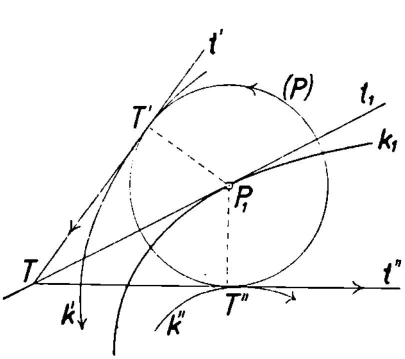
Cyklický obraz křivky

VI. CYKLICKÝ OBRAZ KŘIVKY

6,1. Obecné úvahy. Buď K křivka v prostoru. Jejímu bodu P je v průmětně přiřaděn cykl (P), cyklický obraz křivky K je tedy řada cyklů. Geometrické místo jejich středů je pravoúhlý průmět K_1 křivky K. Spojitá řada cyklů má obálku. Nechť P, Q jsou dva blízké body křivky K, (P), (Q) příslušné cykly, T stopa sečny PQ, t', t'' společné tečné paprsky obou cyklů. Blíží-li se Q bodu P, přejde sečna PQ v tečnu křivky K, T je její stopník, t', t'' tečné paprsky cyklu (P) z bodu T (obr. 38). Jejich dotyčné body T', T'' jsou limitní polohy průsečíků obou cyklů čili *charakteristické* body cyklu (P), ve kterých se dotýká obálky. Obálka se pravidelně skládá ze dvou větví k', k'' (orientovaných), jež opisují body T', T''; t', t'' jsou tečny v těchto bodech.



Obr. 38.

Jen bodům, kde sklon tečny je menší než 45°, přísluší reálné body obálky, bodu, kde $\alpha = 45°$, přísluší vrchol (přidružený cykl má s obálkou dotyk čtyřbodový). Bodu P, kde tečna je kolmá k průmětně a P_1 tedy bod vratu křivky K_1, přísluší cykl (P), při čemž t', t'' jsou imaginární tečny jdoucí jeho středem P_1 a dotykové body jsou tedy imaginární kruhové body v nekonečnu. P_1 je *singulární ohnisko* obálky. Je-li t tečna obratu, jsou i t', t'' tečny obratu.

Je-li P dvojný bod na K, přísluší mu jeden cykl (P), ale dvě různé sečny dotyku, je-li P bod vratu, jsou i T', T'' body vratu. Průsečíku K s π přísluší dvojný bod a má-li tečna odchylku menší než 45°, jsou jeho tečny reálné. Bodu P_∞ odpovídají nevlastní body T'_∞, T''_∞, asymptotě p tedy asymptoty t', t'' obou větví.

Přímky t', t'' jsou stopy rovin, jež jdou tečnou t a dotýkají se křivky C. Roviny, které se dotknou křivek K a C tvoří rozvinutelnou plochu. *Charakteristiky* (průsečnice dvou sousedních rovin) jsou PT', PT''. Plochu lze také považovati za obálku cyklografických kuželů $P(P)$. *Cyklický obraz křivky K jest tedy stopa rozvinutelné plochy* (K, C). K jest *dvojná* křivka plochy, vedle toho může býti ještě jiná křivka dvojná. K rozvinutelné ploše (K, C) patří *hrana vratu* σ, charakteristiky jsou tečny této hrany. Bodům na charakteristikách PT', PT'' patří cykly, jež se obálky dotýkají v bodech T', T''; bodu na hraně vratu patří *cykl oskulační*. σ_1 se jeví jako místo středů oskulačních kružnic, je to *evoluta* obálky.

Tečné roviny plochy (K, C) mají půdorysnou odchylku 45°, obalují tedy plochu stejné odchylky čili *plochu stejného spádu*. Charakteristiky jsou „isotropické" paprsky.

Hrana vratu σ je tedy křivka, jejíž tečny mají od π stejnou odchylku (45°) či stejný sklon nebo spád. Takové křivky slují *obecné šroubovice*. Buď P bod na křivce σ, T' stopník příslušné tečny. Cykl (P) je oskulační cykl obálky (T') v bodě T'. (T') je evolventa křivky σ_1, t. j. ortogonální trajektorie tečen této křivky. Obráceně křivce (T) v průmětně patří evoluta σ_1 (obálka normál) a na válci kolmém k průmětně se základnou σ_1 lze sestrojiti křivku σ s konstantním sklonem 45°. Stopa její plochy tečen jest (T) a cyklografický obraz křivky σ jest řada oskulačních cyklů křivky (T).

6,2. Cyklický obraz kuželosečky. Nechť středová kuželosečka k má obecnou polohu v prostoru. Křivky k a C určují rozvinutelnou plochu, na níž k a C jsou *dvojné* a jejíž stopa na π jest obálka cyklů přiřaděných bodům křivky k (k_1 je g. místo jejich středů). Duální útvar k tomuto útvaru jest průsečná křivka dvou kuželů s příslušnou plochou tečen.*) Dva kužele druhého stupně určují však celý svazek ploch druhého stupně; mezi nimi jsou obecně čtyři kužele a vrcholy jejich tvoří společný polární čtyřstěn všech ploch svazku. Duálně tedy v uvažovaném případě má plocha rozvinutelná (k, C) ještě dvě dvojné kuželosečky l, m a roviny $\varkappa$, λ, μ kuželoseček k, l, m s rovinou nevlastní tvoří společný polární čtyřstěn všech ploch vepsaných

*) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie II., 478.

do (k, C), jež tvoří řadu. Každá z uvedených čtyř rovin je ostatními třemi proťata v trojúhelníku polárním příslušné dvojné kuželosečky.

Stupeň plochy (k, C) se určí korespondenčním principem nebo také jde z toho, že na př. průsek s rovinou kuželosečky k sestává z této dvakrát počítané a čtyř površek, totiž tečen vedených ku k z bodů, v nichž C seče rovinu křivky k. Stupeň je tedy 8, třída 4. Průsek plochy (k, C) s π je tedy křivka (T) stupně 8, třídy 4 s osmi dvojnými body v průsečících s C, k, l, m. (T) *jeví se jako společná obálka tří řad cyklů se středy na kuželosečkách* k_1, l_1, m_1. Tečnou kterékoli z křivek k, l, m, C jdou dvě tečné roviny plochy, jež se tedy dotýkají ostatních tří kuželoseček. Buď S_∞ bod v nekonečnu ve směru kolmém k π. Z něho jdou ku C dvě tečny, které jdou i body kruhovými J_1, J_2 v rovině π. Přímkami $S_\infty J_1$, $S_\infty J_2$ jde tedy po dvou rovinách, které se dotýkají křivek k, l, m. V průmětu pravoúhlém do π mají tedy k_1, l_1, m_1 čtyři společné tečny, jež jdou kruhovými body J_1, J_2, čili k_1, l_1, m_1 *jsou konfokální.*

Póly roviny k řadě ploch vepsaných do (k, C) vyplňují přímku. Roviny π dotýká se jedna plocha řady, seče tedy π ve dvou přímkách p, q a to jsou *dvojné tečny* křivky (T), neboť rovina na př. přímkou p, jež se dotýká i C, jakožto tečná rovina dvou ploch řady, je tečnou rovinou plochy (k, C) podél jisté přímky. Přímkou p jdou dvě tečné roviny k C, tedy p se dotkne (T) ve dvou různých bodech.

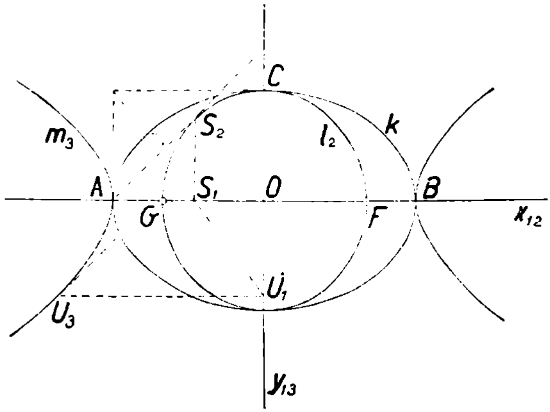
Cyklické pole lze dvojím způsobem převésti v jiné Laguerrovou inversí (5,2, cvič. 5,2,2 a 5,2,3). V prostoru tomu odpovídají „symetrie", jež převádějí na př. rovinu π do λ. Dle toho jsou tři páry Laguerrových inversí, jež převádějí uvažovanou obálku cyklů v kuželosečku. Jen jeden pár je reálný.

6,3. Kružnice dotýkající se dvakrát dané kuželosečky (bitangenciální). Buď k středová kuželosečka v π. Rozvinutelná plocha (k, C) má roviny λ, μ, jež jdou osami kuželosečky k kolmo ku π, za roviny symetrie a v nich leží dvojné kuželosečky l, m. Společný polární čtyřstěn všech ploch vepsaných je tvořen rovinami π, λ, μ a rovinou nevlastní, mají tedy všechny plochy společný střed O (ve středu kuželosečky k) a tytéž roviny symetrie.*) *Cyklické obrazy křivek l, m jsou řady kružnic, jež mají středy na jedné neb druhé ose a dvakrát se dotknou křivky k.*

*) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie II., str. 545.

Je-li k parabola, pak plocha (k, C) má mimo π jen jednu rovinu symetrie, která osou paraboly jde kolmo ku π. Ostatní dvě stěny společného polárního čtyřstěnu splývají s rovinou nevlastní.

V obr. 39 buď k elipsa s osami x, y. Kuželosečka l v rovině λ jdoucí osou x zobrazena je ve sklopení do π kol osy x. l_2 má vrcholy jedné osy v ohniskách křivky k (bitangenciální kružnice s poloměrem nulovým).



Obr. 39.

Bodu P na l přísluší kružnice, jež se k dotkne ve dvou bodech reálných neb imaginárních, extrémní případ odpovídá bodu S, kde S_1 je střed křivosti ve vrcholu A. S_2 je tedy bod na l_2, kde tečna má sklon 45°.

Podobně jest druhá dvojná kuželosečka otočena kolem y do m_3. Jedna osa splývá s AB, druhá je imaginární a vrcholy jsou v imaginárních ohniskách na y ve vzdálenosti $\pm\, ei$ od středu čili vedlejší osa hyperboly m_3 má délku $2e$. Kružnici křivosti ve vrcholu C odpovídá bod U na m.

Hrana vratu plochy (k, C), je-li k středová kuželosečka, jest prostorová křivka stupně 12 s 16 body vratu, jež jsou po čtyřech na dvojných kuželosečkách. Tato prostorová křivka se promítá jako evoluta křivky k, stupně 6, třídy 4, jež má po dvou bodech vratu na x, y a na přímce v nekonečnu a ještě 4 dvojné body.

6,4. Jaké prostorové křivce odpovídá v rovině cykloida, epi- a hypocykloida?

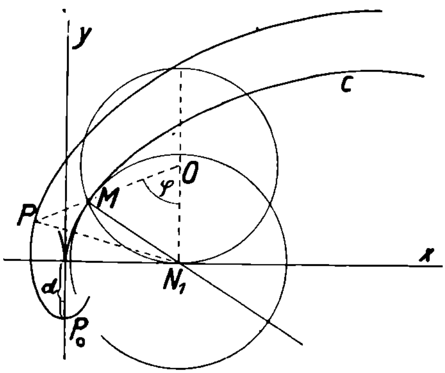
Rovnice prosté *cykloidy* c jsou

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi) \quad \text{(obr. 40)}.$$

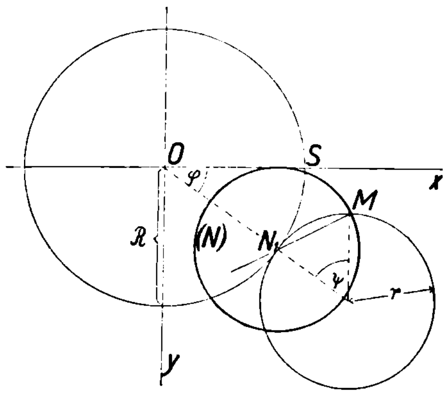
Normála bodu M prochází bodem dotyku N_1 pohyblivé kružnice s osou Ox. Lze tedy cykloidu považovati za obálku kružnic, jež mají střed v N_1 a poloměr $\overline{N_1M} = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$, jak patrno z obrázku 40. Bod N v prostoru má tedy souřadnice

$$x = r\varphi, \quad y = 0, \quad z = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

to jsou rovnice příslušné křivky v prostoru.



Obr. 40.



Obr. 41.

Jedná-li se o cykloidu prodlouženou, již opisuje bod P na prodloužení poloměru OM, prochází ovšem normála opět bodem N_1, poloměr kružnice dotyku je N_1P a rovná se kotě bodu N, jež se vypočte z rovnice (ΔPON_1):

$$z^2 = r^2 + (r + d)^2 - 2r(r + d)\cos\varphi.$$

Podobně pro cykloidu zkrácenou.

Ovšem takové rovinné křivce patří mimo uvedenou křivku v prostoru ještě jiné křivky, totiž další dvojné křivky rozvinutelné plochy určené danou křivkou a křivkou C. Mimoto cykly odpovídající jejím bodům mají ještě jinou obálku. V našem případě obyčejné cykloidy je to cykloida symetrická dle Ox.

Epicykloidu opisuje bod M na kružnici o poloměru r, jež se kotálí po vnější straně kružnice o středu O a poloměru R. V obr. 41 je základní poloha volena tak, že M splývá s S na ose Ox. Oblouk $\widehat{SN_1}$ rovná se oblouku $\widehat{MN_1}$ na hybné kružnici, tedy $R\varphi = r\psi$, z čeho $\psi = \frac{R}{r}\varphi$. Normála bodu M jde bodem N_1 (okamžitým středem otáčení), lze tedy epicykloidu pokládati za obálku kružnic o středu N_1 a poloměru MN_1. Bod N v prostoru, jemuž patří cykl (N), má souřadnice:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = \overline{N_1M} = 2r\sin\tfrac{1}{2}\psi.$$

Označme $\frac{R}{r} = n$; pak křivka v prostoru jest dána rovnicemi

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = 2\frac{R}{n}\sin\tfrac{1}{2}n\varphi.$$

Proberme některé případy.

Pro $n = 1$ jest prostorová křivka

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

leží tedy na válcích

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad z^2 = 2R(R - x)$$

a na kuželu cyklografickém

$$(x - R)^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Je to známá *hypopéda*. Každý cykl přidružený bodu křivky jde bodem $S(R, 0, 0)$. Druhý charakteristický bod T je symetricky položen s bodem S dle tečny bodu N_1 a opisuje zřejmě *kardioidu* (srdcovku).

Pro $n = 2$ jest v prostoru křivka

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = R\sin\varphi,$$

tedy elipsa na rotačním válci s osou Oz a poloměru R vyťatá rovinou $\frac{z}{y} = 1$. Příslušná epicykloida má bod vratu S a bod S' diametrálně protilehlý. Všechny cykly se dotýkají osy Ox.

Pro $n = 4$ jest

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}R\sin2\varphi,$$

tedy prostorová křivka je na plochách

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad zR = xy.$$

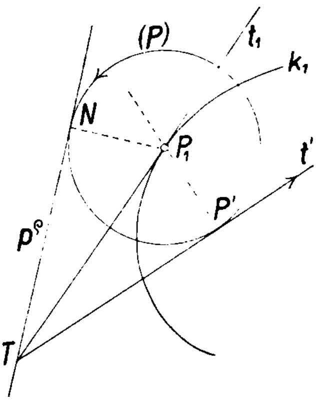
a má dvojný bod Z_∞. Mimo rotační válec je ve svazku ploch takto určeném ještě dvojice válců parabolických

$$(x \pm y)^2 - R(R \pm 2z) = 0.$$

Průmět kolmý na některou z rovin $x \pm y = 0$ je parabola a křivku lze snadno sestrojiti.

Obálka cyklů se zde rozpadá v epicykloidu na vnější straně pevné kružnice a *asteroidu* na straně vnitřní. Společné body vratu jsou v bodech $(\pm R, 0, 0)$, $(0, \pm \pm R, 0)$.

Podobné úvahy lze udělati i pro hypocykloidy.*)



Obr. 42.

6,5. Cyklický obraz křivky v rovině „isotropické“. Mějme křivku k v rovině „isotropické“ ϱ. Stopa roviny buď p^ϱ, průmět křivky k_1 (obr. 42), P bod na k, (P) přidružený cykl. Cykl se dotýká stopy p^ϱ v bodě N, p^ϱ je jedna část obálky. Druhý charakteristický bod dostaneme, sestrojíme-li z bodu T, jenž je stopníkem tečny t křivky v bodě P, druhou tečnu t' k (P). Dotykový bod P' patří obálce a t' je jeho tečna. Výtvarný zákon této křivky k' lze tedy vysloviti také takto: *Sestrojíme-li dle každé tečny t_1 křivky k_1 symetrickou přímku s p^ϱ, obaluje tato přímka křivku k'.*

$P'P_1$ je normála obálky k' v bodě P'; přímky P_1P' a P_1N svírají s tečnou t_1 stejné úhly. Je-li NP_1 směr světla, je P_1P' paprsek odražený na křivce k_1 a k' ortogonální trajektorie těchto paprsků (*antikaustika*). Obráceně lze říci:

Antikaustika rovinné křivky k_1 pro rovnoběžné paprsky jest cyklický obraz průsečné křivky válce, který má k_1 za řídící křivku a je kolmý

*) Podrobněji o této otázce jedná W. BLASCHKE: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien, Monatshefte Math. Phys. 19 (1908), S. 188.

k průmětně, s rovinou „isotropickou“, jejíž stopa je kolmá k paprsku světelnému. Každé z těchto rovin patří jedna křivka k' a všechny jsou spolu rovnoběžné.

Cvičení 6,5,1. Jest dána parabola p v rovině ε s odchylkou 45°. p a C určí rozvinutelnou plochu a její hrana vratu je prostorová křivka třetího stupně (šroubovice). Uvažujte duální útvar! Stopa plochy tečen je cirkulární křivka st. 4 a třídy 3.

6,5,2. Dána jest rovina ε stopou a odchylkou a v ní ležící kuželosečka k; její průmět buď elipsa k_1 daná osami. Další dvojné kuželosečky plochy buďte l, m. Sestrojte jejich roviny a určete průměty l_1, m_1. Dále určete dvojné body a dvojné tečny křivky (T).

6,5,3. Dána je hyperbola h v průmětně π. Sestrojte kuželosečky l, m, jejichž obrazy jsou řady bitangenciálních kružnic křivky h. Totéž pro parabolu.

6,5,4. Dána jest kuželosečka. Sestrojte bitangenciální kružnice, které hoví některé z následujících podmínek: a) jdou daným bodem, b) dotýkají se přímky, c) dotýkají se dané kružnice, d) sekou danou kružnici kolmo nebo v daném úhlu, e) dané dva cykly sekou ve stejných úhlech.

6,5,5. Jsou dány tři cykly se středy na téže přímce. Sestrojte kuželosečku, jež se každého z nich dotkne ve dvou bodech.

6,5,6. Jsou dány dvě kružnice. Sestrojte parabolu, jež se každé dotkne ve dvou bodech.

6,5,7. Sestrojte kuželosečku, jež se dané kružnice dotkne ve dvou daných bodech a jde daným bodem nebo se dotýká dané přímky.

6,5,8. Jaké prostorové křivce odpovídá v průmětně π bicirkulární křivka čtvrtého stupně? (Pozn.: Tuto křivku lze považovati čtverým způsobem za obálku kružnic, jež mají středy na kuželosečce a sekou kolmo tutéž kružnici).

6,5,9. Sestrojte plochu o sklonu 45°, která má za stopu parabolu $y^2 = x$. Ukažte, že je stupně 6 a hrana vratu má rovnice

$$x = 3t^2 + \tfrac{1}{2}, \qquad y = 4t^3, \qquad z = \pm \tfrac{1}{2}(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

Ohledně literatury viz Schilling, Zeitschrift für ang. Mathematik u. Mechanik 3 (1923), Mathematische Zeitschrift 34 (1932). V poslední práci ukazuje, že tato plocha může být považována za „diskriminantní plochu“ rovnice

$$t^4 + \lambda t^2 + \mu t + \nu = 0.$$

Hledáme-li průsečíky křivek

$$y^2 = x, \qquad (x - p)^2 + (y - q)^2 = \varrho^2,$$

dostaneme

$$y^4 + (1 - 2p)\, y^2 - 2qy + (p^2 + q^2 - \varrho^2) = 0;$$

každé poloze bodu (p, q, ϱ) odpovídá rovnice uvedeného typu.