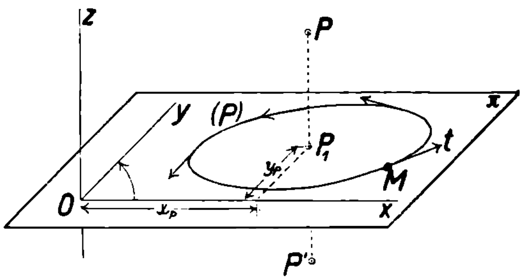
I. ÚVOD

1,1. Cyklický průmět bodu. Bodu v prostoru přiřaďme v dané vodorovné rovině kružnici s určitým smyslem otáčení následujícím způsobem. Buď π vodorovná rovina čili *průmětna*, P bod v prostoru mimo ni. Spusťme z bodu P kolmici na rovinu π a označme její patu, t. j. *kolmý průmět* bodu P čili jeho *půdorys* P_1; kolem bodu P_1 opišme kružnici poloměrem $\overline{P_1P}$. Zaveďme obvyklé určení bodu v prostoru pravoúhlými souřadnicemi. V průmětně π volme osy x, y a kolmo k ní osu z tak, aby trojhran tvořený kladnými směry těchto os byl *pravotočivý* (palec, ukazovák a prostřední prst pravé ruky, jak ukazuje obr. 1.). Pak bod P_1 má v průmětně π souřadnice x, y a délka $\overline{P_1P}$ sluje *kóta* (souřadnice z) bodu P. Tím způsobem je bodu v prostoru přiřaděna jediná kružnice v π, obráceně však kružnici v π patří dva body na kolmici vztyčené v jejím středu P_1 ve vzdálenosti rovné poloměru, jeden nad a druhý (P') pod průmětnou, položené symetricky dle průmětny. Abychom tuto dvojznačnost odstranili, přisuzujeme kružnici



Obr. 1.

určitý smysl čili *orientujeme* ji. Je-li P nad průmětnou (z kladné), ať je onen smysl kladný, je-li P pod průmětnou, ať je záporný. Kladný smysl otáčení v průmětně π jest dán otočením kladné části osy x do kladné části osy y (proti pohybu ručiček hodinových, díváme-li se shora dolů) anebo také tímto pravidlem: *Kráčí-li chodec po kružnici v průmětně π a má-li střed její po své levé straně, jest smysl otáčení kladný*, jinak je záporný. Tím je dvojznačnost odstraněna. Orientovanou kružnici zoveme *cykl* a smysl otáčení značíme šipkou. *Bodu v prostoru je tedy přiřaděn cykl a naopak*, přiřadění obou množství,

množství bodů v prostoru (bodů vlastních, t. j. v konečnu ležících) a množství cyklů v rovině π je jedno-jednoznačné. Také je možno mluviti o znaménku poloměru. Cykl kladný, jemuž je přiřaděn bod s kladnou souřadnicí z, má kladný poloměr, cykl záporný, jemuž je přiřaděn bod se zápornou kótou, má poloměr záporný. *Kružnice je nositelkou dvou cyklů.*

Na toto přiřadění bodů a cyklů lze se dívati také takto: P jest vrchol rotační kuželové plochy, jejíž přímky mají od průmětny π odchylku 45°. Stopa je cykl příslušný bodu P. Všechny tyto plochy kuželové jsou shodné a vzájemně rovnoběžné, mají tedy společnou kuželosečku v rovině nevlastní ω (v nekonečnu). Označme tuto kuželosečku C a nazývejme ji *základní kuželosečkou.* Její rovnice v pravoúhlých homogenních souřadnicích jsou

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad t = 0 \text{ (rovnice roviny nevlastní).}$$

Základní kuželosečka C a bod $P(x_1, y_1, z_1)$ určují kužel

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (z - z_1)^2 = 0$$

a jeho stopa na π $(z = 0)$ jest kružnice

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - z_1^2 = 0,$$

nositelka přiřaděného cyklu.

Zaveďme následující označení. Cykl přiřaděný bodu P neboli *cyklický průmět bodu P* označme (P), příslušnou kuželovou plochu $P(P)$. Není-li třeba šetřiti smyslu a možno-li mluviti o kružnici a nikoli o cyklu, označujme ji $[P]$. Pro cykl užíváme tedy okrouhlých, pro kružnici lomených závorek. Kružnici jsou přiřaděny dva body P, P' položené symetricky dle π.

Bodu v průmětně $P(x_1, y_1, 0)$ přiřaďujme pravidlem tento bod sám jako cykl o poloměru nulovém

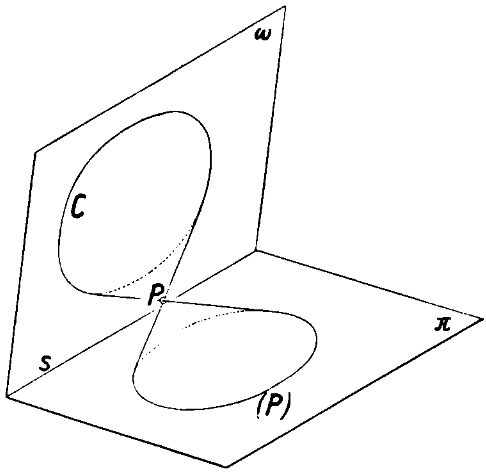
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0.$$

Ten lze ovšem také považovati za dvojinu isotropických přímek s reálným průsečíkem

$$[y - y_1 + \mathrm{i}(x - x_1)] \cdot [y - y_1 - \mathrm{i}(x - x_1)] = 0.$$

Tento způsob přiřadění bodů v prostoru a cyklů v průmětně se nazývá *cyklické promítání.**) Nauka o cyklickém promítání sluje *cyklografie.*

Vidíme také, že naše cyklické promítání lze snadno zobecniti projektivně. Buď dána rovina ω (obr. 2) v konečnu a v ní kuželosečka C (*základní*). Bodu P v prostoru přiřaďme v průmětně π stopu kužele s vrcholem P a řídící křivkou C. Tato stopní kuželosečka (P) má s C společné dva body na průsečnici $s \equiv (\omega, \pi)$. Obráceně taková kuželosečka v π, jež má s C dva společné body na s, jest obrazem dvou bodů, není-li jiné úmluvy (neboť dvěma kuželosečkami o dvou společných bodech jdou dvě kuželové plochy).



Obr. 2.

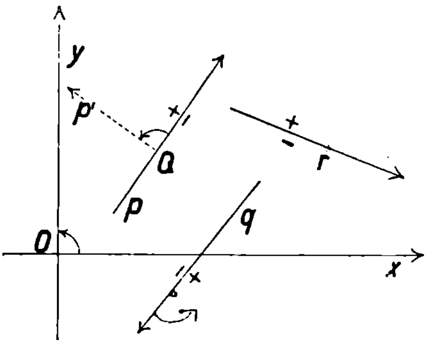
V našich úvahách hrají stále důležitou úlohu přímky, které sekou základní kuželosečku C v nevlastní rovině ω (v nekonečnu), a také roviny, které se této kuželosečky dotýkají. Nazývejme je „*isotropické přímky*" a „*isotropické roviny*".

1,2. Orientovaná přímka čili paprsek. Úhel dvou paprsků. Buď M bod na cyklu (P), t jeho tečna (obr. 1). Této tečně jest nutno přisouditi smysl, který v bodě M souhlasí se smyslem příslušného elementu na cyklu a je označen šipkou. Nyní se ukazuje nutnost zavésti také orientovanou přímku. Na přímce jsou dva smysly. *Přímce s určitým smyslem* označeným obyčejně šipkou říkejme *orientovaná přímka* nebo pro krátkost *paprsek.* V následujícím budeme slovem paprsek rozuměti vždy přímku s určitým směrem. V přímce leží tedy dva paprsky opač-

---

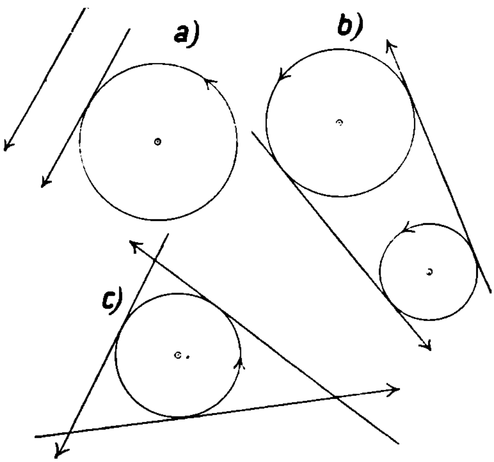
*) J. Sobotka užívá také názvu *kruhový průmět a kruhové promítání* (Deskriptivní geometrie promítání paralelního, str. 56). Jenže u něho šetření smyslu nehraje ještě tak podstatnou úlohu.

ných smyslů. Paprsek rozděluje rovinu π ve dvě části dle následující úmluvy, jež je ve shodě s předchozí úmluvou o cyklech. Volili jsme v π soustavu pravoúhlých os jak ukazuje obr. 1 neb obr. 3, takže kladný smysl osy Ox se otočí do kladného smyslu osy Oy ve smyslu, jenž byl označen jako kladný (proti smyslu otáčení ručiček hodinových). Je-li dán paprsek p, volme na p libovolný bod Q a otočme p kolem Q ve smyslu kladném o úhel $90°$ do polohy p'. Stranu, do které nyní padnou body, jež se na původním paprsku nacházely ve smyslu paprsku před Q, zoveme kladnou. *Paprsek dělí tedy průmětnu π v část kladnou a zápornou.* Dle toho jsou v obr. 3 označeny strany znaménkem $+$ neb $-$ u paprsků p, q, r.



Obr. 3.

Paprsku v π lze také přiřaditi určitou „isotropickou" rovinu. Přímkou p v průmětně π jdou dvě tečné roviny ku C (s odchylkou $45°$ od π) a každá je přímkou p rozdělena v část kladnou (nad π) a zápornou (pod π). *Je-li přímka orientována, přiřaďme jí onu z těchto dvou rovin, jejíž kladná část má průmět v kladné straně paprsku.* Tím je získán vzájemně jednoznačný vztah mezi paprsky v rovině π a „isotropickými" rovinami.

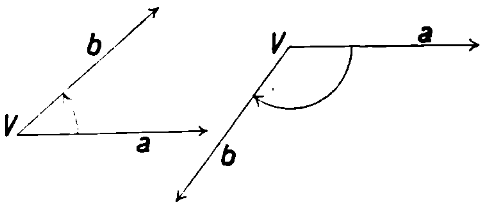


Obr. 4.

Chceme-li důsledně šetřiti zavedeného smyslu cyklů a smyslu paprsků, musíme opraviti mnohé věty geometrie elementární, na př.: „K danému cyklu jde jen jeden tečný paprsek rovnoběžný s daným paprskem" (obr. 4a), nebo: „Dva cykly mají společné dva tečné paprsky" (obr. 4b), „Tři paprsků se dotýká jediný cykl" (obr. 4c) atd.

Úhlem paprsků a, b, jejž značíme $\widehat{ab}$, rozumíme úhel, který povstane, otočíme-li kolem průsečíku V paprsek a do b. To jest sice možno dvojím způsobem, není-li však jinak řečeno, volíme ten, kde úhel je absolutně menší nežli 180° (obr. 5), nejvýše roven 180°. Má tedy úhel vždy určitý smysl, kladný nebo záporný. Úhly $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ jsou stejné ($\widehat{ab} = \widehat{cd}$), lze-li pohybem v rovině (pošinutím a otočením kolem bodu) převésti jeden do druhého, takže a se pokryje s c, b se pokryje s d. Symetrie dle osy změní smysl úhlu.

Úhly $\widehat{ab}$ a $\widehat{ba}$ liší se znaménkem, mají však stejný kosinus. *K danému kosinu patří dva úhly různé znaménkem.* Určení úhlu kosinem bude se v dalším často vyskytovati.



Obr. 5.

Dva rovnoběžné paprsky téhož smyslu svírají úhel rovný nule, dva rovnoběžné paprsky opačného smyslu svírají úhel 180°.

Zavedení orientovaných elementů lze také analyticky vystihnouti, užijeme-li t. zv. *nadbytečných* souřadnic. Ukažme to nejprve na přímce. V pravoúhlé soustavě jest její rovnice

$$ux + vy + 1 = 0; \tag{1}$$

u, v slují souřadnice přímky a jejich geometrický význam je znám $\left(\text{úseky na osách jsou } -\dfrac{1}{u}, -\dfrac{1}{v}\right)$.

Vzdálenost bodu $M(x, y)$ od přímky uvedené jest

$$\varrho = \frac{ux + vy + 1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2}}. \tag{2}$$

Znaménko vzdálenosti ϱ závisí na znaménku druhé odmocniny ve jmenovateli. Volíme-li určité znaménko, pak všechny body na jedné straně přímky mají znaménko $+$, na druhé znaménko $-$. Volbou znaménka jsme tedy rozhodli, která strana je kladná a která záporná. Dvojí možné orientaci odpovídá tedy volba znaménka veličiny $\sqrt{u^2+v^2}$. Označme jednu z těchto hodnot w a nazývejme veličiny u, v, w souřadnice paprsku. Pak na hořejší přímce jsou dva paprsky: $p'(u, v, w)$, $p''(u, v, -w)$. Tyto souřadnice jsou však vázány vztahem

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

Vzdálenost bodu $M(x, y)$ od paprsku $p(u, v, w)$ jest tedy

$$\varrho = \frac{ux + vy + 1}{w}. \tag{3}$$

Vzdálenost počátku $O(0,0)$ od tohoto paprsku jest $\frac{1}{w}$. Při $w > 0$ leží tedy O na kladné, při $w < 0$ na záporné straně paprsku. Pata kolmice spuštěné z počátku O na paprsek má souřadnice $\left(-\frac{u}{w^2}, -\frac{v}{w^2}\right)$.

Pro úhel osy x s paprskem p dostaneme snadno

$$\cos\widehat{xp} = \frac{v}{w}, \ \sin\widehat{xp} = -\frac{u}{w}, \ \operatorname{tg}\frac{\widehat{xp}}{2} = \frac{w-v}{u} = \frac{u}{v+w}. \tag{4}$$

Pro úhel paprsků (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) jde

$$\widehat{p_1p_2} = \widehat{xp_2} - \widehat{xp_1},$$

z čehož

$$\cos\widehat{p_1p_2} = \cos\widehat{xp_2} \, . \cos\widehat{xp_1} + \sin\widehat{xp_2} \, . \sin\widehat{xp_1},$$

$$\cos\widehat{p_1p_2} = \frac{u_1u_2 + v_1v_2}{w_1w_2}, \ \sin\widehat{p_1p_2} = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{w_1w_2}. \tag{5}$$

Pro paprsky rovnoběžné jest $\sin\widehat{p_1p_2} = 0$, $\cos\widehat{p_1p_2} = 1$, tedy

$$u_1 : u_2 = v_1 : v_2, \qquad u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2 = 0$$

nebo, je-li k libovolný činitel,

$$u_2 = ku_1, \qquad v_2 = kv_1, \qquad w_2 = kw_1. \tag{6}$$

Jsou-li paprsky kolmé, jest

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0. \tag{7}$$

Rovnice (3), kde ϱ je konstantní, vyjadřuje podmínku, aby paprsek (u, v, w) měl od bodu (x, y) konstantní vzdálenost. Jest tedy rovnice cyklu, jejž považujeme za obálku paprsků a který má střed (x_0, y_0) a poloměr ϱ,

$$ux_0 + vy_0 + 1 - \varrho w = 0. \tag{8}$$

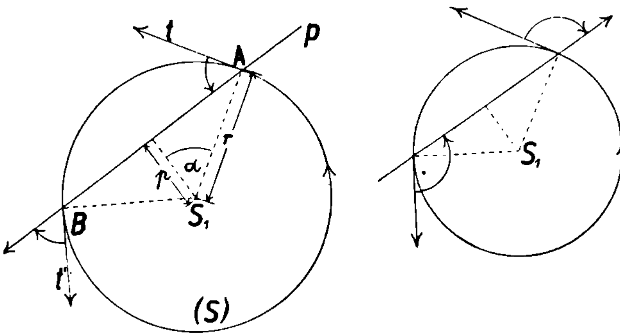
Je zřejmě lineární v souřadnicích paprskových.

Veličiny x_0, y_0, ϱ nazývejme souřadnice cyklu. Tento cykl leží s cyklem $(x_0, y_0, -\varrho)$ o rovnici

$$ux_0 + vy_0 + 1 + \varrho w = 0$$

na téže kružnici

$$\varrho^2 w^2 - (ux_0 + vy_0 + 1)^2 = 0.$$



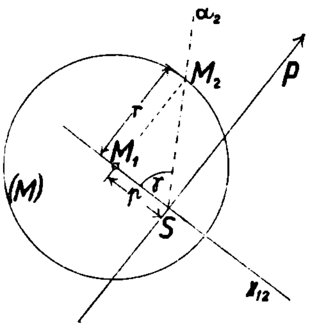
Obr. 6.

1,3. Úhel cyklu s paprskem. Úhel cyklu (S) s paprskem p jest jeden nebo druhý z úhlů $\widehat{tp}$ neb $\widehat{t'p}$, jejž svírají tečné paprsky cyklu v průsečících A, B s paprskem p, jak ukazují obrazy 6, které se liší od sebe změnou směru paprsku p. Z obrazu je vidno, že

$$\cos\alpha = \frac{p}{r}, \tag{1}$$

kde p a r jsou vzaty s náležitým znaménkem. V obrazu po levé straně jest S_1 na kladné straně paprsku, vzdálenost p tedy kladná a úhel α ostrý. Úhly $\widehat{tp}$, $\widehat{t'p}$ mající stejný kosinus liší se jen znaménkem. V obraze na pravé straně jest p záporná, úhel α tupý. Jak se změní úhly, provedeme-li změnu smyslu u cyklu?

Kosinus úhlu cyklu s paprskem jest roven poměru mezi vzdáleností paprsku od středu a poloměrem.



Obr. 7.

Tuto rovnici béřeme za definici úhlu cyklu s paprskem, i když se nesekou v reálných bodech, tedy když $|p| > |r|$; kosinus je větší jedné a úhel imaginární.*)

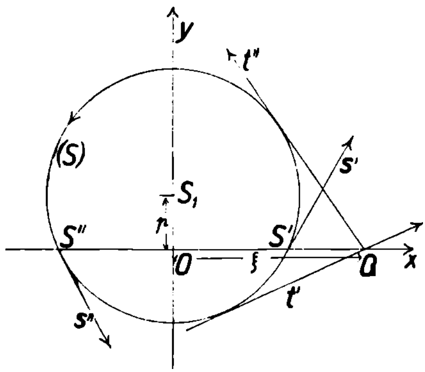
Úhel cyklu s paprskem souvisí velmi jednoduše s odchylkou roviny určené tímto paprskem a bodem, jehož cyklografický průmět je daný cykl. Mějme cykl (M) o středu M_1 a paprsek p (obr. 7). Volme rovinu jdoucí bodem M kolmo ku p za novou průmětnu (druhou) a sklopme kolem osy x_{12} do průmětny π, takže M přijde do M_2. $\alpha_2 \equiv SM_2$ je druhý obraz roviny $\alpha \equiv (Mp)$ a také druhý obraz spádové přímky, γ odchylka roviny od průmětny π. Zřejmě jest

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{p}{r}. \qquad (2)$$

Srovnáme-li s (1), máme

$$\operatorname{cotg}\gamma = \cos\alpha. \qquad (3)$$

Kosinus úhlu, jejž svírá cykl s paprskem rovná se kotangentě odchylky roviny určené bodem příslušným danému cyklu a paprskem.



Obr. 8.

1,4. Mocnost paprsku k cyklu. V elementární geometrii hraje

---

*) Řada

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

konverguje jak známo v celé rovině komplexní proměnné pro jakékoli x. Položme $x = \varphi_1 + i\varphi_2$ a vidíme snadno, že $\cos x$ jest hodnota komplexní pokud φ_1, φ_2 jsou od nuly různé. Pro $x = i\varphi$, jest reálná a zřejmě větší nežli 1.

důležitou úlohu mocnost bodu ke kružnici. V geometrii orientovaných elementů hraje podobnou úlohu *mocnost paprsku k cyklu,* již lze následovně definovati. Buď dán cykl (S) a paprsek p. Volme osy souřadnicové jak ukazuje obr. 8 a na Ox bod Q. Z něho jdou dva tečné paprsky t', t''. Rovnice cyklu (S) o středu $S_1(0, p)$ a poloměru ϱ jest dle rov. (8) odst. 1,2

$$vp + 1 - \varrho w = 0,$$

rovnice bodu Q, t. j. cyklu o středu $(\xi, 0)$, poloměru $\varrho = 0$, jest

$$u\xi + 1 = 0.$$

Dosadíme-li za u, v do rovnice $u^2 + v^2 - w^2 = 0$, dostaneme

$$w^2 - \frac{2\varrho}{\varrho^2 - p^2} w + \frac{p^2 + \xi^2}{\xi^2(\varrho^2 - p^2)} = 0;$$

označme kořeny w_1, w_2, i jest

$$w_1 + w_2 = \frac{2\varrho}{\varrho^2 - p^2}, \quad w_1 w_2 = \frac{p^2 + \xi^2}{\xi^2(\varrho^2 - p^2)}.$$

Utvořme součin (viz rov. (4) odst. 1,2)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\widehat{xt'} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\widehat{xt''} = \frac{v_1 - w_1}{u_1} \,.\, \frac{v_2 - w_2}{u_2}.$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme s použitím předchozích rovnic

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{xt'} \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{xt''} = \frac{\varrho - p}{\varrho + p}.$$

Tento výraz je tedy nezávislý na poloze bodu Q na paprsku p a sluje *mocnost paprsku p k cyklu* (S). Přijde-li bod Q do jednoho neb druhého průsečíku S', S'', splynou tečné paprsky a uvedená mocnost se rovná

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{xs'} = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{xs''}.$$

1,5. Úhel dvou cyklů. Dotyk cyklů. Úhlem cyklů (A), (B) rozumíme úhel tečných paprsků v průsečících M, N obou cyklů. Úhly jsou dva $\widehat{t_A t_B}$, $\widehat{t'_A t'_B}$, jak ukazuje obr. 9, liší se jen znaménkem, mají tedy stejný kosinus.

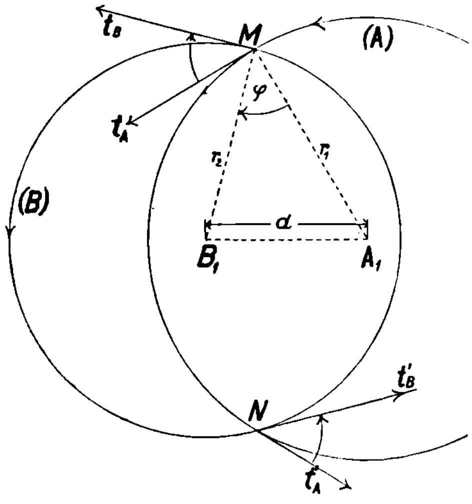
Otočíme-li současně paprsky t_A, t_B v kladném smyslu o úhel 90°, přejdou tečné paprsky v poloměry MA_1, MB_1 a úhel tečných paprsků rovná se úhlu A_1MB_1. Z trojúhelníka A_1MB_1 plyne dle kosinové věty, je-li $\overline{A_1B_1} = d$,

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Tuto rovnici béřeme za *definici úhlu dvou cyklů*, i když se reálně neprotínají.



Obr. 9.

Jak se změní $\cos\varphi$, změní-li se znaménko jednoho cyklu a tím i znaménko poloměru?

Dotýkají-li se dva cykly, jest rozeznávati dva různé způsoby, ***dotyk vlastní*** a *nevlastní*. V prvém případě — obr. 9*a* — mají oba cykly v dotykovém bodě tentýž tečný paprsek, úhel sevřený jest roven nule, jeho kosinus roven $+1$, tedy

$$r_1^2 + r_2^2 - d^2 = 2r_1r_2,$$

čili

$$(r_1 - r_2)^2 = d^2,$$

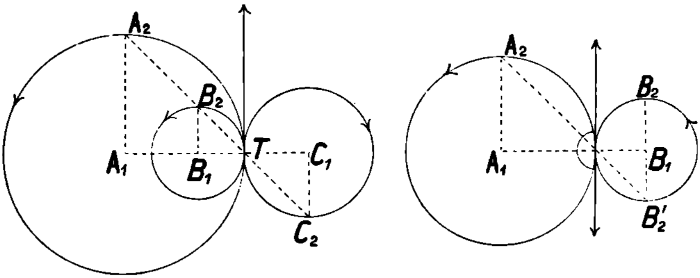
kde ovšem poloměry jest bráti s příslušným znaménkem. Na př. cykly (A), (B) jsou oba kladné, d se rovná rozdílu, dotyk je vnitřní, cykly (A), (C) jsou různě orientované, dotyk je vnější a d je rovno součtu absolutních hodnot poloměrů.

Při dotyku nevlastním — obr. 9*b* — úhel tečných paprsků v bodě dotyku jest 180°, $\cos\varphi = -1$ a vychází

$$(r_1 + r_2)^2 = d^2.$$

Vraťme se k dotyku vlastnímu (obr. 9a) a všimněme si příslušných bodů v prostoru A, B, C. Vidíme okamžitě, že jsou na přímce, která má stopník T a má odchylku od průmětny 45°. Při dotyku nevlastním (obr. 9b) není tomu tak, pak bod B' symetricky položený s B dle π spojen s A dává přímku s odchylkou 45°.

Odtud je také patrno: *Geometrické místo bodů, kterým přísluší cykly dotýkající se cyklu* (P), *jest kuželová plocha* $P(P)$, *kterou nazýváme „isotropický" kužel s vrcholem* P.



Obr. 9a, b.

Jsou-li dva cykly k sobě kolmé čili sekou se ortogonálně, jest $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$ a $d^2 = r_1^2 + r_2^2$.

1,6. Tečnová vzdálenost dvou cyklů. Dva cykly mají společné dva tečné paprsky. *Vzdálenost dotykových bodů sluje tečnová vzdálenost cyklů.* Jak ukazuje obr. 10 plyne z trojúhelníka A_1B_1Q

$$t^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2,$$

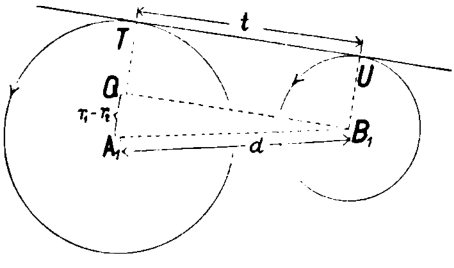
kde poloměry jsou ovšem vzaty s příslušnými znaménky. Tuto rovnici béřeme opět za *definici tečnové vzdálenosti* i v případech, kdy délka t není reálná.

Tečnová vzdálenost hraje v dalších úvahách zajímavou a důležitou úlohu. Všimněme si některých zvláštních případů. Mají-li dva cykly vlastní dotyk, pak $|d| = |r_1 - r_2|$ a $t = 0$; při dotyku nevlastním $|d| = |r_1 + r_2|$ a $|t| = 2\sqrt{r_1r_2}$. Jsou-li dva cykly soustředné, je $d = 0$, $t = \pm\, i(r_1 - r_2)$. Přejde-li jeden cykl v bod $(r_2 = 0)$, pak $t^2 = d^2 - r_1^2$ je mocnost bodu ke kružnici.

Z hořejšího vzorce plyne $r_1^2 + r_2^2 - d^2 = 2r_1r_2 - t^2$. Dosadíme-li do vzorce pro $\cos\varphi$, dostaneme snadno vztah mezi úhlem a tečnovou vzdáleností ve tvaru

$$t^2 = 2r_1r_2(1 - \cos\varphi) = 4r_1r_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

1,7. Imaginární kružnice. V následujících úvahách budeme často mluviti o kružnici *s reálným středem a poloměrem ryze imaginárním.* Je-li střed v počátku pravoúhlé soustavy souřadnicové a poloměr ri, jest její rovnice



Obr. 10.

$$x^2 + y^2 + r^2 = 0.$$

Kružnice má reálnou rovnici, ale nehoví jí žádná reálná dvojice x, y (pokud $r \gtrless 0$), nemá tedy reálného bodu. Říkejme jí *imaginární kružnice.* Narýsujeme-li reálnou kružnici

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

jejíž poloměr se rovná absolutní hodnotě poloměru prvé, nazýváme tuto kružnici *zástupkyní* prvé a používáme jí při konstrukci. V obecné poloze jest rovnice imaginární kružnice o středu $O(a, b)$ a poloměru ri

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + r^2 = 0.$$

Lze ovšem také mluviti o imaginární kružnici tenkrát, jsou-li a, b, r veličiny komplexní, ale tyto kružnice v našich úvahách nepřicházejí.

Imaginární kružnici námi definované přísluší v prostoru dva body imaginární $(a, b, \pm ri)$ na reálné kolmici k průmětně π v bodě (a, b) vztyčené.

Všechny dříve uvedené definice zůstávají v platnosti. Tak pro úhel reálného paprsku s imaginární kružnicí dostáváme

$$\cos\varphi = \frac{p}{ri} = -\frac{p}{r}\,\mathrm{i},$$

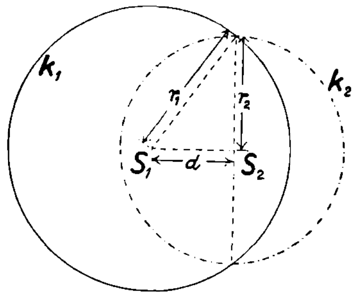
kde p je vzdálenost paprsku od středu.

Právě tak platí vzorce pro kosinus úhlu dvou cyklů (kružnic) a pro tečnovou vzdálenost.

Pro nás jsou důležité vztahy kolmosti. Pro kolmost dvou cyklů (kružnic) jsme našli

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2.$$

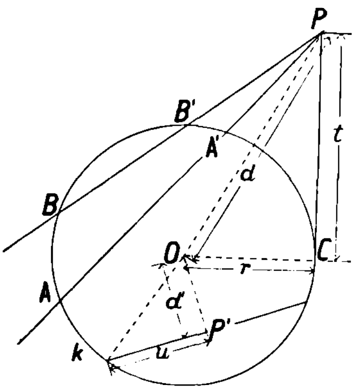
Jsou-li obě kružnice imaginární s poloměry r_1i, r_2i, nelze při reálném d hořejší rovnici vyhověti. Dvě imaginární kružnice nejsou tedy nikdy k sobě kolmé. Je-li jedna kružnice reálná s poloměrem r_1, druhá imaginární s poloměrem r_2i, jest podmínka kolmosti



Obr. 11.

$$r_1^2 - r_2^2 = d^2.$$

Pak ukazuje obr. 11, kde k_2 je zástupkyně imaginární kružnice, že k_1 seče k_2 v bodech diametrálně protilehlých, čili půlí ji. Poznamenejme ještě, že soustředné kružnice o poloměrech r, ri sluší považovati za kolmé ($d = 0$).



Obr. 12.

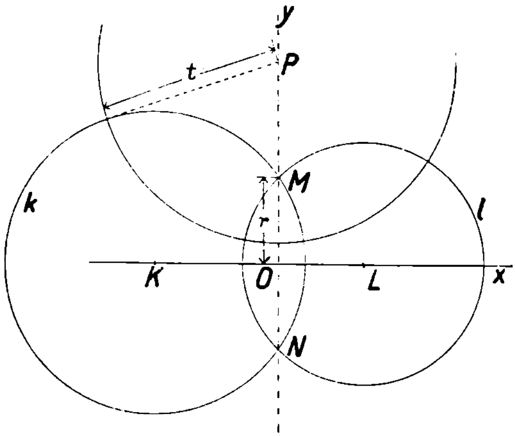
1,8. Mocnost bodu ke kružnici, svazek kružnic a chordála, trs kružnic. Z elementární geometrie je známo, že součin obou úseků na sečně jdoucí bodem P ke kružnici k je stálý, tedy $\overline{PA} \,.\, \overline{PA'} = \overline{PB} \,.\, \overline{PB'} = \overline{PC}^2$ a nazývá se mocnost bodu P ke kružnici k. Je-li P vně kružnice, je součin kladný a roven čtverci tečny $t^2 = d^2 - r^2$ (obr. 12). Je-li P' uvnitř, je mocnost záporná a rovná se záporně vzaté druhé mocnině poloviční tětivy kolmé k $P'O$ ($u^2 = r^2 - d'^2$). Analyticky se dostane mocnost bodu ke kružnici, dosadíme-li souřadnice bodu do normálního tvaru rovnice kružnice (koeficienty při x^2, y^2 jsou rovny jedné), tedy mocnost bodu $P(x_0, y_0)$ ke kružnici

$$k \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0$$

jest

$$M(P) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + p.$$

Dvě kružnice k, l (obr. 13) určují svazek kružnic (množství všech kružnic, které jdou jejich společnými reálnými nebo imaginárními body M, N). Jedna se rozpadne ve společnou sečnu MN, již zoveme *chordála*, a přímku nevlastní. *Bod P chordály má tutéž mocnost ke kružnicím k, l a ke každé kružnici svazku*, čili je středem kružnice, jež kolmo seče k, l a všechny kružnice svazku. Tyto kolmé kružnice tvoří nový svazek, říkáme mu *doplňkový* k prvému, a středná prvého svazku je jeho chordálou. Vztah obou svazků je vzájemný. Volme střednou prvého svazku za osu Ox, chordálu za Oy. Pak rovnice prvého svazku při proměnném λ jest



Obr. 13.

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2\lambda x = 0 \text{ [střed } (\lambda, 0)\text{, poloměr } \sqrt{r^2 + \lambda^2}],$$

základní body svazku jsou $M(0, r)$, $N(0, -r)$ a ve svazku jsou dvě kružnice s poloměrem nula, jež odpovídají hodnotám $\lambda = \pm ri$. Doplňkový svazek má rovnici

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2\mu y = 0 \text{ [střed } (0, \mu)\text{, poloměr } \sqrt{\mu^2 - r^2}\text{]}.$$

Dvě kružnice tohoto svazku mají poloměr rovný nule ($\mu = \pm r$) a středy v základních bodech M, N prvého svazku. Nulové kružnice prvého svazku $M'(ri, 0)$, $N'(-ri, 0)$ jsou ovšem základními body svazku druhého.

Ke třem kružnicím l, m, n patří *bod stejné mocnosti*, ve kterém se sekou všechny tři chordály ch_{lm}, ch_{ln}, ch_{mn}. Tento bod je středem kružnice reálné neb imaginárné, která seče kolmo všechny tři kružnice dané.

Kružnice, které protínají kolmo kružnici k, tvoří *trs*; každý bod v rovině je středem jedné kružnice trsu. Dvě kružnice trsu určují svazek, jenž je celý obsažen v trsu; jeho chordála jde bodem O.

Jsou-li kružnice k_1, k_2, k_3 dány rovnicemi

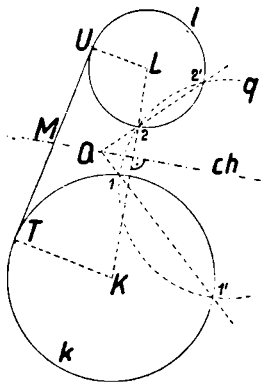
$$k_i \equiv (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

jest rovnice obecné kružnice trsu tvaru

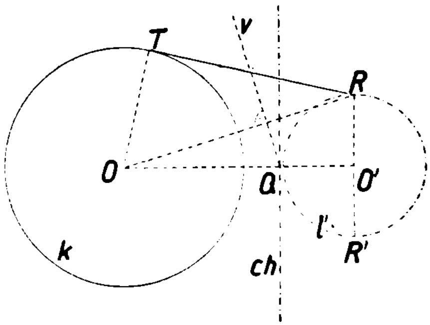
$$k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3 = 0,$$

kde λ, μ jsou libovolné hodnoty.

V následujícím budeme často potřebovati konstrukci chordály; proberme proto různé případy.



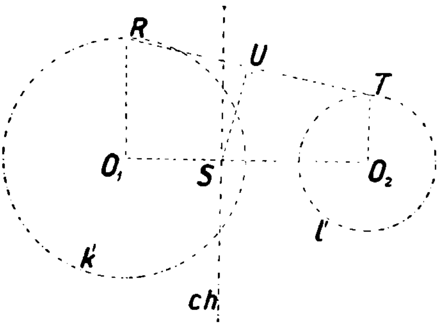
Obr. 14.



Obr. 14a.

Sekou-li se kružnice v reálných bodech, jest jejich spojnice chordálou. Nesekou-li se dvě reálné kružnice k, l, pak jest možno sestrojiti jednu společnou tečnu vnější nebo vnitřní, na př. TU a půlící její bod M (obr. 14). Kolmice spuštěná na střednou je chordála ch. Jinak lze získati jeden bod chordály, protneme-li obě kružnice pomocnou třetí kružnicí q. Chordály $11'$, $22'$ sekou se v bodě Q, kterým jde i chordála ch.

Je-li k reálná, l imaginárná, označme l' reálnou zástupkyni této (obr. 14a). Chordála hledaná je místem středů kružnic, které sekou kolmo k a půlí l'. Průsečík Q chordály se střednou OO' najdeme takto: Buď R bod na l', při čemž $O'R \perp OO'$. Najděme chordálu v kružnice k a kružnice o nulovém poloměru a středu R. Ta jde půlícím bodem tečny RT kolmo ku OR. Její bod Q (na OO') je středem kružnice, jež kolmo seče k a jde body R, R', je tedy na hledané chordále.



Obr. 14b.

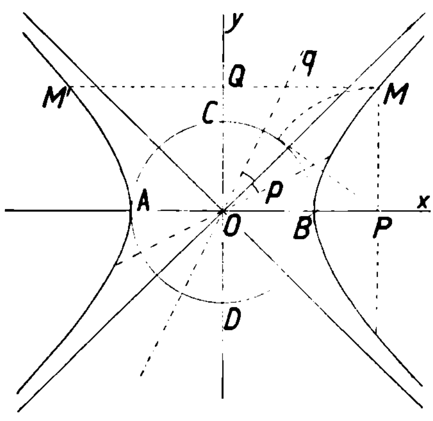
Jsou-li k, l obě imaginárné, k', l' jejich zástupkyně, učiňme $O_1R \perp O_1O_2$, $O_2T \perp O_1O_2$ (obr. 14b), sestrojme půlící bod U úsečky RT a $US \perp RT$. S je středem kružnice, jež půlí k', l' a je tedy kolmá ku k, l. Chordála ch jde bodem S kolmo ku středné O_1O_2.

1,9. Rovnoosá hyperbola. V následujícím se stále vyskytují různé konstrukce s rovnoosou hyperbolou, které zde uvádíme. Buď její rovnice

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Střed je O (obr. 15), poloosa reálná (hlavní) $\overline{OA} = \overline{OB} = a$, poloosa imaginárná (vedlejší) $\overline{OC} = \overline{OD}$ má rovněž délku a (imaginární vrcholy jsou ve vzdálenosti ai). Z rovnice plyne hned pohodlná konstrukce jednotlivých bodů. Pořadnice $\overline{PM} = \sqrt{x^2 - a^2}$ rovná se délce tečny vedené z bodu P ke kružnici opsané nad hlavní osou AB. Také lze sestrojovati body na rovnoběžkách s osou Ox, nanášíme-li $\overline{QM} = \overline{QM'} = \overline{QB}$, neboť z rovnice hyperboly vychází $x^2 = a^2 + y^2$.

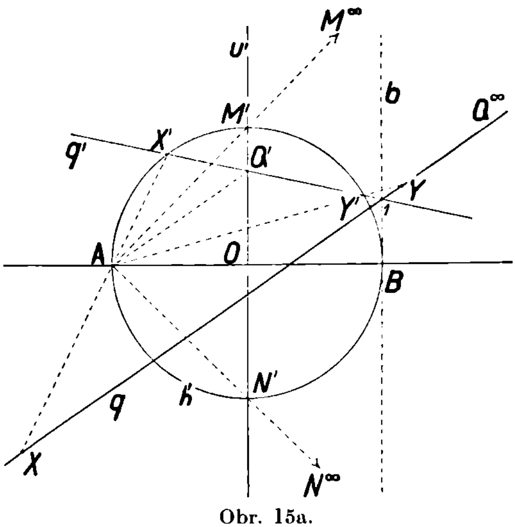
Asymptoty jsou k sobě kolmé a půlí úhel os. K libovolnému průměru p patří vždy průměr sdružený q a oba tvoří s asymptotami harmonickou čtveřinu. Poněvadž asymptoty jsou k sobě kolmé, půlí úhel sdružených průměrů.



Obr. 15.

Nejčastěji se vyskytuje úloha: *Dána jest rovnoosá hyperbola osami* (délka reálné poloosy a). *Jest sestrojiti průsečíky s přímkou.* Řešení ve zvláštních případech plyne z hořejšího. Je-li přímka kolmá k reálné ose v bodě P (obr. 15), jest $\overline{PM} = \overline{PM'}$ a rovno délce tečny z bodu P ke kružnici opsané nad $\overline{AB}$. Je-li přímka rovnoběžná s reálnou osou a seče vedlejší v bodě Q, jest třeba nanésti $\overline{QM} = \overline{QM'} = \overline{QA}$.

Nechť má přímka q obecnou polohu. Pak je možno použíti centrální kolineace. Kružnice h' nad reálnou osou (obr. 15a) je s rovnoosou hyperbolou h kolineární. A je střed kolineace, vrcholová tečna b je osou kolineace. Nevlastním bodům M_∞, N_∞ na hyperbole patří na kružnici body M', N'. Osa $u' \equiv M'N'$ odpovídá tedy nevlastní přímce u_∞. Přímce q v rovinném poli hyperboly patří přímka q' v rovinném poli kružnice. Vytkněme na q body 1, Q_∞. Prvý je samodružný, neboť leží na ose kolineace, druhému odpovídá Q' na u'. Je tedy $q' \equiv 1Q'$, přímka q' seče kružnici h' v bodech X', Y' a jim odpovídají v kolineaci na q body X, Y.



Obr. 15a.

Poznámka. Dvě rovnoosé hyperboly s rovnoběžnými asymptotami určují svazek. Základní body svazku jsou nevlastní body asymptot M_∞, N_∞ a dva body v konečnu P, Q. Svazek sestává ze samých rovnoosých hyperbol s asymptotami rovnoběžnými. Středy jejich leží na přímce. Jsou-li dané hyperboly

$$h_1 \equiv (x - \alpha_1)^2 - (y - \beta_1)^2 - a_1^2 = 0,$$
$$h_2 \equiv (x - \alpha_2)^2 - (y - \beta_2)^2 - a_2^2 = 0,$$

jest hyperbola svazku dána rovnicí

$$h_\lambda \equiv h_1 - \lambda h_2 = 0,$$

kde λ může nabývati jakékoli hodnoty. Snadno zjistíme, že střed má souřadnice

$$x_\lambda = \frac{\alpha_1 - \lambda\alpha_2}{1 - \lambda}, \quad y_\lambda = \frac{\beta_1 - \lambda\beta_2}{1 - \lambda},$$

opisuje tedy přímku. Ve svazku jsou tři hyperboly zvrhlé ve dvojice přímek. Jedna odpovídá hodnotě $\lambda = 1$ a sestává z přímky nevlastní a spojnice PQ, jež má rovnici

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)\, x + 2(\beta_1 - \beta_2)\, y - (a_1^2 - a_2^2) = 0,$$

ostatní dvě jsou dvojice přímek k sobě kolmých. P, Q se jeví jako protější vrcholy obdélníka se stranami svírajícími s osou x úhel 45°. Další dva protější vrcholy T, U jsou středy těchto zvrhlých hyperbol (obraz nechť si čtenář laskavě zhotoví).

Jsou-li dány směry os rovnoosé hyperboly x, y a dva body P, Q, při čemž úhel přímky PQ s osami je různý od 45°, je určen celý svazek. Jak najdeme přímku středů? Jak je tomu, je-li dána tečna s bodem dotykovým?