ř e t í ú h l o p ř í č k y, t. j. osy o, v z h l e d e m k e k_1. Tímto bodem P_1 procházejí totiž i spojnice dotykových bodů protějších tečen (v obr. na př. spojnice *II*), zřejmě poláry bodu O, resp. O', které náleží ose o.

---

snadno dokázati prostorově. (Viz Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie pro vys. šk. techn., díl I; JČMF, Praha 1928; str. 65.)

Důkaz lze provésti třebas užitím věty Brianchonovy.[5]) Označíme-li tečny čísly $1, \ldots, 6$, při čemž dvěma protějším přidělíme čísla $2, 3$ a $5, 6$ (ježto každou považujeme za dvě soumezné, které se protínají v příslušném dotykovém bodě), pak schema spojnic průsečíků dvojic tečen jest:

$$\left.\begin{matrix} 1,2 \\ 4,5 \end{matrix}\right\} I; \quad \left.\begin{matrix} 3,4 \\ 6,1 \end{matrix}\right\} III; \quad \left.\begin{matrix} 2,3 \\ 5,6 \end{matrix}\right\} II.$$

Vymezení: Různé skupiny znamének cyklů, které přidělíme daným třem kružnicím v obecné poloze, vedou k čtyřem osám podobnosti — dle věty Ae); z osmi ($= 2^3$) možných skupin znamének vždy dvě skupiny znamének vesměs vzájemně různých (v obr. 9 jsou to skupiny $(++-)$, $(--+)$), poskytnou totiž jednu osu podobnosti. Jsou tedy obecně čtyři dvojice výsledných cyklů, čili obecně osm výsledných kružnic ú. A.

Některé dvojice výsledných cyklů mohou však být imaginární: Jestliže spojnice potenčního středu P s póly P_i osy podobnosti vzhledem k cyklům k_i neprotnou příslušné cykly k_i, jsou dotykové body imaginární, a proto příslušná dvojice výsledku rovněž imaginární. Jest tedy imaginárních výsledků vždycky sudý počet.

Počet reálných výsledků závisí původně na vzájemné poloze daných kružnic.

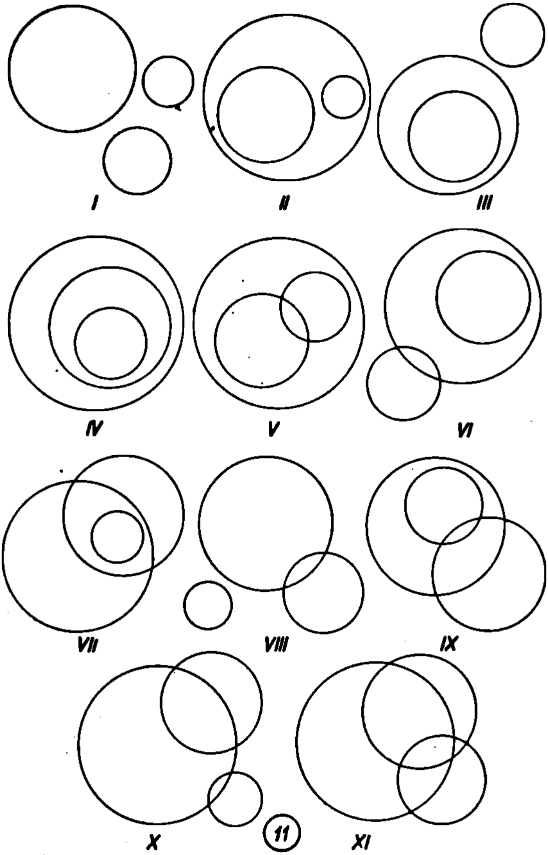
a) Vyloučíme-li zatím případy, kdy se dané dvě kružnice dotýkají, jakožto mezní případy obecných případů, kdy se tyto kružnice protínají anebo neprotínají (protínají imaginárně), možno uvésti 11 obecných poloh daných kružnic podstatně různých.[6]) Na obr. 11 má případ *I*, *II* a *XI* osm reálných výsledků, případy *V* až *X* poskytují čtyři reálná řešení a případ *III* a *IV* nedává žádných reálných výsledků.

---

[5]) Viz J. Vojtěch: GV, 63. Pro důkaz stačilo by též říci: Útvar vzniklý touto konstrukcí je polárný s útvarem, který dává konstrukci poláry k danému pólu užitím vlastností úplného čtyrrohu.

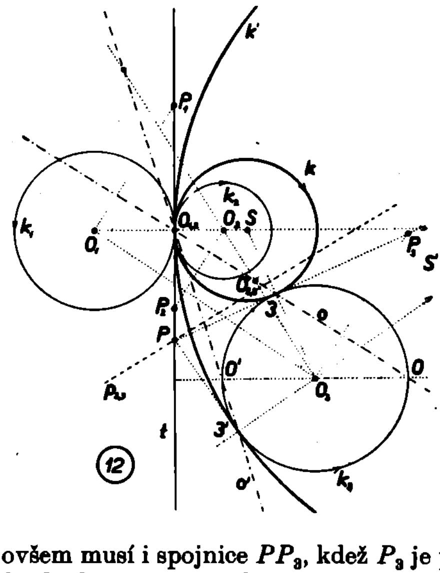
[6]) Viz Lit. č. II, str. 291; zde uvedeny i důvody reálnosti výsledků.

b) Jsou-li mezi danými kružnicemi k_i dvě, které se dotýkají, na obr. 12 jsou to k_1 a k_2, a dotýkají se v bodě O_{12}, pak



je vždy o dvě výsledné kružnice méně než v obdobném případě obecném. V obr. opět dané kružnice orientujme:

$k_1(+)$, $k_2(-)$ a k_3 na př. $(+)$. Osa podobnosti o těchto cyklů jde bodem O_{12}, takže její póly P_1 a P_2 vzhledem k cyklům k_1, resp. k_2 leží na jejich společné tečně t v bodě O_{12}. Tato tečna je však chordálou dvojice k_1, k_2 a obsahuje proto i potenční střed P daných cyklů. Spojnice $PP_1 \equiv t$ určuje tedy na k_1 dva body dotyku splývající s bodem O_{12}, rovněž tak i spojnice PP_2 na k_2, a splývají tedy také výsledné cykly v jediný



$k(S)$. Pak ovšem musí i spojnice PP_3, kdež P_3 je pólem osy o vzhledem ke k_3, býti tečnou tohoto cyklu k_3. Podobně i osa podobnosti o', k níž bychom dospěli při záporné orientaci kružnice k_3, poskytne dva výsledné cykly splývající v $k'(S')$. Ve zvoleném případě dostali bychom tedy šest reálných výsledků.

V obr. 12 je řešena současně úloha Pappova, neboť sestrojené cykly k a k' se dotýkají přímky t v bodě O_{12} a kružnice k_3. Při jejím řešení stačí buď nalézti jen potenční střed P kružnice k_3, přímky t a bodu O_{12} a z něho vésti tečny ke kružnici k_3, které již stanoví na k_3 dotykové body *3* a *3'* hledaných kružnic; nebo by stačilo sestrojiti osy podobnosti o a o',[7]) které jdou kromě bodu O_{12} ještě také bodem O, resp. O', krajními to body průměru kružnice k_3, kolmého na přímku t. Přímky o a o' určí pak na k_3 body dotyku *3* a *3'*, což je konstrukce obvyklá při řešení této úlohy.

c) Jestliže dané kružnice mají jeden společný bod P, je již tento bod jejich potenčním středem a každá osa podobnosti vede jen k jedné kružnici výsledné a vždy k bodu P, jakožto kružnici nulové. Bod P zastupuje tedy čtyři výsledky, takže jsou v tomto případě další čtyři řešení reálná. Jestliže dané kružnice náleží témuž svazku, zastupují společné body všechna řešení.

d) Řešení Gergonnova nelze použíti, jestliže středy daných tří kružnic leží na přímce, neboť v tomto případě jak potenční střed, tak póly os podobnosti, které vesměs splývají se společnou střednou, jsou body úběžnými ve směru kolmém k této přímce. Tento případ rozřešíme později způsoby jinými.

C. Pro zvláštní případy ú. A., když dané kružnice jsou body, nebo přímky,[8]) můžeme použíti řešení Gergonnova, jestliže mezi danými prvky zůstává aspoň jedna kružnice, na níž pak určíme dotykové body s kružnicemi výslednými. Jest to tedy 5 případů v (2A) na str. 15 označených čísly: 2. až 6.; probereme stručně první čtyři, protože poslední případ (*kBB*) je zcela jednoduchý a dobře známý. V případě 4. (*kpp*) nutno vyloučiti však zvláštní polohu, když dvě dané přímky jsou rovnoběžné, neboť řešení Gergonnovo zde selhává podle (Bd). Ale tento případ lze řešiti zcela jednoduše.

Vymezení ve všech případech lze provésti aplikováním případů obecných; pro stručnost je vynecháme.

---

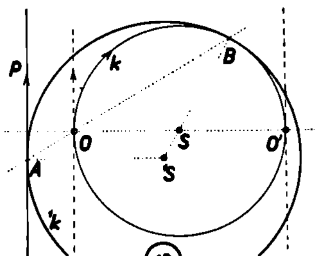
[7]) Osy podobnosti trojice t, O_{12}, k_3; viz (3 Ca), str. 31.

[8]) Zde je třeba vzíti za kružnici degenerovanou nejen přímku v konečnu, ale i přímku úběžnou, jako druhou její část.

a) Poněvadž budeme používati středů podobnosti, chordál, pólů a polár při dvojicích kružnic (nebo cyklů), z nichž jedna nebo obě přešly v bod anebo v přímku, předešleme, jak se jeví tyto útvary podle vlastností je definujících při takových dvojicích.

α) Pro dvojici bod a kružnice: Oba středy podobnosti splývají v daném bodě, chordála půlí vzdálenost bodu od jeho poláry vzhledem k dané kružnici, což není třeba zvlášť dokazovati.

β) Přímka a kružnice: Středy podobnosti jsou krajní body O a O' průměru kružnice kolmého na danou přímku (obr. 13). Vedeme-li bodem O, resp. O' paprsek, pak snadno nahlédneme, že na tomto paprsku je vždy homotheticky sdružen bod A přímky p s bodem O, resp. O' a bod úběžný (na druhé části[8]) degenerované kružnice) s druhým bodem B kružnice k (pro nekonečně velký poměr homothetie, jak musí být, ježto pro přímku je nutno položiti $r = \infty$);



13

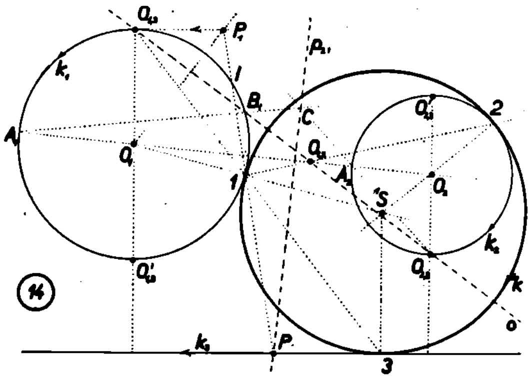
body A, B jsou zde body inversními. Orientujeme-li kružnici i přímku, pak středem podobnosti je ten bod O, v němž tečna cyklu je téhož smyslu jako orientovaná přímka p (v obraze je to bod O). Chordála této dvojice je ovšem daná přímka.

γ) Bod a přímka: Středy podobnosti zase splývají v daném bodě, chordálou je daná přímka. Bod je k přímce pólem, přímka pak k bodu polárou.

δ) Dva body: Středy podobnosti jsou střed úsečky danými body určené a úběžný bod této spojnice. Chordálou je osa souměrnosti těch bodů.

ε) Pro dvě přímky lze určiti jen chordálu, jakožto jednu osu souměrnosti daných přímek, z vlastnosti, že chordála půlí úhel dvou kružnic stejných poloměrů.

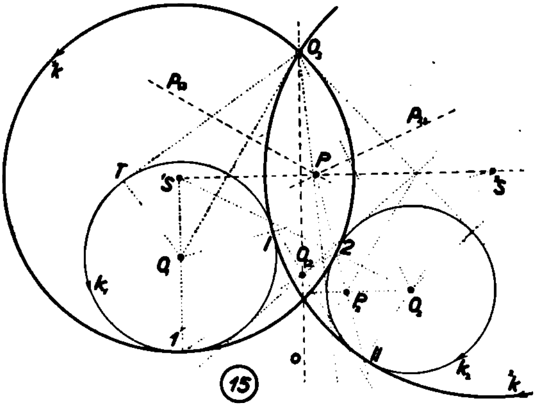
b) Je-li řešiti úlohu (*kkp*), t. j. nalézti kružnici, která se dotýká daných kružnic $k_1(O_1)$, $k_2(O_2)$ a dané přímky k_3 (obr. 14), sestrojíme průměry v k_1 i k_2 ke k_3 kolmé, jež určí svými krajními body O_{13}, O'_{13}, resp. O_{23}, O'_{23} středy podobnosti dvojic k_1, k_3, resp. k_2, k_3. Při zvolené orientaci daných kružnic a přímky je osou podobnosti o spojnice $O_{13}O_{23}$. Potenční



střed P stanovíme v průsečíku přímky k_3 a chordály p_{12} daných cyklů. Tuto chordálu určíme třebas bodem C, který je průsečíkem spojnic bodů A_1, B_1 a A_2, O_{23}, vzájemně inversních ve vztahu homothetických cyklů k_1 a k_2; je kolmá k středné O_1O_2. Pak sestrojíme pól P_1 osy podobnosti o vzhledem ke k_1 a spojnicí PP_1 dospějeme k dotykovým bodům *1* a *I* na k_1 s výslednými cykly ${}^1k$ a ${}^2k$. Sestrojení dotykových bodů *2* a *3* na k_2, resp. na k_3 a dokončení konstrukce je již známé a jest provedeno v obrazci jen pro cyklus ${}^1k$.

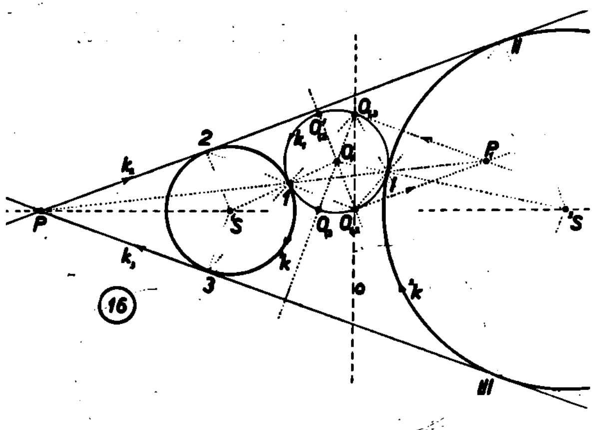
Úloha má obecně 8 výsledků, protože jsou 4 osy podobnosti: kromě o, ještě $O_{13}O'_{23}$, $O'_{13}O_{23}$ a $O'_{13}O'_{23}$.

c) Případ (*kkB*), sestrojiti kružnici, která se dotýká daných kružnic $k_1(O_1)$, $k_2(O_2)$ a prochází daným bodem O_3, jest proveden při zvolené orientaci kružnic na obr. 15. Střed podobnosti O_{12} byl sestrojen jako průsečík společných tečen cyklů k_1, k_2 a pól P_2 osy podobnosti $o \equiv O_{12}O_3$ vzhledem k cyklu k_2 konstrukcí, vyloženou na str. 26 sub b), když byly vedeny též tečny cyklu k_2 z bodu O_3. Chordála p_{13} dvojice k_1, O_3 byla sestrojena středem tečny O_3T kolmo na střednou O_1O_3; podobně i chordála p_{23}. Další sestrojení jest již známé. Pro určení středu ${}^2S$ výsledného cyklu ${}^2k$ bylo použito středné ${}^1S{}^2S$, jež jde ovšem bodem P kolmo na o.



Osy podobnosti jsou možné dvě, a proto má úloha obecně čtyři výsledky.

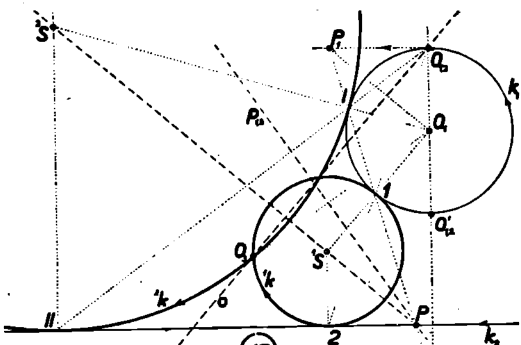
d) Máme-li sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$ a daných dvou přímek k_2, k_3 (obr. 16), t. j. řešiti úlohu (kpp), pak podobně jako sub b) sestrojíme středy podobnosti O_{12}, O'_{12} dvojice k_1, k_2 na průměru kružnice k_1, kolmém na k_2, a středy podobnosti O_{13}, O'_{13} dvojice k_1, k_3. Orientujeme-li opět dané útvary, pak v našem obrazci je osou podobnosti o spojnice $O_{12}O_{13}$, jak rozhodly tečny cyklu k_1, rovnoběžné i stejného smyslu s k_2, resp. s k_3; tyto tečny určují ve svém průsečíku P_1 pól osy o vzhledem ke k_1. Potenční střed P je v průsečíku daných přímek k_2, k_3, jakožto chordál dvojic k_1, k_2 a k_1, k_3. Ježto osa podobnosti o podle konstrukce svých bodů O_{12} a O_{13} tvoří s danými přímkami trojúhelník rovnoramenný, je středná ${}^1S^2S$ výsledných cyklů osou souměrnosti přímek k_2, k_3, kolmou k ose o. Dokončení konstrukce jest již jasné.



Jiné možné orientace daných útvarů poskytují ještě tři osy podobnosti, $O'_{12}O'_{13}$, $O_{12}O'_{13}$ a $O'_{12}O_{13}$, takže je úloha obecně osmiznačná.

Poznámka: Odvozená konstrukce splývá s postupem, který lze vyložiti homothetií mezi daným cyklem k_1 a hledaným cyklem, na př. ${}^1k$. Jejich středem podobnosti jest hledaný bod dotyku *1*. Známe však tečny k_2 a k_3 hledaného cyklu ${}^1k$, můžeme tedy sestrojiti k danému cyklu k_1 tečny s nimi rovnoběžné, jakožto homothetické: průsečíky P a P_1 jsou pak body homothetické a jejich spojnice jakožto paprsek homothetie prochází středem homothetie *1*, resp. *I* na cyklu k_1.

e) Případ (kpB), sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$, dané přímky k_2 a prochází daným bodem O_3, je řešen na obr. 17 a nepotřebuje téměř výkladu. Osa podobnosti o jde ovšem bodem O_3, který je středem podobnosti — podle a) — jak dvojice k_1, O_3, tak dvojice k_2, O_3. Osy podobnosti jsou celkem jen dvě, kromě o ještě $O_3O'_{12}$ při jiné orientaci dané kružnice nebo dané přímky, takže je úloha obecně čtyřznačná. —



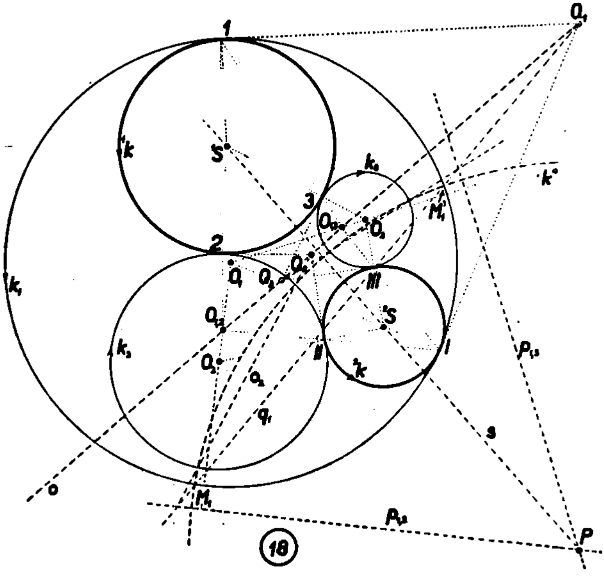
17

D. Řešení Gaultierovo. Z Gergonnova řešení ú. A. lze odvoditi jinou konstrukci, kterou podal francouzský geometr Gaultier.[9]) Víme, že v obr. 9 body P_1, *1*, *I*, P leží na přímce; proto poláry těchto bodů vzhledem ke kružnici k_1 se protínají v jediném bodě. Polára bodu P_1 je osa podobnosti o, poláry bodů *1* a *I* jsou tečny k_1 v těchto bodech a společným průsečíkem těchto tří polár, t. j. bodem Q_1 (v obr. 9 není sestrojen), jde i polára potenčního středu P vzhledem ke kružnici k_1. Řešení ú. A. bude pak pro dané kružnice $k_i(O_i)$, $i = 1, 2, 3$, takovéto (obr. 18):

Sestrojíme osu podobnosti o daných kružnic libovolně orientovaných a jejich střed potenční P. Potom určíme na o bod Q_1 jako průsečík její s polárou q_1 potenčního středu P

[9]) V Journal de l'école polytechnique, **16**, **1816**.

vzhledem ke kružnici k_1; tečny vedené z bodu Q_1 ke k_1 určí na tomto cyklu dotykové body *1*, *I* s dvěma výslednými cykly ${}^1k$ a ${}^2k$. Podobně by se daly sestrojiti i dotykové body *2*, *II*, resp. *3*, *III* cyklů ${}^1k$, ${}^2k$ s cyklem k_2, resp. k_3. Stačí však použít středů podobnosti O_{12}, resp. O_{13} a sestrojiti body *2*, resp. *3* a *II*, resp. *III*, jako body inversní v homothetických



vztazích dvojic k_1, k_2 a k_1, k_3 způsobem již známým (viz pozn. ke konstr. a) na str. 26), dokonce i při nepřístupných středech podobnosti.

Je-li mocnost bodu P vzhledem k daným kružnicím kladná (jako v našem obrazci), pak délka reálné tečny $\overline{PM_1} = \overline{PM'_1}$ vedené z P ke k_1 určuje poloměr kružnice k^o, která protíná dané kružnice orthogonálně, čili t. zv. **kružnice orthotomické**. Společné sečny její s kružnicemi danými jsou hned všemi třemi polárami q_i potenčního středu P vzhledem ke kružnicím k_i, které opět vedou k dřívějším bodům Q_i.

Z téhož obrazce poznáváme dále, že mocnost bodu Q_1 ke kružnicím k^o, ${}^1k$ a ${}^2k$ jest stejná a rovna mocnosti Q_1 ke k_1, neboť

$$\overline{Q_1M_1}\,.\,\overline{Q_1M'_1} = \overline{Q_1I}^2 = \overline{Q_1I}^2.$$

Proto bod Q_1 leží na chordále dvojic k^o, ${}^1k$ i k^o, ${}^2k$; totéž platí o bodu Q_2 a Q_3. Jest tedy osa podobnosti o společnou chordálou těchto tří kružnic, což znamená, že kružnice orthotomická náleží svazku kružnic, určenému kružnicemi dotykovými a má s nimi společné dva body X, Y na ose podobnosti o.

Postup konstrukce, kterou řešíme ú. A., je-li kružnice orthotomická reálná, můžeme vyložiti také takto:

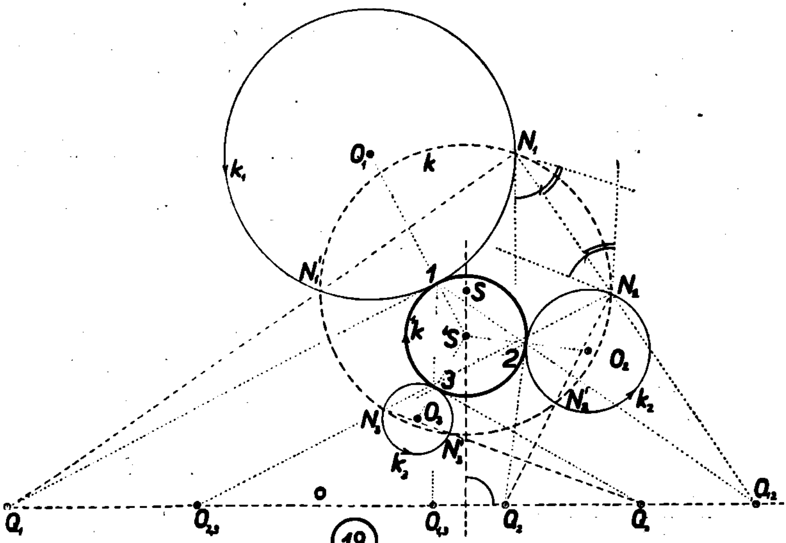
Sestrojíme průsečíky X, Y osy podobnosti daných cyklů s kružnicí orthotomickou a pak určíme kružnice, které se dotýkají kterékoliv kružnice dané a procházejí body X, Y, což jsou již výsledné kružnice dotykové ${}^1k$, ${}^2k$ úlohy původní. Jsou-li body X, Y reálné, řešíme tedy známou úlohu (kBB); kružnice k^o je zde pomocnou kružnicí svazku (X, Y). Jsou-li body X, Y imaginární, můžeme také konstrukci tímto postupem důsledně vyložiti (srovn. (4Bb), str. 58).

E. Řešení Fouchéovo. Obecnější konstrukce, jak dospěti k bodům Q_i předešlého odstavce a tím k společným tečnám výsledných kružnic s kružnicemi danými, pochází od francouzského geometra Fouché.[10])

Rozbor: Dotykové body cyklu ${}^1k$, resp. ${}^2k$ s danými cykly k_i (obr. 19), t. j. body *1*, *2*, *3* jsou, jak víme, v dvojicích inversně sdružené podle středu podobnosti příslušné dvojice daných cyklů. Zvolíme-li nyní na k_1 libovolný bod N_1 a sestrojíme-li k němu bod N_2 na k_2 inversní podle středu podobnosti O_{12} a na k_3 dále bod N_3 inversní k bodu N_2 podle

[10]) V Nouvelles Annales de mathématiques, 1892.

středu podobnosti O_{23} a vedeme-li body N_i kružnici $k(S)$, jest mocnost bodu O_{12} (dle věty (Ad) na str. 22) při proměnném bodu N_1 ke všem kružnicím k stále táž a rovněž mocnost bodu O_{23}. Kružnice k takto určené tvoří tedy svazek, kterému náleží i dotykové cykly ${}^1k$ a ${}^2k$ jako zvláštní případy a podle předešléhe odstavce i kružnice orthotomická; osa o



19

jest jejich společnou chordálou. Společné sečny jakožto chordály kružnic k tohoto svazku s danou kružnicí k_1 protínají tedy osu o v jediném bodě Q_1, kterým jde i společná tečna cyklu ${}^1k$, resp. ${}^2k$ s cyklem k_1 v bodě *1*, resp. *I*. Stejně dospějeme k bodu Q_2 a Q_3, jestliže vezmeme kružnice k_2, resp. k_3, proťaté svazkem kružnic k.

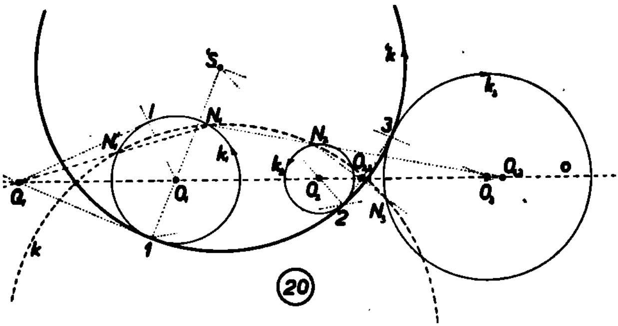
Konstrukce Fouchéova je tedy takováto: K daným třem kružnicím (orientovaným celkem čtyřikrát různě) sestrojíme osu podobnosti o a libovolnou kružnici k, jak bylo vyloženo. Společná sečna kružnice k na př. s k_1 protne osu o v bodě Q_1. Z něho vedené tečny ke k_1 určují již na k_1 dotykové body *1* a *I* dvou hledaných cyklů. Dokončení konstrukce je pak již známé.

Důkaz plyne z rozboru, neboť myslíme-li si na př. kružnici ${}^1k$, pak $Q_1 1$ jest chordálou dvojice ${}^1k$ a k_1 a při tom tečnou cyklu k_1, což znamená, že se cykly ${}^1k$ a k_1 v bodě *1* dotýkají; ${}^1k$ jde však body inversními *2* a *3*, a dotýká se proto i v nich cyklů k_2, resp. k_3.

Poznámka. Tečny cyklů k_1 a k_2 na obr. 19 sestrojené v bodech inversních N_1, resp. N_2 svírají podle věty (Ab) na str. 21 se spojnicí N_1N_2 stejné úhly (jednou zatržené). Ale i tečny kružnice k v týchž bodech svírají s N_1N_2 úhly stejné (dvakrát zatržené); proto i úhly tečen k_1 a k v bodě N_1 a tečen k_2 a k v bodě N_2 jsou stejné. Protíná tedy kružnice k cykly k_1 a k_2 ve stejných úhlech čili isogonálně. Stejně tak i úhly kružnic k, k_1 a k, k_3 jsou stejné. Tedy: Kružnice k tvoří svazek kružnic isogonálně protínajících dané tři cykly, svazek t. zv. kružnic isotomických, se společnou chordálou v ose podobnosti daných cyklů. Kružnice orthotomická jest zvláštním případem kružnice isotomické pro úhel pravý a cykly dotykové pro úhel nulový.

Pro dané tři kružnice a jejich čtyři osy podobnosti dostaneme celkem čtyři takové svazky kružnic isotomických. Snadno lze dokázati i opak, že každá kružnice protínající dané tři kružnice isogonálně, protíná je v bodech, které jsou v dvojicích inversní podle příslušného středu podobnosti, a že náleží tedy některému tomuto svazku. Kružnice orthotomická je všem čtyřem svazkům společná a může být také imaginární. Středné těchto svazků procházejí středem kružnice orthotomické, t. j. potenčním středem daných kružnic, a jsou kolmé na osy podobnosti; každá obsahuje dva středy kružnic dotykových, výsledných pro ú. A., jež mohou být také imaginární.

a) Řešení Fouchéovo poskytuje výsledek i v případě, že dané kružnice mají středy na přímce, kdy řešení Gergonnovo selhává; tento případ jest proveden v obr. 20 pro kružnice k_i, určitě orientované. Osa podobnosti o splývá zde ovšem s jejich střednou, ale bodů N_i, určujících kružnici isotomickou k, lze použít stejně jako při obecné poloze daných kružnic. Z obou výsledných cyklů jest vyrýsován v obrazci jen cyklus ${}^1k$, který se dotýká daných cyklů v bodech *1*, *2*, *3*; cyklus ${}^2k$ by byl souměrný s ${}^1k$ podle středné. Použití bodu Q_1 není už třeba vykládati ani zde, ani v případech, které dále řešíme.



20

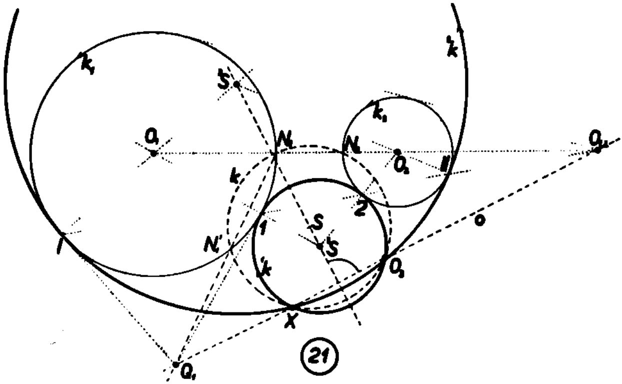
b) Je zajímavé, že pro zvláštní případy ú. A., a to (kkB), (kpB) a také (kBB) dostaneme z řešení Fouchéova konstrukci, která splývá s konstrukcí obvykle užívanou.

α) Na obr. 21 je rozřešen případ (kkB), když jsme obě dané kružnice orientovali kladně. Bod N_1 na k_1 volíme výhodně na středné O_1O_2, takže bod inversní N_2 na k_2 leží též na středné. Bod N_3 splývá ovšem s daným bodem O_3; tím je pomocná kružnice isotomická k snadno určena. Na ose podobnosti $o \equiv O_{12}O_3$, jakožto chordále výsledných cyklů, dostaneme ještě jeden reálný bod X těchto cyklů. Pro bod X platí úměra:

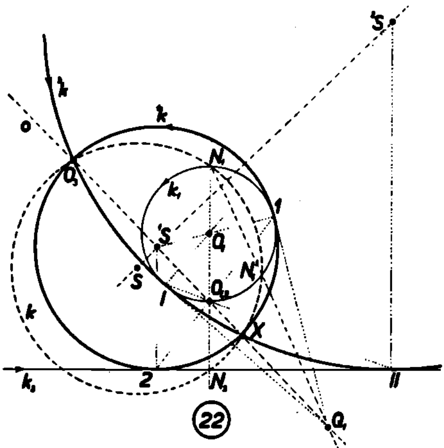
$$\overline{O_{12}N_1} \cdot \overline{O_{12}N_2} = \overline{O_{12}O_3} \cdot \overline{O_{12}X},$$

jejíž obě strany vyjadřují mocnost bodu O_{12} ke kružnici k.

Použitím této úměry se bod X také při obvyklém řešení tohoto případu ú. A. určuje, a to sestrojením čtvrté úměrné úsečky $O_{12}X$.



21



22

β) Podobně v úloze (kpB) na obr. 22, kde při zvolené orientaci dané kružnice k_1 a dané přímky k_2 bylo použito osy podobnosti $o \equiv O_{12}O_3$, byla sestrojena vhodně pomocná kružnice isotomická k bodem N_1, který byl zvolen v druhém krajním bodě průměru kružnice k_1 kolmého na k_2 (první krajní bod tohoto průměru je střed podobnosti O_{12}). Bod inversní N_2 je tedy patou tohoto prodlouženého průměru na přímce k_2. Kružnice k jde opět body N_1, N_2, O_3. Protne osu podobnosti o opět nutně v dalším reálném bodě X, který náleží oběma výsledným cyklům. Platí pak v kružnici k pro mocnost bodu O_{12} opět úměra sub α) napsaná, z níž se při obvyklé konstrukci stanoví opět bod X, jako další bod výsledné kružnice. —