4. Nejjednodušší rovnice neurčité 2. stupně

In: Jan Vyšín (author): Neurčité rovnice. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. pp. 21–24.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402869

4. NEJJEDNODUŠŠÍ NEURČITÉ ROVNICE 2. STUPNĚ

Při neurčitých rovnicích vyšších stupňů se setkáváme velmi často s pojmem parity. Říkáme, že dvě sudá čísla nebo dvě lichá čísla jsou *téže parity*, dvě celá čísla, z nichž jedno je sudé, druhé liché, jsou *různé parity*. Každé liché číslo můžeme napsati ve tvaru $2n + 1$, kde n je číslo celé, každé sudé číslo pak ve tvaru $2n$ (n celé): připomeňme si, že nula je sudé číslo. Druhá mocnina (čtverec) sudého čísla je $4n^2$, t. j. číslo dělitelné čtyřmi. Čtverec lichého čísla je $4n^2 + 4n + 1$, t. j. číslo, které děleno čtyřmi dá zbytek 1. Sudé číslo, které není dělitelno čtyřmi, na př. 4862, nemůže být čtvercem žádného celého čísla. Totéž platí o lichém čísle, které děleno čtyřmi dá zbytek 3, na př. 56847.

Nejprve se budeme zabývati neurčitou kvadratickou rovnicí o 2 neznámých x, y

$$x^2 - y^2 = c, \tag{4,1}$$

kde c je dané přirozené číslo. Ptejme se, pro která c je rovnice (4,1) řešitelná. Levou stranu rozložíme:

$$(x + y)(x - y) = c. \tag{4,1'}$$

Jsou-li x, y téže parity, jsou čísla $x + y$, $x - y$ sudá, jejich součin, t. j. číslo c, je dělitelné čtyřmi. Jsou-li x, y různé parity, jsou čísla $x + y$, $x - y$ lichá, číslo c je také liché. Ukázali jsme tedy, že je-li rovnice (4,1) řešitelná, je číslo c buď liché nebo dělitelné čtyřmi. Zároveň nám rovnice (4,1') ukazuje cestu, jak řešiti rovnici (4,1): je třeba rozložiti dané číslo c ve dva činitele téže parity: jednoho (většího) z činitelů položíme rovna $x + y$, druhého (menšího) $x - y$ a vypočteme x, y. Jsou-li oba činitelé stejní, t. j. je-li $x + y = x - y$, je $y = 0$, $x^2 = c$. Tímto způsobem je rovnice (4,1) řešitelná jen tehdy, je-li c čtverec přirozeného čísla. Je-li c liché číslo větší než 1 nebo číslo dělitelné čtyřmi větší než 4, lze provést aspoň jeden rozklad ve dva různé činitele, a to pro $c = 2n + 1 = 1 \,.\, (2n + 1)$, pro $c = 4n = 2 \,.\, 2n$. Máme tedy tento výsledek:

Rovnice (4,1) *je řešitelná celými čísly tehdy a jen tehdy, je-li c číslo liché nebo dělitelné čtyřmi.*

Řešení provedeme popsaným rozkladem čísla c.

Na př. rovnice $x^2 - y^2 = 15$ se rozřeší tak, že rozložíme $15 = 1 . 15 = 3 . 5$. Položíme nejprve $x + y = 5$, $x - y = 3$, dostaneme $x = 4$, $y = 1$, pak položíme $x + y = 15$, $x - y = 1$, vyjde $x = 8$, $y = 7$. Rovnici $x^2 - y^2 = 36$ rozřešíme z rozkladů $36 = 2 . 18 = 6 . 6$ (nikoli $3 . 12$ nebo $4 . 9$) a položíme postupně $x + y = 18; 6$, $x - y = 2; 6$; vyjde $x_1 = 10$, $y_1 = 8$, $x_2 = 6$, $y_2 = 0$. Rovnice $x^2 - y^2 = 22$ je neřešitelná.

Uváděli jsme vesměs jen řešení kladná nebo rovná nule. Je patrné, že u každého řešení můžeme připojiti libovolná znamení.

Mezi jednoduché rovnice 2. stupně náleží také t. zv. rovnice *bilineární*:

$$axy + bx + cy + d = 0. \tag{4,2}$$

Budeme předpokládati, že a, b, c, d jsou čísla celá, a mimo to a, c nesoudělná. Z rovnice (4,2) vyjádříme y:

$$y = -\frac{bx + d}{ax + c} \tag{4,3}$$

a budeme řešiti rovnici (4,3). To znamená: určíme celé číslo x tak, aby zlomek v rovnici (4,3) měl celočíselnou hodnotu. Zvláštní případ této úlohy jste řešili v cvičení 2. Nyní ji probereme obecně. Položíme

$$\begin{aligned} u &= bx + d \\ v &= ax + c. \end{aligned} \tag{4,4}$$

Z rovnic (4,4) vyloučíme x: dostaneme

$$au - bv = ad - bc. \tag{4,5}$$

Je-li v dělitel čísla u, je podle (4,5) v také dělitelem čísla $ad - bc$. Obráceně budiž v libovolný dělitel čísla $ad - bc$. Podle (4,5) je $au = (ad - bc) + bv$; odtud vyplývá, že v je dělitelem čísla au. Podle předpokladu jsou a, c čísla nesoudělná. Druhá z rovnic (4,4) ukazuje, že jsou pak též čísla a, v nesoudělná: neboť každý společný dělitel čísel a, v je také dělitelem čísel a, $c = v - ax$. Ježto je tedy v dělitelem čísla au a a, v jsou nesoudělná, je v dělitelem u. Celé číslo x, které vyhovuje rovnici $ax + c = v$, vede k řešení rovnice (4,3).

Řešíme tedy bilineární rovnici, na př.

$$2xy - 4x + 3y + 3 = 0$$

takto: upravíme ji na tvar

$$y = \frac{4x - 3}{2x + 3},$$

vypočteme $ad - bc = -18$: vyhledáme všecky dělitele m čísla -18: $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$: řešíme rovnice

$$2x + 3 = m:$$

pokud jsou kořeny celočíselné, vedou k řešení dané rovnice. V našem případě pro $m = \pm 2, \pm 6, \pm 18$ nedostaneme celočíselné kořeny. Pro $m = \pm 1, \pm 3, \pm 9$ vyjdou kořeny $x = -1; -2; 0; -3; 3; -6$ a příslušné hodnoty y jsou $-7; 11; -1; 5; 1; 3$.

Jsou-li a, c soudělná čísla, na př. v rovnici

$$10xy - 4x + 15y + 3 = 0, \tag{4,6}$$

upravíme (4,3) takto:

$$y = \tfrac{1}{5} \cdot \frac{4x - 3}{2x + 3}.$$

Rozřešíme známým postupem rovnici

$$y' = \frac{4x - 3}{2x + 3}. \tag{4,7}$$

Řešením rovnice (4,6) je pak jen takové řešení rovnice (4,7), které je dělitelno pěti. V našem případě je (4,7) rovnice dříve řešená: dostaneme tedy jediné řešení rovnice (4,6) $x = -3$, $y = 1$.

V předcházejících úvahách jsme mlčky předpokládali, že $ad - bc \neq 0$. Čtenář si snadno sám rozhodne řešitelnost rovnice v případě, že $ad - bc = 0$.

Kvadratickým rovnicím, o nichž jsme právě jednali, lze přisouditi geometrický význam podobným postupem, jakého jsme užili při neurčitých rovnicích 1. stupně. Tak na př. řešiti rovnici $x^2 - y^2 = c$ pro dané c znamená, určiti mřížové body na dané rovnoosé hyperbole, a pod.

Cvičení 24. Rozřešte rovnici $x^2 - 4y^2 = 420$.

25. Rozřešte rovnici $y(2x + y) = 65$. [*Návod*: zaveďte místo y novou neznámou $z = x + y$.]

26. Dokažte, že součtem libovolného konečného počtu lichých čísel následujících za sebou je buď číslo liché nebo číslo dělitelné čtyřmi. [*Návod*: sečtěte lichá čísla od $2n_1 + 1$ do $2n_2 + 1$.]

27. Zjistěte, které mřížové body leží na hyperbole $5xy - 2x + 3y + 3 = 0$.

28. Pro která celá čísla x má zlomek $\dfrac{8x - 1}{6x + 9}$ celočíselnou hodnotu?

29. Rozhodněte, zda rovnice $11x - 7y = 9$ má takové celočíselné řešení x, y, aby x bylo dělitelem y.

30. Otec je stár 29 let, syn 4 roky: za kolik let bude otec n-krát tak stár jako syn? (n celé.)

31. Najděte celá čísla, jejichž harmonický průměr je také celé číslo. [Harmonický průměr h čísel a, b je definován vztahem: $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Při řešení úlohy odstraňte v této rovnici nejprve zlomky a pak položte $a + b = x$, $a - b = y$: vyjde $y^2 = kx$ (k celé): volte y^2 a rozkládejte je v součin dvou činitelů k, x, kteří jsou — jak dokážete — téže parity.]