Geometrické pravděpodobnosti

Konvexní plochy v prostoru

In: Bohuslav Hostinský (author): Geometrické pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Jednota čs. matematiků a fysiků, 1926. pp. 48–62.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402807

Terms of use:

© Jednota čs. matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

pravděpodobnost p, že libovolně vytčená přímka, která protíná K, neprotíná ani k ani k'? [$p = \frac{x - l - l'}{L}$; viz větu dokázanou v odst. 23c].

26. Uvnitř k volíme dva body. Sečna, jež je spojuje, dělí se jimi a průsečíky s k ve tři části. Pravděpodobnost, že z těchto tří úseček dá se sestrojiti trojúhelník, jest $= 1/4$. [*Czuber*: Geom. Wahrscheinlichkeiten, p. 156—157].

27. Uvnitř trojúhelníka zvolíme dva body; plošný obsah trojúhelníka, jejž tvoří tyto body spolu s určitým vrcholem trojúhelníka daného, má střední hodnotu

$$M_2 = \tfrac{4}{27}\, S,$$

značí-li S plošný obsah daného trojúhelníka [*Czuber* tamtéž p. 235].

28. Uvnitř k jsou voleny dva body. Střední hodnota jejich vzdálenosti jest (viz odst. 21*b*) $\frac{\omega L}{2}$.

29. Střední hodnota tětivy, kterou určuje libovolná přímka, protínající křivku k, jest určena vzorcem

$$m_0 = \frac{\pi P}{L}.$$

Pro kruh o poloměru R vychází

$$m_0 = \frac{\pi R}{2}.$$

IV. Konvexní plochy v prostoru.

24. *Přehled zkratek.* — V této kapitole pojednáme o některých úlohách, jež se vztahují k uzavřeným konvexním plochám v prostoru. Každá taková plocha je protata libovolnou přímkou nejvýše ve dvou bodech. Označíme písmenem

K . . . danou uzavřenou konvexní plochu bez singulárních bodů,
V . . . objem části prostoru omezené plochou K,
S . . . plošný obsah plochy K,
Σ, Σ' . . objemy částí, ve které se dělí vnitřek plochy K libovolnou sečnou rovinou ($\Sigma + \Sigma' = V$),
k . . . konvexní křivku, ve které libovolná sečná rovina protíná plochu K,
P . . . plošný obsah křivky k,
L . . . obvod křivky k,
C . . . délku sečny, kterou omezuje plocha K, na libovolné přímce ji protínající,
M . . . hodnotu integrálu (14), vztaženého ke všem rovinám (u, v, w), jež protínají plochu K.

V rovnicích přímek a rovin, jakož i ve vzorcích pro míru rozličných množství, budeme užívati označení zavedeného v odst. 12. a 13.

25. *Roviny protínající konvexní plochu.* — *a)* Je dána rovinná uzavřená křivka bez dvojného bodu; budiž P její plošný obsah a c délka sečny, kterou vytíná libovolná rovina. Počítejme hodnotu integrálu

$$\iiint c\, dp\, d\omega = \iiint c \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dp,$$

kde integrace se vztahuje ke všem rovinám

$$x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \vartheta - p = 0.$$

jež danou křivku protínají. Rovinu křivky volme za rovinu Oxy a předpokládejme, že počátek O jest uvnitř křivky (volba soustavy souřadnic nemá vlivu na hodnotu uvažovaného integrálu. Ani c ani $dpd\omega$ se změnou soustavy souřadnic nemění; viz odst. 12.—14.). Zavedeme nové integrační proměnné q a ϑ' rovnicemi

$$p = q \sin \vartheta', \qquad \vartheta = \vartheta'.$$

Obdržíme

$$\iiint c\, dp\, d\omega = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int c \sin^2 \vartheta'\, dq\, d\vartheta'\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \pi^2 P; \qquad (29)$$

koeficient $\frac{1}{2}$ je třeba připojiti, neboť mění-li se φ spojitě od o do 2π, obdržíme každou rovinu dvakráte, mimo to pak jest

$$\int c\, dq = P,$$

poněvadž q značí vzdálenost sečny c od počátku O.

b) Ustanovme nyní hodnotu integrálu

$$\iiint L\, dp\, d\omega = \iiint L \sin \vartheta\, dp\, d\vartheta\, d\varphi,$$

kde L značí obvod průsečné křivky, kterou z dané konvexní plochy K vytíná rovina (p, ϑ, φ); integrace vztahuje se ke všem sečným rovinám plochy K. Budiž l nekonečně malá část křivky L, obsažená v nekonečně malém elementu $d\sigma$ plochy K. Podle vzorce (29) jest

$$\iiint l \sin \vartheta\, dp\, d\vartheta\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \pi^2\, d\sigma,$$

vztahuje-li se integrace ke všem rovinám protínajícím nekonečně malý element $d\sigma$. Je-li tudíž S celý povrch plochy K, platí

$$\iiint L\, dp\, d\omega = \tfrac{1}{2}\, \pi^2 S; \tag{29'}$$

integrace vztahuje se ke všem sečným rovinám plochy K.

c) Míra pro množství všech rovin, které protínají konvexní uzavřenou plochu K, jest, předpokládáme-li počátek O uvnitř K,

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \iint p\, d\omega; \tag{30}$$

p značí zde vzdálenost tečné roviny plochy K od O. To plyne bezprostředně z formule (14'), provedeme-li integraci podle p. Podle Minkowského*) dá se psáti poslední integrál též ve tvaru

$$M = \iint \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) d\sigma, \tag{30'}$$

kde R a R' značí hlavní poloměry křivosti a integrace vztahuje se k celé ploše K; $d\sigma$ jest element plošného obsahu.

Uveďme tři speciální případy:

Je-li plocha K nekonečně zploštělá, takže se redukuje na část roviny dvojnásobně čítanou a omezenou konvexní křivkou o obvodě L, jest

$$M = \tfrac{1}{2}\, \pi L. \tag{30 a}$$

Je-li plocha K nekonečně zploštělá ve dvou směrech, takže se redukuje na úsečku o délce c, dvojnásobně čítanou, jest míra pro množství všech rovin protínajících tuto úsečku rovna

$$\pi c. \tag{30 b}$$

Je-li K trojosý elipsoid o poloosách $a, b, c,$ dají se M i povrch S vyjádřiti tímto integrálem.**) Položme, předpokládajíce, že $c < b < a$,

$$f(m, n) = 8 \iint \sqrt{\frac{1 - (1 - m)\, x^2 - (1 - n)\, y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

*) *H. Minkowski:* Ges. Abhandlungen II., p. 241; Leipzig 1911.

**) Viz *B. Hostinský:* Sur quelques applications géométriques des intégrales elliptiques et sur les relations entre les intégrales complètes. (Věstník Král. Spol. Nauk. 1919.)

kde integrace na pravo vztahuje se ke kvadrantu kruhu o poloměru = 1, vymezenému podmínkami

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Pak platí formule

$$S = ab\, f\left(\frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$M = a\, f\left(\frac{c^2}{a^2}, \frac{b^2}{a^2}\right).$$

d) Budiž K_1 konvexní plocha, M_1 míra množství všech jejích sečných rovin, K_2 pak jiná konvexní plocha, ležící uvnitř plochy K_1, a M_2 příslušná míra. Každá rovina protínající plochu K_2 protíná zároveň plochu K_1; podle věty vyjádřené rovnicí (15) bude *pravděpodobnost p, že rovina protínající konvexní plochu K_1 protíná zároveň jinou konvexní plochu K_2, položenou uvnitř K_1, rovna*

$$p = M_2 : M_1. \tag{31}$$

26. *Úlohy o párech a trojicích sečných rovin. — a)* Množství E, jehož prvkem je pár sečných rovin plochy K, má podle obecné definice (viz odst. 15.) míru

$$\iiint\iiint_E \frac{1}{\alpha}\, d\omega\, dp\, d\omega'\, dp' = \frac{1}{2} M^2,$$

neboť α rovná se všude dvěma.

Počítejme nyní hodnotu integrálu téže funkce, je-li integračním oborem množství F párů sečných rovin takových, že průsečnice obou rovin pár tvořících protíná plochu K. Zase bude $\alpha = 2$. Poznamenejme, že trojnásobný integrál

$$\iiint \frac{1}{2}\, d\omega\, dp$$

vztažený ke všem rovinám R, jež protínají pevnou sečnou rovinu R', je roven $\frac{1}{4}\pi L$, značí-li L obvod křivky, v níž R' protíná plochu K [viz vzorec (30*a*)]. Integrál

$$\iiint \frac{\pi}{4} L\, d\omega'\, dp'$$

vztažený ke všem sečným rovinám R plochy K je roven $\frac{1}{8}\pi^3 S$ dle vzorce (29'). Je tedy míra množství F

$$\iiint\iiint_F \frac{1}{2}\, d\omega\, dp\, d\omega'\, dp' = \frac{1}{8}\pi^3 S.$$

Dělíme-li tento výraz hořejším výrazem pro míru množství E, obdržíme pravděpodobnost p', že dvě sečné roviny plochy K protínají se v přímce, která rovněž plochu protíná:

$$p' = \frac{\pi^3 S}{4 M^2}.$$

b) Množství G, jehož prvek jest utvořen trojicí sečných rovin plochy K, má míru

$$\underset{G}{\iiint\iiint\iiint} \tfrac{1}{6}\, dp\, d\omega\, dp'\, d\omega'\, dp''\, d\omega'' = \tfrac{1}{6} M^3.$$

Počítejme integrál téže funkce, vztažený k oboru H, jehož prvkem je trojice sečných rovin, protínajících se v bodě položeném uvnitř K. Rovinu, k níž se vztahuje element $dp d\omega$, označíme R; podobně zavedeme R' a R''. Integrujme nejprve podle souřadnic roviny R, která protíná průsečnici s dvou pevných sečných rovin R' a R''. Trojnásobný integrál

$$\iiint dp\, d\omega$$

bude roven πC, je-li C délka sečny položené na s (viz vzorec 30*b*). Integrál

$$\iiint \tfrac{1}{6}\, \pi\, C\, dp'\, d\omega'$$

vztažený ke všem rovinám R', jež protínají pevnou sečnou rovinu R'', je podle vzorce (29) roven

$$\frac{\pi^3}{12} P.$$

Integrujeme-li konečně vzhledem k souřadnicím roviny R'', obdržíme pro hledanou míru

$$\frac{\pi^3}{12} \iiint P\, dp\, d\omega = \frac{\pi^3}{12} \cdot 2\pi V$$

aneb

$$\underset{H}{\iiint\iiint\iiint} \tfrac{1}{6}\, dp\, d\omega\, dp'\, d\omega'\, dp''\, d\omega'' = \tfrac{1}{6}\, \pi^4 V.$$

Dělíme-li tento výraz výrazem $^1/_6 M^3$, obdržíme pravděpodobnost p'', že tři sečné roviny protínají se uvnitř K: *)

$$p'' = \pi^4 \frac{V}{M^3}.$$

---

*) Srv. *Czuber:* Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten (Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., XC. II. Abt. p. 719—742; Wien, 1884).

27. *Přímky protínající konvexní plochu.* — *a)* Vypočtěme míru pro množství všech přímek, které protínají vnitřek uzavřené rovinné křivky γ bez dvojného bodu. Je-li σ plošný obsah obrazce omezeného křivkou γ, jest (v označení odst. 12.)

$$\iint dp\,dq = \sigma,$$

kde integrace vztahuje se k všem bodům (p, q), ležícím uvnitř křivky

$$\iint \frac{da\,db}{1 + a^2 + b^2} = \iint d\alpha\,d\beta = \pi;$$

v posledním integrálu vztahuje se integrace k polovině pomocné koule o poloměru $= 1$; α, β jsou souřadnice průmětu do roviny Oxy, takže hodnota integrálu $=$ ploše kruhu o poloměru $= 1$. Podle vzorce (12) bude tudíž hledaná míra $= \pi\sigma$. *Množství všech přímek, které protínají rovinný obrazec o plošném obsahu σ, má míru $\pi\sigma$.*

b) Budiž nyní K libovolná uzavřená konvexní plocha a S její plošný obsah. Každá přímka, která plochu K protíná, má s ní dva body společné. Budiž $d\sigma$ nekonečně malý element plochy K. Množství všech přímek, které ten element protínají, má dle předchozího výpočtu míru $\pi d\sigma$. Integrací tohoto výrazu přes celou plochu K dostaneme míru pro množství všech jejích sečen. Nutno však uvážiti, že tak čítáme každou sečnu dvakráte, poněvadž má dva průsečíky s plochou. Výsledek je, že *množství všech přímek protínajících uzavřenou konvexní plochu o plošném obsahu S má míru*

$$\tfrac{1}{2}\pi S. \tag{32}$$

Věta pod a) uvedená je zvláštním případem této věty; neboť část roviny o plošném obsahu σ je považovati za polovinu povrchu nekonečně zploštělé uzavřené plochy o plošném obsahu $S = 2\sigma$.

c) Každá přímka, která protíná nějakou uzavřenou konvexní plochu, protíná zároveň každou plochu, která předešlou obklopuje. Způsobem zcela obdobným tomu, kterým jsme odvodili vzorce (22) a (31), dokážeme, že *pravděpodobnost p, že přímka, která protíná uzavřenou konvexní plochu K_1 o plošném obsahu S_1, protíná zároveň jinou takovou plochu K_2, která má plošný obsah S_2 a leží uvnitř K_1, jest*

$$p = S_2 : S_1.$$

28. *Věta obdobná větě Croftonově* (srv. odst. 20.) — Dokažme tuto větu: *Integrál*

$$\iiiint C^4\, dQ\, d\Omega$$

vztažený ke všem přímkám, které protínají danou konvexní plochu K, rovná se druhé mocnině objemu V násobené šesti.

Vyjděme ze vzorce

$$V^2 = \iiint \iiint dx_2\, dy_2\, dz_2\, dx_1\, dy_1\, dz_1;$$

integrace vztahuje se vzhledem k bodu A_1 (x_1, y_1, z_1) na celý vnitřek plochy K, rovněž tak vzhledem k bodu A_2 (x_2, y_2, z_2). Šestinásobný integrál na pravé straně vypočítáme takto: Předpokládejme, že bod A_1 je pevný a veďme jím sečnu o délce C. Sestrojme pak kuželovou plochu, jejíž vrchol jest v A_1 a jež obsahuje uvnitř sečnu C; budiž $d\Omega$ nekonečně malý tělesný úhel, jenž měří otvor té kuželové plochy. Integrál

$$\iiint dx_2\, dy_2\, dz_2$$

vztažený ke vnitřku této hodnoty má hodnotu (= součtu objemů dvou kuželů)

$$\tfrac{1}{3}\,[r^3 + (C - r)^3]\, d\Omega,$$

jsou-li r a $C - r$ obě části sečny C oddělené bodem A_1.

Mění-li bod A_1 nekonečně málo svou původní polohu, takže zůstává uvnitř pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jehož základna, kolmá k C, je rovna dQ a jehož jedna hrana, rovnoběžná s C, je rovna dr, můžeme psáti

$$dQ\, dr$$

na místo $dx_1\, dy_1\, dz_1$ a obdržíme

$$V^2 = \tfrac{1}{3}\iiiint \left\{ \int_0^C [r^3 + (C - r)^3]\, dr \right\} d\Omega\, dQ$$

aneb

$$V^2 = \tfrac{1}{6}\iiiint C^4\, d\Omega\, dQ;$$

integrace vztahuje se ke všem přímkám, které protínají plochu K.*)

---

*) Tuto větu, vzorec (33c) a věty uvedené v odst. 30.—32. uveřejnil jsem v práci Sur les probabilités géométriques (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 50; Brno, 1925).

29. *Úlohy o skupině dvou bodů a jedné sečné roviny.* — *a)* Počítejme hodnotu devítinásobného integrálu

$$J = \int\int \ldots \int dp\, d\omega\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2;$$

integrační element budiž určen párem bodů A_1 (x_1, y_1, z_1) a A_2 (x_2, y_2, z_2) položených uvnitř K a rovinou R, která protíná úsečku $A_1 A_2$. K pořadí obou bodů nepřihlížíme. Vyjádříme integrál J trojím způsobem. Předně jest

$$J = \int\int\int \Sigma\Sigma'\, dp\, d\omega, \tag{33 a}$$

kde Σ a Σ' jsou části, ve které se dělí celý objem V rovinou R; integrace vztahuje se ke všem sečným rovinám R plochy K. Za druhé máme *)

$$J = \frac{\pi}{2} \int\int\int \int\int\int \varrho\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2, \tag{33 b}$$

kde ϱ značí délku úsečky $A_1 A_2$; integrace se vztahuje ke všem bodům A_1, ležícím uvnitř K a stejně ke všem bodům A_2 uvnitř K. Podle vzorce (30*b*) je totiž pro určitou polohu bodů A_1 a A_2

$$\int\int dp\, d\omega = \pi c = \pi\varrho;$$

koeficient $^1/_2$ je nutno ve vzorci (33*b*) připojiti, poněvadž nyní přihlížíme k pořadí bodů A_1 a A_2, takže dvěma body uvnitř K a rovinou R jsou určeny d v a různé elementy integrálu (33*b*).

Třetí vzorec zní

$$J = \frac{\pi}{20} \int\int\int\int C^5\, d\Omega\, dQ; \tag{33 c}$$

integrace vztahuje se ke všem přímkám, protínajícím plochu S.

Vzorec (33*c*) odvodíme ze vzorce (33*b*) touto úvahou: Budiž bod A_1 pevný a proveďme na pravé straně rovnice (33*b*) nejprve integraci podle x_2, y_2 a z_2. Za tím účelem veďme bodem A_1 sečnu, která se dělí bodem A_1 ve dvě části o délkách r a $C - r$. Sestrojme pak, podobně jako v odst. 28., kuželovou plochu, jejíž otvor se měří nekonečně malým tělesným úhlem $d\Omega$ a jež obsahuje uvnitř sečnu C. Nekonečně malý element objemový, jenž jest omezen uvažovanou kuželovou plochou a dvěma soustřednými koulemi o středu A_1 a o poloměrech ϱ a $\varrho + d\varrho$, je roven

$$\varrho^2\, d\varrho\, d\Omega.$$

---

*) Vzorce (33*a*) a (33*b*) odvodil *Czuber* v práci citované v poznámce k odst. 26.

Je-li ϱ dosti malé, jsou uvnitř kuželové plochy dva elementy tohoto druhu (oddělené bodem A_1).

Násobme oba elementy vzdáleností ϱ a integrujme podle x_2, y_2, z_2 přes celý vnitřek kuželové plochy. Vychází

$$\iiint \varrho \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2 = \left[\int_0^r \varrho^3 \, d\varrho + \int_0^{C-r} \varrho^3 \, d\varrho\right] d\Omega.$$

Nahraďme, jako v odst. 28. element dx_1, dy_1, dz_1, elementem $dQdr$; formule (33b) přejde tak v

$$J = \frac{\pi}{2} \iiiint \left[\int_0^C \left(\int_0^r \varrho^3 \, d\varrho + \int_0^{C-r} \varrho^3 \, d\varrho\right) dr\right] dQ \, d\Omega$$

aneb

$$J = \frac{\pi}{20} \iiiint C^5 \, dQ \, d\Omega;$$

integrace vztahuje se ke všem sečnám plochy K.

b) Dělíme-li integrál na pravé straně rovnice (33b) čtvercem objemu V^2, obdržíme *střední hodnotu $m(\varrho)$ vzdálenosti dvou bodů volených uvnitř K;* srv. formuli (16'). Vychází

$$m(\varrho) = \frac{2}{\pi} \frac{J}{V^2}.$$

c) Množství, jehož prvek jest utvořen párem bodů A_1, A_2, zvolených uvnitř K a sečnou rovinou plochy K, má míru (nepřihlížíme k pořadí bodů uvnitř páru)

$$\tfrac{1}{2} V^2 M.$$

Dělíme-li tímto číslem integrál J, dostaneme pro *pravděpodobnost, že sečná rovina plochy K odděluje dva body volené uvnitř K, hodnotu*

$$\frac{2J}{V^2 M}.$$

30. Úloha o skupině pěti bodů. — *a)* Budiž G skupina pěti bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 zvolených uvnitř K, která má tuto vlastnost: body A_4 a A_5 leží po téže straně roviny $A_1 A_2 A_3$. Klademe si za úlohu vypočísti míru pro množství E, jehož prvky jsou všechny možné skupiny G. Míra ta jest

$$\iint \dots \int dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2 \dots dx_5 \, dy_5 \, dz_5.$$

Integrace vztahuje se ke všem skupinám G.*)

Proveďme nejprve integrace vzhledem k souřadnicím bodů A_1, A_2 a A_3. Zavedeme nové integrační proměnné

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ y'_1,\ y'_2,\ y'_3,\ u,\ v,\ w$$

rovnicemi

$$\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + wz_1 + 1 &= 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + 1 &= 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = x'_1,\quad x_2 = x'_2,\quad x_3 = x'_3\quad y_1 = y'_1\quad y_2 = y'_2,\quad y_3 = y'_3.$$

Funkční determinant původních proměnných

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3$$

vzhledem k novým proměnným jest

$$\frac{D\,(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)}{D\,(x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3, u, v, w)} = \frac{1}{w^4}\begin{vmatrix} x'_1, & y'_1, & 1 \\ x'_2, & y'_2, & 1 \\ x'_3, & y'_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Element transformovaného integrálu dostaneme, násobíce absolutní hodnotu tohoto výrazu součinem $dx'_1\ dx'_2\ dx'_3\ dy'_1\ dy'_2\ dy'_3\ du\ dv\ dw$. Element dá se tedy psáti ve tvaru

$$\left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{w}\right)^4 \begin{vmatrix} x'_1, & y'_1, & 1 \\ x'_2, & y'_2, & 1 \\ x'_3, & y'_3, & 1 \end{vmatrix} \frac{dx'_1\, dx'_2 \ldots dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}$$

aneb

$$2\,\Delta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\xi_3\, d\eta_3\, \frac{du\, dv\, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2},$$

kde Δ značí kladně čítaný plošný obsah trojúhelníka $A_1\ A_2\ A_3$: u, v, w souřadnice roviny $A_1\ A_2\ A_3$ a ξ_k, η_k ($k = 1, 2, 3$) souřadnice bodu vůči soustavě souřadnic, jejíž osy jsou v té rovině. Je totiž

$$\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{w}\begin{vmatrix} x'_1, & y'_1, & 1 \\ x'_2, & y'_2, & 1 \\ x'_3, & y'_3, & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta,\quad \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{w}\,.\, dx'_1\, dy'_1 = \\ = d\xi_1\, d\eta_1 \text{ atd.}$$

Buďte nyní Σ a Σ' části objemu V, ve které se dělí rovinou $A_1\ A_2\ A_3$. Pro pevnou polohu té roviny máme

$$\iiint\iiint dx_4\, dy_4\, dz_4\, dx_5\, dy_5\, dz_5 = \Sigma^2 + \Sigma'^2,$$

*) Při tom přihlížíme k pořadí bodů uvnitř skupiny. V práci shora citované (Sur les probabilités géométriques) považoval jsem dvě skupiny G za totožné, liší-li se při dané poloze pěti bodů toliko permutacemi prvních tří bodů nebo čtvrtého s pátým. Proto bylo nutno děliti integrál dvanácti.

takže míra množství E bude vyjádřena vzorcem

$$2\int\int\ldots\int(\Sigma^2+\Sigma'^2)\,\Delta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\xi_3\,d\eta_3\,\frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

anebo

$$2\int\int\ldots\int(\Sigma^2+\Sigma'^2)\,\Delta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\xi_3\,d\eta_3\,dp\,d\omega;$$

zde značí $dp d\omega$ element vztahující se k rovině, která je nekonečně blízká rovině $A_1A_2A_3$. Integrace vzhledem k souřadnicím roviny vztahuje se na všechny sečné roviny plochy K, a v každé takové rovině vztahují se integrace vzhledem ke ξ_1, η_1, $\xi_2 \ldots \eta_3$ na všechny polohy bodů A_1, A_2 a A_3 uvnitř K. Součet $\Sigma^2+\Sigma'^2$ závisí toliko na poloze roviny $A_1A_2A_3$. Předně třeba vypočísti integrál

$$J_1=\int\int\int\int\int\int\Delta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\xi_3\,d\eta_3;$$

jeho hodnota jest $\qquad P^3\,m\,(\Delta)$,

kde $m\,(\Delta)$ značí střední hodnotu plochy trojúhelníka, jehož vrcholy leží uvnitř K v určité její sečné rovině a kde P značí plošný obsah příslušného rovinného řezu. Podle vzorce (24) jest

$$m\,(\Delta)=P-\frac{1}{2P^3}\int\int c^3\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,dq\,d\varphi;$$

při tom je v uvažované sečné rovině přímka (q,φ) definována rovnicí

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-q=0,$$

c značí délku tětivy, jež ta přímka vytíná z K a σ, σ' jsou plošné obsahy částí, ve které se dělí vnitřek průsečné křivky k přímkou (q,φ). Integrace se vztahuje ke všem přímkám (q,φ), jež průsečnou křivku k protínají. Je tedy

$$J_1=P^4-\tfrac{1}{2}\int\int c^3\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,dq\,d\varphi.$$

Z toho plyne, že míra množství E jest rovna výrazu

$$E=2\int\int\int m\,(\Delta)\,P^3\,(\Sigma^2+\Sigma'^2)\,dp\,d\omega \tag{34}$$

nebo

$$E=2\int\int\int\left[P^4-\tfrac{1}{2}\int\int c^3\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,dq\,d\varphi\right](\Sigma^2+\Sigma'^2)\,dp\,d\omega \tag{34'}$$

V této formuli vztahuje se integrál podle q a φ na všechny přímky, jež protínají plochu K a leží v určité její sečné rovině; integrace podle souřadnic roviny vztahují se pak ke všem sečným rovinám plochy K.

Integrál původně patnáctinásobný převádí se takto (nehledíme-li k integracím, kterými třeba ustanoviti σ, σ', Σ, Σ' a P) na součet integrálu trojnásobného a pětinásobného.

b) Dělíme-li právě vypočítanou míru množství E pátou mocninou objemu V, t. j. měrou množství, jehož prvkem je libovolná pětibodová skupina, zvolená uvnitř K, obdržíme vzorec pro pravděpodobnost *a, že ve skupině pěti bodů* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *zvolených uvnitř* K, *jsou body* A_4 *a* A_5 *po téže straně roviny* $A_1A_2A_3$.

$$a = \frac{E}{V^5} = \frac{2\int\int\int m(\Delta)\, P^8 (\Sigma^2 + \Sigma'^2)\, dp\, d\omega}{V^5} \tag{35}$$

$$a = \frac{2\int\int\int \left[P^4 - \frac{1}{2}\int\int c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi\right] (\Sigma^2 + \Sigma'^2)\, dp\, d\omega}{V^5} \tag{35'}$$

31. Úlohy týkající se zvláštní polohy bodu a čtyřstěnu. — *a)* Zvolme uvnitř K čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4; písmenem T označíme čtyřstěn jimi utvořený a zároveň jeho objem.

Stěny čtyřstěnu T dělí objem V plochou K omezený na patnáct částí. První část, kterou nazveme T_0, jest utvořena vnitřkem čtyřstěnu T. Ostatní části označíme takto: Budiž τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) stěna čtyřstěnu T protilehlá k vrcholu A_i a označme tu její stranu, po které leží vrchol A_i, za zápornou, druhou pak za kladnou. Jsou-li i, k, l, m indexy *1, 2, 3, 4* vzaté v libovolném pořadí, označíme: písmenem T_i tu část objemu V, která leží na kladné straně roviny τ_i a na záporné straně roviny τ_k, τ_l, a τ_m; písmenem T_{ik} tu část objemu V, která leží na kladné straně rovin τ_i a τ_k a na záporné straně rovin τ_l a τ_m konečně písmenem τ_{ikl} tu část, která leží na kladné straně rovin τ_i, τ_k a τ_l a na záporné straně roviny τ_m. Patnáct částí, ve které se objem V dělí rovinami τ, bude tak označeno znaky:

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4;\ T_{12},\ T_{23},\ T_{31},\ T_{14},\ T_{24},\ T_{34};\ T_{123},\ T_{124},\ T_{134},\ T_{234}.$$

Budiž nyní A_5 pátý bod volený uvnitř K a označme písmenem E_0 míru množství, jehož element je tvořen pětibodovou skupinou takovou, že pátý bod leží vzhledem k prvním čtyřem v T_0; písmenem E_1 míru množství, jehož element je tvořen pětibodovou skupinou takovou, že pátý bod leží v T_1 atd.

Veličiny $E_0, E_1, \ldots E_{12}, \ldots E_{234}$ vyhovují patrně rovnicím

$$\left.\begin{array}{c} E_1 = E_2 = E_3 = E_4 \\ E_{12} = E_{23} = E_{31} = E_{14} = E_{24} = E_{34} \\ E_{123} = E_{234} = E_{341} = E_{412} \\ E_0 + 4E_1 + 6E_{12} + 4E_{123} = V^5, \end{array}\right\} \quad (36)$$

neboť V^5 je měrou pro množství všech pětibodových skupin vůbec.

Další vztahy mezi veličinami E najdeme, uvažujíce o vztahu čtyřstěnu T ke čtyřstěnu U, utvořenému body A_1, A_2, A_3 a A_5. Vnitřek plochy K rozdělí se stěnami čtyřstěnu U v patnáct částí, jež označíme, užívajíce obdobných zkratek jako dříve, písmeny

U_0; U_1, U_2, U_3, U_5; U_{12}, U_{23}, U_{31}, U_{15}, U_{25}, U_{35}; U_{123}, U_{125}, U_{135}, U_{235},
U_0 značí vnitřek čtyřstěnu U atd.

Z geometrické definice oborů T_{123} a U_{123} plyne přímo věta: *Je-li bod A_5 v T_{123}, jest A_4 v U_0; je-li A_5 v T_0, jest A_4 v U_{123}.*

Z této věty a z vět, jež by se z ní odvodily záměnou indexů, vyplývá vzhledem k rovnicím (36), že

$$E_{123} = E_{124} = E_{134} = E_{234} = E_0. \quad (36a)$$

Uvažujme dále o případu, že bod A_5 leží v části T_1; pak úsečka $A_1 A_5$ protíná vnitřek trojúhelníka A_2 A_3 A_4; rovina A_1 A_2 A_5 odděluje body A_3 a A_4; rovina A_1 A_3 A_5 odděluje body A_2 a A_4. Body A_4 a A_5 leží po téže straně roviny $A_1A_2A_3$; body A_1 a A_4 leží po téže straně roviny A_2 A_3 A_5. Jinými slovy: bod A_4 leží v U_{23}. Je-li A_5 v T_{23}, odděluje rovina A_2 A_3 A_5 body A_1 a A_4, t. j. bod A_4 leží v U_1. Platí věta:

Je-li bod A_5 v T_1, jest A_4 v U_{23}; je-li A_5 v T_{23}, jest A_4 v U_1.

Z této věty a z vět, jež by se z ní odvodily záměnou indexů, vyplývá, že

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_{12} = E_{23} = E_{31} = E_{14} = E_{24} = E_{34}. \quad (36b)$$

Poslední rovnice (36) dává vzhledem k (36*a*) a k (36*b*) vztah mezi E_0 a E_1: $5E_0 + 10E_1 = V^5$. (37)

Druhý vztah mezi E_0 a E_1 obdržíme uvážíce, že množství všech pětibodových skupin takových, že A_4 a A_5 leží po téže straně roviny $A_1\ A_2\ A_3$, má míru E ustanovenou vzorcem (34). Patrně jest

$$E_0+E_1+E_2+E_3+E_{12}+E_{23}+E_{31}+E_{123}=E$$

aneb vzhledem k předešlým rovnicím

$$2\,E_0+6\,E_1=E\,. \tag{38}$$

Rovnicemi (37) a (38) jest úloha rozřešena; známe-li E_0 a E_1, dovedeme podle rovnic (36), (36*a*), (36*b*) vypočísti všech patnáct veličin E.

b) Eliminujíce E_1 z rovnic (37) a (38) dostaneme

$$E_0=\tfrac{3}{5}\,V^5-E \tag{39}$$

Dělme tuto rovnici veličinou V^5 a zaveďme do počtu *pravděpodobnost* p_0, *že z pěti bodů* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, uvnitř K *volených*, A_5 *leží uvnitř čtyřstěnu* $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$; poněvadž

$$p_0=\frac{E_0}{V^5}\,,$$

obdržíme

$$p_0=\tfrac{3}{5}-a\,; \tag{40}$$

a značí pravděpodobnost, určenou vzorcem (35) nebo (35′).

c) Budiž nyní $m\,(T)$ střední hodnota objemu čtyřstěnu T. Podle obecné věty, dokázané v odst. 18*a*, jest

$$p_0=\frac{m\,(T)}{V}$$

a tedy

$$m\,(T)=(\tfrac{3}{5}-a)\,V. \tag{41}$$

d) Volme uvnitř K pět bodů a hledejme pravděpodobnost p, že kterýkoli z nich leží uvnitř čtyřstěnu, utvořeného ostatními čtyřmi. Vyhovuje-li některý z pěti bodů této podmínce, nevyhovuje jí žádný z ostatních čtyř. Hledaná pravděpodobnost je tedy jakožto pravděpodobnost úhrnná pětkrát větší než p_0. Máme rovnici

$$p=5p_0=3-5a. \tag{42}$$

Poněvadž p_0 je kladné číslo nebo nula, plyne z rovnice (40), že

$$a\leqq\tfrac{3}{5}\,;$$

poněvadž pak $p\leqq 1$, plyne z rovnice (42), že

$$p\leqq\tfrac{1}{5}$$

a dále, že

$$a=\tfrac{3}{5}-p_0\geqq\tfrac{2}{5}.$$

Pravděpodobnosti a a p_0 vyhovují pro každou uzavřenou konvexní plochu podmínkám

$$p_0\leqq\tfrac{1}{5},\qquad \tfrac{2}{5}\leqq a\leqq\tfrac{3}{5}.$$

Pro kouli o poloměru R vychází

$$a = \tfrac{84}{143},\ p_0 = \tfrac{9}{715},\ m(T) = \tfrac{12}{715}\,\pi R^3.$$

W. Blaschke uvádí větu, že při daném objemu V dosahuje m (T) nejmenší hodnoty, je-li K ellipsoid, a největší, je-li K čtyřstěn.*)

32. Dvě úlohy o skupinách bodů, je-li jeden bod volen na ploše K. — *a)* Budiž T_1 čtyřstěn, jehož tři vrcholy jsou voleny uvnitř K, kdežto čtvrtý vrchol je na ploše K samé. Střední hodnota objemu T_1 dá se vypočísti podle vzorce (21). Je-li dV nekonečně malý přírůstek objemu V, který obdržíme, aplikujeme-li na K homothetickou transformaci (předpokládáme, že původní plocha K jest obsažena celá uvnitř plochy transformované), roste $m\,(T)$, kde T značí objem čtyřstěnu, obsaženého u v n i t ř K, úměrně s V, takže

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V}.$$

Dosadíme-li do vzorce (21) $n = 4$, bude

$$m_1 = \tfrac{5}{4}\, m,$$

kde m značí střední hodnotu objemu čtyřstěnu T_1, jehož všechny čtyři vrcholy jsou uvnitř K, m pak střední hodnotu objemu čtyřstěnu T, jehož tři vrcholy jsou uvnitř K, čtvrtý pak na K.

b) Pravděpodobnost p_0, určená rovnicí (40), nemění se, aplikujeme-li na K homothetickou transformaci. Hledejme pravděpodobnost p_1, že bod zvolený uvnitř K nalézá se zároveň uvnitř čtyřstěnu, jehož tři vrcholy jsou voleny uvnitř K, čtvrtý pak na ploše K samé. Dosadíme do rovnice (21′) $dp = 0$; vychází

$$p_1 = p_0.$$

V. Pokusné úlohy.

33. Pokusné určení geometrických pravděpodobností. — Vezměme za základ ty definice geometrických pravděpodobností, jež byly podány v kap. II., III. a IV., a hleďme výsledky výpočtů srovnati s pokusy.

*) Viz *W. Blaschke*: U e b e r a f f i n e G e o m e t r i e XI (Berichte über die Verhandlungen d. kön. sachsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. 69., p. 452; 1917).