Geometrické pravděpodobnosti

Pokusné úlohy

In: Bohuslav Hostinský (author): Geometrické pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Jednota čs. matematiků a fysiků, 1926. pp. 62–70.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402808

Pro kouli o poloměru R vychází

$$a = \tfrac{84}{143},\quad p_0 = \tfrac{9}{715},\quad m(T) = \tfrac{12}{715}\,\pi R^3.$$

W. Blaschke uvádí větu, že při daném objemu V dosahuje m (T) nejmenší hodnoty, je-li K ellipsoid, a největší, je-li K čtyřstěn.*)

32. Dvě úlohy o skupinách bodů, je-li jeden bod volen na ploše K. — *a)* Budiž T_1 čtyřstěn, jehož tři vrcholy jsou voleny uvnitř K, kdežto čtvrtý vrchol je na ploše K samé. Střední hodnota objemu T_1 dá se vypočísti podle vzorce (21). Je-li dV nekonečně malý přírůstek objemu V, který obdržíme, aplikujeme-li na K homothetickou transformaci (předpokládáme, že původní plocha K jest obsažena celá uvnitř plochy transformované), roste m (T), kde T značí objem čtyřstěnu, obsaženého uvnitř K, úměrně s V, takže

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V}.$$

Dosadíme-li do vzorce (21) $n = 4$, bude

$$m_1 = \tfrac{5}{4}\,m,$$

kde m značí střední hodnotu objemu čtyřstěnu T_1, jehož všechny čtyři vrcholy jsou uvnitř K, m pak střední hodnotu objemu čtyřstěnu T, jehož tři vrcholy jsou uvnitř K, čtvrtý pak na K.

b) Pravděpodobnost p_0, určená rovnicí (40), nemění se, aplikujeme-li na K homothetickou transformaci. Hledejme pravděpodobnost p_1, že bod zvolený uvnitř K nalézá se zároveň uvnitř čtyřstěnu, jehož tři vrcholy jsou voleny uvnitř K, čtvrtý pak na ploše K samé. Dosadíme do rovnice (21') $dp = 0$; vychází

$$p_1 = p_0.$$

V. Pokusné úlohy.

33. Pokusné určení geometrických pravděpodobností. — Vezměme za základ ty definice geometrických pravděpodobností, jež byly podány v kap. II., III. a IV., a hleďme výsledky výpočtů srovnati s pokusy.

*) Viz *W. Blaschke*: Ueber affine Geometrie XI (Berichte über die Verhandlungen d. kön. sachsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. 69., p. 452; 1917).

Pokusná kontrola týká se především vzorců (6) a (7). Prvý z nich vztahuje se k počtu zdařených pokusů, které se vyskytnou v celkovém počtu n pokusů, druhý pak se vztahuje k úchylce h skutečného počtu zdařených pokusů od teoretického počtu np. Připomeňme, že podle odst. 17 *b, c* platí známá pravidla o pravděpodobnosti úhrnné též o pravděpodobnosti geometrické; tím jest odůvodněno srovnání formulí s pokusy (srv. úvahy o tom v odst. 7.).

Každá geometrická pravděpodobnost dá se vyjádřiti zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel mají tvar

$$\int\int\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots x_n)\,dx_1,\,dx_2,\ldots dx_n,$$

kde f jest kladná funkce proměnných $x_1, x_2 \ldots$ (souřadnic bodů, přímek a rovin).

V aplikacích na konkrétní úlohy zasluhují zvláštní pozornosti případy, ve kterých vycházejíce z prvků zvolených, odvozujeme z nich další geometrickými konstrukcemi. Tak na př. stanovíme-li v daném kruhu polohu sečny polohou jejího středu, a ptáme-li se na pravděpodobnost, že sečna vyhovuje určité podmínce, musíme aplikovati pravidla o výpočtu pravděpodobnosti pro polohu bodu (středu sečny) a nikoli pro polohu sečny jakožto přímky libovolně volené (viz odst. 34.). Vůbec je třeba, má-li býti vzorec pro nějakou pravděpodobnost zkoušen pokusem, aby podmínky pokusu odpovídaly definici uvažované pravděpodobnosti. Je-li naopak předepsán pokus určitého druhu, musí býti při teoretickém výpočtu pravděpodobnosti přihlíženo k podmínkám pokusu.

34. Rozbor tak zv. Bertrandova paradoxa. — Bertrand učinil pozoruhodné námitky proti pojmu geometrické pravděpodobnosti. Přes to, že nemůžeme v nich viděti více než upozornění, aby definice pravděpodobnosti odpovídala přesně podmínkám pokusu, stojí tyto námitky za podrobnější úvahu.

Běží o tuto úlohu: Je dána kružnice o poloměru r a do ní je vepsán rovnostranný trojúhelník (délka strany $= r\sqrt{3}$). V kružnici narýsujeme nějakou tětivu. Jak velká je pravděpodobnost p, že tětiva je delší než strana onoho trojúhelníka?

Bertrand*) udává trojí řešení:

*) *J. Bertrand:* Calcul des Probabilités, Paris 1889; 2e édition 1907, p. 4—5.

I. Představme si vepsaný trojúhelník v určité poloze a uvažujme o tětivách, jež jsou rovnoběžny s jeho základnou. Výška trojúhelníka rovná se třem polovinám poloměru r. Protíná-li tětiva výšku v bodě, jehož vzdálenost od středu kružnice je menší než polovina poloměru, je tětiva delší než strana trojúhelníka; v opačném případě je kratší. Pravděpodobnost, že tětiva určitého směru je delší než strana trojúhelníka, je tedy $1/2$. Směr základny trojúhelníka, a tedy i směr tětivy možno voliti libovolně; úvaha platí stejně pro každý směr základny, máme tudíž

$$p = \tfrac{1}{2}. \tag{I}$$

II. Uvažujme nyní o všech tětivách, které mají jeden koncový bod v určitém vrcholu trojúhelníka. Příslušný vnitřní úhel trojúhelníka $\pi/3$ měří množství všech případů příznivých (tětivy delší než strana trojúhelníka), kdežto přímý úhel π měří množství všech případů vůbec možných. Pravděpodobnost, že tětiva, jejíž jeden koncový bod je dán, je delší než strana trojúhelníka, rovná se tedy $1/3$. Poněvadž pak můžeme voliti kterýkoli bod na obvodě kružnice za vrchol trojúhelníka, platí, že

$$p = \tfrac{1}{3}. \tag{II}$$

III. Srovnávejme konečně všechny tětivy v kružnici podle polohy jejich středů. Má-li střed tětivy vzdálenost menší než je polovina poloměru od středu kružnice, je tětiva delší než strana trojúhelníka; v opačném případě jest kratší. Pravděpodobnost, že střed tětivy leží ve vzdálenosti $\leqq \frac{1}{2} r$ od středu kružnice (jinými slovy: že leží uvnitř kružnice, která je s danou kružnicí soustředná a má poloměr poloviční), je rovna poměru ploch kružnice o poloměru $1/2\, r$ a kružnice o poloměru r, tedy

$$p = \tfrac{1}{4}. \tag{III}$$

Tyto tři vzájemně si odporující formule (I), (II) a (III) tvoří tak zv. Bertrandovo paradoxon; daná úloha dala by se řešiti ještě jinými způsoby, které by vedly k jiným a jiným hodnotám pravděpodobnosti p. Bertrand učinil z toho skeptický závěr, že úloha je vůbec špatně položena, že nemá určitého smyslu. S tohoto stanoviska byly by vůbec všechny úlohy založené na pojmu geometrické pravděpodobnosti, ilusorní.

Avšak krajně skeptické stanovisko Bertrandovo jeví se nepřijatelným, když uznáme podle Borela,*) že je nutno přihlédnouti ke způsobu, kterým se děje tak zv. náhodná volba tětivy v kružnici. Položme si jen otázku: co to znamená, voliti »náhodně« tětivu v kružnici? Uveďme tři způsoby takovéto volby a hleďme po každé odvoditi řešení Bertrandovy úlohy:

I'. Narýsujme na vodorovné rovině řadu ekvidistantních rovnoběžek; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2r$. Házejme pak na rovinu kruhový kotouč o poloměru r. Jedna z rovnoběžek je vždy sečnou kotouče (v krajním případě dotýká se kotouč dvou rovnoběžek). Poloha kotouče na vodorovné rovině určí se třemi veličinami: souřadnicemi x, y jeho středu a úhlem ω, který určitý poloměr, na kotouči vyznačený, svírá se směrem rovnoběžek; osu Ox volme právě v tomto směru. Máme posouditi poměr, ve kterém je množství případů příznivých (tětiva je delší než $r\sqrt{3}$) k množství všech vůbec možných případů. Je jasno, že nemusíme přihlížeti ani k hodnotě veličiny x, ani k hodnotě veličiny ω. Rozhoduje tu jedině hodnota veličiny y, a z úvah dříve učiněných (důkaz I.) plyne, že hledaná pravděpodobnost je vyjádřena vzorcem (I). Je to skutečně tak, jako by byl dán směr tětivy; ze tří hořejších důkazů I, II a III jedině prvý je vhodný, kdežto druhých dvou nelze užíti.

II'. Na pevné rovině narýsujme přímku a a v jednom bodě A této přímky připíchneme k rovině list průhledného papíru, na němž jsou narýsovány jednak kružnice, která prochází bodem A, jednak rovnostranný trojúhelník T s vrcholem A do ní vepsaný. Roztočíme-li list prudce kolem bodu A tak, aby zůstával stále ve své rovině, ustálí se konečně v určité poloze; přímka a vytíná v kružnici tětivu určité délky. List může se otočiti z počáteční polohy o libovolný úhel. Vezmeme-li 2π za míru všech možných případů, jest patrně $\frac{2}{3}\pi$ měrou všech případů příznivých (přímka a probíhá vnitřkem trojúhelníka T). Platí formule (II).

III'. Házejme na vodorovný kruhový kotouč o poloměru r malé zrnko tak, aby kterákoli část kotouče mohla býti zasažena se stejnou pravděpodobností. Bod, ve kterém zrnko dopadne, považujme za střed tětivy. V tomto případě užijeme

---

*) *E. Borel*: Le Hasard (Paris, Alcan), p. 82; Élements de la théorie des probabilités (3ième éd. Paris 1924), p. 106.

formule (III), neboť hledanou pravděpodobnost obdržíme, dělíce plochu kotouče o polovičním poloměru plochou kotouče původního.

Výsledek úvah shrneme takto: Bertrandovo paradoxon má základ v tom, že se naprosto nepřihlíží k experimentálním podmínkám, za kterých se děje »náhodná volba« tětivy. Rozumný výpočet pravděpodobnosti může se však provésti jen se zřetelem k nim. Házíme-li, jak je vyloženo v I', kotouč na rovnoběžky, jest $p = {}^1/_2$; učiníme-li 1000 pokusů, očekáváme podle vzorce (6), že se zdaří asi 500 z nich (tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$.) Konáme-li pokus tak, jak vyloženo pod II', jest $p = {}^1/_3$; z 1000 pokusů zdaří se asi 333. Házíme-li konečně zrnk otak, jak bylo uvedeno pod III', jest $p = {}^1/_4$; z 1000 pokusů zdaří se asi 250.

Každý z důkazů I, II a III má svůj dobrý smysl; odpovídají však po řadě různým podmínkám pokusu I', II' a III'.

35. *Buffonova úloha o jehle.* — Házíme jehlu (nebo hůlku) na vodorovnou rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžné přímky ve stejných vzdálenostech. Jak velká je pravděpodobnost p, že jehla protne některou z těch přímek?

Buffon rozřešil úlohu za těchto předpokladů: Střed jehly může dopadnouti na kterýkoli bod roviny se stejnou pravděpodobností a osa jehly může padnouti do kteréhokoli směru rovněž se stejnou pravděpodobností. Vzorec pro hledanou pravděpodobnost p můžeme odvoditi z řešení jedné dřívější úlohy takto: Budiž $2a$ vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek a $2b$ délka jehly; předpokládáme, že $2b < 2a$. Házíme-li na rovinu kruhový kotouč o průměru $2a$, na němž je nakreslena úsečka (jehla) o délce $2b$, protne se kotouč vždy jednu z rovnoběžek. Úloha zní pak takto: nalézti pravděpodobnost p, že přímka, jež protíná kružnici o průměru $2a$, protíná současně úsečku délky $2b$, položenou uvnitř kružnice. Dle odst. 19b jest

$$p = \frac{2b}{\pi a}. \qquad (42')$$

To jest Buffonův vzorec,*) ze kterého plyne

$$\pi = \frac{2b}{ap}.$$

Pravděpodobnost p dá se určiti pokusně; hodíme-li jehlu

*) Viz spis citovaný v poznámce odst. 8.

celkem n-krát a nastane-li průsek s nějakou přímkou m-krát, bude přibližně

$$p \doteq \frac{m}{n}, \quad \pi \doteq \frac{2b}{a} \cdot \frac{n}{m}.$$

Poslední vzorec podává tak zv. experimentální určení čísla π. Švýcarský matematik Wolf konal takové pokusy a našel pro $n = 5000$ hodnotu $\pi = 3{\cdot}1507$, což se shoduje s pravou hodnotou $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ až na chybu menší než třetina procenta.*) Je přirozeno, že v tomto výsledku vidíme aspoň do jisté míry potvrzení o správnosti úvah, kterými byl Buffonův vzorec odvozen. Srv. též odst. 39.

36. Pólyovy pokusy. — Podle odst. *23b* je pravděpodobnost, že přímka protínající čtverec, protíná jej ve dvou protilehlých stranách, rovna $\sqrt{2} - 1 = 0{\cdot}414\ldots$; obdobná pravděpodobnost pro obdélník, jehož strany jsou v poměrech 3 : 4, jest $^3/_7 = 0{\cdot}4285\ldots$

Pólya kontroloval tyto vzorce empiricky: házel papírový čtverec (obdélník o rozměrech 3×4) na vodorovnou rovinu, na níž byly narýsovány rovnoběžné přímky a to v takových vzdálenostech, že obvod čtverce (obdélníku) mohl býti protat nejvýše jednou z nich. V řadě pokusů vyskytlo se celkem 1865 případů, kdy čtverec byl přímkou protat. Teoretický počet těch případů, kdy nastává průsek ve dvou protějších stranách, jest dle vzorce (6) ($n = 1865$, $p = 0{\cdot}414$ pro čtverec)

$$0{\cdot}41421\ldots \times 1865 = 772{\cdot}5\ldots;$$

skutečně pozorovaný počet těch případů, kdy nastal průsek ve dvou protějších stranách, lišil se od tohoto čísla o čtyři jednotky.

Podobně pro obdélník: V řadě 1429 případů, kdy obvod obdélníka byl protat, lišil se teoretický počet případů, kdy měl nastati průsek ve dvou protějších stranách

$$\tfrac{3}{7} \cdot 1429 = 612{\cdot}4\ldots,$$

od skutečně pozorovaného počtu o tři jednotky.**)

---

*) Srv. též *E. Barbier* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 2e série, t. 5, p. 273—286; 1860). *E. Borel:* Éléments de la théorie des probabilités, 3e édition, Paris 1924, p. 100. *A. A. Markoff:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1912, p. 164. *E. Czuber:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig 1884, p. 184.

**) *G. Pólya:* Ueber geom. Wahrscheinlichkeiten. (Sitzber. der k. Ak. d. Wissensch., Wien, Bd. 126, 1917, p. 319—328). Četné příklady obsahuje též dílo *Czuberovo*: Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte.

Úlohy 30.—38. (Jest vykonati příslušné pokusy.)

30. Hodíme-li kostkou n-krát, padne každé číslo přibližně $(n/6)$-kráte. Hoďme kostkou n-krát a zaznamenejme úchylku $h = m - {}^1/_6 n$ skutečně pozorovaného počtu m případů, kdy skutečně určité číslo (na př. jedna) padlo od teoretické hodnoty $n/6$. Vykonejme pak druhou serii o n pokusech a stanovme opět h. Je-li počet s serií veliký (v každé serii je n hodů; n je taktéž veliké), jest v $^1/_2\ s$ seriích úchylka h menší než číslo*) $0{\cdot}07948 \times \sqrt{10\,n}$ a větší než toto číslo v seriích ostatních.

31. Hodíme-li dvěma kostkami n-krát, jsou přibližné hodnoty frekvencí, se kterými se vyskytují součty 2 až 12, udány v následující tabulce:

součet x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet případů, kdy padne součet x	$\frac{n}{36}$	$\frac{n}{18}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{9}$	$\frac{5n}{36}$	$\frac{n}{6}$	$\frac{5n}{36}$	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{18}$	$\frac{n}{36}$

32. Provésti pokusy, popsané v odst. 34. pod I', II', III'.

V prvém případě házíme kotouč z průhledného papíru, na němž jsou narýsovány dvě soustředné kružnice o poloměrech r a $r/2$, na (vodorovnou) rovinu, v níž jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $= 2r$. Větší kružnice je pokaždé protata některou rovnoběžkou. Vykonáme-li celkem n pokusů a je-li m počet případů, kdy také menší kružnice je některou rovnoběžkou protata, jest přibližně

$$m = \tfrac{1}{2}\,n.$$

Ve druhém případě připíchneme onen list průhledného papíru se dvěma kružnicemi v jednom bodě A obvodu větší kružnice k rovině; v rovině vedeme bodem A pevnou přímku a. Roztočíme papír kolem bodu A a pozorujeme, je-li, když se kotouč zastaví, i menší kružnice protata přímkou a. Je-li m počet případů, kdy tomu tak jest, a n úhrnný počet pokusů, platí přibližně

$$m = \tfrac{1}{3}\,n.$$

Ve třetím případě užijme (uchylujíce se poněkud od textu odst. 22) tohoto postupu: V rovině narýsujme čtvercovou síť; strana čtverce $= 2r$. Hodíme-li na ni onen list průhledného papíru se dvěma kružnicemi, leží uvnitř větší kružnice buď jeden vrchol některého čtverce nebo žádný. Je-li n počet případů, kdy leží uvnitř větší kružnice jeden vrchol čtverce a m počet těch případů, kdy tento vrchol leží zároveň uvnitř menší kružnice, platí přibližně

$$m = \tfrac{1}{4}\,n.$$

33. Hodíme-li n-krát kruhový kotouč o poloměru r na čtvercovou síť o straně čtverce $= a$, padne kotouč v m případech tak, že

*) Viz odst. 6. Podobné vztahy pro úchylku h můžeme odvoditi v každé z následujících úloh.

leží celý uvnitř jednoho čtverce. Platí přibližně (srv. úlohu 20 na str. 35).

$$m = \left(\frac{a - r}{a}\right)^2 . n.$$

34. Pokus s jehlou (viz odst. 35.) můžeme provésti též tak, že házíme na rovinu, ve které jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $= 2a$, list průhledného papíru, na němž je narýsována úsečka o délce $= 2b$. Je-li n úhrnný počet všech hodů a m počet těch, ve kterých úsečka protne některou rovnoběžku, jest přibližně

$$m = \frac{2b}{\pi a} . n.$$

35. V rovině jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $= 2a$. Házíme na rovinu rovnoramenný lichoběžník, jehož tři strany jsou stejně dlouhé $= a$, čtvrtá pak $2a$. Obvod obrazce $= 5a$, úhlopříčka $= a\sqrt{3}$. Je-li n počet případů, ve kterých obvod lichoběžníka protne se vůbec s některou rovnoběžkou, a n_1 počet těch případů, kdy průsek nastává ve dvou protilehlých stranách lichoběžníka, platí přibližně (srv. odst. 36.)

$$n_1 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} - 1\right) n = 0{\cdot}38564 . n.$$

Stran podobných pokusů se čtvercem a s obdélníkem viz odst. 36.

36. V rovině narýsujeme rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $2R$ a házíme na ni kruhový kotouč o poloměru R; po každé měříme délku tětivy C, kterou rovnoběžka vymezuje na kotouči Vykonáme-li celkem n pokusů, a jsou-li $C_1, C_2, \ldots$ příslušné délky tětivy, je, poněvadž střední délka tětivy přibližně rovna kvadrantu kružnice (viz úl. 29. na str. 48), přibližně

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \tfrac{1}{2} \pi n R.$$

37. Střední hodnota čtverce tětivy C, kterou libovolná přímka vytíná v kružnici o poloměru R, vypočte se podle vzorce (integrace se vztahuje ke všem přímkám protínajícím kružnici)

$$\frac{\iint C^2 \, dq \, d\varphi}{\iint dq \, d\varphi} = \frac{\pi \int_{-R}^{R} 4(R^2 - x^2) \, dx}{2 \pi R} = \tfrac{8}{3} R^2.$$

Užijeme-li označení zavedeného v úl. 36. máme přibližně

$$C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 = \tfrac{8}{3} n R^2.$$

38. Střední hodnota třetí mocniny tětivy C, ve které libovolná přímka protíná kružnici o poloměru R, je (viz odst. 20.)

$$\frac{3P^2}{L} = \frac{3 . \pi^2 R^4}{2 \pi R} = \frac{3 \pi R^3}{2}.$$

Užijeme-li označení zavedeného v úl. 36., máme přibližně

$$C_1^3 + C_2^3 + \ldots + C_n^3 = \tfrac{3}{2}\pi n R^3.$$

VI. Poincaréova metoda libovolných funkcí.

37. Poincaréova metoda. Problém rulety.)* — a) Přihlédneme-li blíže k podmínkám, za kterých pokusně zjišťujeme nějakou geometrickou pravděpodobnost, seznáme často, ne-li vždycky, že nelze považovati všechny případy, které se jakožto výsledek uvažovaného pokusu mohou vyskytnouti, za stejně pravděpodobné. Proto nelze také bez dalšího rozboru úlohy počítati hledanou pravděpodobnost jednoduchým srovnáváním případů příznivých se všemi případy vůbec možnými. Objasněme to na příkladě rulety. Kolem geometrické osy kotouče rozděleného na $2n$ stejně velikých výsečí, jež jsou střídavě červené a černé, otáčí se jehla; v počátečním okamžiku udělíme jí nárazem určitou úhlovou rychlost, takže jehla oběhne několikráte dokola, až se vlivem tření, odporu vzduchu atd. zastaví buď u výseče červené nebo u výseče černé. Jak veliká je pravděpodobnost, že vyjde červená?

Uvažme nejprve, že ke konci pohybu, když už je kinetická energie jehly nepatrná, stačí docela malá překážka (na př. zrnko prachu), která způsobí, že se jehla zastaví u určité výseče. I když je ruleta dokonale pracována, nemůžeme tvrditi, že pravděpodobnost zastaviti se u určité výseče je pro všechny výseče naprosto stejná; při tom ani nepřihlížíme k okolnosti, že také individualita hráčova, jevící se ve zvláštním střídání počátečních rychlostí, které hráč jehle uděluje, může zde míti určitý vliv. Poincaré ukázal však, že jest jeden zvláštní důvod, pro který můžeme považovati pravděpodobnost, že jehla se zastaví u červené výseče, za rovnou $1/2$, aspoň pokud počet výsečí je velmi veliký.

Představme si, že na začátku každého pokusu postavíme jehlu do určité polohy a že jí pak udělíme tak velikou počáteční rychlost, aby se otočila nejméně padesátkráte dokola; počáteční rychlost budiž však v takových mezích, že se jehla v každém pokusu zastaví po méně než 100 obězích. Označme písmenem ϑ úhel, o který se jehla úhrnem otočí než se za-

*) *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2e édition, chap. VIII. *E. Borel:* Éléments de la théorie des probabilités, 3e édition, chap. VIII.