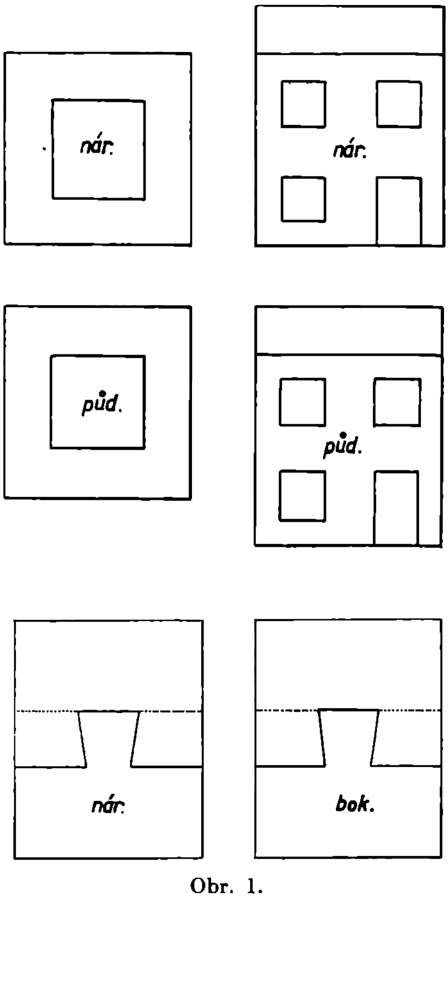
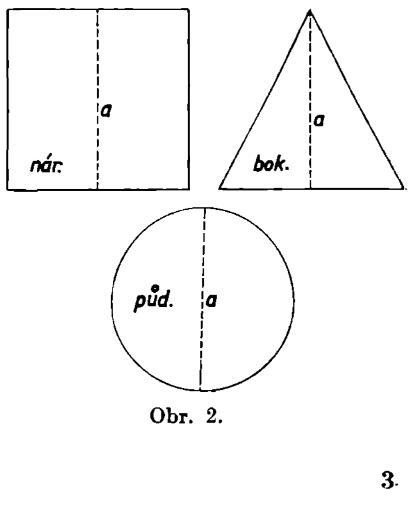
VLASTNOSTI KOSOÚHLÉHO PROMÍTÁNÍ

I. Úkol kosoúhlého promítání.

Plány a projekty stavebních objektů a technických předmětů jsou zpravidla kresleny v kolmém promítání na sdružené průmětny, t. zv. půdorysnu, nárysnu a bokorysnu, z nichž se dají snadno čísti rozměry objektů, podle kterých zkušený odborník dovede plán posoudit a projekt uskutečnit. Ale i sebezkušenějšímu znalci nebývá vždy při složitých objektech zběžným nahlédnutím do takto kresleného rysu patrný celkový vzhled objektu, jak by se mu jevil při přímém pozorování. Že bychom si velmi těžko učinili skutečnou a správnou představu i o zcela jednoduchých útvarech ze dvou sdružených průmětů kolmých, na př. z pů-



Obr. 1.



Obr. 2.

dorysu a nárysu, ukazuje obr. 1 a 1a, kde jsou zobrazeny dva útvary poměrně velmi jednoduché, nebo z nárysu a bokorysu v obr. 1b, který představuje čtyřboký hranol ze dvou různých dřev sestavený, anebo dokonce nebudeme moudří ani z obr. 2, v němž jsou narýsovány vedle sebe tři základní geom. útvary jako půdorys, nárys a bokorys zcela jednoduchého tělesa.

Snažíme se tedy zobraziti útvar i tak, že předložený obraz vyvolá v každém, i necvičeném oku, dojem, jaký by vyvolal samotný originál. Jednou takovou zobrazovací methodou je t. zv. *kosoúhlé promítání*, někdy také nazývané *rovnoběžnou perspektivou.*

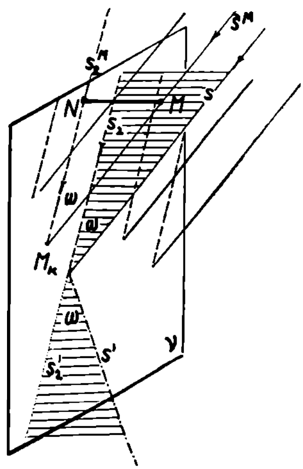
Kolmé promítání není názorné proto, že zobrazované útvary spočívají obyčejně svými podstavnými stěnami právě v rovinách, na něž kolmo promítáme, a hrany a stěny kolmé k těmto podstavám zobrazují se pak jako body a úsečky. Abychom zobrazili hrany opět jako úsečky a obrazce jako obrazce, promítáme je *paprsky rovnoběžnými*, ale takovými, že svírají s průmětnou, na které je zachytíme, *úhel kosý*. Směr těchto paprsků musí býti tedy napřed určen.

Při pozorování (čtení) takového kosoúhlého průmětu musíme si však uvědomit, že zrakový dojem jím vyvolaný se bude tím více shodovati s dojmem skutečným, čím méně se bude odchylka zrakových paprsků s průmětnou lišiti od odchylky paprsků promítacích, které promítaly naše těleso. Pozorujme tedy tyto obrazy z větší vzdálenosti a nestavme je přímo před sebe jako průměty pravoúhlé, ale stranou. Kosoúhlé průměty útvarů budou především sloužiti názornému zobrazení objektu; budou zpravidla sestrojovány jako doplněk pravoúhlých průmětů. Můžeme však v tomto promítání zobrazovati i řešení geometrických úloh prostorových, *úloh polohových*, které se zakládají jen na spojování, protínaní a rovnoběžnosti základních geometrických útvarů, bodů, přímek a rovin nebo *úloh metrických*, t. j. úloh o velikosti úseček, úhlů, vzdáleností a pod. Při těchto úlohách si ukážeme vzájemné vztahy mezi promítáním kolmým a kosoúhlým a použijeme těchto vztahů jak k určení kosoúhlého průmětu z daného objektu, tak obráceně k určení objektu z jeho průmětu kosoúhlého.

2. Směr promítání a průmětna.

Představme si nějakou rovinu, označenou řeckým písmenem ν, na př. nějakou svislou s naším čelem rovnoběžnou stěnu všemi směry prodlouženou. Považujme ji za *průmětnu*, na níž budeme všechny paprsky zachycovat; průměty útvarů budeme ihned vyrýsováním zobrazovat; bude tato průmětna tedy i *nákresnou*.

Zvolme si takový paprsek označený písmenem s, aby s rovinou svíral odchylku ω a požadujme, aby úhel ω byl vždy ostrý, t. j. $\omega < R$ (obr. 3). Takový paprsek nejlépe představuje paprsek sluneční. Představme si nějakou tyčinku k průmětně kolmou, jejíž jeden krajní bod N leží v průmětně, druhý M je mimo ni. Tyčinka osvětlena sluncem vrhá na průmětnu stín, který vychází z bodu N a končí v nějakém bodě, označeném písmenem M_k. Potom spojnice s^M bodů M, M_k je světelný paprsek a považujme jej také za paprsek promítací. Tento paprsek svírá s průmětnou odchylku, kterou určíme jako úhel paprsku s^M se stínem tyčinky NM. Jest zřejmé, že tento úhel bude vždy ostrý, neboť v pravoúhlém trojúhelníku MNM_k nemůže býti žádný z obou dalších úhlů tupý.



Obr. 3.

Stín NM_k je stínem úsečky NM, jest však také, jestliže jej v obou směrech prodloužíme, kolmým průmětem paprsku s^M na průmětnu ν. Označme jej tedy známým způsobem jako s_2^M. Jest tedy $M_kN \equiv s_2^M$ a odchylka paprsku s^M s průmětnou je úhel, který paprsek svírá se svým průmětem s_2^M kolmým k průmětně ν.

Kdyby nám slunce nepomáhalo, musíme si odchylku tímto způsobem vykonstruovat. Na paprsku s^M si zvolíme libovolný bod M, z něho spustíme kolmici (tyčinku) MN, stanovíme v průmětně její patu N a spojíme ji s průsečíkem M_k paprsku s^M s průmětnou ν

(stín). Úhel přímek s^M a $s_2^M \equiv NM_k$ je úhel ω paprsku s^M s rovinou ν. (Obr. 3.)

Všechny paprsky rovnoběžné s paprskem s^M budou s průmětnou svírati stejné odchylky ω. Také jejich kolmé průměty na rovinu ν budou spolu rovnoběžné. Odůvodněte, proč? Souhrn těchto rovnoběžných paprsků nazýváme *osnovou* rovnoběžek. Kterýkoliv z nich je *směrem osnovy* a jím je celá osnova určena. Každým bodem v prostoru prochází jeden paprsek osnovy.

Protože se můžeme po každé přímce pohybovati v dvojím smyslu, označíme šipkou ten smysl, který udává, odkud paprsky přicházejí, a mluvíme o *orientovaném* paprsku promítacím. Potom také jeho kolmý průmět s_2 bude orientován a i ten označíme šipkou. Bude také platit obráceně: Orientováním paprsku s_2 v průmětně, bude také orientován i paprsek s v prostoru (obr. 3). Kdybychom si v průmětně zvolili nějaký orientovaný paprsek s_2 a nad ním sestrojili k průmětně kolmou rovinu, můžeme v ní sestrojiti jen jediný paprsek s, který s průmětnou svírá určitý úhel $\omega < R$ a je s orientovaným paprskem s_2 souhlasně orientován.

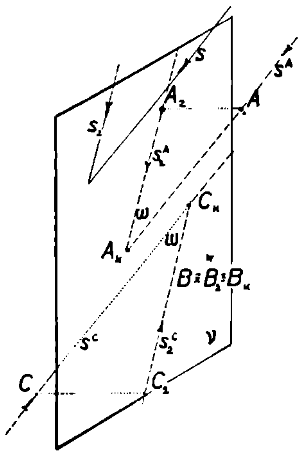
Z obr. 3 je patrné, že kdybychom byli zvolený paprsek s_2' orientovali obráceně, získali bychom v jeho kolmo promítací rovině a v témž poloprostoru roviny ν místo paprsku s jiný orientovaný paprsek s', který by s průmětnou ν svíral také úhel ω a jehož kolmým průmětem je s_2'.

3. Kosoúhlý průmět bodu.

Zvolme si někde v prostoru mimo průmětnu bod A (obr. 4) a veďme jím rovnoběžný paprsek s^A s daným směrem promítání s. Paprsek s^A protne průmětnu v bodě A_k, který budeme nazývat *kosoúhlým průmětem bodu A* na průmětnu ν. Bodu A říkáme také *originál*, značíme jej vždy bez indexu dole, paprsek s^A je *kosoúhle promítací paprsek bodu A* a značíme jej písmem s, v němž napravo nahoře udáme název originálu, tedy s^A. Kosoúhlé průměty budeme vždy označovati tak, že ke jménu originálu připojíme vpravo dole index k, tedy A_k.

Stejně jako bod A promítali bychom kosoúhle i jiné body v prostoru, na př. body M, R, Q ... atd.

Kdyby některý z těchto bodů, na př. bod B, ležel v průmětně ν, pak jeho kosoúhle promítací paprsek s^B protne průmětnu v bodě B_k, který splyne s bodem B v jediný bod; říkáme, že oba body se ztotožňují a píšeme: $B_k \equiv B$. Smluvme si, že kosoúhlé průměty takových bodů nebudeme označovati žádným indexem prostě jen jménem jejich originálu. Budeme-li psáti na př. B, jest to originál, ale je to i jeho kosoúhlý průmět za předpokladu, že bod B leží v průmětně.



Obr. 4.

Body C, D, E, ..., které by se nacházely v opačném poloprostoru průmětny ν, než jsou body $A, M, R, \ldots$, promítáme stejně. Ovšem jejich promítací paprsky s^C, s^D, s^E protnou průmětnu ν v bodech C_k, D_k, E_k ... dříve, než projdou originály. Někdy si myslíme, že jsme vedli takovým bodem stejný paprsek, ale obráceně orientovaný a říkáme mu *paprsek zpětný*.

Protože není v prostoru jiných bodů, můžeme tvrdit:

Kosoúhlým průmětem každého bodu v prostoru je bod v průmětně.

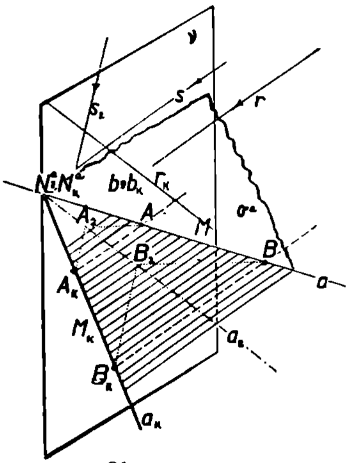
Kosoúhlý průmět bodu nacházejícího se mimo průmětnu, na př. A, sestrojíme prakticky takto: Z bodu A spustíme kolmici na průmětnu a stanovíme její patu A_2, bude to pravoúhlý průmět bodu A na ν. Bodem A_2 sestrojíme rovnoběžku s_2^A s paprskem s_2 a stanovíme průsečík $A_k \equiv (s^A \,.\, s_2^A)$ v rovině určené přímkami s^A, s_2^A a kolmé k průmětně, jak jsme o tom mluvili již v předcházejícím odstavci. K pravoúhlému trojúhelníku AA_2A_k se ještě vrátíme.

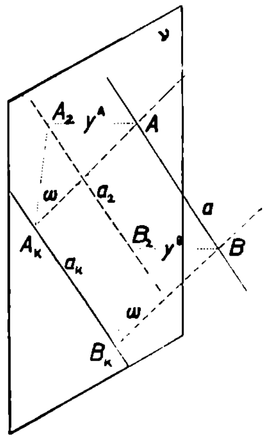
Představme si, že na rovné louce vypouštíme draka D, který je ze strany osvětlen sluncem. Drak vrhá na louku stín D_k. Draka D můžeme považovat za originál „bodu“, stín D_k bude jeho kosoúhlým průmětem, louka je průmětnou ν a sluneční paprsky jsou kosoúhle promítacími paprsky, z nichž ty, které byly drakem zachyceny, po prodloužení jsou kosoúhle promítacími paprsky s^D „bodu“ D. Spadne-li drak na louku, zakryje určité místo a to je jeho stínem.

4. Kosoúhlý průmět přímky.

Zvolme si nyní libovolnou přímku a; tato neleží v průmětně, ale protíná ji v bodě N^a, t. zv. *stopníku* přímky; a nechť dále přímka a není rovnoběžná se směrem promítání (obr. 5). Vedeme-li každým jejím bodem M promítací paprsek s^M, vyplňují všechny tyto paprsky rovinu σ^a k průmětně zpravidla nakloněnou, která je s daným směrem kosoúhlého promítání rovnoběžná. Proč? Nazýváme ji *kosoúhle promítací rovinou přímky a*. Rovina σ^a protne průmětnu ν v přímce a_k, kterou nazýváme *kosoúhlým průmětem přímky a.*

Kdyby *přímka r* byla se *směrem s kosoúhlého promítání rovnoběžná*, splynou s ní všechny kosoúhle promítací paprsky bodů přímky a nevytvoří žádnou rovinu σ^r. *Kosoúhlým průmětem* této přímky *je bod* r_k (obr. 5).


Obr. 5.


Obr. 6.

Kosoúhlý paprsek s^B libovolného bodu B přímky a leží v její kosoúhle promítací rovině σ^a. V ní leží i přímka a_k; jsou tedy kosoúhle promítací paprsek s^B a průmět přímky a, označený a_ν, přímky různoběžné. Jejich průsečík $B_k \equiv (s^B \,.\, a_k)$ je kosoúhlý průmět bodu B. Přímky s^B a s_k nemohou býti rovnoběžné z tohoto důvodu: Přímka s^B svírá s průmětnou úhel $\omega > 0$ a v průmětně nemůže ležet žádná přímka, která by s ní svírala úhel ω, tedy nemůže to býti ani přímka a_k, která v průmětně leží, neboť dvě rovnoběžné přímky musí s rovinou ν svírati stejné odchylky. Tedy platí:

Leží-li bod na přímce, leží jeho kosoúhlý průmět na kosoúhlém průmětu té přímky.

Podle této věty musí tedy přímka a_k procházeti i stopníkem N^a přímky a, neboť platí $N^a \equiv N_k^a$.

Přímku a_k sestrojíme takto: na přímce a zvolíme dva body A a B a sestrojíme jejich kosoúhlé průměty A_k a B_k. Spojnice bodů A_k a B_k je přímka $a_k \equiv A_kB_k$. Známe-li stopník N^a přímky a, stačí zvoliti už jen jeden bod, na př. B, a kosoúhlý průmět přímky a je $a_k \equiv NB_k$. Není-li stopník N^a znám, je tím určena jeho konstrukce jako průsečíku přímky a s jejím kosoúhlým průmětem $a_k \equiv A_kB_k$.

Budiž dána přímka a rovnoběžná s průmětnou ν (obr. 6). Protože všechny body takové přímky jsou od průmětny stejně vzdálené, jsou všechny trojúhelníky AA_2A_k, $BB_2B_k, \ldots$, shodné, neboť jsou pravoúhlé se stejným úhlem ω proti stejným odvěsnám $AA_2 = BB_2 = \ldots$ Jest tedy také $\overline{AA}_k = \overline{BB}_k$ a čtyřúhelník ABB_kA_k je rovnoběžníkem, neboť dvě jeho protilehlé strany jsou rovnoběžné a stejné. Přímka a_k je rovnoběžná s přímkou a.

Kosoúhlý průmět rovnoběžky s průmětnou je s přímkou rovnoběžný. Bude-li přímka d k průmětně kolmá, a to je naše známá tyčinka, je jejím kosoúhlým průmětem spojnice stopníku $N^d \equiv B_2$ s kosoúhlým průmětem B_k jednoho jejího bodu B. Tato přímka $d_k \equiv N^dB_k \equiv$ $\equiv B_2B_k \equiv s_2^B$ je, jak jsme již viděli, pravoúhlým průmětem kosoúhle promítacího paprsku s^B.

Kosoúhlý průmět kolmice k průmětně je rovnoběžný s pravoúhlým průmětem kosoúhlého paprsku.

Jestliže přímka b leží v průmětně (obr. 5), jsou všechny její body M také v průmětně a jejich kosoúhlé průměty M_k s nimi splývají. Jest tedy $b_k \equiv b$; kosoúhlý průmět přímky ležící v průmětu se s ní ztotožňuje.

Protože jiných přímek v prostoru není, můžeme tvrditi:

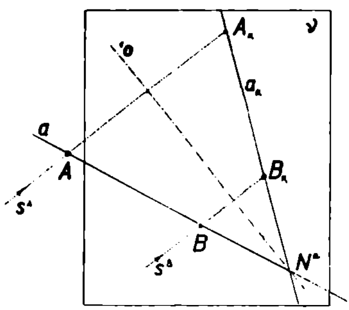
Kosoúhlým průmětem přímky, která není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, je přímka.

Kosoúhlým průmětem přímky rovnoběžné s kosoúhle promítacím paprskem je bod.

Napne-li se provázek, kterým je drak připoután k zemi, takže jej můžeme považovati za přímku, je jeho stín na louce jeho kosoúhlým průmětem. Zřejmě prochází místem (stopníkem), kde motouz je připoután k zemi. Kdybychom po provázku poslali drakovi „psaníčko“ (bod), bude jeho stín se pohybovati po stínu provázku. Spadne-li drak k zemi, zakrývá natažený motouz na zemi svůj stín. Kdyby vanul takový vítr, že by nám drak zakryl slunce, je provázek rovnoběžný se směrem světelných paprsků, stín draka i provázku by padl na nás. Natažené dráty telegrafního nebo elektrického vedení se zemí rovnoběžné vrhají na ní stíny, které jsou s nimi rovnoběžné.

5. Úsečka.

Na přímce a, která není rovnoběžná s promítacím paprskem s, uvažujme úsečku AB a na průmětu a_k její kosoúhlý průmět A_kB_k. Body ABB_kA_k jsou vrcholy t. zv. *promítacího lichoběžníka*, jehož základnami jsou oba kosoúhlé paprsky s^A a s^B bodů A a B a rameny úsečky AB a A_kB_k. Protože tento lichoběžník je obecný, mohou býti tato ramena různá i stejná (obr. 5).



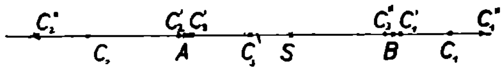
Obr. 7.

Kosoúhlý průmět úsečky je větší, rovný nebo menší než úsečka.

Nejzajímavější je případ, kdy $\overline{A_kB_k} = \overline{AB}$. Nastane, když úsečka je na přímce rovnoběžné s průmětnou, neboť v promítacím lichoběžníku ABB_kA_k (obr. 6) jsou protilehlé strany $AB = A_kB_k$ stejné. Lichoběžník ABB_kA_k se změní na rovnoběžník. Případ, kdy $\overline{A_kB_k} = \overline{AB}$, může také nastati nezávisle na poloze přímky a k průmětně při zvláštní poloze kosoúhle promítacího paprsku. Přihodí se někdy, že kosoúhle promítací paprsek je kolmý k jedné z os ^1o, ^2o úhlu přímek a a a_k. Pak promítací lichoběžník je rovnoramenný a opět $\overline{AB} = \overline{A_kB_k}$. (Obr. 7.)

6. Dělicí poměr.

Polohu nějakého bodu C na přímce o určujeme zpravidla tak, že zvolíme na přímce pevný bod O a stanovíme vzdálenost $\overline{OC}$ bodu C od bodu O, kterou vyjádříme t. zv. měrným číslem, t. j. poměrem úsečky OC k jednotkové úsečce. Jest však výhodné určiti polohu bodu C obecnějším způsobem: Zvolme na přímce *dva pevné body A a B*; jejich vzdálenost nazýváme *základnou* a body AB *body základními* (obr. 8). Poloha bodu C jest také určena poměrem vzdáleností bodu C od základních .bodů A a B, t. j. poměrem $\overline{AC} : \overline{BC}$. Nazýváme jej *dělicím poměrem* bodu C k bodům A a B a značíme $\lambda = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ nebo také (ABC).



Obr. 8.

Ukážeme si, jakých hodnot nabývá tento dělicí poměr, když poloha bodu C se mění a prochází všemi body na přímce o (obr. 8).

1. Bod C budiž v poloze C_1. Pak dělicí poměr $\lambda = \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$ je vždy nějaké kladné číslo větší než jedna, neboť úsečka $AC_1 > BC_1$, t. j. čitatel zlomku λ je větší než jmenovatel. V tomto případě vzniknou dva krajní případy:

a) Bod C přiblíží se na velmi malou vzdálenost do bodu C_1' k bodu B. Potom platí:

$$\lambda_1' = \frac{\overline{AC_1'}}{\overline{BC_1'}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC_1'}}{\overline{BC_1'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1'}} + 1.$$

V tabulce 1. vidíme, jak v případě pro $\overline{AB} = 3j$ se mění λ_1', když C_1' se blíží k bodu B.

Z ní soudíme, že splyne-li bod C_1' s bodem B, bude číslo λ_1' větší než kterékoliv nám známé číslo.

b) Druhá krajní poloha nastane, projde-li bod C takovou polohou C_1'' na přímce o, že bychom museli list, na kterém rýsujeme, velmi

Tab. 1.

$\overline{AB} = 3j.$

$\overline{BC_1'}$	$\overline{AB} : \overline{BC_1'}$	λ_1'
$0{,}1\,j$	$\dfrac{3}{0{,}1} = 30$	31
$0{,}01\,j$	$\dfrac{3}{0{,}01} = 300$	301
$0{,}001\,j$	$\dfrac{3}{0{,}001} = 3000$	3001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$0{,}000001\,j$	$\dfrac{3}{0{,}000001} = 3000000$	3000001
$\vdots$	$\vdots$	

daleko prodloužit. Na obr. 8 je tato poloha vyznačena šipkou. V tabulce 2 jsou hodnoty pro $AB = 3j$, když C_1'' se neomezeně vzdaluje:

Tab. 2.

$\overline{AB} = 3j.$

$\overline{BC_1''}$	$\overline{AB} : \overline{BC_1''}$	λ_1''
$10\,j$	$\dfrac{3}{10} = 0{,}3$	1,3
$100\,j$	$\dfrac{3}{100} = 0{,}03$	1,03
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1000000\,j$	$\dfrac{3}{1000000} = 0{,}000003$	1,000003
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Z hodnot λ_1'' usuzujeme, že jestliže bod C_1'' se neomezeně po přímce vzdaluje, jeho dělicí poměr se blíží k *jedné. Dělicí poměry všech bodů C_1 napravo od základny jsou větší než jedna.*

2. Bod C nechť prochází polohami C_2 nalevo základny. I platí opět:

$$\lambda_2 = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{-\overline{C_2A}}{-\overline{C_2B}} = \frac{\overline{C_2B} - \overline{AB}}{\overline{C_2B}} = 1 - \frac{\overline{AB}}{\overline{C_2B}}$$

a protože $\overline{AB}$ je vždy menší než $\overline{C_2B}$, bude zlomek $\frac{\overline{AB}}{\overline{C_2B}}$ vždy menší než jedna a λ_2 bude kladné číslo také menší než jedna. Nastanou i zde dva krajní případy jako v případě prvém. Prvně C_2', když C_2 se blíží k bodu A, po druhé C_2'', když C_2 se neomezeně vzdaluje. Sestavením příslušných tabulek došli bychom k úsudku, že v tom případě λ_2' se blíží k nule a λ_2'' k číslu jedna, ale tak, že je stále menší než jedna. *Dělicí poměry všech bodů C_2 nalevo základny jsou kladná čísla menší než jedna.*

Z obou případů vychází:

Každému bodu na dané přímce, který je vně dané základny, přísluší kladný dělicí poměr.

3. Zbývá uvážit ještě body C_3 uvnitř úsečky $\overline{AB}$. Dělicí poměr bodu C_3 jest opět

$$\lambda_3 = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{BC_3}} < O,$$

neboť o úsečce $\overline{AC_3}$ v čitateli předpokládáme, že je kladného smyslu $\overrightarrow{AC_3}$, kdežto úsečka $\overline{BC_3}$ v jmenovateli je potom smyslu obráceného, t. j. záporného. Poměr dvou relativních čísel nesouhlasných je záporný. Oba krajní případy a), kdy C_3' se blíží k bodu A a b), kdy C_3'' se blíží k bodu B, poskytnou po sestavení tabulek výsledek, že a) λ'_3 se blíží k nule, ale je stále záporné, a b) λ_3'' klesá pod všechna známá čísla záporná. Dělicí poměr bodu C_3^*, když tento prochází středem S úsečky

$$\overline{AB} \text{ je } \lambda_3^* = \frac{\overline{AS}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AS}}{-\overline{AS}} = -1.$$

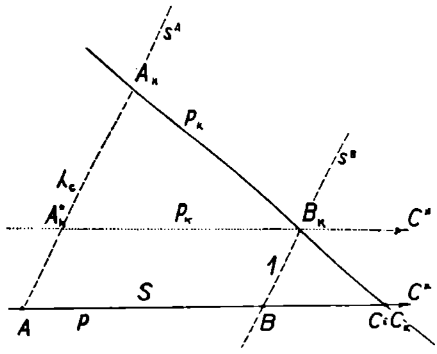
Z toho všeho plyne:

Každému bodu na dané přímce, který je uvnitř dané základny, přísluší záporný dělicí poměr.

III. Dokážeme si dále větu:

Každému bodu na přímce přísluší k určitým základním bodům jediný dělicí poměr a každému dělicímu poměru jediný bod.

Veďme v obr. 9 body A a B na přímce p dvě rovnoběžky s^A a s^B a na s^B vynesme od bodu B délkovou jednotku $\overline{BB_k}$. Spojnice $B_kC \equiv \equiv p_k$ protne rovnoběžku s^A v bodě A_k. Délka úsečky $\overline{AA_k}$ je dělicí poměr λ_C bodu C. Vyplývá to z podobných trojúhelníků $\triangle ACA_k \sim \triangle BCB_k$, v nichž platí: $\overline{AA_k} : 1 = \overline{AC} : \overline{BC}$, čili $\overline{AA_k} = = \lambda_C$. Prvá část věty je dokázána, neboť všechny spojnice bodů přímky p (až na jediný, t. j. bod B) s bodem B_k protnou přímku s^a a bod A_k a tedy i úsečka $\overline{AA_k}$ vždy existují. Jediná spojnice BB_k přímku s^A neprotne; je s ní rovnoběžná. I v tom případě říkáme, že bod A_k^* jest vždy za každým dosažitelným bodem a že hodnota dělicího poměru $\overline{AA_k^*}$ je vždy větší než jakékoliv známé číslo.



Obr. 9.

Obráceným postupem lze na s^A vynésti dělicí poměr λ_C od bodu A, koncový bod A_k spojiti s bodem B_k a přímka $p \equiv A_kB_k$ protne přímku p v jediném bodě C. Je-li $\lambda^* = 1$, pak $\overline{AA_k^*} = \overline{BB_k}$ a přímka p_k je s přímkou rovnoběžná; říkáme opět, že bod C^* leží za kterýmkoliv dosažitelným bodem, a nazýváme jej také *nevlastním bodem přímky p.*

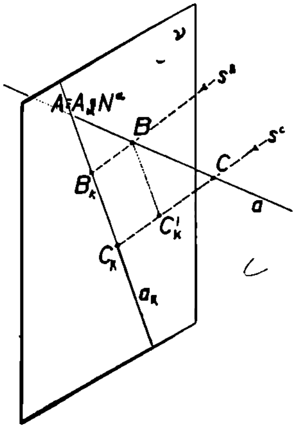
IV. Zvolme si na přímce a tři body A, B, C (obr. 10), při čemž bod A zvolme ve stopníku N^a přímky. Kosoúhlým průmětem přímky a a jejích bodů A, B, C jest přímka a_k a na ní ležící body A_k, B_k, C_k, při čemž $A_k \equiv A$. Z podobných trojúhelníků $\triangle ACC_k \sim \triangle BCC_k'$ plyne $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A_kC_k}}{\overline{B_kC_k}}$, t. j. $\lambda_C = \lambda_{C_k}$, což je pro kosoúhlé promítání velmi důležitá věta:

Dělicí poměr bodu na přímce se kosoúhlým promítáním nemění.

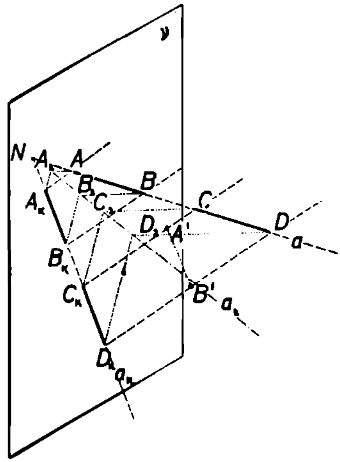
Bude-li tedy na př. $\lambda_C = -1$, bude také $\lambda_{C_k} = -1$, čili:

Kosoúhlým průmětem středu každé úsečky je střed jejího kosoúhlého průmětu.

Uvažujme na přímce a dvě stejné úsečky $\overline{AB} = \overline{CD}$ (obr. 11). Jejich kosoúhlými průměty jsou úsečky $\overline{A_kB_k}$ a $\overline{C_kD_k}$ na přímce a_k.



Obr. 10.



Obr. 11.

I platí:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_kC_k}}{\overline{B_kC_k}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_kD_k}}{\overline{B_kD_k}},$$

čili

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_kB_k} + \overline{B_kC_k}}{\overline{B_kC_k}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_kB_k} + \overline{B_kD_k}}{\overline{B_kD_k}},$$

čili

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kC_k}} + 1 \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} + 1 = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kD_k}} + 1$$

a také

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kC_k}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kD_k}}.$$

Dále obrácením zlomků:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kC_k}}{\overline{A_kB_k}} \text{ (I)} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kD_k}}{\overline{A_kB_k}} \text{ (II)}$$

a z rovnice (II)

$$\frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kC_k} + \overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}},$$

čili

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kC_k}}{\overline{A_kB_k}} + \frac{\overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}}.$$

Odečteme-li od této rovnice rovnici I, bude:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}},$$

jejíž levá strana $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 1$, neboť $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Jest tedy

$$1 = \frac{\overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}},$$

z čehož

$$\overline{A_kB_k} = \overline{C_kD_k}.$$

Kosoúhlé průměty stejných úseček na jedné přímce ležících jsou stejné.

V. Uvažujme dvě různé úsečky $\overline{BC}$ a $\overline{B_kC_k}$ na daných přímkách a a a_k protínajících se v bodě $A \equiv A_k$. Úsečka $\overline{BC}$ buď na přímce p pevně položena (obr. 10), úsečka $\overline{B_kC_k}$ nikoliv. Úsečku $\overline{B_kC_k}$ můžeme jen tenkrát považovat za kosoúhlý průmět úsečky $\overline{BC}$ na přímku a_k, budou-li $s^B \equiv BB_k$ a $s^C \equiv CC_k$ spolu rovnoběžné. To však nastane tehdy, budou-li trojúhelníky $\triangle ABB_k \sim \triangle ACC_k$ podobné, t. j. bude-li platit $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A_kB_k} : \overline{A_kC_k}$. O takové poloze obou úseček $\overline{AB}$ a $\overline{A_kB_k}$ říkáme, že je *perspektivní*.

Jsou-li dvě úsečky ležící na dvou různoběžkách v poloze perspektivní, jsou dělicí poměry průsečíků obou různoběžek ke koncovým bodům obou úseček stejné!

Cvičení:

1. Na přímce si zvolte tři body A, B, C a stanovte dělicí poměry (ABC), (ACB), (BAC), (BCA)!

2. Jaký dělicí poměr má bod, který rozdělí úsečku na jednu pětinu a čtyři pětiny?

3. Dokažte, že jestliže $(ABC) = (ABC')$, že $C \equiv C'$!

4. Na přímce jsou dány tři body A, B, C. Stanovte bod D, aby $\lambda_D = \lambda_C + 1$! Stanovte bod E, aby $\lambda_E = -\lambda_C$!

5. Stanovte (ACB), když $(ABC) = a$!

6. Kolik dělicích poměrů určují tři body A, B, C? Stanovte je, je-li jeden z nich určen!

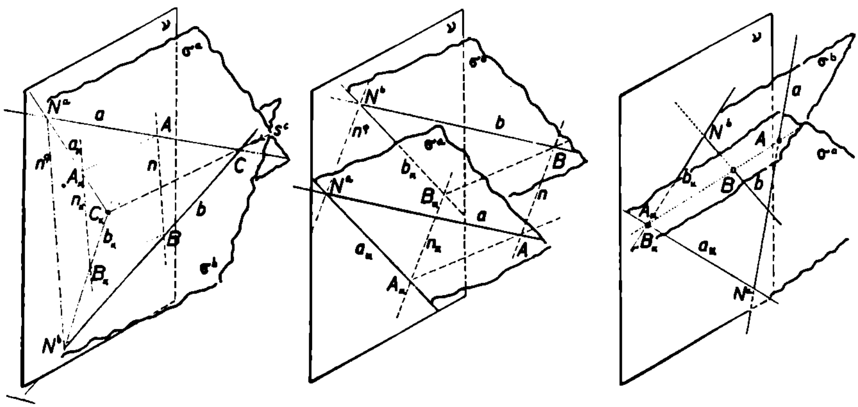
7. V rovnoběžníku $ABCD$ je sestrojena úhlopříčka $e \equiv \overrightarrow{AD}$ a na ní je promítnut z bodu B střed S strany $\overline{CD}$. Dokažte, že dělicí poměr tohoto průmětu na e k bodům A a D rovná se -2!

7. Dvě přímky.

Kosoúhlým průmětem dvou rovnoběžek neležících v jedné kosoúhlé promítací rovině jsou dvě rovnoběžky. (Obr. 12b.)

Kosoúhle promítací roviny σ^a a σ^b obou přímek a a b jsou spolu rovnoběžné, neboť každá z nich obsahuje dvě různoběžky (a a s) rovnoběžné s rovinou druhou. Průmětna je protne v rovnoběžkách a_k a b_k.

Kosoúhlým průmětem dvou různoběžek, které neleží v jedné kosoúhle promítací rovině, jsou dvě různoběžky. (Obr. 12a.)



Obr. 12. *a)* *b)* *c)*

Průsečnice obou jejich kosoúhle promítacích rovin σ^a a σ^b je kosoúhle promítacím paprskem s^C průsečíku C obou různoběžek a a b a průmětna protne obě roviny σ^a a σ^b ve dvou různoběžkách a_k a b_k, jichž průsečíkem C_k je průsečík paprsku s^C s průmětnou.

Leží-li obě rovnoběžky nebo různoběžky v jedné kosoúhle promítací rovině, jest jejich kosoúhlým průmětem jediná přímka.

Vedeme-li každým bodem A jedné takové přímky, na př. a, kosoúhle promítací paprsek s^A, leží ve společné promítací rovině $\sigma^a \equiv \equiv \sigma^b$ obou přímek a protne tedy přímku b v bodě B. Jest tedy i promítacím paprskem bodu B a jeho průsečík $A_k \equiv B_k$ s průmětnou je kos. průmětem bodu A přímky a i bodu B přímky b. Průměty a_k a b_k obou přímek tedy splynou.

Poznámka: 1. Abychom z takového průmětu $a_k \equiv b_k$ zjistili, jsou-li obě přímky rovnoběžné či nikoliv, musíme znát průměty dvou bodů jedné a dvou bodů druhé přímky.

2. Je-li jedna ze dvou různoběžek rovnoběžná se světelným paprskem, je jejím průmětem jen bod ležící na průmětu druhé přímky. Jsou-li obě rovnoběžky rovnoběžné s kosoúhle promítacím paprskem, jsou jejich kosoúhlým průmětem dva body.

Z věty o rovnoběžkách vyplývají další.

Kosoúhlým průmětem rovnoběžníka, jehož rovina není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, je opět rovnoběžník.

Víme, že kosoúhlým průmětem dvou párů rovnoběžek jsou opět dva páry rovnoběžek.

Stejné úsečky na rovnoběžkách mají stejné kosoúhlé průměty.

Koncové body obou úseček jsou vrcholy rovnoběžníka, jehož kosoúhlým průmětem je opět kosoúhelník, jehož protilehlé strany jsou stejné.

Kosoúhlé průměty dvou mimoběžek, z nichž žádná není rovnoběžná s promítacím paprskem, jsou dvě různoběžky nebo rovnoběžky.

Jsou-li mimoběžky a a b v takové poloze, že rovina s nimi rovnoběžná obsahuje také promítací paprsek, jsou kosoúhlým průmětem obou přímek dvě rovnoběžky.

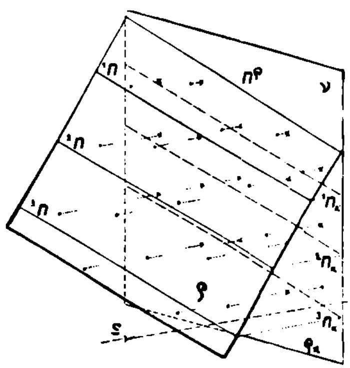
Není-li takové roviny, jsou kosoúhlým průmětem obou mimoběžek (obr. 12c) dvě různoběžky, jichž průsečík $A_k \equiv (a_k \,.\, b_k) \equiv B_k$ je kosoúhlým průmětem dvou bodů A a B, ležících na společném kosoúhle promítacím paprsku $s^A \equiv s^B$, z nichž A je na přímce a a B na přímce b.

Poznámka: Je-li jedna z mimoběžek rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, jest kosoúhlým průmětem dvou mimoběžek přímka a bod mimo ni ležící.

8. Rovina.

Uvažujme rovinu ϱ, která není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem. Každým jejím bodem M prochází jeden kosoúhle promítací paprsek s^M a všechny vyplňují osnovu paprsků. Průmětna protne každý z nich v jednom bodě, na příklad paprsek s^M v bodě M_k, který je kosoúhlým průmětem bodu M. Souhrn všech těchto bodů M_k je kosoúhlý průmět ϱ_k roviny ϱ, ale protože body M_k vyplní celou průmětnu, *je kosoúhlým průmětem roviny ϱ celá průmětna* (obr. 13). Při zobrazení roviny promítáme vždy jen určující prvky roviny, na př. tři její body, které neleží na jedné přímce, nebo dvě její různoběžky, jindy dvě rovnoběžky a pod. Z ostatních bodů a přímek roviny zobrazíme také ty, jichž je pro uložené konstrukce v rovině ϱ potřeba. Bude na př. v rovině ϱ zobraziti rovnostranný trojúhelník. Promítneme kosoúhle tedy jak jeho vrcholy i jeho strany.

Z přímek roviny ϱ je důležitá i její průsečnice s průmětnou, t. zv. *stopa n^ϱ roviny*. Její kosoúhlý průmět je s ní totožný $n^\varrho \equiv n_k^\varrho$. Toto dvojí označení, ačkoliv by bylo naprosto správné, nepoužíváme, píšeme jen n^ϱ. Jiné důležité přímky roviny jsou t. zv. *hlavní přímky*. To jsou takové přímky ležící v rovině, které jsou s průmětnou rovnoběžné. Kosoúhlý průmět jedné takové přímky, na př. ${}^3n$, je přímka ${}^3n_k$ a je s přímkou n rovnoběžná. Každá úsečka, která leží na hlavní přímce, promítá se kosoúhle do průmětny ve skutečné velikosti.



Obr. 13.

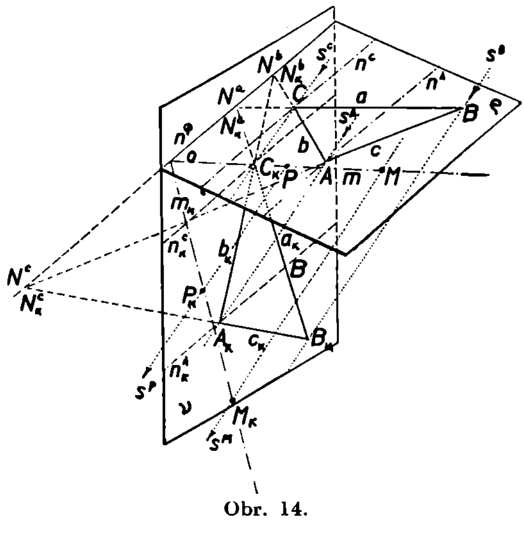
Kosoúhlým průmětem roviny rovnoběžné s kosoúhle promítacím paprskem a všech útvarů v takové rovině se nalézajícím je přímka.

Taková rovina jest vlastně kosoúhle promítací rovinou.

Abychom se naučili promítati útvary ležící v rovině, jest nutno porozuměti vztahu mezi útvarem v dané rovině a jeho kosoúhlým průmětem v průmětně, který se právě při kosoúhlém promítání vytvoří a který nazýváme *perspektivní afinitou.*

9. Perspektivní afinita.

I. Protneme-li dvě různoběžné roviny ϱ a ν osnovou rovnoběžných paprsků se směrem s, pak každý z nich, na př. s^M protne rovinu ϱ v bodě M a průmětnu ν v bodě M_k (obr. 14). Obrátíme-li smysl promítacích paprsků, lze bod M_k považovati za originál, rovinu ϱ za průmětnu a bod M za průmět bodu M_k. Říkáme, že jsme tímto dvojím



Obr. 14.

kosoúhlým promítáním body M a M_k *zpříbuznili*, nebo také *sdružili* anebo, že jsme *jeden k druhému přiřadili*. Tak lze k jinému bodu roviny ϱ, na př. bodu P, přiřaditi podobně bod P_k, přímce $m \equiv MP$ roviny ϱ přiřadíme přímku $m_k \equiv M_kP_k$ roviny ν, trojúhelníku ABC roviny ϱ trojúhelník $A_kB_kC_k$ v rovině ν a pod.

Toto přiřazení útvarů roviny ϱ k útvarům roviny ν bylo způsobeno kosoúhlým promítáním. Lze však dokázati, že stejné přiřazení útvarů roviny ϱ k útvarům roviny ν vznikne, budou-li body a přímky obou rovin splňovati tyto tři základní podmínky:

1. *Všechny body na průsečnici obou rovin jsou samy k sobě přiřazeny.* Píšeme $N \equiv N_k$ a body nazýváme samodružné.

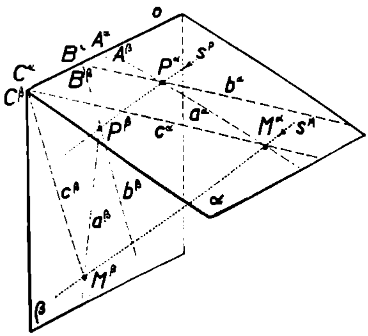
2. *Proběhne-li bod v jedné rovině jakoukoliv přímku, proběhne jemu přiřazený bod v rovině druhé také přímku.*

3. *Proběhnou-li dva body jedné roviny po dvou rovnoběžkách, proběhnou k nim přiřazené body v rovině druhé také po dvou rovnoběžkách.*

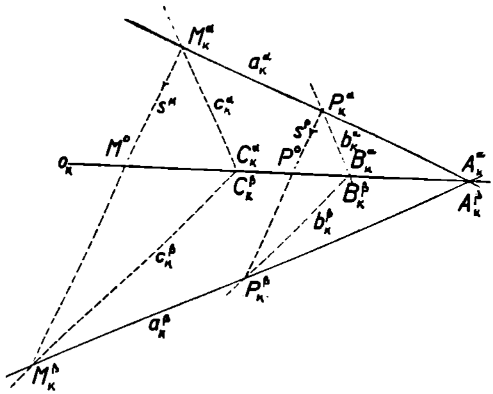
Tyto tři podmínky vyplývají z kosoúhlého promítání bodů a přímky v průmětně, bodů, přímek a rovnoběžek mimo průmětnu ležících. Jsou nutné a jsou i dostačující (jak ukážeme) pro sestrojení útvaru v rovině ν jako kosoúhlého průmětu útvaru roviny ϱ.

Uvažujme opět dvě roviny a označme je tentokrát α a β (abychom přiřazení nepovažovali za kosoúhlé promítání), které se protnou v přímce o (obr. 15). *Zvolme bod P^α v rovině α a přiřaďme mu nějaký bod P^β v rovině β* zcela náhodně zvolený. K dalšímu bodu M^α roviny α vyhledáme přiřazený bod M^β roviny β takto: Vedeme přímku $a^\alpha \equiv \equiv P^\alpha M^\alpha$ a stanovíme její průsečík $A^\alpha \equiv A^\beta$ s průsečnicí o. Bod $A^\alpha \equiv \equiv A^\beta$ je na průsečnici o a je tedy podle podmínky 1 sám k sobě přiřazen. Spojnice $A^\beta P^\beta$ v rovině β je přímka a^β přiřazená ku přímce a^α roviny α. Na ní musí ležeti bod M^β, neboť, proběhne-li bod M^α přímku a^α v rovině α, proběhne přiřazený bod M^β také přímku a^β roviny β (ad 2). Bodem P^α roviny α vedeme v rovině α přímku rozdílnou od a^α a stanovíme její průsečík $B^\alpha \equiv B^\beta$ s průsečnicí o a sestrojíme k ní přiřazenou přímku $b^\beta \equiv B^\beta P^\beta$, která je také rozdílná od a^β, neboť body A^β a B^β jsou dva různé body. Bodem M^α vedená rovnoběžka c^α s přímkou b^α protne přímku o v bodě $C^\alpha \equiv C^\beta$. Jím jde přiřazená přímka c^β roviny β rovnoběžná s přímkou b^β, neboť rovnoběžkám roviny α jsou přiřazeny rovnoběžky roviny β (ad 3). Průsečík M^β přímek a^β a c^β je přiřazený bod roviny β k bodu $M^\alpha \equiv a^\alpha \,.\, c^\alpha$ roviny α. K jeho sestrojení jsme nepotřebovali promítacích paprsků $s^P \equiv P^\alpha P^\beta \| s^M \equiv M^\alpha M^\beta$ a přece bod M^β je tentýž bod, který bychom byli obdrželi, kdybychom byli bod M^α kosoúhle promítli na rovinu β ve směru $P^\alpha P^\beta$. Jsou totiž oběma páry rovnoběžek (b^α, b^β) a (c^α, c^β) určeny dvě rovnoběžné roviny σ^a a σ^b a ty protnou rovinu $\sigma^\alpha \equiv (a^\alpha, a^\beta)$ ve dvou rovnoběžkách $P^\alpha P^\beta \| M^\alpha M^\beta$.

Toto přiřazení bodů a přímek ve dvou různoběžných rovinách nazýváme *perspektivní afinitou* (od lat. afinitas, t. j. příbuznost), průsečnici *o osou afinity*, promítací paprsky *afinními paprsky* a přiřazené útvary, útvary *perspektivně afinními*.



Obr. 15.



Obr. 16.

Jako důsledek uvedeného přiřazení podle podmínek 1., 2., 3. se jeví:

1. *Přiřazené přímky se protnou na ose afinity.*

Pohybuje-li se bod P^α po přímce a^α, projde také průsečíkem $A^\alpha \equiv A^\beta$, který je sám k sobě přiřazen, a přiřazený bod P^β bude se pohybovati také po přímce a^β a to tak, že projde-li bod P^α bodem A^α, projde P^β bodem A^β, tedy a^α protíná a^β právě na přímce o.

2. *Přiřazené body leží na rovnoběžných afinních paprscích.*

Důkaz tohoto tvrzení byl již podán.

Z těchto důsledků vyplývá další:

3. *V perspektivní afinitě dělicí poměry na přiřazených přímkách jsou stejné*, neboť přiřazené přímky jsou proťaty afinními paprsky rovnoběžnými ve dvojicích přiřazených bodů, a rovnoběžným promítáním se dělicí poměr nemění.

II. Kdybychom promítli kosoúhle obě roviny α i β na nějakou průmětnu ν, budou v ní ležeti průměty bodů M^α_k a přímek m^α_k a také průměty přiřazených bodů M^{β}_{k} a přímek m^{β}_{k}. Rovina ν bude jakousi dvojitou rovinou (obr. 16). Kosoúhlým průmětem přímek a^{α} . a^{β} protínajících se na ose o v bodě $A^{\alpha} \equiv A^{\beta}$ budou dvě přímky a^{α}_{k} . a^{β}_{k} protínající se na průmětě o_k osy o v bodě $A^{\alpha}_{k} \equiv A^{\beta}_{k}$. Podobně kosoúhlé průměty rovnoběžek b^{α}, c^{α} a b^{β}, c^{β} dají dva páry rovnoběžek b^{α}_{k}, c^{α}_{k} a b^{β}_{k}, c^{β}_{k} v průmětně ν. Označme v dalším značkou (α) nějaký *útvar v rovině* α. Útvarům $(\alpha)_k$ v průmětně budou přiřazeny v (dvojité) rovině ν útvary $(\beta)_k$ podle uvedených základních podmínek 1., 2., 3. Také tyto útvary v jedné dvojité rovině ležící jsou *perspektivně afinními.*

Kosoúhlé průměty dvou perspektivně afinních útvarů jsou zase perspektivně afinní.

III. Viděli jsme již v kapitole I, že tato příbuznost je určena, známe-li osu afinity o a dvojici přiřazených bodů P^{α} a P^{β}. Rovina α jest určena osou o a bodem P^{α}, rovina β osou o a bodem P^{β}. Spojnice $P^{\alpha}P^{\beta}$ je směr kosoúhlého promítání a tím je stanoven kosoúhlý průmět jakéhokoliv útvaru v rovině α na rovinu β. Jiný důkaz byl vlastně podán v konstrukci bodu M^{β}, přiřazeného ku M^{α}. Také v rovině ν je určena afinita osou afinity o_k a párem sdružených bodů P^{α}_{k} a P^{β}_{k}. Sestrojení bodu M^{β} se provede stejným způsobem, jako bylo vyloženo v prostoru. Vždyť i celá konstrukce v prostoru byla rozdělena do dvou rovinných konstrukcí, byla tedy planimetrická.

IV. Poměr úseček $\overline{P^{\alpha}_{k}P^{o}} : \overline{P^{\beta}_{k}P^{o}} = \overline{M^{\alpha}_{k}M^{o}} : \overline{M^{\beta}_{k}M^{o}} = \ldots = k$ jest stálý pro každou dvojici bodů P^{α}_{k} a P^{β}_{k}, což vyplývá z úměrnosti úseček v obr. 16, kde platí:

$$\overline{P^{\alpha}_{k}P^{o}} : \overline{M^{\alpha}_{k}M^{o}} = \overline{A^{\alpha}_{k}P^{o}} : \overline{A^{\alpha}_{k}M^{o}} = \overline{A^{\beta}_{k}P^{o}} : \overline{A^{\beta}_{k}M^{o}} = \overline{P^{\beta}_{k}P^{o}} : \overline{M^{\beta}_{k}M^{o}}$$

čili

$$\overline{P^{\alpha}_{k}P^{o}} : \overline{P^{\beta}_{k}P^{o}} = \overline{M^{\alpha}_{k}M^{o}} : \overline{M^{\beta}_{k}M^{o}}.$$

Tento poměr se nazývá *charakteristikou* perspektivní afinity, značíme jej k a lze jej vyjádřit i jako poměr vzdáleností $v^{\alpha}_{k} : v^{\beta}_{k}$ perspektivně afinních bodů od osy afinity, neboť v podobných trojúhelnících $\triangle M^{\alpha}_{k}M^{o}Q \sim \triangle M^{\beta}_{k}M^{o}R$ platí: $\overline{M^{\alpha}_{k}M^{o}} : \overline{M^{\beta}_{k}M^{o}} = v^{\alpha}_{k} : v^{\beta}_{k} = k$.

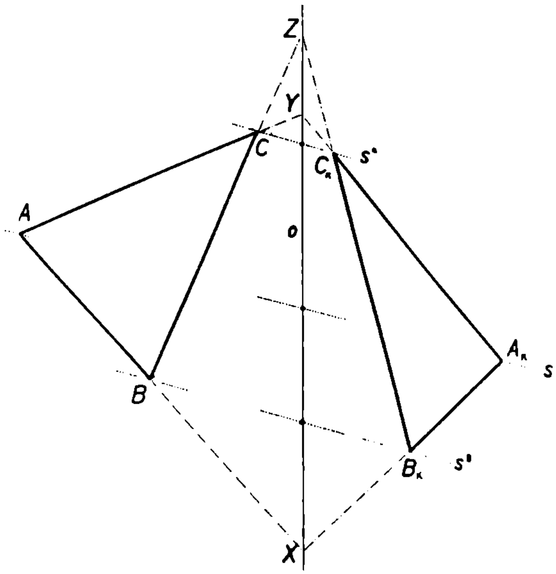
V obr. 17 jsou dva perspektivně afinní trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_k B_k C_k$ s charakteristikou afinity $k = v^a : v_k^a = v^b : v_k^b = v^c : v_k^c$. *Označme obsah* $\triangle ABC$ *značkou* $P(ABC)$. Trojúhelníky XYA a XYA_k mají společnou základnu. Protože jejich obsahy jsou $P(XYA) = \frac{1}{2}\overline{XY} \,.\, v^a$ a, $P(XYA_k) = \frac{1}{2}\overline{XY} \,.\, v_k^a$, platí:

$$P(XYA) : P(XYA_k) = v^a : v_k^a,$$

čili

$$P(XYA) = \frac{v^a}{v_k^a} \,.\, P(XYA_k),$$

kde $\frac{v^a}{v_k^a} = k$, t. j. charakteristice perspektivní afinity.



Obr. 17.

Totéž platí pro trojúhelníky s vrcholy C a C_k resp. B a B_k a protilehlými stranami na ose o. Potom lze psáti

$$P(ABC) = P(XYA) + P(YZC) - P(ZXB)$$

a podobně

$$P(A_k B_k C_k) = P(XYA_k) + P(YZC_k) - P(ZXB_k).$$

Jest tedy

$$P(ABC) = k\,.\,P(XYA_k) + k(YZC_k) - kP(ZXB_k) = kP(A_kB_kC_k),$$

čili

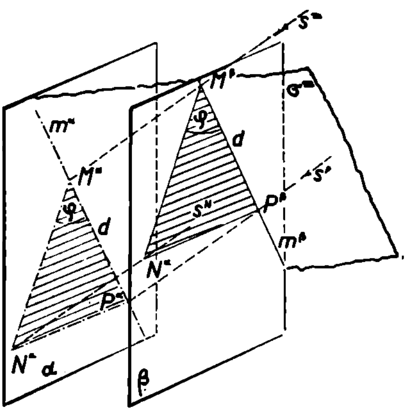
$$\frac{P(ABC)}{P(A_kB_kC_k)} = k.$$

Poměr obsahů dvou perspektivně afinních trojúhelníků (obrazců) je stálý a rovná se charakteristice perspektivní afinity.

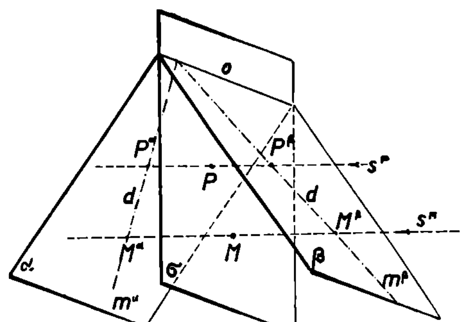
Jestliže promítneme kosoúhle oba perspektivně afinní útvary (α) a (β) na rovinu γ tak, aby kosoúhlý průmět O_k osy afinity o rozděloval úsečku $\overline{M_k^\alpha M_k^\beta}$, je $k < 0$ a perspektivní afinita je *protisměrná*, padne-li o_k po promítnutí mimo úsečku $\overline{M_k^\alpha M_k^\beta}$, jest $k > 0$ a perspektivní afinita je stejnosměrná. Pro $k = 1$ jsou $(\alpha)_k$ a $(\beta)_k$ *totožné,**) pro $k = -1$ jsou *afinně symetrické.*

V. 1. Jsou-li roviny α a β rovnoběžné, jest osou afinity nevlastní přímka obou rovin a nastane zvláštní případ perspektivní afinity, t. zv. *translace* čili *posunutí* (obr. 18). Přiřazené přímky m^α a m^β jsou rovnoběžné, neboť kosoúhle promítací rovina σ^m protne obě roviny α a β v rovnoběžkách. Přiřazené úsečky $\overline{P^\alpha M^\alpha} = \overline{P^\beta M^\beta}$ a úhly $\varphi^\alpha = \varphi^\beta$ jsou stejné. *Útvary* (α) a (β) *jsou shodné.*

Po kosoúhlém promítnutí těchto shodných útvarů (α) a (β) na rovinu γ jsou útvary $(\alpha)_k$ a $(\beta)_k$ v *rovinné translaci* s vlastnostmi výše uvedenými. Úsečku $P_k^\alpha P_k^\beta$ nazýváme *amplitudou translace* (μ).



Obr. 18.



Obr. 19.

---

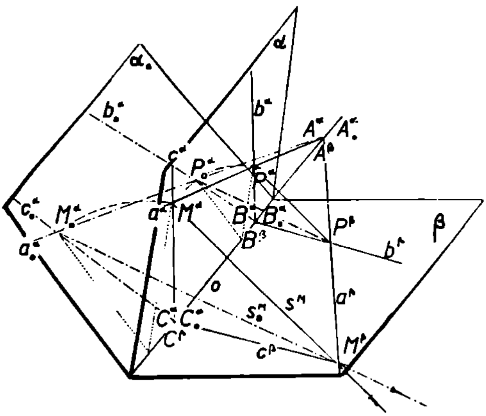
*) Případ, kdy paprsek $M_k^\alpha\ M_k^\beta$ je rovnoběžný s osou O_k, se nazývá *elace*. Útvary, které jsou v elaci, jsou *rovnoploché.*

2. Jiný zvláštní případ perspektivní afinity nastane, když paprsek afinity bude kolmý k jedné z obou rovin souměrnosti ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ rovin α a β. Jest to t. zv. *zrcadlení* podle roviny σ. Také při něm přiřazené úsečky $\overline{M^\alpha P^\alpha} = \overline{M^\beta P^\beta}$ a přiřazené úhly $\varphi^\alpha = \varphi^\beta$; útvary $(\alpha) \cong (\beta)$ jsou shodné (obr. 19). Případ podobný jsme zkoumali, když jsme pojednávali o průmětu úsečky.

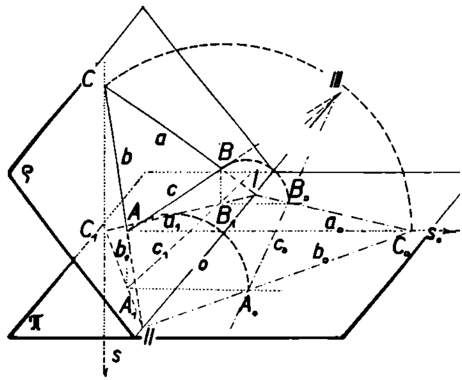
Promítneme-li je kosoúhlým paprskem z rovnoběžným s rovinou ${}^i\sigma$ na rovinu ν rovnoběžnou se směrem s, jsou průměty $(\alpha)_k$ a $(\beta)_k$ souměrně sdružené podle osy o_k. Útvary $(\alpha)_k \cong (\beta)_k$ jsou shodné opačného smyslu.

3. Rovinnou perspektivní afinitu, při níž paprsek afinity je kolmý k ose afinity, nazýváme pravoúhlou.

VI. Protože sestrojení přiřazeného bodu M^β roviny β k danému bodu M^α roviny α jest úloha ryze planimetrická prováděná v rovinách α a β, nezmění se po otočení roviny α okolo osy afinity do polohy α_0 konstrukce v poloze α_0. Jsou tedy také útvary v rovinách α_0 a β perspektivně afinní. Jediné paprsek afinity s^M přejde do polohy s_0^M (obr. 20) a opisuje při tomto otáčení roviny α plochu kuželovou s vrcholem v bodě M^β roviny β, kterým prochází.



Obr. 20.



Obr. 21.

Otáčením jednoho perspektivně afinního útvaru okolo osy afinity zůstane útvar s útvarem pevným v perspektivní afinitě.

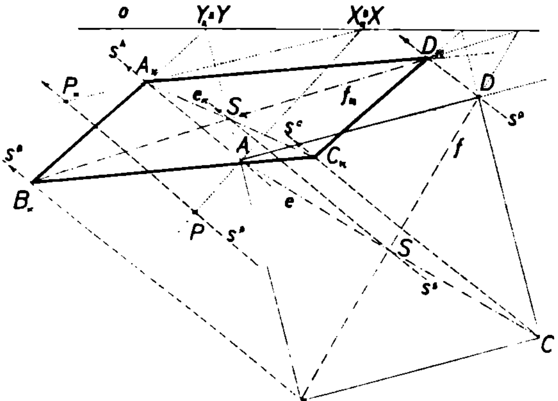
Tato věta je zvláště důležitou pro konstrukce v prostoru, zvláště pro kosoúhlé promítání rovinných útvarů. Útvar (ϱ) v rovině ϱ otočíme okolo osy afinity až do průmětny ν do polohy $(\varrho)_0$, v této dvojité rovině pracujeme z útvaru $(\varrho)_0$ afinitou útvar $(\varrho)_1$ se všemi potřebnými konstrukcemi. (Obr. 21.)

Jest tedy kosoúhlé promítání rovinných útvarů převedeno na úlohy perspektivně afinních útvarů ve dvojité rovině.

10. Perspektivně afinní obrazce.

Budiž perspektivní afinita určena osou o a párem přiřazených bodů P a P_k. Zvolme si nějaký obrazec, na př. čtverec $ABCD$ a hledejme k němu obrazec persp. afinní. (Obr. 22.)

Nejdříve stanovíme k vrcholu A přiřazený bod A_k. Bod A_k bychom našli stejným způsobem, jako jsme v obr. 16 sestrojili k bodu M_k^α bod M_k^β. Můžeme také postupovati takto: Body A a A_k budou ležeti na afinním paprsku $s^A \equiv AA_k$, který je rovnoběžný s paprskem $s^P \equiv PP_k$. Vedeme tedy bodem A rovnoběžku s^A s paprskem $s^P \equiv \equiv PP_k$. Přímce PA bude přiřazena taková přímka P_kA_k, že obě přímky se protnou v samodružném bodě $X \equiv X_k$ na ose afinity o. Vedeme tedy body P a A přímku PA a stanovíme její průsečík $X \equiv X_k$ s osou



Obr. 22.

o a ten spojíme s bodem P_k. Získali jsme přiřazenou přímku $P_kA_k \equiv \equiv P_kX_k$ ku přímce $PA \equiv PX$. Hledaný bod A_k musí ležeti na paprsku s^A a na přímce P_kA_k, jest tedy v jejich průsečíku $A_k \equiv (s^A \,.\, P_kX_k)$.

Podobně bychom k vrcholu B vyhledali bod přiřazený B_k. K jeho sestrojení však můžeme užíti také sestrojeného páru bodů A a A_k. Vedeme tedy bodem B paprsek $s^B \| s^A$, sestrojíme spojnici AB, t. j. stranu čtverce prodloužíme a stanovíme její průsečík $Y \equiv Y_k$ s osou o. Na spojnici $A_k Y_k$ leží přiřazený bod B_k. Jest to průsečík $B_k \equiv (s^B \,.\, . A_k Y_k)$.

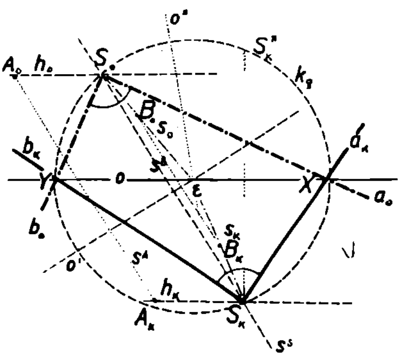
Body C_k a D_k můžeme sestrojiti pak už užitím kteréhokoliv z párů P, P_k, A, A_k nebo B, B_k. Po sestrojení bodu C_k, stačilo si uvědomiti, že rovnoběžník se promítá kosoúhle opět jako rovnoběžník a tak nebylo třeba bod D_k vyhledávati afinitou; stačilo vésti bodem C_k rovnoběžku se stranou $\overline{A_k B_k}$ a bodem A_k rovnoběžku se stranou $\overline{B_k C_k}$. Perspektivní afinitou přiřazený obrazec ku čtverci je rovnoběžník.

Když jsme sestrojili body A_k a B_k bylo možno také stanoviti bod S_k, přiřazený ke středu čtverce S; spojnice $S_k A_k$ a $S_k B_k$ budou úhlopříčky rovnoběžníka $A_k B_k C_k D_k$ a na nich leží body C_k a D_k tak, že $\overline{S_k A_k} = \overline{S_k C_k}$ a $\overline{S_k B_k} = \overline{S_k D_k}$, neboť kosoúhlé průměty stejných úseček na přímce jsou stejné.

II. Kosoúhlý průmět pravého úhlu a úsečky roviny.

1. Kosoúhlý průmět nějakého pravého úhlu je obecně úhel kosý.

Když rovina určená rameny pravého úhlu bude rovnoběžná s průmětnou (translace), nebo když kosoúhle promítací paprsek bude kolmý k rovině souměrnosti roviny pravého úhlu a průmětny (zrcadlení), bude kosoúhlým průmětem pravého úhlu opět úhel pravý.



Obr. 23.

Ukážeme si však, že ve zvolené rovině α, která je k průmětně nakloněná nebo kolmá a není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, je možno každý její bod S považovat za vrchol jednoho pravého úhlu, který se kosoúhle promítá daným paprskem na průmětnu opět jako úhel pravý.

Otočíme-li tuto rovinu α okolo její stopy do průmětny, bude opět kosoúhlý průmět $(\alpha)_k$ útvarů (α), a tedy i pravého úhlu, v rovině α a otočený útvar $(\alpha)_0$ v perspektivní afinitě, jejíž osa je ve stopě o. Perspektivní afinita je určena párem přiřazených bodů, na př. S_k a S_0. (Obr. 23.)

Zvolme si tedy v nákresně osu afinity o a pár přiřazených bodů S_k a S_o. Existuje-li v nákresně pravý úhel R_o s vrcholem S_o, kterému je perspektivní afinitou přiřazen opět pravý úhel R_k s vrcholem v bodě S_k, potom ramena a_o a b_o pravého úhlu R_o se protnou s přiřazenými rameny a_k a b_k ve dvou bodech Y a X osy afinity o. (Proč?) Úsečka $\overline{XY}$ se stane přeponou dvou pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy pravých úhlů v bodech S_o a S_k. Úsečka XY bude tak průměrem kružnice k_g (věta Thaletova) jdoucí body S_o a S_k, na níž leží všechny vrcholy pravých úhlů, jichž ramena jdou koncovými body průměru. Stačí sestrojiti osu souměrnosti o' bodů S_o a S_k, stanoviti její průsečík ε s osou afinity o a okolo ε opsati kružnici k_g jdoucí body S_k a S_o. Její průsečíky s osou o jsou body X a Y, v nichž ramena pravého úhlu s vrcholem v bodě S_o protnou přiřazená ramena pravého úhlu s vrcholem v S_k.

Protnou-li se o' a o pod malým úhlem, a to se stane často, stanovíme nejdřív k jednomu z bodů S_0 a S_k, na př. k bodu S_k, bod souměrně sdružený S_k'' podle osy o a místo osy o' sestrojíme osu o'' bodů S_0 a S_k'. Ta prochází také středem ε kružnice k_g.

Kdybychom nyní útvary $(\alpha)_0$ otočili zpět do roviny α, platí:

Každý bod roviny nakloněné k průmětně lze považovati za vrchol jednoho pravého úhlu roviny, který se kosoúhle promítá opět jako úhel pravý.

2. Veďme bodem S_o rovnoběžku h_o s osou afinity o a stanovme k ní přiřazenou přímku h_k. Jest to opět rovnoběžka s osou afinity jdoucí bodem S_k. Každá úsečka $\overline{S_oA_o}$ na přímce h_o se zřejmě reprodukuje ve skutečné velikosti na přímce h_k jako úsečka $\overline{S_kA_k}$, neboť čtyřúhelník $S_oA_oA_kS_k$ jest přece rovnoběžník.

Jinou takovou přímkou, na níž ležícím úsečkám se přiřazují úsečky stejné, je přímka $s_o \equiv S_o\varepsilon$. Protože bod ε je od S_o a S_k stejně vzdálen, jest $\triangle S_oS_k\varepsilon$ rovnoramenný a obě jeho ramena na s_o a s_k

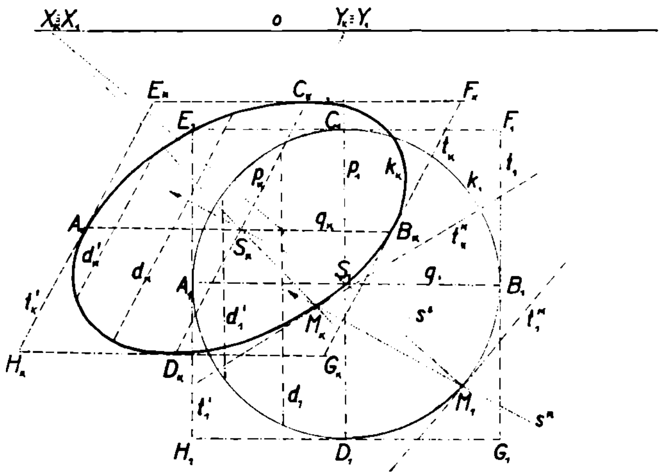
svírají s afinním paprskem stejné úhly. Vyneseme-li pak na s_0 od S_0 úsečku $\overline{S_0B_0}$ a vedeme-li bodem S_0 afinní paprsek s^B, je přiřazená úsečka $\overline{S_kB_k} = \overline{S_0B_0}$, neboť čtyřúhelník $S_0B_0B_kS_k$ je rovnoramenný lichoběžník, jehož ramena $\overline{S_0B_0}$ a $\overline{S_kB_k}$ jsou stejná.

Po otočení zpět do roviny α tedy platí:

V každé rovině nakloněné k průmětně jsou dvě osnovy rovnoběžek, na nichž ležící úsečky se kosoúhle promítají ve skutečné velikosti.

12. Kosoúhlý průmět kružnice.

I. Podobně jako jsme zobrazili perspektivně afinní obrazec (kosoúhlý průmět) ke čtverci nebo jinému mnohoúhelníku, sestrojíme kosoúhlý průmět kružnice. K tomu stačí takovou kružnici k opět otočiti okolo stopy její roviny do průmětny do polohy k_1, považovati ji za mnohoúhelník o nesčíslném počtu vrcholů a ke každému jejímu bodu M_1 perspektivní afinitou vyhledati přiřazený bod M_k. Souhrn těchto bodů je křivka k_k, o níž se v deskr. geometrii dokazuje, že je to *elipsa.*



Obr. 24.

Snadno si ověříme platnost těchto vět (obr. 24):

Každému bodu M_1 kružnice k_1 je přiřazen jeden bod M_k elipsy k_k.

Každé tětivě d_1 kružnice k_1 je přiřazena jedna tětiva d_k elipsy k_k.

Každé tečně t_1 kružnice k_1 je přiřazena jedna tečna t_k elipsy k_k.

Rovnoběžným tečnám t_1 a t_1' kružnice k_1 jsou přiřazeny rovnoběžné tečny t_k a t_k' elipsy k_k.

Rovnoběžným tětivám d_1 a d_1' kružnice k_1 jsou přiřazeny rovnoběžné tětivy d_1 a d_1' elipsy k_k.

Každému průměru p_1 kružnice k_1 je přiřazen jeden průměr p_k elipsy k_k.

Středu S_1 kružnice k_1 ke přiřazen střed S_k elipsy k_k.

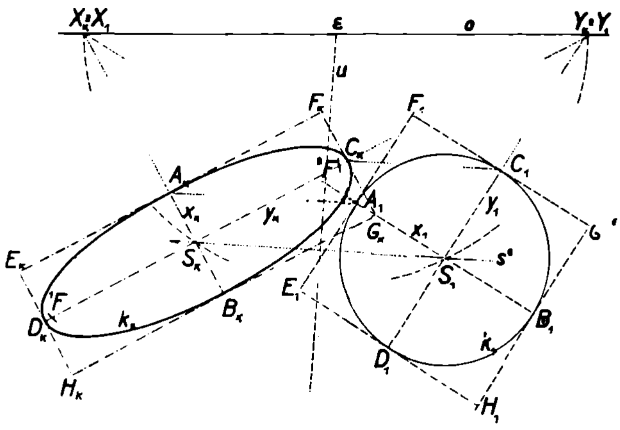
Čtverci opsanému kružnicí k_1 je přiřazen rovnoběžník opsaný elipse k_k.

Střední příčky p_1 a q_1 nějakého čtverce opsaného kružnicí k_1 jsou dva kolmé průměry kružnice k_1. Tyto průměry mají tu vlastnost, že tečny kružnice k_1, sestrojené v koncových bodech jednoho průměru, na př. p_1, jsou rovnoběžné s průměrem druhým, t. j. s průměrem q_1. Střední příčky p_k a q_k rovnoběžníka opsaného elipse jsou také dva její průměry, ale nejsou obecně na sobě kolmé, svírají nějaký kosý úhel. Tečny v koncových bodech jednoho z nich, na př. p_k jsou také rovnoběžné s průměrem druhým, t. j. průměrem q_k, neboť průměry p_k a q_k a tečny elipsy v jejich konc. bodech jsou perspektivně afinní k průměrům p_1 a q_1 a tečnám kružnice v koncových bodech; rovnoběžné přímky se v afinitě (kosoúhlém promítání) reprodukují opět jako rovnoběžky. Průměry p_k a q_k elipsy takovéto vlastnosti nazýváme *sdruženými průměry.*

Mají ještě další vlastnost. Průměr p_1 kružnice půlí všechny tětivy kružnice d_1, které jsou rovnoběžné s průměrem q_1. Také na př. průměr p_k elipsy půlí všechny tětivy d_k elipsy, které jsou rovnoběžné s průměrem sdruženým q_k. Platí tedy:

Tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s průměrem sdruženým a tětivy rovnoběžné s jedním jsou sdruženým průměrem půleny.

V kružnici k_1 o středu S_1 bude existovati však jeden pár kolmých průměrů x_1 a y_1, jimž budou v elipse k_k o středu S_k přiřazeny také dva na sebe kolmé průměry x_k a y_k elipsy, které budou i sdružené. Konstrukce byla popsána v obr. 23 a je patrna znovu z obr. 25. Čtverci opsanému kružnici k_1 v koncových bodech těchto průměrů x_1 a y_1 bude přiřazen obdélník opsaný elipse k_k v koncových bodech průměrů x_k a y_k (obr. 25). Podle každého z těchto průměrů x_k a y_k bude elipsa



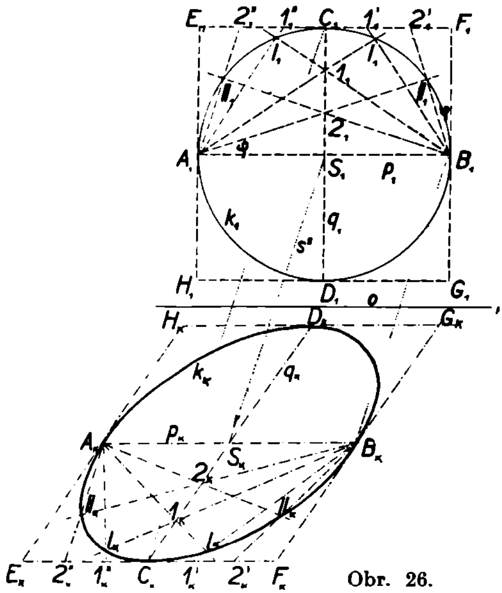
Obr. 25.

souměrná, jsou to *osy* souměrnosti *elipsy*. Umíme-li sestrojiti elipsu z jejích os, stačí tedy vyhledati oba tyto kolmé a sdružené průměry x_k a y_k elipsy i s jejich koncovými body a elipsu, na př. po vyhledání jejich ohnisek, sestrojiti provázkovou konstrukcí.

II. Elipsu k_k, jak jsme viděli na začátku tohoto odstavce, mohli bychom perspektivní afinitou bod za bodem sestrojovati z bodů kružnice k_k. Ukážeme si však, jak bychom sestrojovali jednotlivé body elipsy, která by už byla na př. určena dvěma sdruženými průměry p_k a q_k nebo osami x_k a y_k.

Uvažujme kružnicí k_1 opsaný čtverec $E_1F_1G_1H_1$ v koncových bodech A, B a C, D dvou jejích kolmých průměrů p_1 a q_1 (obr. 26). Kružnici k_1 rýsujeme zpravidla kružítkem. Ukážeme si, jak můžeme sestrojit její body bez užití kružítka. Rozdělme poloměr $\overline{C_1S_1}$ na př. na tři stejné díly a také obě polotečny ke kružnici v bodě C_1. Označme dělicí body číslicemi C_1, 1_1, 2_1, S_1 počínajíce bodem C_1 na poloměru $\overline{CS_1}$ a C_1, $1_1'$, $2_1'$, F_1 a C_1, $1''$, $2''$, E_1 počínajíce bodem C_1 na paprscích C_1F_1 resp. C_1E_1. Spojnice A_12_1 protne spojnici B_12_1' v bodě II_1, o němž můžeme tvrditi, že leží na kružnici k_1, neboť přímky A_12_1 a B_12_1'

svírají pravý úhel. Jsou totiž trojúhelníky A_1S_12 a B_1F_12' shodné, neboť jsou pravoúhlé a mají stejné odvěsny, a tedy úhel φ při A v $\triangle A_1S_12$ rovná se úhlu φ při B_1 v $\triangle B_1F_12'$; protože A_1S_1 je kolmá ku B_1F_1, je úhel $S_1\widehat{B_1}II_1 = R - \varphi$. Trojúhelník $A_1II_1B_1$ je pravoúhlý s pravým úhlem při II_1, ježto ostatní dva jeho úhly φ při vrcholu A_1 a $R - \varphi$, při B_1 dají dohromady úhel pravý. Stejným způsobem bychom obdrželi bod I_1 a dokázali o něm, že leží také na k_1. Body I_1 a II_1, které získáme jako průsečíky $I_1 \equiv B_11_1 \,.\, A_11_1''$ a $II_1 \equiv B_12_1 \,.\, A_12''$, leží také na kružnici k_1. Ve spodní polovině kružnice k_1 provedli bychom konstrukci užitím tečny v bodě D_1. Jest to t. zv. *příčková konstrukce bodů kružnice.*

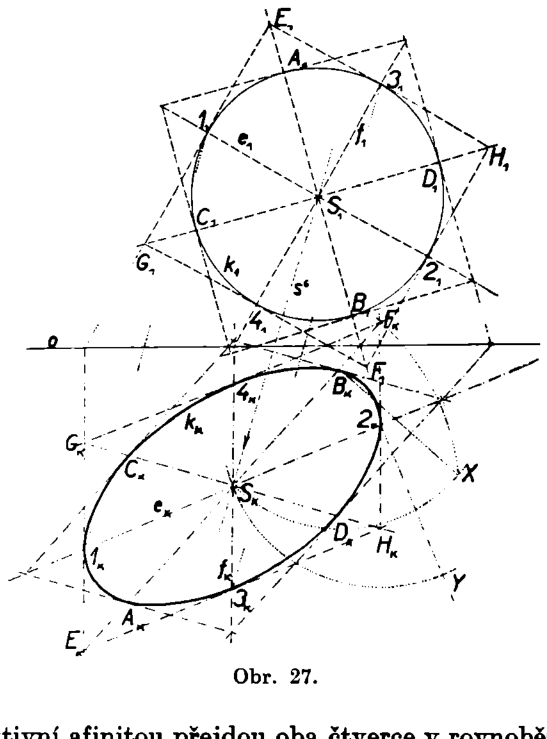


Obr. 26.

Přiřadíme-li nyní kružnici k_1 perspektivně afinní elipsu k_k, je opsanému čtverci $E_1F_1G_1H_1$ přiřazen rovnoběžník $E_kF_kG_kH_k$ opsaný elipse k_k v koncových bodech průměrů $p_k \equiv A_kB_k$ a $q_k \equiv C_kD_k$. Bodům 1_1 a 2_1 na $\overline{S_1C_1}$ jsou přiřazeny body 1_k a 2_k na $\overline{S_kC_k}$, které rozdělují $\overline{S_kC_k}$ také na tři stejné díly, neboť dělicí poměr se perspektivní afinitou (kosoúhlým promítáním) nemění. Stejně tak body $1_k'$, $2_k'$ a body $1_k''$ a $2_k''$, přiřazené k bodům $1_1'$ a $2_1'$ resp. $1_1''$ a $2_1''$, dělí polotečny $\overline{C_kF_k}$ a $\overline{C_kE_k}$ elipsy v bodě C_k na tři stejné díly. Přímce, na př. A_12_1 je přiřazena přímka A_k2_k a přímce B_12_1' přímka B_k2_k'. Průsečík $II_k \equiv (A_k2_k \,.\, B_k2_k')$ jest zřejmě bod přiřazený k bodu $II_1 \equiv (A_12_1 \,.\, B_12_1')$ kružnice k_1 a leží na elipse k_k.

Jsou-li tedy už určeny sdružené průměry $p_k \equiv \overline{A_kB_k}$ a $q_k \equiv \overline{C_kD_k}$ elipsy k_k, opíšeme jí rovnoběžník $E_kF_kG_kH_k$ a rozdělíme $\overline{C_kS_k}$ na tři díly. Také polotečny $\overline{C_kE_k}$ a $\overline{C_kF_k}$ rozdělíme na tři stejné díly a stanovíme průsečíky $A_kJ_k \,.\, B_kJ_k'$ resp. $A_kJ_k'' \,.\, B_kJ_k$, které jsou body elipsy k_k. V technické praxi, kde se této methody často používá, nazýváme ji *dvanáctibodovou konstrukcí.*

III. Kružnici k_1 opišme v koncových bodech A_1, B_1 a C_1, D_1 dvou kolmých průměrů čtverec a sestrojme v něm úhlopříčky e_1 a f_1 a stanovme jejich průsečíky 1_1, 2_1, 3_1 a 4_1 s kružnicí k_1. Opišme dále v bodech 1_1, 2_1, 3_1 a 4_1 kružnici k_1 nový čtverec E_1, F_1, G_1, H_1. Tyto vrcholy leží na prodloužených středních příčkách A_1B_1 a C_1D_1. Potom $(F_1B_1S_1) = \dfrac{r_1\sqrt{2}}{r_1}$, kde $r_1 = \overline{S_1B_1}$. Strany tohoto čtverce jsou rovnoběžné s úhlopříčkami e_1 a f_1. (Obr. 27.)



Obr. 27.

Perspektivní afinitou přejdou oba čtverce v rovnoběžníky opsané elipse, při čemž vrcholy $E_kF_kG_kH_k$ budou ležeti na prodloužených středních příčkách A_kB_k a C_kD_k tak, že na př. $(F_kB_kS_k) = \frac{r_k\sqrt{2}}{r_k}$, kde $r_k = \overline{S_kB_k}$. Strany rovnoběžníka jsou rovnoběžné s úhlopříčkami e_k a f_k.

Sestrojíme v B_k kolmici ku S_kB_k a vynesme na ni od B_k úsečku $\overline{S_kB_k} = \overline{B_kX}$; potom úsečka $\overline{S_kX} = \overline{S_kF_k}$. Tuto délku vyneseme od S_k na S_kB_k a její koncový bod je vrchol F_k. Jím vedeme rovnoběžku $\overline{F_kE_k}$ s f_k, získáme bod E_k, podobně rovnoběžku s e_k atd. S tečnami v bodech A_k, B_k, C_k, D_k získáme ještě další čtyři tečny elipsy k_k v bodech 1_k, 2_k, 3_k a 4_k na úhlopříčkách e_k a f_k. Jest to t. zv. *osmitečnová konstrukce* a v praxi je také hojně používána.

V části druhé podáme další konstrukce elipsy užívané při kosoúhlém promítání.

Cvičení:

1. Ukažte, že perspektivní afinita je určena také: a) osou afinity, charakteristikou a směrem afinity, b) dvěma páry sdružených přímek, c) párem sdružených přímek a párem sdružených bodů, d) dvěma páry sdružených bodů a bodem na ose afinity, e) směrem afinity a dvěma páry sdružených rovnoběžek!

2. V persp. afinitě určené osou, charakteristikou $k = \frac{1}{2}$ a směrem afinity $\widehat{so} = 60°$ stanovte k rovnostrannému trojúhelníku sdružený trojúhelník!

3. V persp. afinitě určené dvěma páry sdružených různoběžek sestrojte k obdélníku s úhlopříčkami na jednom páru rovnoběžník sdružený!

4. V persp. afinitě určené párem sdružených přímek a párem sdružených bodů sestrojte pravidelný šestiúhelník se stranou na jedné z daných přímek o středu v jednom (souhlasném) z daných bodů a šestiúhelník k němu sdružený!

5. Stanovte perspektivní afinitu mezi daným trojúhelníkem ABC a trojúhelníkem rovnostranným, který je určen jedním vrcholem!

6. Stanovte rovnostranný trojúhelník přiřazený k danému trojúhelníku ABC, je-li dána ještě osa afinity!

7. K danému rovnoběžníku přiřaďte čtverec, je-li dána osa afinity!

8. K dané kružnici sestrojte persp. afinní elipsu o daném středu, jestliže osa afinity je a) libovolná nesečna kružnice, b) tečna kružnice, c) sečna kružnice!

9. V persp. afinitě určené osou a párem sdružených bodů určete ke kružnici o středu na ose afinity elipsu přiřazenou!

10. Sestrojte dvanáctibodovou konstrukci elipsu určenou dvěma sdruženými průměry, b) osami!

11. Sestrojte osmitečnou konstrukcí elipsu určenou dvěma sdruženými průměry, b) osami!

12. Sestrojte šestnáctibodovou konstrukcí elipsu určenou dvěma sdruženými průměry!

13. K elipse určené dvěma sdruženými průměry sestrojte persp. afinní elipsu, jestliže osa afinity je v tečně elipsy v konc. bodě jednoho z průměrů!

14. Sestrojte průsečíky přímky s elipsou určenou dvěma sdruženými průměry!