p. 321—347., Scientific Papers, vol. VI., p. 604—626); *Lord Rayleigh:* The theory of Sound, 2[nd] edition, London 1894, vol. I., p. 39—41. Srv. též *M. v. Smoluchowski:* Abhandlungen über die Brownsche Bewegung (Ostwads Klassiker, Nr. 207.)

Je-li n velmi veliké a $l_1 = l_2 = \dots l_n = 1$, jest přibližně

$$P_n = 1 - e^{-\frac{r^2}{n}}].$$

III. Konvexní křivky v rovině.

19. Přímky protínající konvexní křivku. — *a)* Budiž k uzavřená konvexní*) křivka; volme počátek O souřadnic uvnitř k. Je-li φ úhel, který svírá vnější normála s osou Ox, bude vzdálenost tečny od počátku určitou funkcí úhlu φ, kterou označíme $f(\varphi)$. Tato funkce je kladná, jednoznačná a periodická s periodou 2π. Každá přímka

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0$$

protínající křivku C vyhovuje podmínce

$$q - f(\varphi) \leqq 0;$$

znamení rovnosti platí jen pro případ, že přímka se dotýká křivky k. Měrou všech jejích sečen je podle odst. 11. výraz

$$m = \iint dq\, d\varphi = \int q\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi,$$

který můžeme psáti též ve tvaru

$$m = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\varphi) + f(\varphi + \pi)]\, d\varphi.$$

Výraz v závorce udává vzdálenost dvou tečen kolmých k normále určené úhlem φ; tuto délku můžeme považovati za polovinu průmětu celého obvodu křivky do normály (rozumí se, že počítáme jen s absolutními hodnotami jednotlivých elementů obvodu resp. jejich průmětů). Označme řečený průmět písmenem A; obdržíme

$$m = \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} A\, d\varphi.$$

*) Křivku nazýváme konvexní, je-li protata každou přímkou nejvýše ve dvou bodech.

Poslední integrál vypočteme podle Cauchyho *) takto: Promítneme-li úsečku délky s do přímky, která s ní svírá úhel φ, jest absolutní hodnota průmětu $s\,|\cos\varphi|$. Integrujme tento výraz v mezích od 0 do 2π; vychází

$$s\int_0^{2\pi} |\cos\varphi|\, d\varphi = 4s.$$

Poněvadž pak si můžeme mysliti obvod křivky k rozdělen na nekonečně malé úsečky, jest

$$\int_0^{2\pi} A d\varphi = \text{4násobnému obvodu křivky.}$$

Z toho plyne, že *množství všech přímek, protínajících konvexní křivku, má míru rovnou jejímu obvodu.*

Tato věta dá se přenésti i na konvexní obrazce, jichž tečna nemění se spojitě s úhlem φ, na př. na konvexní mnohoúhelníky. V každém vrcholu mnohoúhelníka mění se $f(\varphi)$ nespojitě. Mnohoúhelník dá se však nahraditi s libovolnou přesností konvexní křivkou, jejíž tečna mění spojitě svůj směr; blíží-li se křivka mnohoúhelníku, blíží se míra všech přímek ji protínajících určité limitě, kterou považujeme za míru přímek, protínajících daný mnohoúhelník.

Není-li křivka k (nebo mnohoúhelník) konvexní, mysleme si kolem ní položenu uzavřenou a napiatou nit, která je tak stažena, že má nejmenší možnou délku. Nit přilehne pak ke k jen podél konvexních oblouků; má-li k konkávní oblouky, bude nit míti přímočaré úseky a vytvoří uzavřenou konvexní čáru k'. Každá přímka protínající k (nebo k') protíná též k' (nebo k), takže integrál

$$\iint d\varphi\, dq$$

má stejnou hodnotu jak pro množství přímek, jež protínají křivku prvou, tak pro množství, odpovídající křivce druhé. Proto můžeme se v těchto úlohách omeziti jen na křivky konvexní.

Z věty o míře přímek protínajících konvexní křivku (nebo konvexní obrazec) plyne tento důsledek: ***Pravděpodobnost p, že přímka, protínající konvexní obrazec k_1 o obvodě L_1, pro-***

*) Viz Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes, *Oeuvres de Cauchy,* 1e série t. 2., p. 107—177.

tíná současně jiný konvexní obrazec k_2, jenž leží uvnitř k_1 a má obvod L_2, jest

$$p = L_2 : L_1. \tag{22}$$

L_1 měří zde množství všech případů možných, L_2 množství všech případů příznivých. Je zajímavo, že pravděpodobnost p závisí toliko na poměru obou obvodů, nikoli však na geometrickém tvaru obou čar ani na jejich relativní poloze.

b) Užijme rovnice (22) k řešení této úlohy: V rovině jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky a mimo to konvexní křivka k v obvodu L; vzdálenost $2a$ dvou sousedních rovnoběžek je tak veliká, že křivka k nemůže protínati dvě z nich. Jest vypočísti pravděpodobnost p, že křivka k je protata některou rovnoběžkou.

Představme si, že narýsujeme kružnici k' o průměru $2a$ tak, že obsahuje křivku k ve svém vnitřku. Obrazec složený z křivky k a z kružnice k' považujeme za nepromĕnný útvar; mění-li k svou polohu v rovině, mění ji zároveň k'. V každém případě je k' protata nějakou rovnoběžkou (jen jednou z nich; nehledíme ke krajnímu případu, kdy se k' dotýká dvou sousedních rovnoběžek). Výpočet pravděpodobnosti p redukuje se tudíž na řešení úlohy: přímka protíná křivku k' v obvodu $2\pi a$; určiti pravděpodobnost p, že protíná křivku k o obvodu L, která leží uvnitř k'. Vychází podle vzorce (22)

$$p = \frac{L}{2\pi a}. \tag{22'}$$

Redukuje-li se k na úsečku o délce $2b$, jest $L = 4b$ a

$$p = \frac{2b}{\pi a}. \tag{22''}$$

Tímto vzorcem je rozřešena *Buffonova úloha o jehle.* Srv. odst. *8.* a odst. *35. a.*

20. Croftonova věta o třetí mocnině sečny. — Počítejme dvojím způsobem míru M pro množství, jehož prvkem je pár bodů zvolených uvnitř k; při tom považujeme páry za různé, liší-li se pořadím obou bodů. Předně máme

$$M = P^2.$$

Abychom vypočetli M druhým způsobem, označme písmeny x, y resp. x', y' souřadnice dvou bodů A a A' volených uvnitř k. Pišme

$$M = \iiiint dx'\, dy'\, dx\, dy$$

a integrujme podle x', y' předpokládajíce, že bod A' vyplňuje nekonečně malou výseč, která má za vrchol pevný bod A, a která jest omezena přímkami (q, φ) a $(q + dq, \varphi + d\varphi)$ v bodě A se sbíhajícími. Jsou-li c délka celé sečny (q, φ) a r resp. $c-r$ obě části, ve které se bodem A dělí, bude

$$M = \iiint \tfrac{1}{2} [r^2 + (c-r)^2]\, dx\, dy\, d\varphi.$$

Polohu bodu A můžeme určiti veličinami q (= vzdálenosti sečny (q, φ) od počátku souřadnic) a r (= vzdálenosti bodu A od jednoho konce sečny). Poněvadž pak

$$dxdy = dqdr,$$

jest

$$M = \iint\int_0^c \tfrac{1}{2} [r^2 + (c-r)^2]\, dr\, dq\, d\varphi =$$

$$= \iint \tfrac{1}{3} c^3\, dq\, d\varphi.$$

Srovnajíce obě formule pro M, obdržíme vzorec Croftonův: *)

$$\iint c^3\, dq\, d\varphi = 3 P^2.$$

Výraz

$$\tfrac{1}{3} c^3\, dq\, d\varphi$$

udává míru pro množství párů bodových AA', určených těmito podmínkami: bod A leží uvnitř nekonečně úzkého pruhu omezeného přímkami (q, φ) a $(q + dq, \varphi)$, spojnice AA' svírá s přímkou (q, φ) úhel obsažený v mezích o a $d\varphi$.

21. Vzájemné polohy sečen a bodů. — V následujících odstavcích označíme písmenem

L . . . . obvod dané uzavřené konvexní křivky k,

P . . . . její plošný obsah,

q, φ . . souřadnice přímky; rovnice přímky zní

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0,$$

σ, σ' . . plošné obsahy částí, ve které se vnitřek křivky k dělí danou sečnou; $\sigma + \sigma' = P$.

a) Množství všech přímek, které protínají křivku k, má míru L. Dle odst. 15. má množství, jehož prvkem je pár sečen křivky L, míru

$$N = \tfrac{1}{2} L^2.$$

*) Viz Crofton, Comptes Rendus 1869, p. 1469; J. A. Serret: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 1869, p. 177.

Množství všech párů sečen, které se protínají uvnitř k, má míru

$$Z = \tfrac{1}{2} \iiiint dq\, d\varphi\, dq'\, d\varphi';$$

integrace vztahuje se ke všem sečnám (q, φ) a (q', φ') takovým, že průsečík leží uvnitř k.

Vytkněme dvě pevné sečny rovnoběžné: (q, φ) a $(q + dq, \varphi)$. Nekonečně úzký pruh, utvořený jimi a dvěma obloučky křivky k, má, vynecháme-li nekonečně malé veličiny vyšších stupňů, obvod $2c$; c značí délku sečny (q, φ). Je tedy, integrujeme-li dle q' a φ',

$$Z = \tfrac{1}{2} \iint 2c\, dq\, d\varphi.$$

Poněvadž pak nezávisle na φ jest

$$\int c\, dq = P, \quad \text{a} \quad \int d\varphi = \pi,$$

jest

$$Z = \pi P.$$

Pravděpodobnost, že dvě sečny křivky k protínají se uvnitř k, jest

$$p = \frac{Z}{N} = \frac{2\pi P}{L^2}.$$

b) Obraťme se nyní k výpočtu míry I pro množství, jehož prvek jest utvořen sečnou křivky k a párem bodů AA', jež leží oba uvnitř k po různých stranách oné sečny. Při tom nepovažujeme dva takové páry za různé, liší-li se jen označením (pořadím) obou bodů.

Míra I dá se vyjádřiti trojím způsobem. Předně jest

$$I = \iint \sigma \sigma'\, dq\, d\varphi;$$

kde σ a σ' jsou části plochy P, oddělené sečnou (q, φ); integrace se vztahuje ke všem sečnám.

Uvážíme-li dále, že množství všech přímek protínajících úsečku AA' o délce ϱ má míru 2ϱ (úsečku považujeme za nekonečně zploštělou uzavřenou křivku o obvodu 2ϱ), můžeme psáti

$$I = \tfrac{1}{2} \iint 2\varrho\, dx\, dy\, dx'\, dy';$$

podle souřadnic (x, y) bodu A a podle souřadnic (x', y') bodu A' integruje se přes celý vnitřek křivky k.

Třetí vzorec pro míru I lze odvoditi následovně: Veďme bodem A, který prozatím považujeme za pevný, dvě sečny (q, φ) a $(q + dq, \varphi + d\varphi)$, tvořící nekonečně malý úhel $d\varphi$. Budiž c délka sečny a r vzdálenost bodu A od jednoho jejího konce. Množství bodů A', ležících uvnitř onoho nekonečně malého úhlu (po jedné straně bodu A) ve vzdálenosti ϱ až $\varrho + d\varrho$ od A má za míru

$$\varrho\, d\varrho\, d\varphi;$$

množství přímek protínajících úsečku AA' má míru

$$2\varrho.$$

Příspěvek k integrálu I, pocházející ode všech bodů A', ležících po obou stranách bodu A v onom nekonečně malém úhlu, je tedy

$$\tfrac{1}{2}\, 2\, dx\, dy\, d\varphi \left[\int_0^r \varrho^2\, d\varrho + \int_0^{c-r} \varrho^2\, d\varrho\right] = \tfrac{1}{3}\,[r^3 + (c-r)^3]\, d\varphi\, dx\, dy.$$

Integrál I vypočteme nahradíce, podobně jako v odst. 20., element $dxdy$ elementem $dqdr$, takže

$$I = \tfrac{1}{3} \iint\int_0^c [r^3 + (c-r)^3]\, dr\, dq\, d\varphi = \tfrac{1}{6} \iint c^4\, dq\, d\varphi,$$

při čemž integrace se vztahuje ke všem sečnám (q, φ) křivky k.

Dělme integrál I měrou

$$\tfrac{1}{2} LP^2$$

množství, jehož prvkem je sečna a pár bodů zvolených uvnitř k. Obdržíme tak tři výrazy pro *pravděpodobnost* ω, *že sečna křivky k odděluje dva body uvnitř k zvolené*

$$\omega = \frac{2\iint \sigma\sigma'\, dq\, d\varphi}{LP^2} = \frac{2\iint \varrho\, dx\, dy\, dx'\, dy'}{LP^2} = \frac{\iint c^4\, dq\, d\varphi}{3\, LP^2}.$$

c) Uvnitř k volíme čtyři body A, B, C, D. Měrou množství všech párů bodových A, B (spojnic AB) takových, že bod A leží uvnitř mezi přímkami (q, φ) a $(q + dq, \varphi)$, kdežto směr přímky AB liší se nekonečně málo od směru přímky (q, φ), je dle odst. 20.

$$\tfrac{1}{3} c^3\, dq\, d\varphi;$$

množství všech párů bodových CD (na pořadí bodů C a D nezáleží), jež leží po jedné nebo po druhé straně přímky (q, φ), má za míru

$$\tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma'^2).$$

Míra pro množství čtyřbodových skupin *ABCD* takových, že body *C* a *D* leží po téže straně přímky *A, B* (nutno děliti dvěma, ježto nezáleží na pořadí bodů *A* a *B*) je tudíž rovna integrálu

$$M = \tfrac{1}{12} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi;$$

integrace vztahuje se ke všem sečnám křivky *k*.

Dělme tento výraz měrou

$$\tfrac{1}{4} P^4$$

množství všech čtveřin bodových *ABCD*, při čemž považujeme dvě takové čtveřiny za identické, liší-li se toliko pořadím bodů *A, B* nebo pořadím bodů *C, D*. Obdržíme vzorec pro *pravděpodobnost* Π *že dva body uvnitř k volené leží po téže straně přímky, která spojuje dva jiné body volené uvnitř k:*

$$\Pi = \frac{1}{3P^4} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi.$$

Podle odst. *20.* jest

$$\frac{1}{3P^4} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2 + 2\sigma\sigma')\, dq\, d\varphi = \frac{1}{3P^4} \iint c^3\, dq\, d\varphi = 1.$$

Z toho následuje: *pravděpodobnost* Π', *že dva body volené uvnitř k jsou oddělovány přímkou, která spojuje jiné dva body uvnitř k volené, jest rovna*

$$\Pi' = 1 - \Pi = \frac{2}{3P^4} \iint c^3 \sigma\sigma'\, dq\, d\varphi.$$

22. Další úlohy o skupinách tří nebo čtyř bodů. —

a) Uvnitř *k* volme tři body *A,B* a *C*. Spojnice těchto bodů dělí vnitřek křivky *k* na sedm částí, jež označíme čísly $1, 2, \dots 7$; vnitřek trojúhelníka *ABC* označíme číslem 1, část přilehlou k vrcholu *A* číslem 2, část přilehlou ke straně *AB* číslem 3 atd. (viz obr. 1.). Budiž *D* čtvrtý bod volený uvnitř *k*. Všechny čtyři bodové skupiny*) *ABCD* takové, že *D* leží vzhledem k trojúhelníku *ABC* v *k*té části ($k = 1, 2, \dots 7$) tvoří množství, jehož míru nazveme M_k. Patrně jest

$$M_2 = M_4 = M_6, \qquad M_3 = M_5 = M_7.$$

Výraz

$$M_2 + M_7 + M_4 + M_5 = 2\,(M_2 + M_3)$$

udává míru pro množství čtyřbodových skupin *ABCD* takových, že přímka *CD* (spojnice vrcholu *C* s některým bodem

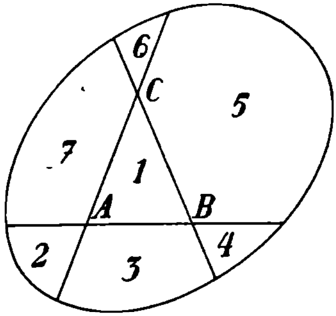
*) Zde přihlížíme k pořadí bodů uvnitř skupiny.

voleným uvnitř některé z částí *2, 7, 5, 4*), neprotíná úsečky *AB*. Nehledíme-li k pořadí bodů v páru *A, B*, ani v páru *C, D*, bude hořejší výraz roven čtyřnásobné míře *M*, vypočtené v odst. *21c*.

Je tedy
$$2\,(M_2 + M_3) = 4\,M.$$

Výraz
$$M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 = 3\,(M_2 + M_3)$$

jest měrou pro množství čtyřbodových skupin *ABCD* takových, že bod *D* leží vně trojúhelníka *ABC*. Měrou všech čtyř-



Obr. 1.

bodových skupin vůbec jest P^4, tedy ***pravděpodobnost** ω, **že bod volený uvnitř k leží vně trojúhelníka utvořeného jinými třemi body taktéž uvnitř k volenými, jest***

$$\omega = \frac{3\,(M_2 + M_3)}{P^4} = \frac{6\,M}{P^4}$$

aneb, dosadíme-li za *M* vzorec odvozený v odst. *21c*:

$$\omega = \frac{1}{2\,P^4} \iint c^3\,(\sigma^2 + \sigma'^2)\,dq\,d\varphi = \tfrac{4}{3}\,\Pi, \qquad (23)$$

kde Π značí pravděpodobnost definovanou v odst. *21c*.

Pravděpodobnost, že čtvrtý bod leží uvnitř trojúhelníka utvořeného prvními třemi, jest

$$1 - \omega = 1 - \frac{1}{2\,P^4} \iint c^3\,(\sigma^2 + \sigma'^2)\,dq\,d\varphi.$$

b) Počítejme střední hodnotu $m\,(\triangle)$ plochy trojúhelníka utvořeného třemi body, jež jsou voleny uvnitř k. Podle obecné věty vyjádřené vzorcem (20) jest

$$1 - \omega = \frac{m(\triangle)}{P}$$

a tedy užijeme-li vzorce (23),

$$m(\triangle) = (1 - \omega) P = P - \frac{1}{2P^3} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi. \quad (24)$$

c) Uvnitř k volíme čtyři body. Jak velká je pravděpodobnost p, že tvoří nekonvexní čtyřúhelník? (Sylvesterova úloha.) Pravděpodobnost p souvisí s pravděpodobností ω shora vypočtenou podle rovnice

$$p = 4(1 - \omega),$$

je tedy

$$p = 4 - \frac{2}{P^4} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi. \quad (25)$$

Pro trojúhelník jest $p = \frac{1}{3} = 0{\cdot}3333\ldots$,
» obdélník » $p = \frac{11}{36} = 0{\cdot}3056\ldots$,
» kruh » $p = \frac{35}{12\pi^2} = 0{\cdot}2955\ldots$ *)

W. Blaschke udává toto řešení Sylvesterovy úlohy: pravděpodobnost p nabývá hodnoty $\frac{1}{3}$ j e n v případě, že k je trojúhelník a hodnoty $\frac{35}{12\pi^2}$ j e n v případě, že k jest elipsa; v prvém případě má p největší, ve druhém nejmenší možnou hodnotu.**)

d) Dva body jsou zvoleny uvnitř k a třetí bod na obvodě k. Plocha trojúhelníka jimi utvořeného má střední hodnotu

$$m_1(\triangle) = \tfrac{4}{3} m(\triangle),$$

kde $m(\triangle)$ je střední hodnota určená vzorcem (24).

K důkazu použijeme obecné věty, vyjádřené formulí (21). Na místo objemu V oboru D nastoupí zde obsah P křivky k;

---

*) Viz Czuberovu knihu dříve citovanou a tyto práce: *Crofton* P r o b a b i l i t y (Encyclopaedia Britannica). *J. Sylvester* (Acta Mathematica, t. *14*, 185—205; 1891). *R. Deltheil* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. *11*; 1919). *A. Pánek* (Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky r. *11*, 1882 , p. 121—122).

**) *W. Blaschke*: U e b e r A f f i n e G e o m e t r i e XI. (Berichte des Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. 69., 1917; p. 436—453). Viz též *W. Blaschke:* V o r l e s u n g e n ü b e r D i f f e r e n t i a l g e o m e t r i e II., p. 55 (Berlin, 1923).

křivku tu zvětšíme nekonečně málo homotetickou transformací. Platí $dV = dP$. Přírůstek dm střední hodnoty $m = m\,(\Delta)$ bude zřejmě hověti úměře

$$dm : m = dP : P,$$

takže podle (21) bude (pro $n = 3$)

$$P\frac{dm}{dP} = 3(m_1 - m), \quad \text{tedy} \quad m_1 = \tfrac{4}{3}m.$$

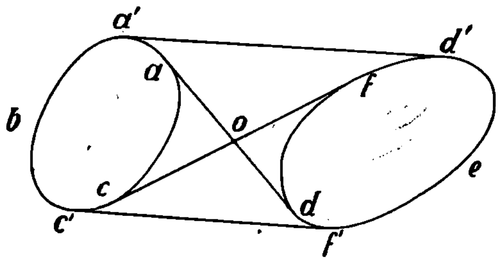
e) Uvnitř k volíme tři body a čtvrtý bod na K. Pravděpodobnost p_1, že tyto čtyři body tvoří nekonvexní čtyřúhelník, rovná se pravděpodobnosti p [vzorec (25)].

Abychom to dokázali, užijeme zase homotetické transformace, kterou se k nekonečně málo mění; do vzorce (21′) dosadíme $V = P$ a

$$dp = 0,$$

ježto uvedenou transformací se p nemění (p závisí jen na tvaru, nikoli na rozměrech křivky k). Vychází ihned, že $p_1 = p$.

23. *Přímky, jež protínají dvě konvexní křivky.* — *a)* Buďte k_1 a k_2 dvě konvexní křivky vzájemně se vylučující, X délka napiaté zkřížené niti, položené kolem obou křivek a Y délka napiaté nezkřížené niti kolem nich položené. Označme dále písmenem A konvexní obrazec $oaa'bc'co$ (viz



Obr. 2.

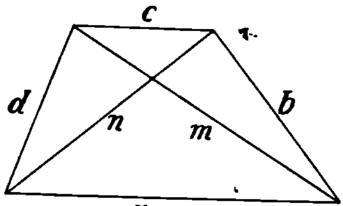
obr. 2.), utvořený částí křivky k_1 a částmi společných vnitřních tečen, jež se v o sbíhají; písmenem B pak obdobný konvexní obrazec $odf'ed'fo$. Množství přímek protínajících obrazec A (nebo B) má míru rovnou obvodu obrazce A (nebo B); součet obou měr jest $= X$, míře to přímkového množství M, jež se skládá z těchto dvou částí: 1. z množství M_1 přímek protínajících konvexní obrazec $a'bc'f'ed'a'$ (jsou-li $d'd'cc'f'$ společné vnější stěny obou křivek) a 2. z množství M_2 přímek, jež protínají současně obrazec A i obrazec B (tyto poslední přímky, obsažené též v množství M_1, vyskytují se v M každá dvakrát). Měrou množství M_1 jest Y; z toho soudíme, že

$$X - Y \tag{26}$$

je měrou množství M_2 těch přímek, které protínají zároveň obrazce A i B. Toto množství je však totožné, jak učí pohled na obrazec, s množstvím přímek, které protínají zároveň křivku k_1 i k_2. *Výraz (26) je měrou pro množství všech přímek, které protínají současně obě křivky* k_1 *a* k_2.

b) Užijme věty právě nalezené k řešení této úlohy: Je dán konvexní čtyřúhelník o stranách a, b, c, d a o úhlopříčkách m, n. Jest vypočítati míru pro množství těch přímek, které protínají dvě protější strany čtyřúhelníka.

Považujme strany a a c (viz obr. 3. za nekonečně zploštělé elipsy (strana a je zároveň osou a dvojnásobnou lineární



Obr. 3.

výstředností elipsy, jejíž vedlejší osa $= o$; podobně strana c) a užijeme oné věty. Patrně jest

$$X = a + c + m + n, \quad Y = a + b + c + d = L,$$

kde L značí obvod čtyřúhelníka. Měrou pro množství všech přímek protínajících současně úsečky a a c jest

$$X - Y = m + n - b - d.$$

Podobně jest, klademe-li

$$X' = b + d + m + n, \quad Y' = L,$$

měrou pro množství všech přímek protínajících úsečky b a d výraz

$$X' - Y' = m + n - a - c.$$

Z toho následuje, že měrou pro množství všech přímek protínajících pár protějších stran v daném čtyřúhelníku jest

$$X - Y + X' - Y' = 2\,(m + n) - L.$$

Poněvadž pak L je měrou pro množství všech přímek protínajících obvod čtyřúhelníka, jest

$$p = 2\,\frac{m + n}{L} - 1 \tag{27}$$

pravděpodobnost, že přímka protínající obvod čtyřúhelníka protíná jej ve dvou protilehlých stranách. Pro čtverec o straně a je

$$L = 4a, \quad m = n = a\sqrt{2},$$

a tudíž

$$p = \sqrt{2} - 1 = 0{\cdot}414\ldots \tag{27'}$$

Pro obdélník, jehož strany jsou v poměru $3:4$, jest

$$L = 14, \quad m = n = 5,$$

a tudíž

$$p = \tfrac{3}{7}. \tag{27''}$$

c) Počítejme míru N pro množství přímek, které oddělují jednu konvexní křivku k_1 od jiné k_2 (obr. 2.).

Množství všech přímek, které protínají konvexní obrazec $a'bc'f'ed'a$, má za míru délku Y nezkřížené niti, položené kolem obou daných křivek. Míra Y skládá se z těchto částí: z míry L_1 ($=$ obvodu křivky k_1), množství sečen křivky k_1, z míry L_2 ($=$ obvodu křivky k_2), množství sečen křivky k_2 a z míry N; od součtu těchto tří veličin jest však odečísti podle vzorce (26) míru $X - Y$ množství všech sečen společných oběma křivkám k_1 a k_2, neboť v součtu $L_1 + L_2$ je každá společná sečna čítána dvakráte. Je tedy

$$Y = L_1 + L_2 + N - X + Y$$

aneb

$$N = X - L_1 - L_2. \tag{28}$$

Vzorec (28) udává míru N pro množství přímek, které oddělují konvexní křivku o obvodu L_1 od jiné konvexní křivky o obvodu L_2; X značí délku napiaté zkřížené niti kolem obou křivek položené.

Úlohy 25. —29.

25. Křivka K o obvodu L obsahuje uvnitř dvě uzavřené a navzájem se vylučující křivky k a k' o obvodech l a l'. Jak veliká je

pravděpodobnost p, že libovolně vytčená přímka, která protíná K, neprotíná ani k ani k'? [$p = \frac{x - l - l'}{L}$; viz větu dokázanou v odst. 23c].

26. Uvnitř k volíme dva body. Sečna, jež je spojuje, dělí se jimi a průsečíky s k ve tři části. Pravděpodobnost, že z těchto tří úseček dá se sestrojiti trojúhelník, jest $= 1/4$. [*Czuber*: Geom. Wahrscheinlichkeiten, p. 156—157].

27. Uvnitř trojúhelníka zvolíme dva body; plošný obsah trojúhelníka, jejž tvoří tyto body spolu s určitým vrcholem trojúhelníka daného, má střední hodnotu

$$M_2 = \tfrac{4}{27} S,$$

značí-li S plošný obsah daného trojúhelníka [*Czuber* tamtéž p. 235].

28. Uvnitř k jsou voleny dva body. Střední hodnota jejich vzdálenosti jest (viz odst. 21*b*) $\frac{\omega L}{2}$.

29. Střední hodnota tětivy, kterou určuje libovolná přímka, protínající křivku k, jest určena vzorcem

$$m_0 = \frac{\pi P}{L}.$$

Pro kruh o poloměru R vychází

$$m_0 = \frac{\pi R}{2}.$$

IV. Konvexní plochy v prostoru.

24. *Přehled zkratek.* — V této kapitole pojednáme o některých úlohách, jež se vztahují k uzavřeným konvexním plochám v prostoru. Každá taková plocha je protata libovolnou přímkou nejvýše ve dvou bodech. Označíme písmenem

K . . . danou uzavřenou konvexní plochu bez singulárních bodů,
V . . . objem části prostoru omezené plochou K,
S . . . plošný obsah plochy K,
Σ, Σ' . . objemy částí, ve které se dělí vnitřek plochy K libovolnou sečnou rovinou ($\Sigma + \Sigma' = V$),
k . . . konvexní křivku, ve které libovolná sečná rovina protíná plochu K,
P . . . plošný obsah křivky k,
L . . . obvod křivky k,
C . . . délku sečny, kterou omezuje plocha K, na libovolné přímce ji protínající,
M . . . hodnotu integrálu (14), vztaženého ke všem rovinám (u, v, w), jež protínají plochu K.