Lineární řada cyklů. Cyklické pole

In: Ladislav Seifert (author): Cyklografie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků v Praze, 1949. pp. 25–34.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402832

II. LINEÁRNÍ ŘADA CYKLŮ. CYKLICKÉ POLE

Bodům prostorové křivky nebo bodům rovinné křivky nalézající se v prostoru mimo průmětnu π odpovídá v průmětně řada cyklů (∞^1), bodům plochy odpovídá kongruence (∞^2) cyklů. Nejjednodušším útvarům přímce a rovině odpovídají *lineární řada cyklů* a *lineární kongruence* čili *cyklické pole*.*)

2,1. Lineární řada cyklů. Souhrn cyklů, jež odpovídají bodům přímky, nazýváme *lineární řada*. Buď přímka v prostoru p, její průmět p_1. Na p_1 se nalézají středy všech cyklů řady. Jeden má střed ve stopníku $P \equiv P_1$, poloměr nula a sluje *nulový cykl řady* (obr. 16*a*) čili její *stopa*.

Volme promítací rovinu přímky p za novou (druhou) průmětnu a sklopme kolem p_1 do π ($p_1 \equiv x_{12}$). p přejde do p_2. Bodům A, B na p přísluší cykly (A), (B), oba kladné, ježto A, B byly voleny nad průmětnou. Body A_2, B_2 jsou na p_2. K těmto dvěma cyklům patří společné tečné paprsky p', p'', jež se dotýkají současně všech cyklů řady. To jsou stopy rovin α, β, jež jdou přímkou p, mají od π odchylku 45° a dotýkají se kuželů, jež jsou určeny body na p jako vrcholy a jdou kuželosečkou C. Jsou to obě „isotropické" roviny procházející přímkou p a sekou nevlastní rovinu v tečnách vedených z nevlastního bodu U_∞ přímky p k základní kuželosečce C.

Stopník P, střed nulového cyklu, je středem podobnosti cyklů (A), (B). *Dva cykly mají jediný střed podobnosti.* (Dvě kružnice mají dva středy podobnosti, vnější a vnitřní).

Paprsek vedený středem podobnosti seče všechny cykly řady v úhlu s týmž kosinem a má tutéž mocnost ke všem cyklům řady.

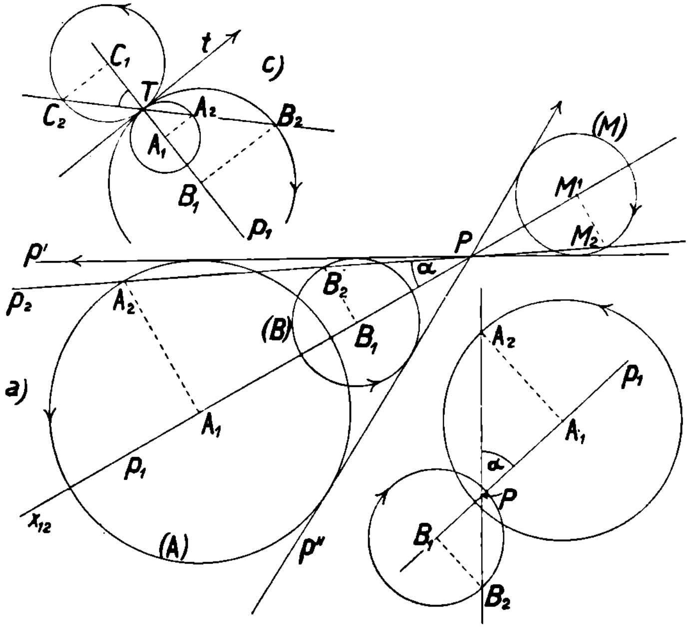
Obr. 16*b* odpovídá případu, kdy odchylka α přímky p od první průmětny je větší než 45°. Pak stopník P padne dovnitř všech cyklů a společné tečné paprsky nejsou reálné. P jest opět společným středem podobnosti.

---

*) Toto pojmenování zavedl u nás J. Sobotka v díle „Deskriptivní geometrie promítání paralelního", Praha 1906.

Dva cykly určují lineární řadu.

Rozeznávejme lineární řadu *eliptickou* a *hyperbolickou* dle toho, jsou-li společné tečné paprsky imaginární neb reálné. Případ přechodný je ten, kdy přímka p má odchylku 45°. Pak všechny cykly řady jdou stopou P a všechny mají tentýž dotykový paprsek t. Taková řada je pak zřejmě určena paprskem t s dotykovým bodem T (obr. 16c) čili *tečným elementem.*



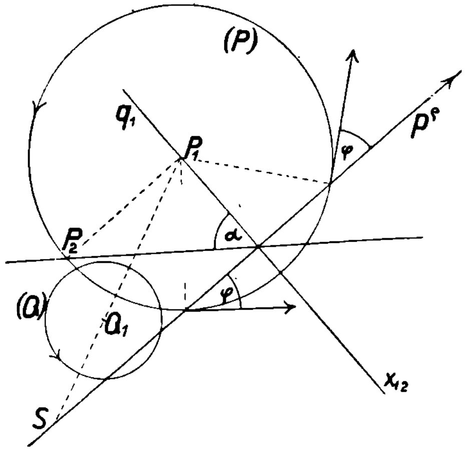
Obr. 16a, b, c.

Teď lze také snadno nahlédnouti, jaký je krajní případ cyklu, vzdaluje-li se bod na p do nekonečna a blíží se nevlastnímu bodu U_∞. Označme a_∞, b_∞ tečny z U_∞ ku C, jež leží v rovině nevlastní, A_∞, B_∞, jejich stopy na π, t. j. nevlastní body společných tečných paprsků p', p''. Považujeme-li obecný cykl (A) za obálku paprsků, které jsou stopami tečných rovin kužele $A(A)$, t. j. rovin, které jdou bodem A a dotýkají se kuželosečky C, pak vidíme, že roviny jdoucí bodem U_∞

a dotýkající se kuželosečky C tvoří dva svazky rovin s osami a_∞, b_∞, stopy na průmětně π tvoří tedy dvě osnovy přímek s vrcholy A_∞, B_∞. Dvojici těchto bodů se všemi přímkami, které jimi jdou, jest tedy považovati za cykl odpovídající nevlastnímu bodu U_∞. Jak jest to, je-li p „isotropická" přímka?

2,2. Cyklické pole. Bodům roviny ϱ patří cykly, jež tvoří cyklické pole čili lineární kongruenci cyklů. Dva body v rovině určují přímku, jejíž všechny body jsou v rovině, tedy dva cykly cyklického pole určují lineární řadu cyklů v poli obsaženou. Tři body neležící na přímce určují rovinu, tři cykly nepatřící lineární řadě, určují cyklické pole. Jeho nulové cykly vyplňují stopu p^ϱ roviny ϱ, již budeme nazývati *osou* cyklického pole. Střed podobnosti kterýchkoli dvou cyklů pole leží na p^ϱ. Tři cykly pole, jež nepatří téže lineární řadě, mají tři středy podobnosti na ose p^ϱ.

Tři cykly určují tři středy podobnosti položené na přímce, již zoveme jejich osou podobnosti.



Obr. 17.

Teď se jeví také záhodno orientovati osu p^ϱ (viz odst. 1,2), takže kladná strana osy p^ϱ je ta, na které se nachází půdorys kladné části roviny ϱ, t. j. části, jíž odpovídají cykly kladné.

Buď q spádová přímka roviny ϱ (obr. 17) vedená bodem P, α její odchylka od průmětny π a tedy i odchylka roviny ϱ, φ úhel cyklu (P) s osou p^ϱ; pak jest (1,3)

$$\cos\varphi = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Všechny cykly cyklického pole sekou jeho osu v úhlu, jehož kosinus je konstantní a rovný kotangentě odchylky roviny.

Osa má tutéž mocnost ke všem cyklům pole (1,4).

Cyklické pole je dáno osou (orientovanou) a kosinem úhlu φ. (Jinak však osa neorientovaná a úhel φ určují dvě pole).

Jest rozeznávati tři druhy cyklických polí dle toho, je-li odchylka roviny ϱ větší, menší nebo rovna 45°.

a) *Cyklické pole hyperbolické.* $\alpha > 45°$, $\cos\varphi < 1$. Jeho cykly sekou osu ve dvou reálných bodech. Bodem v rovině ϱ jdou dvě přímky, jež mají odchylku 45° a celé v ní leží, tedy každým cyklem pole jdou dvě řady parabolické. Pole obsahuje řady eliptické i hyperbolické.

b) *Cyklické pole eliptické.* $\alpha < 45°$, $\cos\varphi > 1$. Jeho cykly sekou osu ve dvou imaginárních sdružených bodech. ϱ neobsahuje přímek a odchylkou 45°. Všechny řady obsažené v poli jsou hyperbolické.

c) *Cyklické pole parabolické.* $\alpha = 45°$, $\cos\varphi = 1$. Všechny jeho cykly se dotýkají osy p^ϱ. Parabolické pole tedy sestává z cyklů, jež se téhož paprsku dotýkají.

Poznámky. Tři cykly mají jedinou osu podobnosti, stopu lineární kongruence jimi určené, na níž leží středy podobnosti vždy dvou a dvou z cyklů. Na kružnici jsou však dva cykly a těm patří v prostoru body symetricky položené dle průmětny π, na př. A, A'; B, B'; C, C', kde A, B, C jsou nad, A', B', C' pod průmětnou. Těmito body je určeno osm rovin, po dvou jsou symetricky položené dle π a mají tedy tutéž stopu. Pišme je pod sebou

$$\begin{array}{cccc} ABC & ABC' & AB'C & A'BC \\ A'B'C' & A'B'C & A'BC' & AB'C'. \end{array}$$

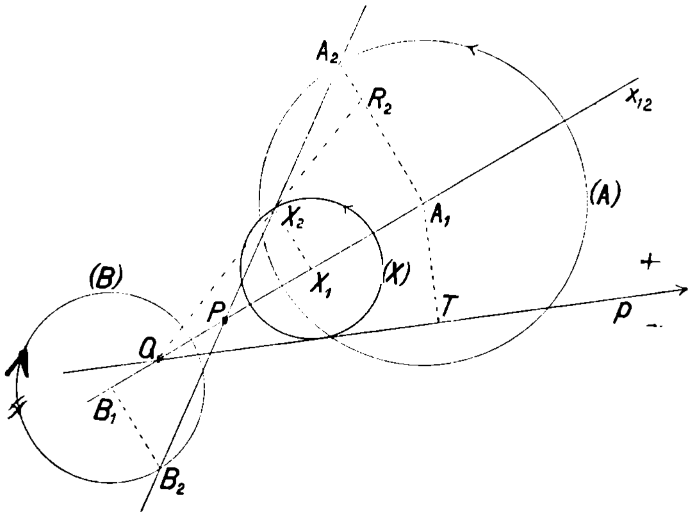
Dvě kružnice mají, jak známo, dva středy podobnosti, vnější a vnitřní. Jest zde tedy celkem šest středů podobnosti a vždy tři leží na jedné ose podobnosti (všechny vnější nebo dva vnitřní a jeden vnější). Osy podobnosti tvoří úplný čtyrstran a středy podobnosti jsou jeho vrcholy.

Jaká cyklická pole patří a) rovině rovnoběžné s π?, b) rovině π?, c) rovině kolmé ku π?

2,3. Úlohy o řadách a cyklických polích. Zde buď na několika příkladech ukázáno, jak různé úlohy o cyklech lze převésti na úlohy o bodech, přímkách a rovinách v prostoru, a také obráceně, jak vztahům mezi body, přímkami a rovinami v prostoru odpovídají v rovině vztahy mezi cykly.

Úloha 1. *Dána je řada dvěma cykly* (A), (B). *Jest sestrojiti cykl, který se dotýká paprsku* p.

Rozbor. Řadě cyklů odpovídá v prostoru přímka AB. Cykly dotýkající se paprsku p tvoří parabolické cyklické pole a v prostoru mu patří rovina ϱ se stopou p a odchylkou 45° a to tak, že část nad průmětnou π je po kladné straně paprsku p. Hledaný cykl odpovídá průsečíku ϱ s AB.



Obr. 18.

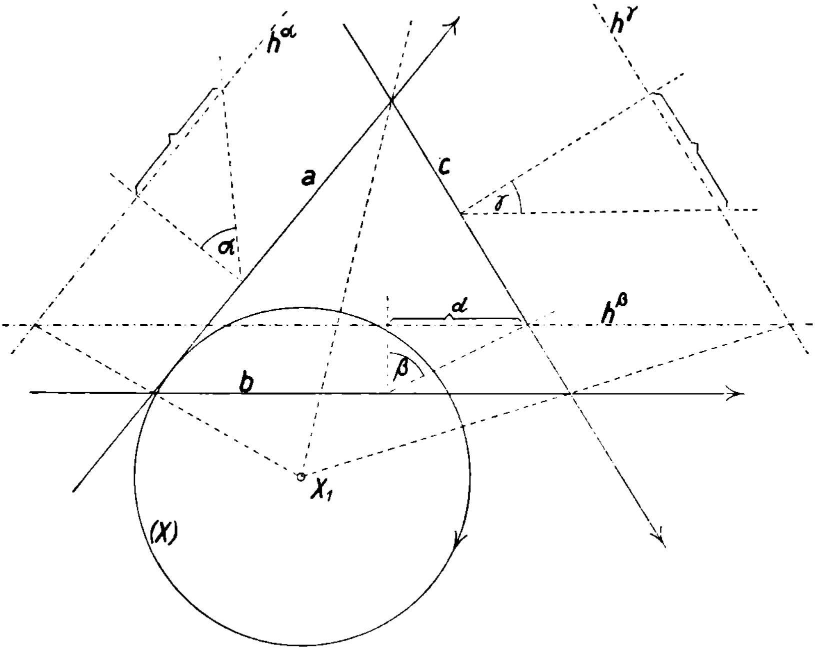
Provedení (obr. 18). Promítací rovinu přímky AB volme za průmětnu druhou a sklopme kolem $x_{12} \equiv A_1B_1$ do průmětny. A_2B_2 je obraz přímky AB. Stopa roviny ϱ na druhé průmětně je určena bodem Q a bodem R, kde $\overline{A_1R_2} = \overline{A_1T}$, $A_1T \perp p$. A_2B_2 a QR_2 určují průsečík X_2 . X_1 je střed hledaného cyklu o poloměru X_1X_2.

Úloha 2. *Sestrojte cykl, který se dotýká paprsku* a, *seče paprsek* b *v úhlu* $\varphi(\cos\varphi = \frac{1}{2})$ a *paprsek* c *v úhlu* ψ $(\cos\psi = \frac{4}{5})$.

Rozbor. Cyklům, jež se dotknou paprsku a přísluší body v rovině α (s odchylkou 45°), cyklům, jež sekou b pod úhlem φ patří rovina β

s odchylkou β, pro niž $\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{2}$. Cyklům, jež sekou c pod úhlem ψ, patří body v rovině γ s odchylkou γ, kde $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{5}{3}$. Průsečíku těchto tří rovin patří hledaný cykl.

Provedení je v obr. 19. V každé rovině je sestrojena hlavní přímka rovnoběžná s průmětnou v téže výšce d pomocí odchylek α, β, γ.



Obr. 19.

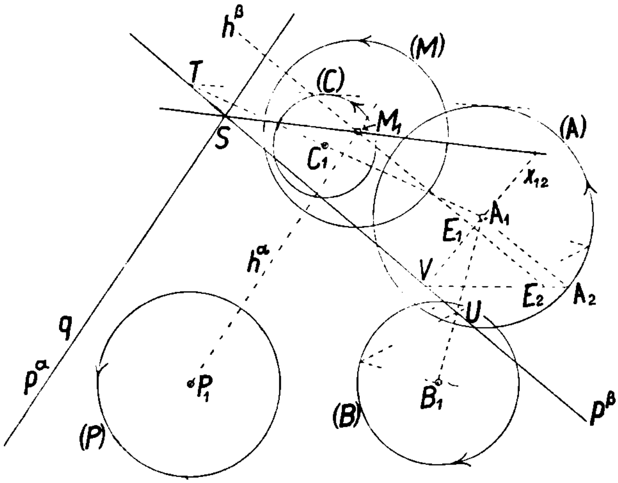
Tyto hlavní přímky $h^\alpha, h^\beta, h^\gamma$ tvoří trojúhelník stejnolehlý s trojúhelníkem stop a, b, c. Střed stejnolehlosti X_1 je středem hledaného cyklu.

Poznámka. Dáme-li v textu předešlé úlohy slovo přímka (neorientovaná) místo paprsek a slovo cykl nahradíme slovem kružnice, pak musíme v prostoru uvažovati ke každé rovině i rovinu symetrickou dle průmětny π, tedy celkem šest rovin: α, α'; β, β'; γ, γ' a příslušné průsečíky. Body symetrické dávají však tutéž kružnici, stačí tedy uvážiti na př. kombinace

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta, \gamma; \quad \alpha, \beta', \gamma; \quad \alpha, \beta, \gamma'$$

a dostaneme celkem čtyři řešení.

Úloha 3. *Sestrojte lineární řadu cyklů společnou dvěma cyklickým polím. První je dáno osou q a cyklem (P), druhé je dáno třemi cykly (A), (B), (C).*

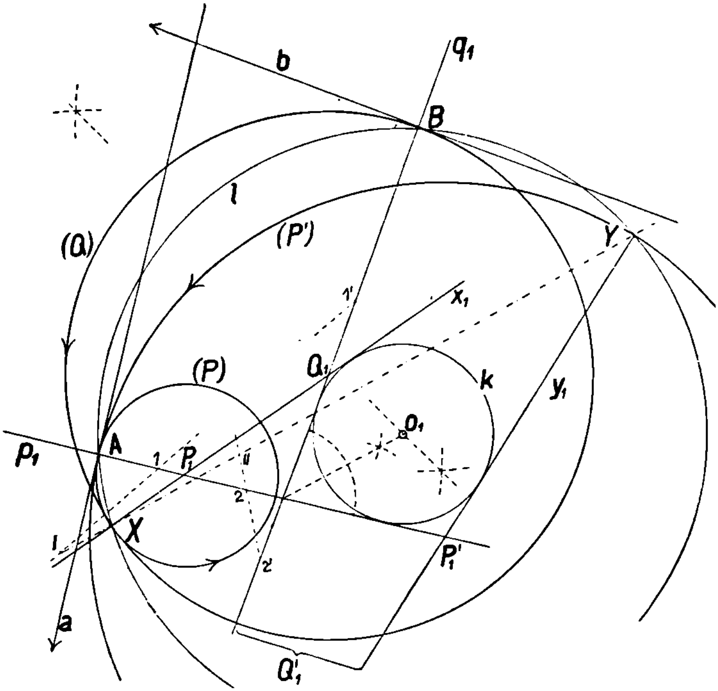


Obr. 20.

Rozbor. Prvnímu poli patří v prostoru rovina $\alpha \equiv (q, P)$, druhému rovina $\beta \equiv (A, B, C)$. Hledaná řada odpovídá průsečnici obou rovin.

Sestrojení. V obr. 20 jest $q \equiv p^\alpha$, p^β sestrojeno jako spojnice středu podobnosti T cyklů (A), (C) se středem podobnosti U cyklů (A), (B). Stopy obou rovin se sekou v S. Abychom našli ještě jeden bod průsečnice, hledejme v obou rovinách hlavní přímky h^α, h^β ve stejné výši nad průmětnou. Volme ji rovnou kótě bodu P. h^α jde tedy bodem P_1 rovnoběžně s q, bod E na h^β jest sestrojen na odchylkové přímce AV roviny β, kde $E_1E_2 = z_P$. Obě hlavní přímky sekou se pak v bodě M, jemuž patří cykl shodný s (P). Hledaná řada je určena stopníkem S a cyklem (M).

Úloha 4. *Dán jest paprsek a s bodem A (tečný element), paprsek b s bodem B. Jest sestrojiti dva cykly, které se dotýkají navzájem a z nichž jeden dotkne se paprsku a v A, druhý paprsku b v B. Mimo to ať jsou jejich poloměry v poměru 1 : 3.*



Obr. 21.

Rozbor. Mají-li se dva cykly dotýkati, musí příslušné body ležeti na „isotropickém" paprsku. Parabolické řadě cyklů, jež se dotýkají paprsku a v bodě A patří přímka p, podobně druhé řadě cyklů, které se v B dotýkají paprsku b patří přímka q. Je-li m přímka „isotropická", která seče p, q v bodech P, Q a má stopník S, pak bodům P, Q patří cykly (P), (Q), které mají vlastní dotyk v bodě S a s paprskem a dotyk v A, s paprskem b dotyk v B. Přímky m vyplňují hyperboloid a ježto mají ku π týž sklon 45°, rotační jednodílný hyperboloid obsahující přímky p, q. Jeho stopa na π jest kružnice l obsahující body A, B. Jest tedy nekonečně mnoho dvojic cyklů hledané vlastnosti a místo bodů dotyku S jest kružnice. Druhá podmínka žádá, aby kóty bodů dotyku P, Q byly v poměru 1 : 3. Tím vznikají na přímkách p, q řady podobné a spojnice přidružených bodů vyplní hyperbolický paraboloid obsahující přímky p, q. Tento má s prvým hyperboloidem společné mimo p, q ještě přímky x, y druhé soustavy, jež dávají na p, q body hovící úloze.

Sestrojení. V obr. 21 byly sestrojeny přímky p, q. Střed O_1, půdorys osy rotačního hyperboloidu, je průsečík osy symetrie bodů A, B s osou úhlu $\widehat{p_1q_1}$. Obrys hyperboloidu je kružnice k o středu O_1, která se dotýká přímek p_1, q_1, stopa je soustředná kružnice l body A, B. Abychom sestrojili stopu hyperbolického paraboloidu, vezměme body 1, 1′, kde $\overline{B1'} = 3 \,.\, \overline{A1}$, a body 2,2′, kde $\overline{B2'} = 3 \,.\, \overline{A2}$. Stopy přímek $11'$, $22'$ jsou I, II, kde $\overline{1'I} = 3 \,.\, \overline{1I}$, $\overline{2'II} = 3 \,.\, \overline{2II}$. Přímka $I\,II$ seče l v bodech X, Y a jimi jdou povrchové přímky hyperboloidu x, y. Na nich leží středy hledaných cyklů P, Q, resp. P', Q'. (Cykl (Q') není v obraze narýsován).

Cvičení 2,1. Dána je řada cyklů dvěma cykly (A), (B) a cyklické pole třemi cykly (M), (N), (P). Sestrojte společný cykl.

2,2. Dána jsou dvě cyklická pole, prvé osou p^α a cyklem (P), druhé osou p^β a cyklem (Q). Jest sestrojiti společný cykl o daném poloměru r.

2,3. Bodem P v prostoru jde ke dvěma přímkám a, b jediná příčka, t. j. přímka, která obě seče. Jaký význam má tato věta v geometrii cyklů? Podobně uvažujte o příčce rovnoběžné s daným směrem.

2,4. Jaký je cyklografický význam věty, že ke čtyřem přímkám existují dvě společné příčky?

2,5. Dány jsou v průmětně paprsky a, b a cykl (P). Sestrojte cykl (X), který se dotkne paprsku a, seče b v úhlu daném ($\cos\varphi = \frac{3}{4}$), takže společné tečné paprsky cyklu (P) a (X) svírají daný úhel (30°). (*Návod*: Určete odchylku přímky $p \equiv PX$. Je-li tato α a $\varphi = \widehat{p'p''}$ úhel společných tečných paprsků, je $\sin\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$).

2,6. Dány jsou tři dotykové elementy (tečna s bodem dotyku) $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$. Jim odpovídají v prostoru tři „isotropické“ přímky p, q, r. Je-li m

jedna z příček těchto tří přímek, M její stopník, jaký význam mají cykly příslušné průsečíkům (m, p), (m, q), (m, r)? Sestrojte m tak, aby tyto tři cykly se opět v bodě M dotýkaly!

2,7. Jsou dány cykly (A), (B), (C). Sestrojte cykl (X) tak, aby společné tečné paprsky cyklů (A), (X) svíraly úhel daný φ_1, podobně pro (B), (X) úhel φ_2 a pro (C), (X) úhel φ_3. Zvláště uvažte případ $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ (viz úl. 5).

2,8. Jsou dány dvě lineární řady cyklů. Ke každému cyklu jedné řady přiřaďme cykl druhé řady, který se ho dotýká. Jaké je geom. místo bodů dotyku? (*Návod*: „Isotropické" přímky, které sekou dvě přímky v prostoru tvoří přímkovou plochu čtvrtého stupně. Viz KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie, II, str. 697).

2,9. Jaké je geom. místo bodů v prostoru, kterým přísluší cykly sekoucí paprsky a, b v úhlech φ_1, φ_2 s podmínkou $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 = k_1 : k_2$? Jaké je g. m. bodů, kterým přísluší cykly, jež sekou paprsky a, b, c v úhlech, pro které $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 = k_1 : k_2 : k_3$ (na př. $\frac{1}{2} : -2 : 3$)?

2,10. V prostoru jsou dány dvě projektivní řady bodové, kterým odpovídají dvě projektivní řady cyklů. Dva přiřaděné cykly určují novou řadu. Jaké je g. m. nulových cyklů těchto řad? Jaká je obálka společných paprsků tečných?

2,11. Dány jsou cykly (A), (B), (C), (D). Sestrojte cykl (X) tak, aby společné tečné paprsky cyklů $(A)(X)$, $(B)(X)$ atd. svíraly stejné úhly. (Viz článek E. MÜLLERA v Archiv für Matematik u. Physik r. 1913 a práci J. SOBOTKOVU: „O zvláštním způsobu určení kuželů a několik příslušných úloh cyklografických", Rozpravy České akademie, r. XXIII, č. 36).