osoba z množiny **S** je mezi osobami z **P**. Potom vyzveme přítomné, aby na př. podle pořádku, jak sedí, hlásili svá jména: při tom kontrolujeme, zda každé hlášené jméno je zapsáno v seznamu. Tak zjistíme, že každá osoba z množiny **P** je také v množině **S**.

Obyčejně však tuto druhou část zkoumání totožnosti množin **P**, **S** provádíme kratšeji. Zeptáme se, zda někdo z přítomných nebyl čten; nepřihlásí-li se nikdo, znamená to, že osoba nezapsaná v seznamu není mezi přítomnými, čili že osoba, která není z **S**, není také v **P**. To je ovšem podle pravidel logiky tvrzení shodné s tvrzením, že každá osoba z **P** je obsažena mezi osobami z **S**. Je tedy také tímto postupem prokázána totožnost obou množin.

Stejný smysl má totožnost dvou množin bodů. Řekneme-li: množina všech bodů v rovině stejně vzdálených od dvou různých bodů $A$, $B$ je osa úsečky $AB$, znamená to: 1) každý bod stejně vzdálený od obou bodů $A$, $B$ je bodem osy úsečky $AB$; 2) každý bod osy úsečky $AB$ je stejně vzdálen od obou bodů $A$, $B$, čili každý bod, jehož vzdálenosti od bodů $A$, $B$ jsou různé, leží mimo osu úsečky $AB$.

Slovo množina bylo do matematiky zavedeno teprve v nedávné době. V geometrii se již dlouho předtím užívalo názvu geometrické místo*) bodů; proto i dnes užíváme v geometrii skoro výhradně tohoto staršího názvu. Říkáme tedy: geometrické místo bodů v rovině stejně vzdálených od dvou různých bodů $A$, $B$, je osa úsečky $AB$. Ovšem ať použijeme jednoho nebo druhého názvu, musíme si být stále vědomi, že vyslovená věta znamená totožnost dvou množin a že je tedy shrnutím dvou vět (v našem příkladě věty 1 a 2). Při odůvodňování musíme ovšem dokázati obě tyto věty.

## 2. NĚKOLIK PŘÍKLADŮ

Rozebereme si podrobně čtyři příklady g. m. bodů.

Příklad 1. *Jsou dány dva různé body $A$, $B$; máme najíti g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od bodů $A$, $B$ mají za součet úsečku dané délky $s$.* Při diskusi g. m. zřejmě záleží na vzájemném vztahu délek $\overline{AB}$, $s$.

*) Slova „geometrické místo" budeme dále důsledně zkracovati g. m.

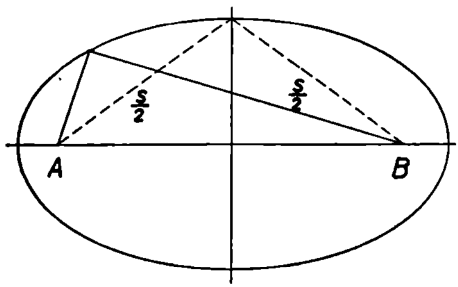
a) Je-li $s < \overline{AB}$, pak patrně neexistuje žádný bod žádané vlastnosti.

b) Je-li $s = \overline{AB}$, pak každý bod hledaného g. m. musí ležeti na přímce $AB$; neboť pro každý bod $M$ mimo přímku $AB$ platí podle základní vlastnosti trojúhelníka $\overline{AM} + \overline{BM} > \overline{AB}$. Avšak hledané g. m. není celá přímka $AB$, protože body, které leží vně úsečky $AB$ mají vždy od jednoho z bodů $A$, $B$ vzdálenost větší než $\overline{AB}$. Na př. leží-li bod $M$ na prodloužení úsečky $AB$ za bod $B$, je $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} > > \overline{AB}$, a proto také $\overline{AM} + \overline{BM} > \overline{AB}$. Pro každý bod $X$ úsečky $AB$ však platí $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{AB} = s$. Je tedy hledané g. m. bodů úsečka $AB$ i s krajními body.

c) Je-li $s > \overline{AB}$, obsahuje g. m. i body ležící mimo přímku $AB$: jsou to na př. vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se základnou $AB$ a délkou ramene $\frac{1}{2}s$. Toto g. m. je křivka známá ze střední školy, která se nazývá e l i p s a (obr. 1).

P ř í k l a d 2. *Jsou dány opět dva různé body $A$, $B$; máme najíti g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od bodů $A$, $B$ mají daný součet čtverců.* Označíme tento součet čtverců $k^2$, libovolný bod g. m. $M$; pak platí

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = k^2. \qquad (1)$$



Obr. 1.

Při zkoumání g. m. použijeme vzorce pro délku těžnice trojúhelníka: jsou-li $a$, $b$, $c$ strany trojúhelníka, $t_c$ jeho těžnice z vrcholu $C$, pak platí

$$t_c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2. \qquad (2)$$

Vzorec (2) se odvozuje s použitím Pythagorovy věty způsobem, který ukazuje, že platí ještě trochu obecněji takto:

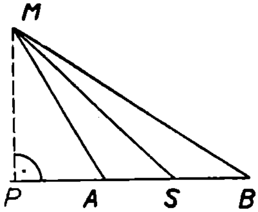
Jsou-li $A$, $B$ dva různé body, $S$ střed úsečky $AB$, $M$ libovolný bod roviny, pak

$$\overline{MS}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{AM}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{BM}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2. \qquad (3)$$

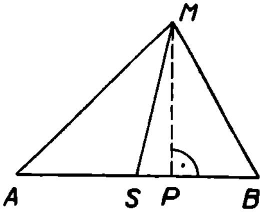
Vzorec (3) je obecnější vzhledem k (2) v tom, že bod $M$ může ležeti i na přímce $AB$.

Dokažme si vzorec (3) (obr. 2, 3). Označíme $P$ patu kolmice spuštěné z bodu $M$ na přímku $AB$. Padne-li bod $P$ vně úsečky $AB$ nebo do jejího krajního bodu jako na obr. 2, je

$$\begin{aligned} \overline{MP}^2 + (\overline{PS} - \tfrac{1}{2}\overline{AB})^2 &= \overline{AM}^2, \\ \overline{MP}^2 + (\overline{PS} + \tfrac{1}{2}\overline{AB})^2 &= \overline{BM}^2. \end{aligned} \tag{4}$$



Obr. 2.



Obr. 3.

Sečtením obou rovnic dostaneme

$$2(\overline{MP}^2 + \overline{PS}^2) + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$$

a odtud rovnici (3). Padne-li bod $P$ dovnitř úsečky $AB$ (obr. 3), vymění se jen členy $\overline{PS}$, $\frac{1}{2}\overline{AB}$ v první z rovnic (4). Tím se ovšem její správnost nezmění. Odvození je patrně správné i tehdy, leží-li bod $M$ na přímce $AB$.

Vraťme se nyní k hledanému g. m. bodů. Je-li $M$ libovolný jeho bod, pak podle (3) platí

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 2 \,.\, \overline{MS}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB},$$

a podle (1) tedy

$$\overline{MS}^2 = \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2. \tag{5}$$

Při diskusi g. m. zřejmě záleží na hodnotě výrazu $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2$.

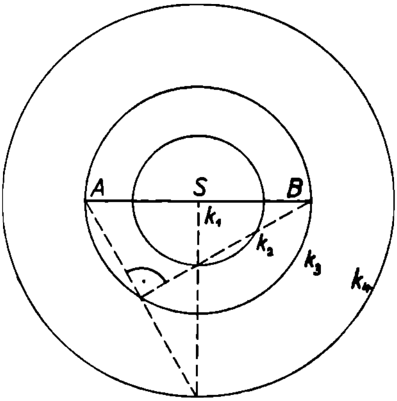
a) Je-li $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 < 0$, čili $k < \dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, pak hledané g. m. neexistuje, neboť čtverec $\overline{MS}^2$ nemůže být číslo záporné.

b) Je-li $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = 0$, čili $k = \dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, pak platí pro každý bod

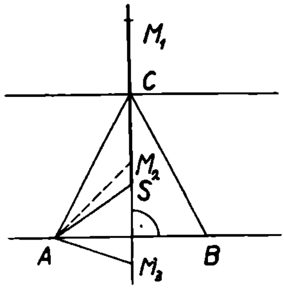
$M$ g. m. $\overline{MS}^2 = 0$, t. j. $\overline{MS} = 0$. G. m. může obsahovati jediný bod, totiž střed $S$ úsečky $AB$. Tento bod je však skutečně bodem g. m., neboť $\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 = k^2$.

c) Je-li $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 > 0$, čili $k > \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, pak každý bod $M$ g. m. náleží kružnici se středem $S$ a poloměrem $\sqrt{\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2}$. Obráceně každý bod $M$ této kružnice je bodem našeho g. m., neboť pro něj platí jednak rovnice (5) a jednak rovnice (3). Z těchto dvou však dostaneme rovnici (1).

Na obr. 4 jsou znázorněna g. m. pro $k = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}, \frac{\overline{AB}}{\sqrt{1,5}}, \overline{AB}, . \overline{AB}\sqrt{2}$.



Obr. 4.



Obr. 5.

Příklad 3. *Je dána úsečka $AB$ a přímka $p$ s ní rovnoběžná, ale neobsahující ji. Máme určiti g. m. středů kružnic opsaných trojúhelníku $ABX$, probíhá-li bod $X$ přímku $p$.*

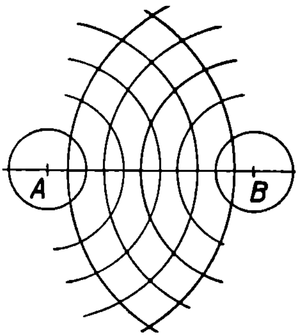
Je patrné, že každý bod našeho g. m. bude bodem osy úsečky $AB$. Ale ne každý bod této osy je bodem g. m.

Dokážeme: *sestrojíme-li rovnoramenný trojúhelník $ABC$, jehož vrchol $C$ leží na přímce $p$ a je-li $S$ střed kružnice jemu opsané, pak hledané g. m. bodů je polopřímka $SC$* (obr. 5).

Bod $M$ přímky $CS$ patrně náleží našemu g. m. jedině tehdy, jestliže kružnice opsaná kolem středu $M$ poloměrem $\overline{MA}$ má s přímkou

$p$ společný aspoň jeden bod, t. j. je-li vzdálenost bodu $M$ od přímky $p$ nejvýše tak velká jako poloměr $\overline{MA}$. Pro každý bod $M_1$ přímky $CS$, který neleží v polorovině $pA$ (obr. 5), je tato podmínka zřejmě splněna; všecky tyto body $M_1$ náležejí tedy našemu g. m.

Je-li $M_2$ libovolný vnitřní bod úsečky $CS$, pak platí $\overline{AM_2} > \overline{CM_2}$ (v $\triangle ACM_2$ je $\sphericalangle ACM_2 > \sphericalangle CAM_2$ a proti většímu úhlu leží delší strana); náleží tedy i každý bod $M_2$ našemu g. m. Pro bod $M_3$, který leží na prodloužení úsečky $CS$ za bod $S$, plyne podobně z $\triangle ACM_3$ nerovnost $\overline{AM_3} < \overline{CM_3}$; bod $M_3$ proto nenáleží hledanému g. m. Tím je naše tvrzení dokázáno; uvědomte si, jak jsme v tomto případě dokázali totožnost obou množin bodů.



Obr. 6.

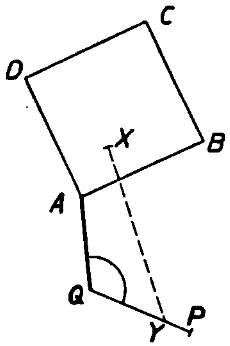
Příklad 4. Na posledním zcela jednoduchém příkladě si ukážeme, že g. m. bodů může být množina bodů, které netvoří souvislou čáru. *Jsou dány dva různé body $A$, $B$ a hledáme všecky body $X$ v rovině, pro něž vzdálenosti $\overline{AX}$ i $\overline{BX}$ jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly.* Sestrojíme kružnice kolem středů $A$, $B$ jejichž poloměry jsou v centimetrech celá čísla: všecky možné průsečíky, resp. body dotyku těchto kružnic tvoří zřejmě hledané g. m. (obr. 6); je to množina s nekonečně mnoha body.

## 3. VZDÁLENOST DVOU GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

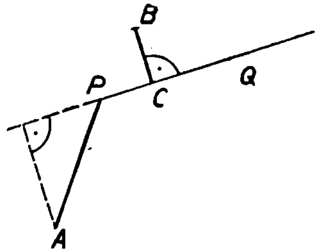
Všecky čtyři uvedené příklady se opíraly o pojem vzdálenosti dvou bodů. V geometrii na střední škole však čtenář slyšel také o vzdálenosti bodu od přímky: je-li $A$ daný bod a probíhá-li bod $X$ danou přímku $p$, pak nejkratší z úseček $AX$ určuje vzdálenost bodu $A$ od přímky $p$; je známo, že je to vzdálenost bodu $A$ od paty $P$ kolmice spuštěné z bodu $A$ na přímku $p$.

Tento pojem vzdálenosti si zobecníme. Mějme dva rovinné geometrické útvary, čili dvě množiny bodů; na obr. 7 je to čtverec $ABCD$

(obvod i vnitřek) a úsečka $PQ$ (i s krajními body), která leží vně čtverce. Nechť bod $X$ probíhá první útvar (čtverec), bod $Y$ druhý útvar (úsečku). Lze-li mezi úsečkami $XY$ najít některou nejkratší, jak je tomu v našem případě, pak se délka této úsečky jmenuje vzdálenost obou útvarů (množin). Na obr. 7 je to — jak lze dokázat — úsečka $AQ$.



Obr. 7.



Obr. 8.

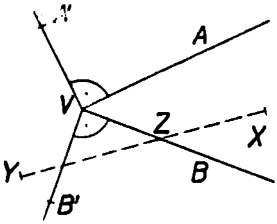
Pojem vzdálenosti dvou geometrických útvarů nám dovoluje vytvořit řadu rozmanitých a zajímavých příkladů g. m. bodů. Dříve než k nim však přikročíme, objasníme si na několika ukázkách pojem vzdálenosti dvou množin.

Příklad 5. *Vzdálenost dvou rovnoběžek* je vzdálenost kteréhokoli bodu jedné z nich od druhé. *Vzdálenost dvou různoběžek* je rovna nule.

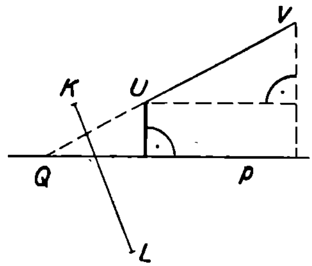
Příklad 6. *Vzdálenost bodu od polopřímky.* Je dána polopřímka $PQ$ s počátkem $P$, který k ní náleží (obr. 8). Na tomto obrázku je znázorněn jednak bod $A$ té vlastnosti, že pata kolmice spuštěné z bodu $A$ na přímku $PQ$ nenáleží polopřímce $PQ$: vzdálenost bodu $A$ od polopřímky $PQ$ je patrně $\overline{AP}$. Za druhé je na obrázku znázorněn bod $B$; pata $C$ kolmice spuštěné z bodu $B$ na přímku $PQ$ náleží polopřímce $PQ$; hledaná vzdálenost je v tomto případě $\overline{BC}$.

Příklad 7. Obr. 9. *Je dán dutý úhel $AVB$, t. j. část roviny i s omezujícími polopřímkami $VA$, $VB$, a vně úhlu $AVB$ bod $Y$. Hledáme vzdálenost bodu $Y$ od úhlu $AVB$.* Sestrojíme pravé úhly $AVA'$ a $BVB'$

styčné s daným úhlem (to znamená, že s ním mají společná jen ramena $VA$, $VB$). Vzdálenost daného bodu $Y$ od úhlu $VAB$ je jeho vzdálenost od některého bodu ramen $VA$, $VB$. Neboť spojíme-li bod $Y$ s vnitřním bodem $X$ daného úhlu, protne úsečka $YX$ některé rameno úhlu $BVB'$ v bodě $Z$, a je $\overline{YZ} < \overline{XY}$, $X$ není tedy nejbližší bod úhlu k bodu $Y$.



Obr. 9.



Obr. 10.

Uvážíme-li, jaká je podle příkladu 6 vzdálenost bodu od polopřímky, dostaneme tento výsledek:

a) leží-li bod $Y$ v úhlu $A'VB'$, je hledaná vzdálenost rovna $YV$;

b) leží-li bod $Y$ v úhlu $AVA'$, resp. $BVB'$, je hledaná vzdálenost rovna vzdálenosti bodu $Y$ od přímky $AV$, resp. $BV$.

Příklad 8. *Na obr. 10 vidíte přímku $p$ a dvě úsečky $KL$ a $UV$ (krajní body k nim počítáme). Vzdálenost úsečky $KL$ od přímky $p$* je patrně rovna nule, neboť se úsečka s přímkou protínají. Druhá úsečka $UV$ má takovou polohu, že přímka $p$ protne prodloužení úsečky $UV$ za bod $U$ v jistém bodě $Q$. Čtenář si jistě sám snadno dokáže, že vzdálenost úsečky $UV$ od přímky $p$ je v tomto případě rovna vzdálenosti bodu $U$ od přímky $p$.

Příklad 9. *Vzdálenost bodu od kružnice.* Je dána kružnice $k$ se středem $S$ a její vnější bod $A$. Bod kružnice $k$ nejbližší bodu $A$ je průsečík $R$ úsečky $AS$ s kružnicí. Neboť pro druhý průsečík $T$ kružnice $k$ s přímkou $AS$ patrně platí $\overline{AT} > \overline{AR}$; každý jiný bod $X$ kružnice $k$ dává rovnoramenný trojúhelník $SRX$, oba úhly $\sphericalangle SXR$, $\sphericalangle SRX$ jsou stejné a tedy ostré. Úhel $ARX$ v trojúhelníku $ARX$ je proto tupý a proti němu leží nejdelší strana, t. j. $\overline{AX} > \overline{AR}$. Obdobnou úvahu můžeme provést, je-li bod $A$ uvnitř kružnice $k$.

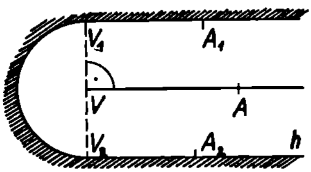
## 4. GEOMETRICKÁ MÍSTA NA PODKLADĚ POJMU VZDÁLENOSTI DVOU ÚTVARŮ

Následující příklady jsou založeny na výsledcích odvozených v předešlé kapitole. Jejich podrobný rozbor si provede čtenář jistě snadno sám. Příklady jsou seřazeny tak, že na podkladě předcházejících lze řešit následující.

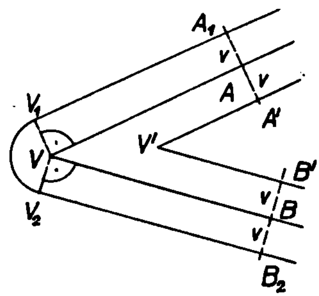
Příklad 10. Obr. 11. *Je dána polopřímka VA a délka v: máme určiti g. m. bodů, které mají od polopřímky VA vzdálenost a) rovnou v; b) rovnou aspoň v.*

a) Hledané g. m. je čára, složená z polopřímek $V_1A_1$, $V_2A_2$, vedených ve vzdálenosti $v$ rovnoběžně s $VA$ ($V_1VV_2 \perp VA$) a z polokružnice $k$ se středem $V$ a poloměrem $v$.

b) Tato čára rozdělí rovinu ve dvě části, z nichž jedna obsahuje polopřímku $VA$. Druhá část (na obr. 11 naznačená šrafováním) spolu s čarou $h$ je hledané g. m. v případě b).



Obr. 11.



Obr. 12.

Příklad 11. Obr. 12. *Je dán dutý úhel AVB a délka v; máme určiti g. m. bodů, jejichž vzdálenost od jeho ramen je v.* Hledané g. m. se skládá:

1) ze dvou polopřímek $V'A'$, $V'B'$ vedených uvnitř daného úhlu ve vzdálenosti $v$ od jeho ramen;

2) ze dvou polopřímek $V_1A_1$, $V_2B_2$ vedených vně daného úhlu ve vzdálenosti $v$;

3) z oblouku $V_1V_2$ kružnice se středem $V$ a poloměrem $v$.

Při odůvodnění stačí uvážit, že každý bod hledaného g. m. musí mít od obou polopřímek $VA$, $VB$ vzdálenost aspoň $v$, ale od aspoň jedné z těchto polopřímek musí mít vzdálenost rovnou $v$.

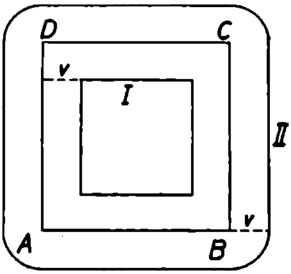
Příklad 12. Obr. 13. *Je dán čtverec ABCD o straně a. Máme nalézt g. m. bodů, které mají od obvodu čtverce danou vzdálenost v.*

Mohou nastati tři případy:

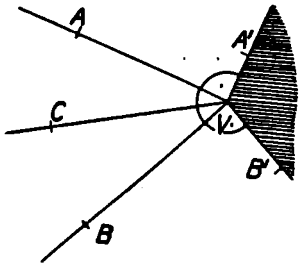
a) Je-li $v < \frac{1}{2}a$, skládá se hledané g. m. z obvodu vnitřního čtverce I a z vnější čáry II, složené ze čtyř úseček a čtyř čtvrtkružnic.

b) Je-li $v = \frac{1}{2}a$, skládá se hledané g. m. z vnější čáry II a ze středu čtverce (jediného bodu).

c) Je-li $v > \frac{1}{2}a$, neobsahuje hledané g. m. žádný vnitřní bod čtverce; je to jen vnější čára II.




Obr. 13.




Obr. 14.

Příklad 13. Obr. 14. *Je dán dutý úhel AVB; máme určiti g. m. bodů, které mají od obou ramen úhlu AVB stejné vzdálenosti.* Sestrojíme pravé úhly $AVA'$, $BVB'$ styčné k danému úhlu. Hledané g. m. se pak skládá:

1. z polopřímky $VC$, t. z. osy úhlu $AVB$;

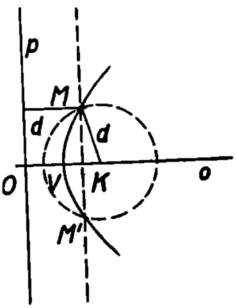
2. z úhlu $A'VB'$ (ramena v to počítaje).

Je známé ze střední školy, že každý z bodů polopřímky $VC$ má stejné vzdálenosti od polopřímek $VA$, $VB$. Naopak každý bod úhlu $AVB$, který má stejné vzdálenosti od polopřímek $VA$, $VB$, leží na polopřímce $VC$. Neboť každý bod úhlu $AVB$ má od polopřímky $VA$, resp. $VB$ tutéž vzdálenost jako od přímky $VA$, resp. $VB$. Každý bod $M$

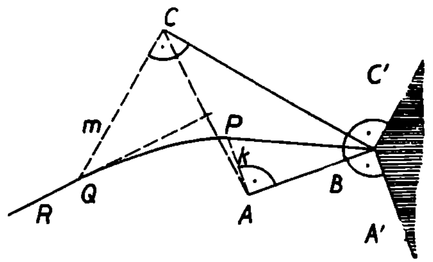
úhlu $A'VB'$ má od obou ramen vzdálenost $\overline{MV}$. Naproti tomu vnitřní body úhlu $AVA'$ mají od ramene $VA$ menší vzdálenost než od ramene $VB$; podobně je tomu u vnitřních bodů úhlu $BVB'$.

Tento příklad ukazuje, že definujeme-li vzdálenost bodu od polopřímky jako vzdálenost dvou množin, pak není správná věta: osa úhlu je g. m. bodů, které mají od obou ramen úhlu stejné vzdálenosti. Správně má věta znít: osa úhlu je g. m. bodů tohoto úhlu, které mají od obou ramen úhlu stejné vzdálenosti.

Příklad 14. Obr. 15. *Je dána přímka $p$ a bod $K$ ležící mimo ni. Hledáme g. m. bodů, které mají od bodu $K$ a od přímky $p$ stejné vzdálenosti.* Označíme $O$ patu kolmice $o$ spuštěné z bodu $K$ na přímku $p$. Střed $V$ úsečky $KO$ je patrně jedním bodem našeho g. m. Všecky další body leží také v polorovině $pK$, neboť každý bod druhé poloroviny vyťaté přímkou $p$ má od bodu $K$ větší vzdálenost než od přímky $p$. Dva body $M$, $M'$ našeho g. m. dostaneme, vedeme-li v polorovině $pK$ rovnoběžku s přímkou $p$ ve vzdálenosti $d > \overline{OV}$ a protne ji kružnicí se středem $K$ a poloměrem $d$. Měníme-li $d$, dostáváme dvojice bodů souměrně položených podle přímky $o$. Všecky tyto body vyplní křivku souměrnou podle osy $o$, zvanou parabola. Bod $K$ je její ohnisko, přímka $p$ se jmenuje řídicí přímka paraboly.



Obr. 15.



Obr. 16.

Příklad 15. Obr. 16. *Je dán trojúhelník $ABC$ takový, že $\overline{AB} < \overline{BC}$ a $\sphericalangle ABC$ je ostrý. Hledáme g. m. bodů, které mají od úseček $AB$, $BC$ stejné vzdálenosti.* K úhlu $ABC$ sestrojíme nejprve styčné pravé úhly $ABA'$, $CBC'$. Pak vztyčíme v bodech $A$, $C$ kolmice $k$, $m$ k ramenům $AB$, $BC$. Sestrojíme průsečík $P$ přímky $k$ s osou úhlu $ABC$, dále průsečík $Q$ přímky $m$ s osou úsečky $AC$. Hledané g. m. je naznačeno na obr. 16; skládá se:

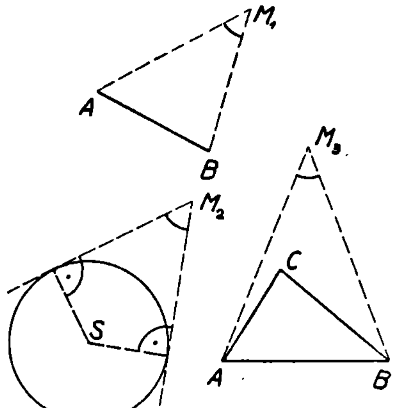
1. z polopřímky $QR$ ležící v ose úsečky $AC$;
2. z oblouku $PQ$ paraboly s ohniskem $A$ a řídicí přímkou $BC$;
3. z úsečky $BP$ ležící v ose úhlu $ABC$;
4. z úhlu $A'B'C'$ (počítaje v to ramena $BA'$, $BC'$).

## 5. GEOMETRICKÁ MÍSTA ZALOŽENÁ NA POJMU OBVODOVÉHO ÚHLU

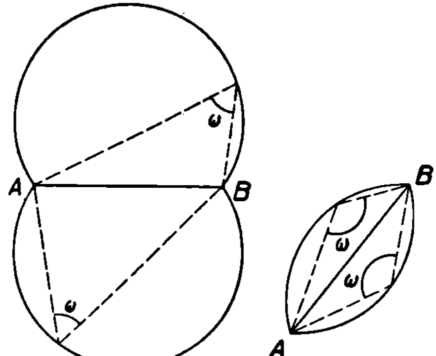
Všem čtenářům je jistě ze střední školy známá prastará poučka, nazývaná věta Thaletova. Zní takto: *Jsou-li $A$, $B$ koncové body průměru kružnice $k$, $M$ další bod této kružnice, je úhel $AMB$ pravý.* Platí však také obráceně: *vrchol $M$ každého pravého úhlu, jehož ramena procházejí body $A$, $B$, leží na kružnici $k$ sestrojené nad průměrem $AB$.* Můžeme tedy vysloviti větu:

*G. m. vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma různými body $A$, $B$, je kružnice sestrojená nad průměrem $AB$.*

Mějme nějaký útvar (na př. úsečku, obrazec, ohraničenou křivku a p.) a bod $M$, který tomuto útvaru nenáleží. Budeme říkati, že útvar vidíme z bodu $M$ pod úhlem $PMQ$, jestliže všecky body útvaru leží v tomto úhlu a na každém rameni úhlu $PMQ$ leží aspoň jeden bod útvaru. Na obr. 17 jsou naznačeny úhly, pod kterými vidíme z bodů $M_1$, $M_2$, $M_3$ úsečku, kružnici a trojúhelník.



Obr. 17.



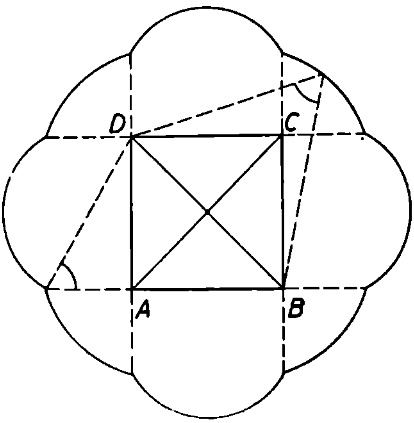
Obr. 18.

Na základě této definice můžeme říci, že g. m. bodů, z nichž je viděti danou úsečku $AB$ pod pravým úhlem, je kružnice sestrojená nad průměrem $AB$, s výjimkou bodů $A$, $B$.

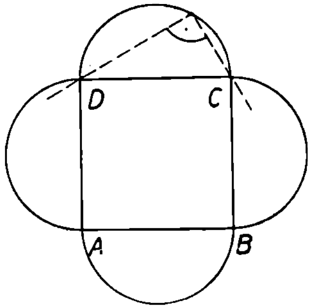
Zobecněním Thaletovy věty je známá věta o obvodových úhlech. Obr. 18. *G. m. bodů, z nichž lze viděti danou úsečku $AB$ pod daným úhlem $\omega$, jsou dva oblouky kružnice, souměrně položené podle přímky $AB$, s výjimkou bodů $A$, $B$.* Je-li úhel $\omega$ ostrý, jsou oba oblouky větší než polokružnice, je-li $\omega$ pravý, jsou to dvě polokružnice téže kružnice, je-li úhel $\omega$ tupý, jsou oba oblouky menší než polokružnice.

Uvedeme si dva příklady g. m. založených na pojmu obvodového úhlu.

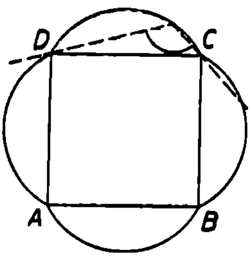
Příklad 16. *Je dán čtverec $ABCD$; máme zjistiti g. m. (vnějších) bodů, z nichž lze viděti čtverec pod daným úhlem $\alpha$.* Rozlišíme tři případy: a) $\alpha$ je ostrý úhel (na př. $\alpha = 60°$ na obr. 19), b) $\alpha$ je pravý úhel (obr. 20), c) $\alpha$ je tupý úhel (na př. $\alpha = 120°$ na obr. 21).



Obr. 19.



Obr. 20.



Obr. 21.

a) V tomto případě se g. m. skládá:

1. z částí čtyř oblouků kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, z jejichž bodů je viděti strany $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ pod úhlem $\alpha$; části jsou omezeny prodlouženými stranami čtverce;

2. ze dvou oblouků $h_1$, $l_1$, z jejichž bodů je viděti úhlopříčku $AC$ pod úhlem $\alpha$;

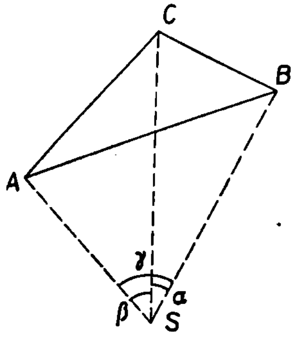
3. ze dvou oblouků $h_2$, $l_2$, z jejichž bodů je viděti úhlopříčku $BD$ pod úhlem $\alpha$.

Všech osm oblouků tvoří souvislou křivku a mají společné body na prodloužených stranách čtverce $ABCD$ (obr. 19).

b) Je-li $\alpha = 90°$, skládá se g. m. ze čtyř polokružnic sestrojených nad stranami čtverce jako průměry. Vrcholy čtverce našemu g. m. nenáležejí.

c) Je-li $\alpha$ tupý úhel, skládá se g. m. ze čtyř oblouků (menších než polokružnice) nad tětivami $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Také v tomto případě nenáležejí vrcholy čtverce hledanému g. m.

Příklad 17. Při vyměřování povrchu zemského (v t. zv. zeměměřičství čili geodesii) se často vyskytuje tato *úloha, zvaná Pothenotova: ve vodorovné rovině máme tři body* $A$; $B$, $C$ (*místa na povrchu zemském*) *jejichž vzdálenosti* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ *jsou známé. Na nějakém stanovišti* $S$ *v téže vodorovné rovině změříme úhloměrným přístrojem úhly* $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$, *po případě pro kontrolu i* $\sphericalangle ASC$ (obr. 22). *Máme za úkol určiti graficky polohu bodu* $S$. Řešíme jej takto:



Obr. 22.

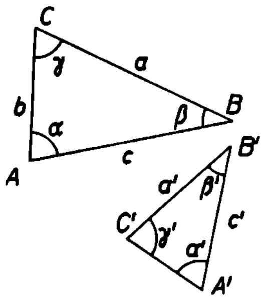
Ve vhodném měřítku narýsujeme trojúhelník $ABC$ (nebo body $A, B, C$ na přímce). Bod $S$ náleží třem g. m.: jsou to g. m. bodů, z nichž vidíme úsečky $AB$, $BC$, $CA$, resp. pod úhly $\gamma$, $\alpha$, $\beta$. Pro sestrojení bodu $S$ stačí dvě z těchto g. m. Protože polohu bodu $S$ vzhledem k bodům $A$, $B$, $C$ v terénu přibližně známe, rozhodneme snadno, které oblouky nám dávají jako průsečík bod $S$. Leží-li bod $S$ na kružnici procházející body $A$, $B$, $C$ nebo v její blízkosti, není jeho poloha určena, neboť oblouky, jejichž průsečíkem má být bod $S$, splynou, nebo jsou si velmi blízké.

V praxi se ovšem poloha bodu $S$ zpravidla určuje výpočtem, nikoli konstrukcí.

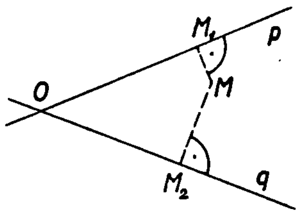
## 6. GEOMETRICKÁ MÍSTA ZALOŽENÁ NA POJMU PODOBNOSTI

Nauka o podobnosti není předmětem vyučování na střední škole; přesto uvedeme několik nejdůležitějších g. m. založených na pojmu podobnosti. Při tom použijeme jen jediné věty o podobných trojúhelnících.

Podobné trojúhelníky jsou trojúhelníky stejného tvaru, geometricky přesně řečeno takové, které se shodují ve dvou vnitřních úhlech a tedy ovšem i v třetím. Označíme-li takové trojúhelníky $ABC$, $A'B'C'$ (obr. 23) tak, že stejné úhly jsou $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, pak zapisujeme podobnost znakem $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. *Základní vlastnost podobných trojúhelníků je t. zv. úměrnost stran, které leží proti stejným úhlům. To znamená, že se dá nalézti jisté kladné číslo $k$ tak, že platí (v našem označení) $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$.* Probereme si nejprve tuto úlohu:



Obr. 23.



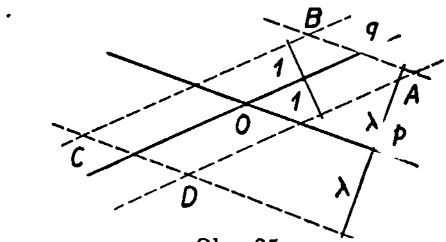
Obr. 24.

Příklad 18. *Jsou dány dvě různoběžky $p$, $q$; hledáme g. m. bodů, které mají od dvou různoběžek stálý podíl vzdáleností.* Přesněji řečeno: je-li $M$ libovolný bod g. m. a jsou-li $M_1$, $M_2$ paty kolmic spuštěných z bodu $M$ na přímky $p$, $q$ (obr. 24), pak je $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \lambda$, kde $\lambda$*) je dané kladné číslo.

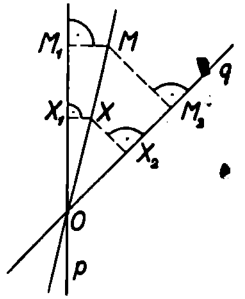
a) Obě přímky $p$, $q$ určují čtyři duté úhly. V každém z nich leží body našeho g. m. To nahlédneme, vedeme-li na př. s přímkou $q$ dvě rovnoběžky ve vzdálenosti 1 a s přímkou $p$ dvě rovnoběžky ve vzdá-

*) Čti lambda.

lenosti $\lambda$ (obr. 25). Tyto čtyři přímky se protnou ve čtyřech bodech $A$, $B$, $C$, $D$, z nichž každý leží v jednom ze čtyř úhlů a které všecky náležejí našemu g. m. bodů.



Obr. 25.



Obr. 26.

b) Označme si $O$ průsečík obou daných různoběžek, $M$ bod našeho g. m.; dokážeme nejprve, že každý bod $X$ přímky $OM$ s výjimkou bodu $O$ je bodem našeho g. m. (obr. 26). Bod $M$ patrně leží mimo přímky $p$, $q$ (neboť $\lambda > 0$). Označme $M_1$, $M_2$, $X_1$, $X_2$ paty kolmic spuštěných z bodů $M$, $X$ na přímky $p$, $q$. Zřejmě dostáváme dvě dvojice podobných trojúhelníků $\triangle OMM_1 \sim \triangle OXX_1$, $\triangle OMM_2 \sim \triangle OXX_2$. Podle základní věty o podobných trojúhelnících je $\overline{XX_1} = k_1 \,.\, \overline{MM_1}$, $\overline{OX} = k_1 \,.\, \overline{OM}$, také $\overline{XX_2} = k_2\overline{MM_2}$, $\overline{OX} = k_2\overline{OM}$. Z těchto vztahů vyplývá, že $k_1 = k_2$, a proto $\dfrac{\overline{XX_1}}{\overline{XX_2}} = \dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \lambda$. Všimněme si, že odůvodnění platí i v tom případě, že bod $X$ leží v úhlu vrcholovém k úhlu $M_1OM_2$.

c) Všecky body našeho g. m., které leží ve dvou vrcholových úhlech určených přímkami $p$, $q$, vyplňují tedy jednu nebo více přímek, které jdou bodem $O$ (bod $O$ sám nenáleží g. m.). Snadno nahlédneme, že taková přímka je ve dvou vrcholových úhlech jediná; kdyby totiž byly aspoň dvě, protĺaly by rovnoběžky vedené s přímkou $q$ ve vzdálenosti 1 celkem ve čtyřech bodech našeho g. m. Avšak v obou vrcholových úhlech leží jen dva takové body; viz odstavec a), obr. 25; jsou to dvojice $A$, $B$ nebo $C$, $D$.

Máme tedy výsledek: *g. m. bodů, které mají od dvou různoběžek stálý podíl vzdáleností, je dvojice přímek, které procházejí průsečíkem daných různoběžek. Tento průsečík však našemu g. m. nenáleží.*

Rozmyslete si, jakým způsobem jsme v předchozím příkladě dokázali totožnost obou množin bodů. Určete, co je g. m. z příkladu 18, je-li podíl $\lambda = 1$.

Další příklad g. m. založeného na podobnosti vede ke konstruktivnímu řešení důležité úlohy ze zeměměřičství, t. zv. úlohy Hansenovy. Nejprve si probereme tuto jednoduchou úlohu:

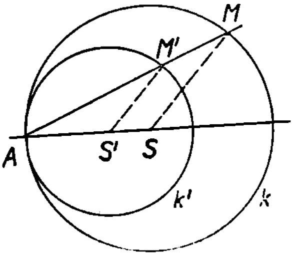
Příklad 19. Obr. 27. *Je dána kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem $r$, na ní bod $A$ a jisté kladné číslo $\lambda \neq 1$. Zvolíme bod $M \neq A$ na kružnici $k$ a na polopřímce $AM$ sestrojíme bod $M'$ tak, aby $\overline{AM'} = \lambda \, . \, \overline{AM}$. Ptáme se, co je g. m. bodů $M'$, probíhá-li bod $M$ kružnici $k$.*

Je zřejmé, že je-li $\lambda < 1$, leží celé g. m. uvnitř kružnice $k$, je-li $\lambda > 1$, leží g. m. vně kružnice $k$. Abychom rozřešili úlohu, zvolíme nejdříve bod $M$ na kružnici $k$ a mimo přímku $AS$, vedeme bodem $M'$ přímku rovnoběžnou s $SM$ a najdeme její průsečík $S'$ s přímkou $AS$. Trojúhelníky $ASM$, $AS'M'$ jsou podobné (proč?); protože $\overline{AM'} = \lambda \, . \, \overline{AM}$, je také $\overline{S'M'} = \lambda \, . \, \overline{SM} = \lambda \, . \, r$, $\overline{AS'} = \lambda \, . \, \overline{AS} = \lambda \, . \, r$. To znamená: vyjdeme-li z kteréhokoli bodu $M$ kružnice $k$, dostaneme vždy týž bod $S'$, který leží na polopřímce $AS$ ve vzdálenosti $\lambda \, . \, r$ od bodu $A$. Příslušný bod $M'$ našeho g. m. má od tohoto pevného bodu $S'$ vždy tutéž vzdálenost $\lambda r$. Leží tedy bod $M'$ na kružnici $k'$ se středem $S'$ a poloměrem $r' = \lambda \, . \, r$; kružnice $k'$ jde patrně bodem $A$ a má v něm s kružnicí $k$ vnitřní dotyk (proč?). Splyne-li bod $M$ s průsečíkem polopřímky $AS$ a kružnice $k$, splyne bod $M'$ s průsečíkem téže polopřímky a kružnice $k'$. To je zřejmé, uvážíme-li, že průměry obou kružnic jsou $2\lambda r$, $2r$ a mají podíl $\lambda$.

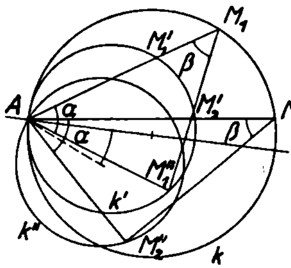
Bod $M$ dostaneme z bodu $M'$ obdobným způsobem, jako jsme dostali bod $M'$ z bodu $M$. Platí totiž $\overline{AM} = \frac{1}{\lambda} \overline{AM'}$. Probíhá-li bod $M' \neq A$ kružnici $k'$, pak leží bod $M$ podle předchozího výkladu stále na kružnici $k$. Z toho vyplývá, že každý bod $M' \neq A$ kružnice $k'$ je bodem našeho g. m.

Hledané g. m. bodů je tedy kružnice $k'$, která má v bodě $A$ s kružnicí $k$ vnitřní dotyk a má poloměr $\lambda \, . \, r$. Bod $A$ tomuto g. m. nenáleží.

Příklad 20. Tato úloha souvisí velmi úzce s předcházející. *Je dána opět kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem $r$ a na ní bod $A$. Dále* *jsou dány takové dva duté úhly $\alpha$, $\beta$, že platí $\alpha + \beta < 180°$. Zvolíme bod $M \neq A$ na kružnici $k$ a sestrojíme nad tětivou $SM$ jako stranou trojúhelník $AMM''$ tak, aby měl vnitřní úhly $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle M = \beta$. Takové trojúhelníky lze nad tětivou $SM$ sestrojiti dva: vybereme z nich na př. ten, u něhož polopřímka $AM$ přejde v polopřímku $AM''$ otočením kolem bodu $A$ o úhel $\alpha$ ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Na obr. 28 jsou sestrojeny dva takové trojúhelníky $AM_1M_1''$, $AM_2M_2''$. Zkoumejme, co je g. m. bodů $M''$, probíhá-li bod $M$ kružnici $k$.*




Obr. 27.



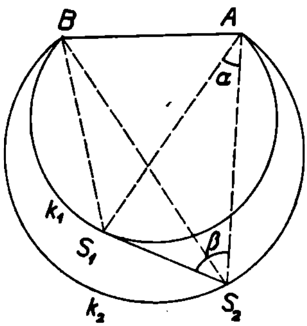

Obr. 28.

Trojúhelníky $AM_1M_1''$, $AM_2M_2''$, na obr. 28 jsou patrně podobné, proto $\overline{AM_2} = h \,.\, \overline{AM_1}$, $\overline{AM_2}'' = h \,.\, \overline{AM_1}''$; z těchto rovnic vyplývá, že $\dfrac{\overline{AM_2}''}{\overline{AM_2}} = \dfrac{\overline{AM_1}''}{\overline{AM_1}}$. Hodnotu podílu $\dfrac{\overline{AM''}}{\overline{AM}}$ stejnou pro všecky body $M$ kružnice $k$, označme písmenem $\lambda$. Na každé polopřímce $AM$ sestrojme bod $M'$ tak, že $\overline{AM'} = \overline{AM''}$, t. j. $\overline{AM'} = \lambda \,.\, \overline{AM}$. G. m. bodů $M'$ je podle příkladu 19 kružnice $k'$ (bez bodu $A$) o poloměru $\lambda r$, která má s kružnicí $k$ v bodě $A$ vnitřní dotyk. Protože každý bod $M''$ vznikne z příslušného bodu $M'$ otočením kolem bodu $A$ o úhel $\alpha$ ve smyslu pohybu ručiček hodinových, je g. m. bodů $M''$ kružnice $k''$ (bez bodu $A$), která vznikne z kružnice $k'$ otočením kolem bodu $A$ o úhel $\alpha$ ve smyslu pohybu ručiček hodinových.

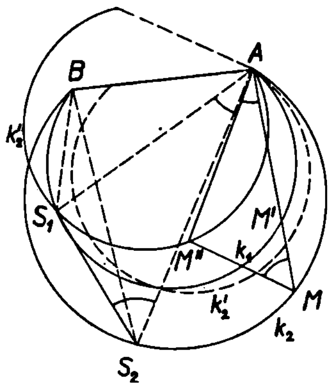
Nyní přikročíme k rozřešení Hansenovy úlohy.

Příklad 21. *Ve vodorovné rovině máme dva body $A$, $B$ (místa na povrchu zemském), jejichž vzdálenost $\overline{AB}$ známe. Na dvou stanovištích $S_1$, $S_2$ změříme úhly $AS_1B$, $AS_1S_2$. $AS_2B$, $\sphericalangle S_1S_2A = \beta$* (obr. 29). *Máme stanovit polohu bodů $S_1$, $S_2$.*

V trojúhelníku $AS_1S_2$ určíme úhel $\sphericalangle S_1AS_2 = \alpha$. Podobně jako při úloze Pothenotově (str. 16) leží body $S_1$, $S_2$ na obloucích kružnic, které jsou g. m. bodů, z nichž je viděti úsečku $AB$ pod daným úhlem. Zpravidla volíme body $S_1$, $S_2$ v téže polorovině vyťaté přímkou $AB$, takže jde pak jen o dva oblouky $k_1$, $k_2$ nad tětivou $AB$ (obr. 29). Zbývá určiti body $S_1$, $S_2$ na obloucích $k_1$, $k_2$ tak, aby trojúhelník $AS_1S_2$ měl při vrcholech $A$, $S_2$ předepsané úhly $\alpha$, $\beta$. Zvolíme bod $M$ na oblouku $k_2$ a sestrojíme podle obr. 28 bod $M''$. Probíhá-li bod $M$ oblouk $k_2$, je podle příkladu 20 g. m. bodů $M''$ jistý oblouk $k_2''$, který má za jeden krajní bod bod $A$. Oblouk $k_2''$ dostaneme takto: nejprve sestrojíme oblouk $k_2'$, který je g. m. bodů $M'$ na $AM$, pro něž $\overline{AM'} = \overline{AM''}$; pak otočíme oblouk $k_2'$ kolem bodu $A$ o úhel $\alpha$ ve smyslu pohybu ručiček hodinových. Bod $S_1$ je patrně průsečík oblouků $k_1$, $k_2''$.




Obr. 29.



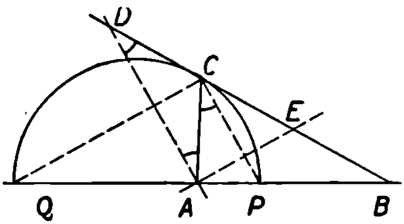

Obr. 30.

Celá konstrukce je provedena na obr. 30. V praxi ovšem zpravidla určujeme body $S_1$, $S_2$ výpočtem.

## 7. APOLLONIOVA KRUŽNICE

Nyní si probereme důležitý příklad g. m. založeného na pojmu podobnosti; je to t. zv. Apolloniona kružnice. Vyjdeme z jedné věty o trojúhelníku.

*Je dán trojúhelník ABC, který není rovnoramenný se základnou AB*, t. j. $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, *na př.* $\overline{AC} < \overline{BC}$ (obr. 31). *Pak osy vnitřního úhlu a vnějších úhlů při vrcholu C protínají přímku AB ve dvou bodech P, Q pro něž platí:*



Obr. 31.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

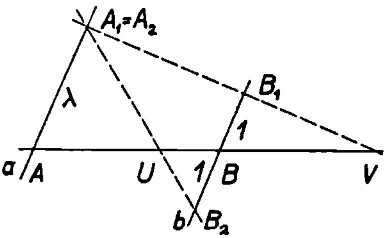
K důkazu sestrojíme na přímce $BC$ body $D$, $E$ tak, aby $\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{CA}$. Trojúhelníky $ADC$, $AEC$ jsou rovnoramenné. Vnější úhel $ACE$ trojúhelníka $ADC$ se rovná dvojnásobku vnitřního úhlu $DAC$, čili $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACP$, a tudíž $AD \parallel CP$. Podobně dostaneme, že $AE \parallel CQ$. Z rovnoběžnosti těchto dvou dvojic přímek vyplývá, že $\triangle BCP \sim \triangle BDA$, $\triangle BCQ \sim \triangle BEA$. Z první podobnosti plynou rovnice $\overline{BD} = k \,.\, \overline{BC}$, $\overline{BA} = k \,.\, \overline{BP}$, kde $k \neq 1$, čili $\overline{DC} = \overline{BD} - \overline{BC} = (1 - k)\,\overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = (1 - k)\,\overline{BP}$. Ježto $\overline{DC} = \overline{AC}$, je $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1 - k = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$. Podobně dostaneme z druhé dvojice podobných trojúhelníků rovnici $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$.

Příklad 22. *Hledejme nyní g. m. bodů, které mají od dvou různých pevných bodů A, B stálý podíl vzdáleností* $\lambda \neq 1$.

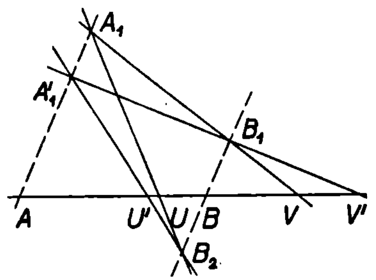
a) Nejprve si dokážeme, že naše g. m. má právě dva body na přímce $AB$, a to jeden uvnitř úsečky $AB$, druhý vně. Zvolme si $\lambda > 1$ a označme $U$, $V$ body našeho g. m. ležící uvnitř, resp. vně úsečky $AB$. Ježto $\dfrac{\overline{AU}}{\overline{BU}} = \dfrac{\overline{AV}}{\overline{BV}} = \lambda > 1$, je $\overline{AU} > \overline{BU}$, $\overline{AV} > \overline{BV}$. To znamená, že bod $U$ leží v polovině úsečky $AB$ přilehlé k bodu $B$, bod $V$ leží na prodloužení úsečky $AB$ za bod $B$ (obr. 32). Body $A$, $B$ vedeme nyní dvě rovnoběžky $a \parallel b$; na přímce $b$ sestrojíme body $B_1$, $B_2$ takové, že $\overline{BB_1} = \overline{BB_2} = 1$. Sestrojíme dále průsečík $A_1$ přímek $a$, $VB_1$. Dostaneme tak dva podobné trojúhelníky $\triangle AA_1V \sim \triangle BB_1V$ (shodují se ve dvou úhlech). Použijeme základní věty o podobných trojúhelnících; protože je $\overline{AV} = \lambda \overline{BV}$, je také $\overline{AA_1} = \lambda \cdot \overline{BB_1} = \lambda$. Bod $A_1$ leží tedy na přímce $a$, v polorovině $ABB_1$ (neboť $V$ je vně úsečky $AB$) a ve vzdálenosti $\lambda$ od bodu $A$. Bod $A_1$ je tudíž určen jednoznačně, proto existuje nejvýše jeden bod $V$ našeho g. m. vně úsečky $AB$. Uvedená konstrukce však ukazuje, že takový bod $V$ skutečně existuje, a udává způsob, jak jej sestrojíme.

Podobně spojnice $UB_2$ protne přímku $a$ v bodě $A_2$. Jako prve dokážeme, že bod $A_2$, který leží také v polorovině $ABB_1$ (neboť bod $U$ je uvnitř úsečky $AB$), má od bodu $A$ vzdálenost $\lambda$. Proto body $A_1$, $A_2$ splynou. Také bod $U$ je jediný a sestrojí se naznačeným způsobem.

Je-li dané číslo $\lambda < 1$, vyměníme oba body $A$, $B$ a použijeme předchozího výsledku. Tím je tvrzení a) úplně dokázáno.



Obr. 32.



Obr. 33.

b) Jsou dány opět dva pevné body $A$, $B$ a dvě navzájem různá kladná čísla $\lambda \neq 1$, $\lambda' \neq 1$. Sestrojme na přímce $AB$ body $U$, $V$, resp. $U'$, $V'$ příslušných g. m.; pak úsečky $UV$, $U'V'$ se nepřekrývají, ani nemají společný krajní bod, t. j. buď leží jedna uvnitř druhé, nebo leží každá z nich vně druhé. Toto tvrzení dokážeme snadno: je-li na př. $\lambda > 1$, $\lambda' < 1$ a označíme-li $S$ střed úsečky $AB$, pak podle úvahy odst. a) leží body $U$, $V$ na polopřímce $SB$, body $U'$, $V'$ na polopřímce $SA$, proto leží každá z úseček $UV$, $U'V'$ vně druhé. Je-li na př. $\lambda > \lambda' > 1$, pak konstrukce provedená na obr. 33 zřejmě ukazuje, že úsečka $UV$ leží uvnitř úsečky $U'V'$; je totiž $\overline{AA_1'} = \lambda' > \lambda = \overline{AA_1}$.

c) Mějme nyní bod $M$ našeho g. m. ležící mimo přímku $AB$: trojúhelník $ABM$ není rovnoramenný se základnou $AB$ ($\overline{AM} =$

$= \lambda . \overline{BM} \neq \overline{BM}$). Osy jeho úhlů při vrcholu $M$ procházejí podle věty o trojúhelníku (str. 22) a podle výsledku odstavce a) body $U$, $V$ na přímce $AB$. Trojúhelník $UMV$ je pravoúhlý, čili bod $M$ leží podle Thaletovy věty na kružnici $k$, sestrojené nad průměrem $UV$.

d) Zvolme si nyní libovolný bod $P$ mimo přímku $AB$ tak, aby $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \lambda' \neq \lambda$. Dokážeme, že bod $P$ neleží na kružnici $k$. Víme totiž podle odst. c); že bod $P$ leží na jisté (jiné) kružnici $k'$, sestrojené nad průměrem $U'V'$, a úsečky $UV$, $U'V'$ se podle odstavce b) nepřekrývají, ani nemají společný krajní bod; proto také kružnice $k$, $k'$ jsou bez společného bodu. Dokázali jsme tedy, že každý bod $X$ kružnice $k$ splňuje vztah $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \lambda$, neboť kdyby jej nesplňoval, neležel by podle předcházejícího výkladu na kružnici $k$. Vyslovíme výsledek:

*G. m. bodů, které mají od dvou pevných bodů $A$, $B$ stálý podíl vzdáleností různý od jedné, je kružnice se středem na přímce $AB$.* Tato věta pochází od starořeckého geometra Apollonia.

Předcházející výklad nám dává také jednoduchou konstrukci Apolloniovy kružnice: stačí sestrojit její průměr $UV$. Je jasné, proč vylučujeme hodnotu podílu $\lambda = 1$; co je g. m. bodů v tomto případě?

## 8. GEOMETRICKÁ MÍSTA BODŮ, JEJICHŽ VZDÁLENOSTI OD DVOU PŘÍMEK VYHOVUJÍ ROVNICI I. STUPNĚ

G. m. bodů, kterým jsme se zabývali na počátku 6. kapitoly v příkladě 18, je zvláštním případem g. m., které si nyní probereme.

Jsou dány dvě různoběžky $p$, $q$ a mimo to lineární rovnice o dvou proměnných $u$, $v$:

$$au + bv = c, \qquad (6)$$

kde $a$, $b$, $c$ jsou daná reálná čísla, $c \geqq 0$.*) Pokládejme $u$, $v$ za vzdálenosti bodu $M$ naší roviny od přímek $p$, $q$ a hledejme g. m. všech bodů $M$, jejichž vzdálenosti $u$, $v$ od přímek $p$, $q$ splňují rovnici (6). Snadno ukážeme, že tato úloha je zobecněním úlohy řešené v příkladě

*) Toho můžeme vždy dosáhnouti: je-li totiž $c < 0$, znásobíme rovnici (6) číslem $-1$.

18. Neboť g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od přímek $p$, $q$ mají stálý podíl je v našem označení charakterisováno rovnicí

$$\frac{u}{v} = \lambda. \tag{7}$$

Položíme-li v rovnici (6) $a = 1$, $b = -\lambda$, $c = 0$, dostaneme rovnici:

$$u - \lambda v = 0. \tag{8}$$

Rovnice (7), (8) nejsou ekvivalentní, ale všecka řešení rovnice (7) jsou řešeními rovnice (8) a všecka řešení rovnice (8) jsou řešeními rovnice (7) s výjimkou řešení $u = v = 0$. G. m. bodů, které splňují (8), jsou tedy dvě přímky procházející průsečíkem různoběžek $p$, $q$ i s tímto průsečíkem.

V dalším budeme tedy předpokládat, že $c > 0$ a dokážeme tuto větu:

*G. m. bodů, jejichž vzdálenosti $u$, $v$ od dvou daných různoběžek $p$, $q$ splňují rovnici*

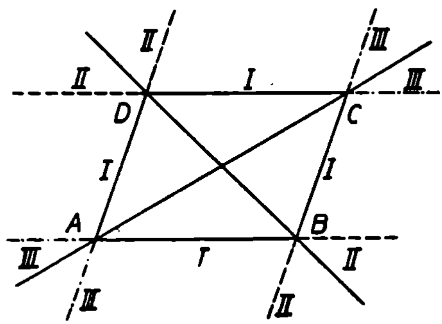
$$au + bv = c,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c > 0, \tag{6'}$$

*je buď obvod rovnoběžníka $ABCD$, jehož vrcholy leží na přímkách $p$, $q$, nebo se skládá ze čtyř polopřímek vzniklých prodloužením všech stran tohoto rovnoběžníka za dva protější vrcholy.*

Obr. 34 znázorňuje tři různé případy takového g. m.: jsou to čáry I, II, III.

Vzhledem ke znaménkům čísel $a$, $b$ máme tyto čtyři kombinace:

1) $a > 0,\ b > 0$,
2) $a > 0,\ b < 0$,
3) $a < 0,\ b > 0$,
4) $a < 0,\ b < 0$.

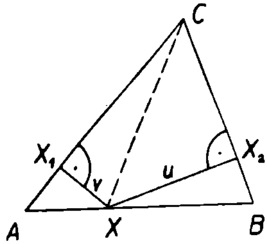


Obr. 34.

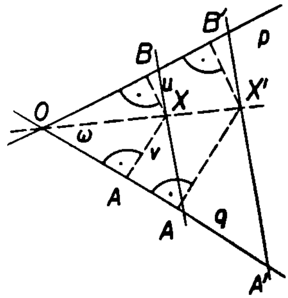
Případ 4 nedává žádné g. m., neboť vede k nerovnosti $au + bv \leq 0$, která je ve sporu s nerovností $c > 0$. Vyslovenou větou odvodíme podrobně jen v případě 1. V případech 2, 3 odvození jen naznačíme.

Vyjdeme z této věty o trojúhelníku: *Je dán libovolný trojúhelník $ABC$. Zvolíme libovolný bod $X$ strany $AB$ a označíme $u$, $v$ jeho vzdálenosti od přímek $BC$, $AC$* (obr. 35). *Pak součet $au + bv$, kde $a$, $b$ znamenají délky stran trojúhelníka $ABC$, má tutéž hodnotu pro všecky body $X$, je totiž roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka $ABC$.*

Na obr. 35 je naznačen vnitřní bod $X$ úsečky $AB$, $\overline{XX_1} = v$, $\overline{XX_2} = u$ jsou jeho vzdálenosti od přímek $AC$, $BC$. Spojnice $CX$ rozdělí $\triangle ABC$ na dva trojúhelníky $ACX$, $BCX$ a pro jejich obsahy platí: $2 \,.\, BCX + 2 \,.\, ACX = 2 \,.\, ABC$, čili $au + bv = 2 \,.\, ABC$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 35.



Obr. 36.

Vraťme se nyní k případu 1, t. j. k rovnici (6'), kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Zvolme si jeden z úhlů určených různoběžkami $p$, $q$ (na obr. 36 je to úhel $\omega$). Na rameni úhlu $\omega$ ležícím v přímce $p$ sestrojme bod $B$ tak, aby $\overline{OB} = a$, na rameně ležícím v přímce $q$ bod $A$ tak, aby $\overline{OA} = b$. Pro vzdálenosti $u$, $v$ každého bodu $X$ úsečky $AB$ od různoběžek $p$, $q$ platí podle věty o trojúhelníku vztah:

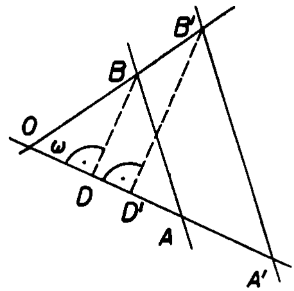
$$au + bv = 2P,$$

kde $P$ značí obsah trojúhelníka $ABC$. Naneseme na polopřímky $OA$, $OB$ od bodu $O$ úsečky $kb$, $ka$, kde $k$ je libovolné kladné číslo různé od jedné. Tak dostaneme body $A'$, $B'$ (obr. 36). Pro vzdálenosti každého bodu $X'$ úsečky $A'B'$ od různoběžek $p$, $q$ platí vztah

$$kau + kbv = 2P', \tag{9}$$

kde $P'$ značí obsah trojúhelníka $OA'B'$. V trojúhelnících $OAB$, $OA'B'$ spustíme výšky $BD$, $B'D'$ z vrcholů $B$, $B'$ (obr. 37). Vzniknou tak dva podobné trojúhelníky $\triangle OBD \sim \triangle OB'D'$. Protože je $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$, je také $\overline{B'D'} = k \cdot \overline{BD}$. Pro obsahy obou trojúhelníků máme $2P' = \overline{OA'} \cdot \overline{B'D'} = k \cdot \overline{OA} \cdot k \cdot \overline{BD} = k^2 \cdot 2P$. Dosadíme za $2P'$ do rovnice (9); vyjde $kau + kbv = 2k^2P$. Tato rovnice má táž řešení jako rovnice

$$au + bv = 2kP. \qquad (10)$$



Obr. 37.

Bod $X \neq O$ ležící v úhlu $\omega$ leží na jediné z úseček $A'B'$, neboť číslo $k$ je rovnicí (10) určeno jednoznačně. Má-li takový bod $X$ být bodem našeho g. m., t. j. mají-li vzdálenosti $u$, $v$ splňovati rovnici (6′), musí být $c = 2kP$, čili $k = \frac{c}{2P}$. Pak ovšem každý bod příslušné úsečky $A'B'$ $\left(\text{pro } k = \frac{c}{2P}\right)$ je bodem našeho g. m. — naproti tomu žádný bod úhlu $\omega$ mimo ni — ani bod $O$ — tomuto g. m. nenáleží. Hledané g. m. se tedy skládá ze čtyř úseček; úsečky ležící ve vrcholových úhlech jsou podle bodu $O$ středově souměrné, a tedy rovnoběžné; úsečky ve vedlejších úhlech mají společný krajní bod, ležící na přímce $p$ nebo $q$. G. m. je tedy obvod rovnoběžníka s vrcholy na různoběžkách $p$, $q$, jak jsme měli dokázat.

Vrcholy tohoto rovnoběžníka ležící na př. na přímce $p$ dostaneme snadno z rovnice (6′), neboť pro ně je $u = 0$. Jejich vzdálenost od přímky $q$ je $v = \frac{c}{b}$ a leží tedy na rovnoběžkách s přímkou $q$, vedených ve vzdálenosti $\frac{c}{b}$. Konstruktivně dostaneme úsečku délky $\frac{c}{b}$ třeba tak, že obdélník o stranách $c$, 1 proměníme v rovnoplochý obdélník o straně $b$; zbývající jeho rozměr je pak $\frac{c}{b}$.

Chceme-li určiti g. m. bodů dané rovnicí (6′) v případě 2 nebo 3, vyjdeme z této věty o trojúhelníku: *Je dán libovolný trojúhelník $ABC$. Zvolíme libovolný bod $X$ na prodloužení strany $AB$ za bod $A$ a označíme* *u*, *v* *jeho vzdálenosti od přímek BC, AC. Pak rozdíl au — bv, kde a, b znamenají délky stran trojúhelníka ABC, má tutéž hodnotu pro všecky body X, je totiž roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka ABC.*

Důkaz se dále provádí podobně jako v případě 1 a přenecháváme jej čtenáři. ●

Za povšimnutí stojí zvláštní případy těchto g. m., kdy buď $a = b = 1$, nebo $a = 1$, $b = -1$, nebo $a = -1$, $b = 1$. Tu jde o g. m. bodů, které mají od dvou různoběžek stálý součet, resp. rozdíl vzdáleností. Projde-li si čtenář odvození v těchto zvláštních případech, snadno nahlédne, že příslušná g. m. jsou buď obvod pravoúhlého rovnoběžníka nebo čtveřina polopřímek, které vzniknou prodloužením jeho stran.

**Cvičení.**

Ke kapitolám 1, 2.

1. Je dána kružnice $k$ a na ní bod $A$. Rozhodněte, zda jsou totožné tyto dvě množiny bodů: 1° přímka $AS$, 2° množina středů kružnic, které se dotýkají kružnice $k$ v bodě $A$.

2. Je dán a) čtverec $ABCD$, b) libolný vypuklý pětiúhelník $ABCDE$. $X \neq A$ je bod jeho obvodu. Co je g. m. středů úseček $AX$, probíhá-li bod $X$ obvod daného obrazce?

3. Dokažte, že g. m. středů stejně dlouhých tětiv dané kružnice $k$ je kružnice soustředná s $k$.

4. Určete g. m. bodů, z nichž lze vésti k dané kružnici tečny dané délky.

5. Je dána úsečka $AB$ a přímka $p$. Na přímce $p$ najděte bod, jehož vzdálenosti od bodů $A$, $B$ mají co nejmenší součet čtverců. Proveďte diskusi úlohy vzhledem k různým možným vzájemným polohám přímky $p$ a úsečky $AB$.

6. Je dán trojúhelník $ABC$, $X$ je libovolný bod strany $AB$, $V$ je průsečík jeho výšek. Označíme $X'$ bod souměrně položený k bodu $V$ podle přímky $CX$. Co je g. m. bodů $X'$, probíhá-li bod $X$ úsečku $AB$?

Ke kapitolám 3, 4.

7. $AB$, $CD$ jsou dva navzájem kolmé průměry kružnice se středem $S$, $E$, $F$ jsou středy úseček $AS$, $CS$. Určete vzdálenost polokružnice $ACB$ a úsečky a) $DE$, b) $EF$.

8. Uvnitř kružnice narýsujte trojúhelník a určete jeho vzdálenost od kružnice.

9. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník a uvnitř něho kružnici. Určete vzdálenost trojúhelníka od kružnice.

10. Je dán bod $S$ a dvě délky $a$, $v$. Určete g. m. středů úseček délky $a$, které mají od bodu $S$ vzdálenost $v$.