ÚVOD.

Při každé příležitosti se zdůrazňuje, že matematika vychovává k logicky přesnému myšlení, a přesto se často setkáváme i s dosti dobrými počtáři, kteří si nejsou jasně vědomi toho, v čem vlastně logická struktura matematických úsudků spočívá. Úkolem této knížky je podrobněji rozebrati několik typů úsudku, které se v elementární matematice nejčastěji vyskytují, a demonstrovati je na jednoduchých příkladech. Chceme-li provádět úsudky, které by byly bezvadné po stránce logické, musíme se důvěrně seznámit se zákony logiky a těchto zákonů musíme správně a důsledně užívat. Autor si je plně vědom toho, že ten, kdo se nikdy matematikou nezabýval, z tohoto svazečku se matematice nenaučí; přesto však se domnívá, že každému, kdo si chce podrobněji ujasnit logickou stránku matematických výroků, přijdou následující úvahy vhod. Omezený rozsah spisku si vynutil, že bylo přihlédnuto jen k několika nejjednodušším úvahám. Čtenář, který hledá bližší poučení o tom, jak matematika využívá logiky, najde je ve dvou přístupných a snadno pochopitelných knížkách, které vyšly ve sbírce Cesta k vědění, vydávané Jednotou československých matematiků a fysiků: *Miroslav Katětov*, Jaká je logická výstavba matematiky?, Cesta sv. 31, 1946, 2. vyd. 1950; *Otakar V. Zich*, Úvod do filosofie matematiky, Cesta sv. 34, 1947.

I. VÝROKY A JEJICH SKLÁDÁNÍ.

Matematika je věda deduktivní, která svoje poznatky odvozuje (dedukuje) z jiných poznatků, jejichž pravdivost předpokládá. Podobá se tedy jakési hře, ve které se ze základních prvků pomocí určitých pravidel sestavují útvary složitější. Tato pravidla podává nám logika a v této kapitole si odvodíme nejdůležitější z nich.

Výroky.

Základní prvky, jimiž se budeme v těchto úvahách zabývat, budeme nazývat výroky. Tímto názvem rozumíme každé sdělení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé či nepravdivé.

Předmětem výroku může býti cokoliv. Jako příklady výroků uvedeme: „Vltava protéká Prahou“, „zítra nebude neděle“, „$2 \times 3 = 5$“ atd. První z těchto výroků je pravdivý, o druhém lze velmi snadno rozhodnout, je-li pravdivý, či nikoli, a třetí z uvedených výroků je zřejmě nepravdivý.

Je li nějaký výrok pravdivý, říkáme stručně, že platí; není-li pravdivý, říkáme, že neplatí. Přitom se nestaráme ani o gramatickou ani o myšlenkovou strukturu výroků; výroky na jednodušší prvky již rozkládati nebudeme, ale budeme z výroků skládati útvary složitější a studovati zákony tohoto skládání.

Úkolem této knížky je všimnouti si, jak se z daných výroků tvoří výroky nové a jaké vlastnosti mají tyto nově utvořené výroky. Půjde tu o věc všeobecně platnou, která se netýká jen matematiky, nýbrž která podržuje svou platnost ve všech oborech lidského myšlení. To, že budeme svoje vývody ilustrovat příklady, jež se většinou týkají matematiky, má svou příčinu jednak v tom, že matematika se snaží všecky své výroky formulovat vždy co nejpřesněji, jednak v tom, že příklady z matematiky jsou autorovi nejbližší.

Základní vlastnosti každého výroku jsou tyto:

1. Od každého výroku požadujeme, aby buď platil nebo neplatil — třetí možnosti není (*zásada vyloučené třetí možnosti*). Nepřipouštíme tedy možnost, aby výrok byl pravdivý jen částečně; sdělení, která jsou pravdivá jen částečně, nebo taková, o jejichž pravdivosti nemá vůbec smysl hovořit, názvem výrok označovati nebudeme a vyloučíme je ze svých úvah.

2. Dále budeme od každého výroku žádati, aby z obou uvedených možností byla splněna právě jedna; t. j. není možno, aby nějaký výrok současně platil i neplatil (*zásada sporu*). Je-li výrok pravdivý, není možné, aby byl současně nepravdivý, a je-li nepravdivý, není možné, aby byl současně pravdivý.

Negace.

Jestliže ze dvou výroků jeden tvrdí přesně to, co druhý výrok popírá, říkáme, že jeden z nich je **negací***) druhého. Je třeba výslovně

*) Nego (latinsky) znamená popírám.

upozorniti na to, že původní výrok i jeho negace dohromady musí vyčerpávati všecky možnosti, které mohou nastati. Negací (pravdivého) výroku „Vltava protéká Prahou" je (nepravdivý) výrok „Vltava neprotéká Prahou"; negací výroku „zítra nebude neděle" je výrok „zítra bude neděle", při čemž z těchto dvou výroků je jeden pravdivý a druhý nepravdivý; negací (nepravdivého) výroku „$2 \times 3 = 5$" je (pravdivý) výrok „$2 \times 3 \neq 5$" (čteme dvakrát tři není pět) atd.

Všimněme si posledního příkladu poněkud blíže. Negací výroku „$2 \times 3 = 5$" nemůže být výrok „$2 \times 3 = 6$", neboť tyto dva výroky dohromady nevyčerpávají všecky možnosti, které mohou nastati; na příklad možnost „$2 \times 3 = 7$" není obsažena v žádném z výroků „$2 \times 3 = 5$", „$2 \times 3 = 6$", ale ve výroku „$2 \times 3 \neq 5$" obsažena je. Proto negací výroku „$2 \times 3 = 5$" je výrok „$2 \times 3 \neq 5$" a žádný jiný.

Nejčastější chyba při tvoření negací tkví právě v tom, že se na některou možnost zapomíná. Uveďme ještě jeden příklad. Negací výroku „$a > b$" (a je větší než b) je výrok „$a \leqq b$" (a je menší než b nebo a je rovno b) a nikoli výrok „$a < b$" (a je menší než b). Kdybychom za negaci považovali výrok „$a < b$", zapomněli bychom na třetí možnost „$a = b$".

Podle toho, co bylo řečeno výše, je jasné, že ze dvou výroků, z nichž jeden je negací druhého, je pravdivý vždy právě jeden; platí-li původní výrok, neplatí jeho negace, a neplatí-li původní výrok, platí jeho negace.

Abychom si ušetřili dlouhé psaní, budeme v dalším výroky označovati velkými písmeny tištěnými nápadnými typy. Negaci výroku **A** budeme zapisovati znakem non**A**.*) Značí-li **A** třeba výrok „včera jsem byl v divadle", značí non**A** výrok „včera jsem nebyl v divadle", což je ovšem totéž, jako kdybychom řekli „není pravda, že jsem byl včera v divadle".

Pokud se týká pravdivosti, jsou možné tyto dva případy:

1. buď **A** platí a non**A** neplatí,
2. nebo **A** neplatí a non**A** platí.

Řekneme-li „**A** platí", znamená to totéž jako „non**A** neplatí"; řekneme-li „**A** neplatí", znamená to totéž jako „non**A** platí".

*) Non (latinsky) znamená ne.

Negací negovaného výroku dostaneme zřejmě opět výrok původní, neboť výroky **A** a non**A** vyčerpávají všecky možnosti. Zahrnuje tedy negace výroku non**A**, t. j. výrok nonnon**A**, všecky možnosti, které nejsou obsaženy ve výroku non**A**; ale to jsou právě ty možnosti, které v sobě zahrnuje výrok **A**. Je tedy výrok nonnon**A** totožný s výrokem **A**. Dvojnásobná negace nám tedy dává opět výrok původní.

Implikace.

Máme-li dva výroky **A**, **B**, můžeme jejich pravdivost kombinovat celkem čtverým různým způsobem. Jsou možné tyto případy:

I. **A** platí, **B** platí.
II. **A** platí, **B** neplatí.
III. **A** neplatí, **B** platí.
IV. **A** neplatí, **B** neplatí.
(1)

Z těchto možností za určitých okolností některé mohou nastat, jiné nikoli. Pro nás nejdůležitější je ten případ, že je vyloučena možnost II., kdežto ostatní tři možnosti jsou přípustné. Pak tyto přípustné tři možnosti znamenají toto: Když platí **A**, platí také **B** (možnost I.), ale když **A** neplatí, nemůžeme rozhodnouti, platí-li **B** čili nic (možnosti III. a IV.). V každém případě však platnost výroku **A** je doprovázena platností výroku **B**.

Ilustrujme si to na příkladě. Výrok **A** nechť třeba znamená „prší" a výrok **B** nechť znamená „je mokro". Řekneme-li, že **A** neplatí, znamená to podle předcházejícího totéž jako non**A** platí, t. j. „neprší". Podobně tvrzení, že výrok **B** neplatí, znamená totéž jako tvrzení, že non**B** platí, t. j. „je sucho". Uvedené čtyři možnosti jsou:

I. Prší a je mokro.
II. Prší a je sucho.
III. Neprší a je mokro.
IV. Neprší a je sucho.

Možnost II. však nenastane. To znamená: Když prší, je zcela určitě mokro, ale podle toho, že neprší, ještě nemůžeme rozhodnout, je-li mokro či sucho, neboť je-li mokro, může to nastati i jindy, než když právě prší.

Ukážeme si to ještě na jiném příkladě, tentokrát z matematiky. Mějme dvě čísla, z nichž jedno označíme a, druhé x, jejich součin ax. Výrok ***A*** nechť znamená „$x = 0$" a výrok ***B*** nechť jest „$ax = 0$". Pak non***A*** jest „$x \neq 0$" a non***B*** je „$ax \neq 0$". Jsou myslitelné čtyři možnosti:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & x = 0,\ ax = 0. \\ \text{II.} & x = 0,\ ax \neq 0. \\ \text{III.} & x \neq 0,\ ax = 0. \\ \text{IV.} & x \neq 0,\ ax \neq 0. \end{array}$$

Víme, že nenastane možnost II., neboť není možné, aby současně bylo $x = 0$ a $ax \neq 0$. To tedy znamená: když je $x = 0$, je také $ax = 0$, ale když $x \neq 0$, nemůžeme rozhodnout, je-li $ax = 0$ či $ax \neq 0$, neboť je možné, že $ax = 0$, i když $x \neq 0$ (to nastane tehdy, když je $a = 0$). Ale to, že $x = 0$, má vždy za následek, že také $ax = 0$.

Jestliže ze čtyř možností uvedených v tabulce (1) nenastane případ II., pak platnost výroku ***A*** má za následek platnost výroku ***B***; jinak říkáme také, že z platnosti výroku ***A*** plyne platnost výroku ***B***, nebo ještě jinak, že platnost výroku ***A*** **implikuje***) platnost výroku ***B***, a krátce to zapisujeme takto:

$$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}.$$

Tento zápis čteme také takto: „Když platí ***A***, platí také ***B***" nebo „z toho, že platí ***A***, následuje, že platí také ***B***" nebo také „***B*** platí, platí-li ***A***" a pod. Popsaný vztah mezi oběma výroky označujeme názvem **implikace.**

A nyní přijde to nejzajímavější, co většina čtenářů jistě dobře ví, ale možná, že si to některý čtenář dosud jasně neuvědomil. Řekneme-li „***A*** platí", je to totéž, jako kdybychom řekli „non***A*** neplatí", a řekneme-li „***A*** neplatí", je to totéž, jako kdybychom řekli „non***A*** platí". Podobně „***B*** platí" znamená totéž jako „non***B*** neplatí" a „***B*** neplatí" znamená totéž jako „non***B*** platí". Přepišme podle toho tabulku (1) tak, že místo ***A*** napíšeme non***A***, místo ***B*** napíšeme non***B*** a slova „platí" a „neplatí" navzájem vyměníme. Vznikne nová tabulka s předcházející co do smyslu přesně totožná:

*) Implico (latinsky) značí vplétám.

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ neplatí.} \\
\text{II.} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ platí.} \\
\text{III.} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ platí,} & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ neplatí.} \\
\text{IV.} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ platí,} & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ platí.}
\end{array}
$$

V této tabulce nyní navzájem zaměníme oba sloupce a řádky napíšeme v pořadí IV., II., III., I. Dostaneme

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{I}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ platí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ platí.} \\
\text{II}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ platí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ neplatí.} \\
\text{III}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ neplatí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ platí.} \\
\text{IV}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ neplatí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ neplatí.}
\end{array}
\right\} \qquad (2)
$$

Rozdíl mezi původní tabulkou (1) a novou tabulkou (2) je čistě jen formální, obsahově jsou totožné. Nenastane-li v tabulce (1) případ II., nemůže ani v tabulce (2) nastati případ II'., který je s ním totožný. Avšak tabulka (2) má formálně týž tvar jako tabulka (1), toliko s tím rozdílem, že místo $\boldsymbol{A}$ v tabulce (1) je non$\boldsymbol{B}$ v tabulce (2) a místo $\boldsymbol{B}$ v tabulce (1) je non$\boldsymbol{A}$ v tabulce (2). Značí-li tedy tabulka (1), v níž nenastane případ II., implikaci

$$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B},$$

značí tabulka (2), v níž rovněž nenastane případ II'., implikaci

$$\text{non}\boldsymbol{B} \Rightarrow \text{non}\boldsymbol{A}.$$

Obě implikace jsou tedy totožné. Proto můžeme implikaci $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ vyslovit také ve tvaru non$\boldsymbol{B} \Rightarrow$ non$\boldsymbol{A}$.

Překontrolujme si to na našich dvou příkladech. První z nich vyslovil implikaci: „Když prší, je mokro". Negace výroku „je mokro" je „je sucho"; negace výroku „prší" je „neprší". Naše nová implikace tedy zní: „Když je sucho, neprší". Ta je totožná s implikací původní, neboť připouští tyto možnosti: a) je sucho a neprší, b) je mokro a neprší, c) je mokro a prší. Tyto možnosti jsou totožné s možnostmi, které připouštěla implikace původní.

Podobně je tomu i ve druhém příkladě: „Je-li $x = 0$, je $ax = 0$". Negace výroku „$ax = 0$" je „$ax \neq 0$"; negace výroku „$x = 0$" je „$x \neq 0$". Proto uvedenou implikaci můžeme vyslovit také ve tvaru: „Je-li $ax \neq 0$, je také $x \neq 0$". To opět značí, že nastane některá z možností: a) $ax \neq 0$, $x \neq 0$, b) $ax = 0$, $x \neq 0$, c) $ax = 0$, $x = 0$, které připouštěla implikace původní.

Uveďme ještě jeden příklad tohoto druhu, který si čtenář sám podrobně rozebere. Věta: „Je-li trojúhelník rovnostranný, má dva úhly stejné" říká přesně totéž jako věta: „Nemá-li trojúhelník dva úhly stejné, není rovnostranný".

Výroky, jejichž platnost je prokázána, označujeme zpravidla názvem **věta** čili **poučka** nebo také cizím slovem **theorém**. Velká většina vět, s nimiž se v matematice setkáváme, má právě formu implikace $A \Rightarrow B$ (z platnosti výroku A plyne platnost výroku B). Poslední dva příklady jsou příklady vět vyslovených formou implikace. Výroku A dáváme přitom zpravidla název **podmínka**, výroku B název **tvrzení**. Touž implikaci však podle předcházejícího dostaneme, jestliže za podmínku považujeme negaci tvrzení a za tvrzení negaci podmínky, t. j. implikace $A \Rightarrow B$ je totožná s implikací $\mathrm{non}B \Rightarrow \mathrm{non}A$.

Výslovně však podotýkáme, že implikace $A \Rightarrow B$ znamená něco jiného než implikace $B \Rightarrow A$. Platí-li implikace $A \Rightarrow B$, nemusí ještě platit implikace $B \Rightarrow A$. Je-li na příklad správné, že z výroku „$x = 0$" plyne výrok „$ax = 0$", neznamená to ještě, že by naopak z výroku „$ax = 0$" musel plynouti výrok „$x = 0$", a to také neplyne, neboť víme, že může býti $ax = 0$ i když $x \neq 0$.

Ekvivalence.

Jestliže ze čtyř možností obsažených v tabulce (1) mohou nastati toliko možnosti I. a IV., kdežto možnosti II. a III. nastati nemohou, říkáme, že oba výroky A, B jsou navzájem **ekvivalentní**.*) Vztah obou takových výroků se nazývá **ekvivalence**. Ekvivalence výroků A, B tedy znamená, že mohou nastati tyto dvě možnosti:

a) A platí, B platí,

b) A neplatí, B neplatí.

Že výroky A, B jsou ve vztahu ekvivalence, zapisujeme takto:

$$A \Leftrightarrow B.$$

To lze čísti: „Když platí A, platí také B, a když A neplatí, neplatí ani B". Jinak říkáme také: „Výrok B platí tehdy a jen tehdy, když platí A". Slov „tehdy a jen tehdy" užíváme proto, aby nemohla nastati záměna s implikací, která byla popsána v předešlém odstavci.

---

*) Aequus latinsky znamená stejný, valeo platím.

Uvedeme si příklad dvou ekvivalentních výroků. Výrok **A** bude: „mrzne“ a výrok **B** bude „na klidné vodě se tvoří led“. Tyto dva výroky jsou ekvivalentní, neboť mohou nastati jen tyto dvě možnosti:

a) buď mrzne a pak se na vodě tvoří led,
b) nebo nemrzne a na vodě se led netvoří.

Každá jiná možnost je vyloučena. Naši ekvivalenci můžeme vyslovit třeba takto: „Na klidné vodě se tvoří led tehdy a jen tehdy, když mrzne“.

Na prvý pohled je vidno, že ekvivalence

$$\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$$

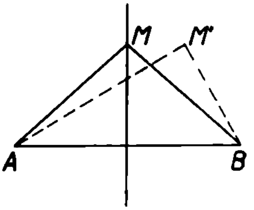
znamená přesně totéž jako ekvivalence

$$\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A},$$

neboť obě značí, že může nastati některá z těchto dvou možností:

a) **A** platí, **B** platí,
b) **B** neplatí, **B** neplatí.

Není tedy třeba dávat pozor na to, v jakém pořádku po sobě následují oba výroky v ekvivalenci. Proto můžeme předcházející příklad vysloviti také ve tvaru: „Mrzne tehdy a jen tehdy, když se na klidné vodě tvoří led“.



Obr. 1.

Víme, že v rovinné geometrii platí věta: „Bod M má od dvou (navzájem různých) bodů A, B stejné vzdálenosti tehdy a jen tehdy, leží-li na ose úsečky AB“. Tu máme dva výroky: jeden je „bod M má od dvou bodů A, B stejné vzdálenosti“ a druhý „bod M leží na ose úsečky AB“ (viz obr. 1). Tyto dva výroky jsou navzájem ekvivalentní; to znamená dvě věci:

a) Každý bod M, který má od bodů A, B stejné vzdálenosti, leží na ose úsečky AB.

b) Každý bod M', který nemá od bodů A, B stejné vzdálenosti, leží mimo osu úsečky AB.

Můžeme tedy slova „libovolný bod, který má od bodů A, B stejné vzdálenosti“, nahraditi slovy „libovolný bod na ose úsečky AB“.

Ptejme se nyní, je-li možné, aby mezi dvěma výroky $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platilo

$$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B} \text{ a současně } \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}.$$

Prvá implikace značí, že může nastati některá z možností

$\boldsymbol{A}$ platí, $\boldsymbol{B}$ platí,
$\boldsymbol{A}$ neplatí, $\boldsymbol{B}$ platí,
$\boldsymbol{A}$ neplatí, $\boldsymbol{B}$ neplatí,

kdežto možnost „$\boldsymbol{A}$ platí, $\boldsymbol{B}$ neplatí" je vyloučena. Podobně druhá implikace značí, že může nastati některá z možností

$\boldsymbol{B}$ platí, $\boldsymbol{A}$ platí,
$\boldsymbol{B}$ neplatí, $\boldsymbol{A}$ platí,
$\boldsymbol{B}$ neplatí, $\boldsymbol{A}$ neplatí,

při čemž možnost „$\boldsymbol{B}$ platí, $\boldsymbol{A}$ neplatí" je vyloučena. Mají-li platit obě uvedené implikace současně, nemůže nastat žádná z vyloučených možností. Může tedy nastati toliko některá z možností zbývajících, t. j.

a) $\boldsymbol{A}$ platí, $\boldsymbol{B}$ platí,
b) $\boldsymbol{A}$ neplatí, $\boldsymbol{B}$ neplatí.

To však znamená, že oba výroky jsou ve vztahu ekvivalence

$$\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}.$$

Je tedy ekvivalence $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$ totožná se dvěma současně platnými implikacemi $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}$, které, jak víme z předchozího, můžeme též nahraditi současně platnými implikacemi $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, non$\boldsymbol{A} \Rightarrow$ non$\boldsymbol{B}$. Věta $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$ tedy znamená totéž jako dvě věty současně platné $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}$, což je totéž jako $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, non$\boldsymbol{A} \Rightarrow$ non$\boldsymbol{B}$. Větu $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ (čili non$\boldsymbol{A} \Rightarrow$ non$\boldsymbol{B}$) nazýváme **větou obrácenou** k větě $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$.

Větu vyslovenou v předcházejícím příkladě ve tvaru ekvivalence vyslovujeme často pouze ve tvaru implikace, a to takto: „Každý bod M, který má od dvou (navzájem různých) bodů A, B stejné vzdálenosti, leží na ose úsečky AB". Věta obrácená k této větě pak zní takto: „Každý bod M, který leží na ose úsečky AB, má od obou krajních bodů této úsečky stejné vzdálenosti", což je totéž jako věta „Každý bod M', který nemá o bodů A, B stejné vzdálenosti, leží mimo osu úsečky AB".

Obě implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ platí současně tehdy a jen tehdy, když platí ekvivalence $A \Leftrightarrow B$. Již na str. 9 bylo upozorněno na to, že platí-li implikace $A \Rightarrow B$, nemusí ještě platit implikace obrácená $B \Rightarrow A$. Na to se často zapomíná. Jedním z nejčastějších zdrojů chyb při úvahách matematických bývá to, že z implikace $A \Rightarrow B$ nesprávně soudíme na platnost implikace $B \Rightarrow A$. Třeba si pamatovat, že z platné implikace $A \Rightarrow B$ vyplývá platná implikace non$B \Rightarrow$ non$A$, ale nikoli implikace $B \Rightarrow A$.

Každý čtenář jistě zná ze školy větu: „(Víceciferné) číslo je dělitelné čtyřmi, je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi". Na příklad číslo 5736 je dělitelné čtyřmi, poněvadž jeho poslední dvojčíslí, t. j. číslo 36, je dělitelné čtyřmi. Věta však platí také obráceně, t. j. platí: „Je-li číslo dělitelné čtyřmi, je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi", což lze říci také takto: „Číslo není dělitelné čtyřmi, není-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi". Oba výroky: „číslo je dělitelné čtyřmi" a „poslední dvojčíslí čísla je dělitelné čtyřmi" jsou navzájem ekvivalentní. Všimněme si ještě toho, že také platí věta: „Je-li číslo dělitelné osmi, je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi." Na příklad číslo 5736 je dělitelné osmi, neboť $5736 : 8 = 717$ beze zbytku, a také jeho poslední dvojčíslí, t. j. 36, je dělitelné čtyřmi. Chyba by však byla, kdybychom odtud chtěli soudit na správnost věty obrácené: „Číslo je dělitelné osmi, je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi." Tato obrácená věta neplatí, jak je vidno třeba z čísla 5732, jehož poslední dvojčíslí 32 je sice dělitelné čtyřmi, ale číslo samo není dělitelné osmi, neboť $5732 : 8 \doteq 716$ se zbytkem 4. Je tedy třeba, abychom při obracení vět byli náležitě opatrní.

Chceme-li dokázat, že dva výroky A, B jsou ekvivalentní, provádíme to zpravidla tak, že dokážeme současnou platnost obou implikací $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$; místo druhé z nich však můžeme také vzíti implikaci non$A \Rightarrow$ non$B$. Dokážeme tedy nejprve, že z výroku A plyne B, a potom dokážeme, že také naopak z výroku B plyne A. Můžeme však také dokazovat, že z výroku A plyne B a z výroku non$A$ plyne non$B$.

Konjunkce a disjunkce.

Jsou-li A, B dva výroky, u nichž ze všech možností uvedených v tabulce (1) může být splněna pouze možnost I., kdežto žádná z dalších splněna být nemůže, pak vztah mezi oběma výroky označujeme názvem konjunkce*) výroků **A**, **B**. Konjunkce tedy znamená, že ze všech možností nastane tato jediná

A platí, **B** platí.

Nastane-li konjunkce výroků **A**, **B**, znamená to, že oba výroky platí; v dalším to budeme zapisovati

A a **B**.

Konjunkci vyslovujeme takto: „Platí **A** a platí **B**".

Příklad: Výrok **A** je třeba „večer padal sníh" a výrok **B** je „v noci byl mráz". Konjunkce obou výroků zní: „Večer padal sníh a v noci byl mráz". To znamená, že oba výroky, z nichž se konjunkce skládá, platí.

Jiný příklad: Výrok **A** buď „$x < 1$", výrok **B** buď „$x \geqq 0$" (x není menší než 0). Konjunkci obou výroků můžeme vysloviti takto: „Číslo x je menší než 1, ale není menší než 0", což se zapisuje krátce také takto: „$0 \leqq x < 1$". Spojka „ale" značí současnou platnost obou výroků, které jsou jí spojeny, stejně jako spojka „a"; rozdíl mezi oběma spojkami tkví pouze ve vzájemném vztahu obou výroků po stránce obsahové, které si logický rozbor nevšímá.

Jestliže z možností uvedených v tabulce (1) nemůže nastati možnost IV., kdežto ostatní možnosti nastati mohou, dostáváme vztah mezi výroky, který nazýváme disjunkce.**) Disjunkce výroků **A**, **B** tedy znamená, že nastane některá z možností

a) **A** platí, **B** platí,
b) **A** platí, **B** neplatí,
c) **A** neplatí, **B** platí,

t. j. že z obou výroků platí aspoň jeden. Disjunkci výroků **A**, **B** vyslovujeme zpravidla takto: „Platí **A** nebo (také) **B** (nebo obojí)" a budeme ji krátce zapisovat

A nebo **B**.

Opět si to ukážeme na příkladě. Disjunkce výroků „večer vám zatelefonuji" a „zítra vás navštívím" zní takto: „Večer vám zatele-

*) Coniungo (latinsky) značí spojuji.
**) Disiungo (latinsky) značí rozpojuji.

fonuji nebo vás zítra navštívím", při čemž se nevylučuje možnost, že učiním obojí.

Uvedeme ještě jeden příklad. Z výroků „trojúhelník ABC je rovnoramenný" a „trojúhelník ABC je pravoúhlý" dostaneme disjunkci: „Trojúhelník ABC je rovnoramenný nebo pravoúhlý", při čemž opět nevylučujeme možnost, že je rovnoramenný i pravoúhlý současně.

Utvořme nyní negaci konjunkce

A a **B**.

To znamená, že z možností uvedených v tabulce (1) může nastati kterákoliv kromě možnosti I., t. j. mohou nastati možnosti

II. **A** platí, **B** neplatí,
III. **A** neplatí, **B** platí,
IV. **A** neplatí, **B** neplatí.

Jestliže místo **A** píšeme non**A**, místo **B** píšeme non**B**, a navzájem vyměníme slova „platí" a „neplatí", jak jsme to již několikrát učinili, dostaneme tyto možnosti (psané v pořadí IV., III., II.):

a) non**A** platí, non**B** platí,
b) non**A** platí, non**B** neplatí,
c) non**A** neplatí, non**B** platí.

To však není nic jiného než disjunkce

non**A** nebo non**B**.

Značí tedy negace konjunkce „**A** a **B**" přesně totéž jako disjunkce „non**A** nebo non**B**".

Vezměme si třeba konjunkci z prvního příkladu v tomto odstavci: „Večer padal sníh a v noci byl mráz". Utvořme její negaci. Ta zní podle předcházejícího vzorce: „Večer nepadal sníh nebo v noci nebyl mráz". Skutečně původní konjunkce připouští pouze prvou ze čtyř možností:

I. večer padal sníh a v noci byl mráz,
II. večer padal sníh a v noci nebyl mráz,
III. večer nepadal sníh a v noci byl mráz,
IV. večer nepadal sníh a v noci nebyl mráz,

takže její negace musí připouštěti zbývající tři, t. j. musí mít tvar disjunkce výroků: „večer nepadal sníh“ a „v noci nebyl mráz“.

Podobně konjunkce „$x < 1$ a $x \geqq 0$“ z druhého našeho příkladu má negaci „$x \geqq 1$ nebo $x < 0$“. Zase daná konjunkce připouští pouze prvou ze čtyř možností

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & x < 1,\ x \geqq 0, \\ \text{II.} & x < 1,\ x < 0, \\ \text{III.} & x \geqq 1,\ x \geqq 0, \\ \text{IV.} & x \geqq 1,\ x < 0. \end{array}$$

Musí tedy její negace připouštěti zbývající tři a být disjunkcí výroků „$x \geqq 1$“ a „$x < 0$“. Že žádné takové číslo x, které by splňovalo možnost IV., neexistuje, je lhostejné.

Podobně podrobíme zkoumání negaci disjunkce

$$\boldsymbol{A} \text{ nebo } \boldsymbol{B}.$$

Tato disjunkce značí, že je splněna některá z možností

a) **A** platí, **B** platí,
b) **A** platí, **B** neplatí,
c) **A** neplatí, **B** platí,

t. j. z obou výroků platí aspoň jeden. Její negace tedy může připouštěti toliko možnost čtvrtou, která ještě zbývá, t. j. možnost

A neplatí, **B** neplatí.

Je to tedy konjunkce

non**A** a non**B**.

Negace disjunkce „**A** nebo **B**“ vyslovuje přesně totéž jako konjunkce „non**A** a non**B**“.

Před chvílí jsme uvedli tento příklad disjunkce: „Večer vám zatelefonuji nebo vás zítra navštívím“. Její negaci vyslovíme ve tvaru konjunkce: „Nebudu vám večer telefonovat a také vás zítra nenavštívím“.

Podobně negace disjunkce: „Trojúhelník ABC je rovnoramenný nebo pravoúhlý“ se vyjádří jako konjunkce: „Trojúhelník ABC není rovnoramenný a není pravoúhlý“, což zpravidla vyslovujeme ve tvaru „Trojúhelník ABC není ani rovnoramenný ani pravoúhlý“.

Všimněme si disjunkce

$$A \text{ nebo } B$$

ještě s jiné strany. Tato disjunkce značí, že je splněna některá z možností

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & A \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{b)} & A \text{ platí,} & B \text{ neplatí,} \\ \text{c)} & A \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

kdežto možnost „A neplatí, B neplatí" je vyloučena. Víme, že „A platí" značí totéž jako „non$A$ neplatí" a „A neplatí" značí totéž jako „non$A$ platí". Proto naše tři možnosti vyjádřené tabulkou (3) můžeme přepsat (v pořadí c, a, b) takto:

non$A$ platí, B platí,
non$A$ neplatí, B platí,
non$A$ neplatí, B neplatí,

kdežto možnost „non$A$ platí, B neplatí" je podle předchozího vyloučena. To však značí, že výroky non$A$ a B jsou ve vztahu implikace, takže disjunkce „A nebo B" říká přesně totéž jako implikace

$$\text{non}A \Rightarrow B.$$

Tato implikace však také znamená totéž jako implikace

$$\text{non}B \Rightarrow A,$$

neboť, jak víme, nonnon$A$ je přesně totéž jako A. O tom se lze ostatně přesvědčit velmi snadno přímo, když v tabulce (3) píšeme „non$B$ neplatí" místo „B platí" a „non$B$ platí" místo „B neplatí" a oba sloupce navzájem zaměníme.

Vraťme se k disjunkci: „Večer vám zatelefonuji nebo vás zítra navštívím". To je přesně totéž jako implikace: „Když vám večer nebudu telefonovat, zítra vás navštívím" a také je to totéž jako implikace: „Když vás zítra nenavštívím, zatelefonuji vám večer". Všecky tři věty znamenají totéž, totiž to, že jsou myslitelné tyto tři možnosti:

a) večer vám zatelefonuji a zítra vás navštívím,
b) večer vám zatelefonuji a zítra vás nenavštívím,
c) večer vám nebudu telefonovat a zítra vás navštívím.

Podobně disjunkce: „Večer nepadal sníh nebo v noci nebyl mráz" má přesně týž význam jako implikace: „Z toho, že v noci byl mráz, plyne, že večer sníh nepadal" nebo jako implikace: „Z toho, že večer padal sníh, plyne, že v noci nebyl mráz". Všecka tři sdělení vyjadřují touž myšlenku, totiž tu, že sníh nezůstal ležet.

Stejně tak disjunkci: „Trojúhelník ABC je rovnoramenný nebo pravoúhlý" možno vyjádřit ve tvaru implikace: „Není-li trojúhelník ABC rovnoramenný, je pravoúhlý" nebo také: „Není-li trojúhelník ABC pravoúhlý, je rovnoramenný".

Konečně disjunkci: „$x \geqq 1$ nebo $x < 0$" můžeme vysloviti také jako implikaci: „Když je x menší než 1, je také menší než 0" (ve značkách: „Když je $x < 1$, je také $x < 0$") nebo jako implikaci: „Když je $x \geqq 0$, je také $x \geqq 1$". Čtenář si tyto příklady jistě sám podrobně promyslí.

Cvičení.

1. Zjistěte, jsou-li ekvivalentní výroky:

a) „Číslo je dělitelné čtyřmi" a „číslo je sudé";

b) „Dvě úsečky jsou rovnoběžné" a „dvě úsečky nemají společný bod";

c) „Dva body leží na přímce rovnoběžné s druhou přímkou" a „dva body mají od dané přímky stejné vzdálenosti".

2. Pomocí negace výroků, z nichž se implikace skládají, utvořte věty, které mají týž význam jako dané implikace:

a) „Je-li číslo dělitelné čtyřmi, je sudé";

b) „Jsou-li dvě úsečky rovnoběžné, nemají společný bod";

c) „Dva body, které leží na přímce rovnoběžné s jinou danou přímkou, mají od této přímky stejné vzdálenosti".

3. Zjistěte, lze-li obrátit věty:

a) „Je-li přímka p tečnou kružnice v bodě A, je kolmá ke spojnici středu s bodem A";

b) „Neleží-li dvě přímky v téže rovině, nemají společný bod";

c) „Je-li $a = b$, je také $ax = bx$".

4. Vyslovte (dvěma způsoby) větu obrácenou k větě:

a) „Má-li trojúhelník dvě strany stejné, má i dva úhly stejné";

b) „Je-li bod roviny vnějším bodem kružnice, lze z něho vésti ke kružnici dvě tečny";

c) „Je-li $a = b$, je také $a + x = b + x$".

5. Ze dvou kružnic k_1, k_2, které leží v téže rovině a neprotínají se, leží k_1 vně kružnice k_2 nebo k_2 leží vně kružnice k_1. Vyslovte tuto větu ve tvaru implikace tak, aby neobsahovala slovo „nebo".

6. Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ tři výroky, mezi nimiž platí implikace

$$\boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C},$$

je to totéž jako implikace

$$\text{non}\boldsymbol{C} \Rightarrow \text{non}\boldsymbol{A} \text{ nebo non}\boldsymbol{B}.$$

Dokažte a upravte podle toho věty:

a) „Jestliže přímka prochází bodem na kružnici a současně je kolmá ke spojnici tohoto bodu se středem, je to tečna";

b) „Je-li $a \neq b$ a současně $x \neq 0$, je $ax \neq bx$";

c) „Jestliže čísla x, y vyhovují současně rovnicím $2x + 3y = 8$ a $5x - y = 3$, vyhovují také rovnici $7x + 2y = 11$".

7. Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ tři výroky, mezi nimiž platí implikace

$$\boldsymbol{A} \text{ nebo } \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C},$$

je to totéž jako implikace

$$\text{non}\boldsymbol{C} \Rightarrow \text{non}\boldsymbol{A} \text{ a non}\boldsymbol{B}.$$

Dokažte a upravte podle toho věty:

a) „Je-li $a = 0$ nebo $b = 0$, je $ab = 0$";

b) „Jsou-li dvě přímky rovnoběžné nebo protínají-li se, leží v téže rovině";

c) „Dvěma stejným obvodovým úhlům nebo dvěma výplňkovým obvodovým úhlům příslušejí v téže kružnici stejně dlouhé tětivy".

8. Větu obrácenou k větě

$$\boldsymbol{A} \text{ nebo } \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$$

můžeme vysloviti v některém z tvarů

$$\boldsymbol{C} \text{ a non}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{C} \text{ a non}\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}.$$

Dokažte a obraťte podle toho věty ze cvič. 7.

9. Platí-li současně implikace

$$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C} \text{ a } \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C},$$

platí také implikace

$$\boldsymbol{A} \text{ nebo } \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}.$$

Dokažte a demonstrujte to na větách ze cvič. 7.

10. Platí-li současně implikace

$$\boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{B},$$

platí také implikace

$$\boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{B}.$$

Dokažte a demonstrujte to na výrocích: „je-li číslo dělitelné dvanácti, je dělitelné také šesti" a „je-li číslo dělitelné dvanácti, je dělitelné také čtyřmi".