Užití cyklické projekce a Laguerrových transformací

VIII. UŽITÍ CYKLICKÉ PROJEKCE A LAGUERROVÝCH TRANSFORMACÍ

Ukážeme v následujícím, jak z některých vět prostorové geometrie poměrně jednoduchých vycházejí věty o cyklech a paprscích zdánlivě velmi složité.

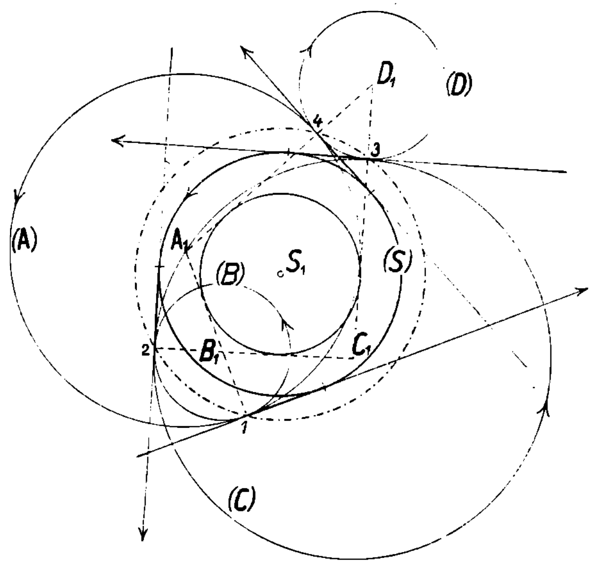
1. Kuželosečka k v prostoru a dvě mimoběžky m, n, které ji sekou v bodech M, N, určují plochu druhého stupně P (hyperboloid). Každá přímka, jež seče k, m, n je površka druhého systému. Buďte p, q dvě takové příčky sekoucí k v bodech P, Q. Pak dvojice m, n a p, q tvoří *prostorový* (zborcený) *čtyřúhelník* s vrcholy A, B, C, D. Tečné roviny v bodech M, N, P, Q určené pokaždé tečnou křivky k a příslušnou přímkou sekou se v jediném bodě S, pólu roviny kuželosečky k ploše P.

Nechť k je nyní základní kuželosečka C v rovině nevlastní, m, n, p, q tedy „isotropické" přímky. Vrcholům A, B, C, D patří cykly a dva sousední se dotýkají v cyklickém pořádku v bodech *1, 2, 3, 4*. Stranám čtyřúhelníka patří dotykové paprsky. Uvedený hyperboloid je nyní cyklografická koule o středu S, strany čtyřúhelníka jsou jeho površky a paprsky tečné jsou stopy tečných rovin v nevlastních bodech těchto přímek. Máme tedy větu:

Dotýkají-li se cykly (A), (B), (C), (D) *v cyklickém pořádku* (obr. 46), *pak dotykové paprsky obalují nový cykl* (S) *a tento má od daných cyklů tutéž tečnovou vzdálenost* (rovnou poloměru cykl. koule). *Dotykové body leží na kružnici soustředné s* (S) (stopa cykl. koule) *a středné* $A_1B_1, B_1C_1, \ldots$ *dotknou se rovněž kružnice soustředné* (půdorys hrdlové kružnice).

2. Uvažme teď větu duální k větě zpočátku uvedené. Mějme prostorový čtyřúhelník $ABCD$ a jeho strany ať se dotýkají kvadratického kužele s vrcholem V. Pak jest určena plocha druhého stupně F, která obsahuje strany čtyřúhelníka a má kužel za kužel tečný. Dotýká se ho podél kuželosečky v rovině ν, na které leží tedy dotyčné body stran čtyřúhelníka s kuželem. ν je polární rovina bodu V ku F.

Buď uvažovaný kužel cyklografický s vrcholem V. Bodům A, B, C, D patří cykly v uvedeném pořádku, stranám AB, BC, ... vždy dva paprsky, z nichž jeden se současně dotýká cyklů (A), (B), (V), dále jeden cyklů (B), (C), (V) atd. Dotykovým bodům stran s kuželem patří cykly, které se dotknou cyklu (V). Máme tedy větu:



Obr. 46.

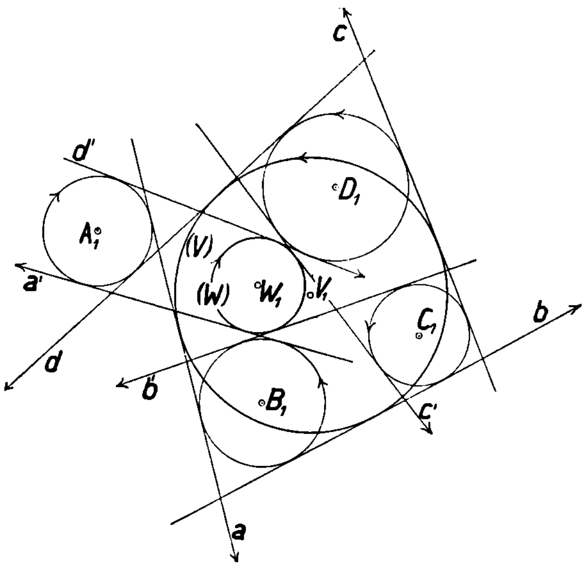
Cykly (A), (B), (C), (D) *v uvedeném cyklickém pořádku určují čtyři páry společných tečných paprsků. Dotýkají-li se čtyři, jeden z každého páru, téhož cyklu* (V), *pak cykly lineárních řad* (AB), (BC), (CD), (DA), *jež se dotýkají cyklu* (V), *patří témuž cyklickému poli* (obraz přenecháváme čtenáři).

3. Vraťme se ještě jednou k ploše F s dotykovým kuželem $V(C)$, na které leží prostorový čtyřúhelník $ABCD$. Stopa této plochy v rovině nevlastní je kuželosečka, jež se dvakrát dotkne kuželosečky C na nevlastní přímce roviny v. F a C určují rozvinutelnou plochu společných tečných rovin, jež se zde rozpadá ve dva kužele. $V(C)$ je jeden, druhý buď $W(C)$. (Duálně, dotýkají-li se plocha F a kužel ve dvou bodech,

rozpadne se průsečná křivka ve dvě kuželosečky). Odtud plyne v projekci cyklické zajímavá věta:

Cykly (A), (B), (C), (D) *určují v uvedeném cyklickém pořádku čtyři páry společných tečných paprsků. Dotýkají-li se čtyři, jeden z každého páru, cyklu* (V), *dotýkají se ostatní čtyři opět nového cyklu* (W).

V obr. 47 volen napřed cykl (V), jeho čtyři tečné paprsky a, b, c, d. Pak sestrojeny cykly (A), (B), (C), (D), jež se dotknou vždy dvou paprsků v cyklickém pořádku. Nové společné tečné paprsky se dotýkají cyklu (W).



Obr. 47.

4. *Buď ABCD čtyrstěn, jehož stěny* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *jsou roviny „isotropické“* (α protější k A, β ku B atd). *Ortogonální průměty vrcholů* A_1, B_1, C_1, D_1 *jsou na kružnici.*

Důkaz: Body A_1, B_1, C_1, D_1 jde svazek kuželoseček a ten seče nevlastní přímku roviny π v involuci bodové, ke které patří páry určené přímkami $A_1 B_1$, $C_1 D_1$, resp. A_1C_1, B_1D_1 nebo A_1D_1, B_1C_1. Stopy rovin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ v nevlastní rovině tvoří čtyrstran křivce C opsaný a jeho protější vrcholy spojeny s pólem P_∞ roviny π (na kolmici ku π)

dávají také páry involuce. Ale na př. průsečnice (α, β) je identická s hranou CD, (γ, δ) s AB atd., tedy involuce svazku (P_∞) seče nevlastní přímku roviny π v involuci identické s involucí vyťatou svazkem kuželoseček o základních bodech A_1, B_1, C_1, D_1. Ale jeden pár involuce (P_∞) jsou tečny ku C, které jdou kruhovými body roviny π. Jedna kuželosečka řečeného svazku je tedy kružnice.

Další vlastnost čtyrstěnu uvažovaného jest, že *protější hrany jsou stejně „dlouhé“* (mají tutéž cyklografickou délku).

Důkaz: Buďte t_1, t_2, t_3, t_4 nevlastní přímky rovin α, β, γ, δ, jež tvoří čtyrstran opsaný křivce C. Jedna jeho úhlopříčka, na př. $(t_1t_2) \cdot (t_3t_4)$ neseče C v reálných bodech, lze tedy šikmou symetrií, jíž v průmětně odpovídá Laguerrova inverse, převésti čtyřstěn $ABCD$ v jiný, takže hrany $(\alpha\beta) \equiv CD$, $(\gamma\delta) \equiv AB$ jsou rovnoběžné s průmětnou π. Máme tedy čtyrstěn, jehož všechny stěny mají od π odchylku 45° a dvě protější hrany rovnoběžné s průmětnou. V průmětu se pak jeví A_1B_1, C_1D_1 jako průměry kružnice a tedy $\overline{AB} = \overline{CD}$ (v obyčejné i v C-geometrii). Právě tak ostatní dvojice protějších hran.

Z těchto vlastností plynou zajímavé vztahy v cyklické projekci. Stěny čtyrstěnu $ABCD$ mají za stopy paprsky a, b, c, d (s náležitou orientací, 1,2), vrcholům patří cykly, které se vždy dotýkají tří z oněch čtyř paprsků. V projekci tedy:

Dány jsou čtyři paprsky. Sestrojme cykly, které se vždy tři z daných paprsků dotýkají. Pak středy jejich jsou na kružnici a tečnové vzdálenosti vždy dvou a dvou zbývajících jsou stejné.

Úhlopříčky čtyrstranu $t_1t_2t_3t_4$ opsaného křivce C tvoří její polární trojúhelník. Každá úhlopříčka je však nevlastní přímka roviny rovnoběžné s párem protějších hran čtyrstěnu $ABCD$. Vedeme-li každou jeho hranou rovinu rovnoběžnou s hranou protější, dostaneme šestistěn, který tvoří obdobu pravoúhlého rovnoběžnostěnu euklidovské geometrie. Jako tam všech osm vrcholů leží na kouli, leží také osm vrcholů našeho šestistěnu na cyklografické kouli a její střed je středem tohoto rovnoběžnostěnu. Jemu v π přísluší cykl — *střední cykl* — výše uvedených čtyř cyklů daných čtyřmi paprsky. *Od něho mají všechny cykly tutéž tečnovou vzdálenost.*

Buď K cyklografická koule jdoucí vrcholy čtyrstěnu $ABCD$ (4, 4, cvič. 7). Pak na př. stěna $(ABC) \equiv \delta$ má v rovině nevlastní přímku t_4, jež se dotkne křivky C v T_4 a seče K v parabole. Touto parabolou a křivkou C jde kužel s vrcholem S_4 na poláře t_4' přímky t_4. t_4 je v rovině nevlastní, tedy reciproká polára t_4' jde středem M cykl. koule a bodem T_4. Je to tedy „isotropická" přímka. To platí o všech stěnách čtyrstěnu a středy všech kuželů S_i leží na cyklografickém kuželu o středu M. V projekci máme větu:

Jsou-li v π čtyři paprsky a, b, c, d a cykly (A), (B), (C), (D), které se vždy tři z nich dotýkají, pak vždy tři z těchto čtyř cyklů se dotýkají dalšího cyklu S_i a tyto čtyři nové cykly se dotknou téhož cyklu (M).

t_4' je geom. místo středů všech cyklografických koulí, jež jdou parabolou v rovině (ABC). Stopník této přímky na π, jenž leží na cyklu (M), je středem cykl. koule, jejíž stopní a hrdlová kružnice je kolmá k cyklům (A), (B), (C). Tedy cykly (A), (B), (C), (D) *dávají po třech body stejných mocností a ty leží na cyklu (M).*

5. Tři plochy druhého stupně mají společných 8 bodů. Říkáme jim *skupina asociovaných bodů.* Plocha stupně druhého je dána devíti body. Osmi body jde obecně svazek ploch (∞^1) stupně druhého, sedmi body celý trs (∞^2). Ke zvoleným sedmi bodům lze sestrojiti osmý, který s nimi doplňuje skupinu asociovaných bodů. Je-li v trsu plocha zvrhlá ve dvojinu rovin, pak jsou čtyři body skupiny v jedné a čtyři ve druhé rovině, neboť čtyři body v prvé a tři ve druhé rovině určují trs, jehož jedna plocha sestává ze dvou rovin a musí tedy obsahovati i osmý bod. Vrcholy rovnoběžnostěnu tvoří takovou skupinu asociovaných bodů.

Sestrojme podobnou skupinu. V rovině ϱ ať jsou dány body *1, 2, 3, 4,* ty určují šest spojnic: *12, 13, ...* Veďme každou z nich jednu rovinu a označme je (*12*), (*13*), ... Pak máme tři plochy zvrhlé ve dvojiny rovin: (*12*), (*34*); (*13*), (*24*); (*14*), (*23*). Skupina asociovaných bodů je tvořena body *1, 2, 3, 4* v rovině ϱ a jinými čtyřmi, ve kterých se sekou vždy roviny následujících trojin: (*12*), (*13*), (*23*); (*12*), (*24*), (*14*); (*34*), (*13*), (*14*); (*34*), (*24*), (*23*). To jsou roviny jdoucí stranami jednoho ze čtyř trojúhelníků tvořených body *1, 2, 3, 4.* Tyto čtyři body jsou tedy v jedné rovině σ.

Užijme tohoto výsledku v cyklografii. Buďte v průmětně π čtyři body *1, 2, 3, 4*. Roviny vedené spojnicemi *12, 13*, ... buďte roviny „isotropické", každou spojnicí jen jedna, jinými slovy dejme této spojnici určitou orientaci. Pak průsečíkům těchto rovin patří cykly vepsané trojúhelníkům *123, 124*, ... tvořeným vždy třemi paprsky. Průsečíky jsou v jedné rovině a cykly patří témuž cyklickému poli. Máme tedy větu:

Čtyři body v průmětně π určují šest spojnic. Přisuďme jim libovolnou orientaci a máme šest paprsků, jež tvoří čtyři trojúhelníky s vrcholy v daných bodech. Cykly vepsané těmto trojúhelníkům patří témuž cyklickému poli.

Tuto větu lze zobecniti. Provedeme-li dilataci, dostaneme místo čtyř bodů čtyři cykly o témž poloměru a šest paprsků, z nichž se každý dotkne dvou cyklů. Trojina paprsků, jež se dotýkají tří různých cyklů, určuje nový cykl a čtyři takto sestrojené cykly patří téže lineární kongruenci.

Ještě obecnější větu dostaneme, užijeme-li Laguerrovy inverse a převedeme π do obecné roviny, nebo vyjdeme-li od čtyrrohu v obecné rovině přímo. Větu lze vysloviti:

Patří-li čtyři cykly témuž cyklickému poli, určují vždy dva z nich dvojinu společných tečných paprsků. Vezmeme-li jeden z každé dvojice, dostaneme paprskový šestistran a tři paprsky, jež patří jedné trojině z původních čtyř cyklů, určují paprskový trojúhelník a cykl jemu vepsaný. Čtyři takto získané cykly patří témuž cyklickému poli.

6. Vraťme se opět k původní konfiguraci na počátku odst. 5. Měli jsme skupinu osmi asociovaných bodů, ale máme také duální skupinu osmi asociovaných rovin, jež tvoří basis trsu ploch druhé třídy. Jako zvrhlé plochy vystupují zde dvojiny bodů, každým jdou čtyři z osmi rovin. Skutečně, na př. bodem *1* jdou roviny ϱ, (*12*), (*13*), (*14*), zbývající roviny (*23*), (*24*), (*34*) sekou se v jednom bodě na σ, který s prvým tvoří jednu plochu trsu. Odtud plyne opět zajímavý výsledek, volíme-li za ϱ rovinu „isotropickou", neboť pak sedm z uvažovaných rovin se dotýká křivky C, tedy dotýká se i osmá a máme novou větu:

Nechť čtyři cykly se dotýkají téhož paprsku. Po dvou dávají nových šest společných paprsků tečných a tyto po třech určují nové čtyři cykly.

Tyto čtyři cykly se opět dotýkají jednoho paprsku. Označíme-li původní cykly (A), (B), (C), (D), pak (B), (C), (D) mají vedle p^ϱ ještě tři tečné paprsky, jichž se dotkne cykl (A'), (C), (D), (A) určují rovněž tři paprsky, jichž se dotkne cykl (B') atd. Cykly (A'), (B'), (C'), (D') dotknou se téhož paprsku. Obraz přenecháváme čtenáři.