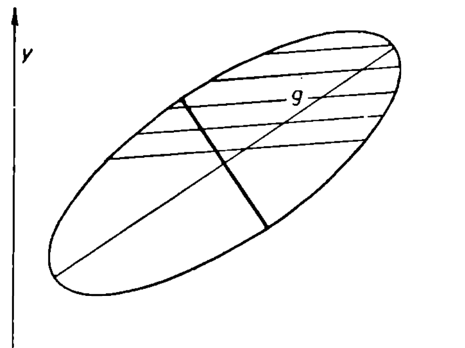
ÚLOHY NA MINIMUM MAXIM

§ 43. Formulace úloh.

Dosud jsme vyhledávali maxima nebo minima funkcí a funkcionálů. P. L. Čebyšev po prvé počal vyšetřovat extremální úlohy obecnějšího charakteru, úlohy na „minimum maxim" (viz § 44) nebo, jak se dnes nazývají, úlohy na „minimax". Studium obecných úloh na minimaxy bylo podstatně rozvinuto v posledním desetiletí hlavně v pracích sovětských matematiků (viz sborník „Matematika v SSSR za XV let" a „Matematika v SSSR za XXX let").

Budiž dána funkce f několika proměnných. Považujeme některé z těchto proměnných za pevné (nazveme je proměnnými skupiny A) a najdeme maximum f jako funkci ostatních proměnných (proměnných skupiny B). Toto maximum, které označíme znakem C, závisí na volbě pevně vzatých proměnných skupiny A. Budeme nyní hledat minimum C jako funkce proměnných skupiny A (místo o maximu nebo minimu budeme jindy mluvit o horní a dolní hranici).



Obr. 33.

Uvedeme nejjednodušší příklady podobných úloh.

Příklad 1. Vyšetřujme konvexní rovinnou oblast G. Soustava všech sečen, spojujících dva body hranice, závisí na dvou parametrech — na úhlu, který svírá sečna s osou x a na příklad na parametru y pořadnice středu sečny. Mezi všemi vzájemně rovnoběžnými sečnami (odpovídajícími pevnému úhlu α s osou x) najdeme tu, pro niž délka l je největší (maximum l podle y). Pak zvolíme ten úhel α, pro který příslušná maximální tečna nabývá nejmenší z možných hodnot l_0 (minimum podle α):

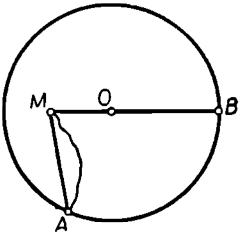
$$l_0 = \min_{\alpha} \max_{y} l.$$

Číslo l_0 se nazývá šířkou konvexního obrazce G. Je-li G elipsa, pak je l_0 právě délka menší osy elipsy (obr. 33).

Příklad 2. Vyšetřujme soustavu průměrů elipsoidu procházejících jeho středem. Každý centrální rovinný řez elipsoidu je elipsa; největší centrální sečna takového elipsoidu je jeho velká osa. Minimální z velkých os pro všechny elipsy centrálních průseků elipsoidu je jeho střední osa.

Lze vyšetřovat úlohy na minimax nejenom pro funkce o konečném počtu proměnných, nýbrž také pro funkcionály.

Příklad 3. Budiž M bod uvnitř kruhu různý od středu (obr. 34). Nejkratší z čar, spojujících M s pevným bodem A kružnice, je úsečka $\overline{MA}$. Nejdelší z těchto úseček je úsečka MB průměru (obsahující střed kruhu).



Obr. 34.

Analogicky, budiž dán bod M a křivka Γ. Minimum hodnot funkcionálu $J = \int F(x, y, y')\,dx$ mezi všemi křivkami, spojujícími bod M s pevným bodem C křivky Γ, je extremála $\overset{\frown}{AC}$. Maxima hodnot J na obloucích extremál $\overset{\frown}{AC}$ pro proměnný bod C, klouzající po Γ, se dosáhne na extremále transversální ke Γ.

Příklad 4. Buďte q a q_1 dvě rovinné křivky dané v parametrickém tvaru rovnicemi

$$\begin{matrix} x = x_0(t), & \text{a } x = x_1(t), \\ y = y_0(t) & \quad y = y_1(t), \end{matrix} \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Vyšetřujme maximum ϱ výrazu $\sqrt{[x_1(t) - x_0(t)]^2 + [y_1(t) - y_0(t)]^2}$, t. j. maximum vzdáleností mezi body na q a q_1, odpovídajícími jedné a téže hodnotě parametru t. Číslo ϱ závisí na volbě parametrického vyjádření křivek q a q_1. Infimum takových maxim vzhledem ke všem možným parametrickým vyjádřením křivek q a q_1 se nazývá vzdálenost nultého řádu křivek q a q_1. Analogicky se definuje vzdálenost prvního a obecně n-tého řádu těchto křivek. Na str. 42 jsme definovali ε-okolí nultého řádu dané křivky. Skládá se ze všech křivek, jejichž vzdálenost nultého řádu nepřevyšuje ε.

§ 44. Nejlepší polynomiální aproximace podle Čebyševa.

P. L. Čebyšev studoval následující úlohu. Budiž dána v intervalu $[a, b]$ funkce $f(x)$. *Aproximací* funkce $f(x)$ polynomem $P_n(x)$ n-tého stupně se nazývá maximum absolutní hodnoty rozdílu $|f(x) - P_n(x)|$ v intervalu $[a, b]$ (t. j. podle naší terminologie vzdálenost nultého řádu $f(x)$ a $P_n(x)$). Existuje takový mnohočlen n-tého stupně $P_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ (t. j. existují takové jeho koeficienty c_0, $c_1, \ldots, c_n$), pro nějž tato aproximace nabývá nejmenší z možných hodnot. Tato nejmenší hodnota se nazývá *nejlepší aproximací* funkce $f(x)$ polynomy $P_n(x)$ a příslušný mnohočlen $P_n^{(0)}(x)$ je *mnohočlenem nejlepší aproximace* pro $f(x)$. Nejlepší aproximace funkce $f(x)$ polynomy n-tého stupně (v daném intervalu) se označuje E_nf:

$$E_nf = \min_{c_0, c_1, \ldots, c_n} \max|f(x) - (c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n)|.$$

Budiž $E_nf = h$; předpokládejme, že existuje polynom nejlepší aproximace, označme jej

$$P_n^{(0)}(x) = c_0^{(0)}x^n + c_1^{(0)}x^{n-1} + \ldots + c_n^{(0)}.$$

Máme:

$$\max|f(x) - P_n^{(0)}(x)| = h.$$

Uvedeme několik důležitých Čebyševových vět.

Věta 1. *Existuje systém $(n + 2)$ čísel $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, kde $a \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqq b$, pro něž rozdíl $f(x) - P_n^{(0)}(x)$ nabývá střídavě hodnot $\pm h$.*

Důkaz této věty je založen na dvou pomocných větách, které nyní uvedeme.

Všechny body úsečky $[a, b]$, v nichž je

$$|f - P_n^{(0)}| = h,$$

se rozpadnou na dvě skupiny:

1) na body, pro které je $f - P_n^{(0)} = h$; budeme je nazývat (+)-body;

2) na body, pro které je $f - P_n^{(0)} = -h$; budeme je nazývat (—)-body.

Úsečku, obsahující (+)-body a neobsahující (—)-body, budeme nazývat (+)-úsečkou; analogicky se definuje (—)-úsečka. Symboly $(-1)^k$ - bod, $(-1)^k$ - úsečka označují (+)-bod nebo (—)-bod, (+)-úsečku nebo (—)-úsečku, a to v závislosti na znamení $(-1)^k$.

***Pomocná věta I.** Úsečku $[a, b]$ lze rozdělit na posloupnost střídajících se $(+)$ a $(-)$-úseček $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_{k-1}, \xi_k]$, $[\xi_k, b]$, kde ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ jsou nulové body funkce $f - P_n^{(0)}$.*

Důkaz. Protože spojitá funkce $|f(x) - P_n^{(0)}(x)|$ dosahuje svého maxima rovného h, pak úsečka $[a, b]$ obsahuje $(+)$ nebo $(-)$-body. Jestliže tato úsečka obsahuje jenom $(+)$ nebo jenom $(-)$-body, pak je sama $(+)$ nebo $(-)$-úsečkou a pomocná věta je tak dokázána.

Nechť nyní úsečka $[a, b]$ obsahuje jak $(+)$, tak $(-)$-body. Označíme x_0 bod ležící nejdále nalevo ze všech $(+)$ a $(-)$-bodů (x_0 může být rovno a). Předpokládejme pro určitost, že x_0 je $(+)$-bodem (případ, když x_0 je $(-)$-bodem, se rozebere podobně).

Označme nyní znakem x_1 bod ležící nejdále nalevo z $(-)$-bodů. Je zřejmé, že $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$. Připomeňme, že ježto v $(+)$ a $(-)$-bodě rozdíl $(f - P_n^{(0)})$ nabývá hodnot opačných co do znaménka, pak musí být mezi těmito body nulový bod tohoto rozdílu.

Znakem ξ_1 označíme ten nulový bod funkce $f - P_n^{(0)}$, který leží nejblíže zleva k bodu x_1. Ježto x_0 je $(+)$-bod a x_1 je $(-)$-bod, pak mezi nimi musí existovat nulový bod této funkce, a tedy nulový bod ξ_1, který je zleva nejblíže k x_1, leží mezi x_0 a x_1; t. j. $x_0 < \xi_1 < x_1$.

Úsečka $[a, \xi_1]$ je $(+)$-úsečka. Obsahuje totiž $(+)$-bod x_0 a neobsahuje $(-)$-body, ježto nejdále ležící vlevo z $(-)$-bodů bod x_1 leží napravo od ξ_1: $x_1 > \xi_1$.

Předpokládejme, že jsme již sestrojili posloupnost $(-1)^k$-bodů: $x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_k$. x_i je nejdále vlevo ležící z $(-1)^i$-bodů, které jsou vpravo od x_{i-1}. Mezi body x_{i-1} a x_i, které mají opačná znamení, leží nulový bod rozdílu $f - P_n^{(0)}$. Označíme znakem ξ_i bod, který leží nejblíže zleva k x_i a který je kořenem tohoto rozdílu, t. j. $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Dále nechť je x_{i+1} nejdále nalevo ležící z těch $(-1)^{i+1}$-bodů, které leží napravo od x_i. Mezi x_i a x_{i+1} existuje nulový bod ξ_{i+1} rozdílu $f - P_n^{(0)}$, který leží nejblíže nalevo od x_{i+1}; zřejmě je $x_i < \xi_{i+1} < x_{i+1}$.

Úsečka $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ je $(-1)^i$-úsečka. Vskutku tato úsečka obsahuje $(-1)^i$-bod x_i. Úsečku $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ neobsahuje $(-1)^{i+1}$-body, t. j. body s opačným znamením. Totiž ten bod z těchto bodů, který je zprava nejblíže bodu x_i, totiž bod x_{i+1}, leží napravo od této úsečky: $x_{i+1} > \xi_{i+1}$. Dále mezi

ξ_{i-1} a x_i nemůže ležet $(-1)^{i+1}$-bod x', který má opačné znamení; potom totiž mezi x' a x_i by musil být nulový bod ξ' funkce $f - P_n^{(0)}$ a měli bychom $\xi_i < x' < \xi' < x_i$, zatím co ξ_i je nulovým bodem této funkce a leží nejblíže nalevo od bodu x_i. Tedy úsečka $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ neobsahuje $(-1)^{i+1}$-body. Dokázali jsme, že tato úsečka je $(-1)^i$-úsečkou.

Nechť nyní pro konstruovaný bod x_k podle předepsaného pravidla nelze konstruovat bod x_{k+1}: pak neexistují napravo od x_k $(-1)^{k+1}$-body. Potom úsečka $[\xi_k, b]$ je $(-1)^k$-úsečkou. A tak sestrojíme posloupnost úseček $[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_i, \xi_{i+1}], \dots, [\xi_k, b]$, které jsou střídavě $(+)$ a $(-)$-úsečkami. Pomocná věta je dokázána.

Pomocná věta 2. *Číslo k v předcházející konstrukci není menší než* $n + 1$.

Budiž totiž $k \leqq n$. Potom

$$Q_n(x) = (-1)^k (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_k)$$

je polynom stupně $\leqq n$. Q_n je kladný pro všechny body všech $(+)$-úseček a záporný pro všechny body všech $(-)$-úseček, konstruovaných při důkazu předešlé pomocné věty. Vskutku, jestliže x leží na $(-1)^i$-úsečce (ξ_i, ξ_{i+1}), pak mezi činiteli $(x - \xi_1), (x - \xi_2), \dots$ $\dots, (x - \xi_n)$ je i kladných a $k-i$ záporných; znaménko polynomu $Q_n(x)$ je stejné se znaménkem $(-1)^k (-1)^{k-i} = (-1)^{-i} = (-1)^i$. Dále, jestliže x leží na $(+)$-úsečce (a, ξ_1), pak $Q_n(x)$ je kladné; jestliže x leží na $(-1)^k$-úsečce (ξ_k, b), pak je znamení $Q_n(x)$ rovno znamení $(-1)^k$.

Pro všechny body každé $(+)$-úsečky je $f - P_n^{(0)} > -h$, a pro všechny body každé $(-)$-úsečky je $f - P_n^{(0)} < h$. Existuje takové kladné číslo ε, že pro všechny body všech našich $(+)$-úseček

$$f(x) - P_n^{(0)}(x) \geqq -h + \varepsilon \tag{1}$$

a pro všechny body všech $(-)$-úseček

$$f(x) - P_n^{(0)}(x) \leqq h - \varepsilon. \tag{1'}$$

Dále zvolíme tak malé kladné číslo α, aby všude na $[a, b]$ byla splněna nerovnost

$$|\alpha Q_n(x)| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{2}$$

Budeme vyšetřovat rozdíl $f - [P_n^{(0)} + \alpha Q_n] = (f - P_n^{(0)}) - \alpha Q_n$. Tento rozdíl (rovný nule v bodech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) je pro všechny body všech (+)-úseček menší než h. Vskutku, tento rozdíl dostaneme odečtením kladného čísla $\alpha Q_n(x)$ od $f(x) - P_n^{(0)}(x) \leqq h$ (kromě bodů ξ_i, kde je tento rozdíl roven nule a proto menší než h). Na druhé straně podle (1) a (2) je

$$f(x) - P_n(x) - \alpha Q_n(x) \geqq (-h + \varepsilon) - \tfrac{1}{2}\varepsilon = -h + \tfrac{1}{2}\varepsilon > -h.$$

Tedy ve všech bodech (+)-úseček je

$$|f(x) - (P_n(x) - \alpha Q_n(x))| < h. \tag{3}$$

Analogicky se dokazuje, že nerovnost (3) je splněna i na všech (—)-úsečkách. To znamená, že je tato nerovnost vždy splněna na $[a, b]$. Avšak potom je

$$\max|f(x) - P_n^{(0)}(x) - \alpha Q_n(x)| < h. \tag{4}$$

$P_n^{(0)}(x) + \alpha Q_n(x)$ jako součet dvou mnohočlenů stupně $\leqq n$ je mnohočlen stupně $\leqq n$. Aproximace funkce $f(x)$ tímto mnohočlenem je menší než h, t. j. menší než aproximace $f(x)$ mnohočlenem $P_n^{(0)}(x)$. To je ve sporu s předpokladem, že $P_n^{(0)}$ je mnohočlenem n-tého stupně, který dává nejlepší aproximaci funkce $f(x)$.

Tím je pomocná věta 2 dokázána.

Existuje ne méně než $(n + 1)$ bodů $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$. To znamená, že existuje ne méně než $(n + 2)$ bodů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, které jsou střídavě (+) a (—)-body, při čemž $a \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b$. Věta 1 Čebyševova je dokázána.

Věta 2 (obrácená k větě 1). *Jestliže pro mnohočlen n-tého stupně $P_n(x)$ je maximum $|f(x) - P_n(x)|$ na úsečce $[a, b]$ rovno h a jestliže rozdíl $f(x) - P_n(x)$ nabývá na úsečce střídavě $(n + 2)$-krát hodnot $+h$ a $-h$, pak $P_n(x)$ je polynom n-tého stupně nejlepší aproximace pro funkci $f(x)$ na $[a, b]$.*

Nechť totiž mnohočlen n-tého stupně $Q_n(x)$ dává lepší aproximaci než $P_n(x)$ k funkci $f(x)$, t. j.

$$|f(x) - Q_n(x)| < h$$

všude na $[a, b]$.

Podle předpokladu existuje $(n + 2)$ bodů x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$, $a \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < b$, takových, že je

$$f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i h \quad (\text{nebo } (-1)^{i+1} h),$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Vyšetřujme rozdíly

$$Q_n(x_i) - P_n(x_i) = [f(x_i) - P_n(x_i)] - [f(x_i) - Q_n(x_i)].$$

První hranatá závorka v pravé části má absolutní hodnotu větší než druhá. Proto jejich rozdíl má znaménko jako první závorka, t. j. znaménko $(-1)^i$. To znamená, že $Q_n(x) - P_n(x)$ pro $x = x_i$ a x_{i+1} nabývá opačných znamení. Proto mezi x_i a x_{i+1} leží kořen ξ_i polynomu $Q_n(x) - P_n(x)$, $x_i < \xi_i < x_{i+1}$. Tedy mnohočlen $Q_n(x) - P_n(x)$ má $(n + 1)$ kořenů $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Avšak $P_n(x)$ a $Q_n(x)$ a tedy i $Q_n(x) - P_n(x)$ jsou mnohočleny stupně $\leqq n$. Tedy poněvadž $Q_n(x) - P_n(x)$ je rovno nule v $(n + 1)$ bodech, musí být rovno nule identicky, t. j. $P_n(x)$ je identické s $Q_n(x)$, což odporuje účiněnému předpokladu. Tím je věta dokázána.

Věta 3. *Existuje jenom jediný polynom n-tého stupně nejlepší aproximace k funkci $f(x)$ na úsečce $[a, b]$.*

Budiž totiž $E_n f = h$ a nechť existují dva polynomy n-tého stupně $P_n(x)$ a $Q_n(x)$, pro něž

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq h, \; |f(x) - Q_n(x)| \leqq h \text{ všude v } [a, b].$$

Aritmetický průměr $\frac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]$ je rovněž mnohočlenem n-tého stupně, při čemž

$$\begin{aligned}
|f(x) - \tfrac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]| &= \\
= \tfrac{1}{2}|[f(x) - P_n(x)] + [f(x) - Q_n(x)]| &\leqq \\
\leqq \tfrac{1}{2}[|f(x) - P_n(x)| + |f(x) - Q_n(x)|] &\leqq h.
\end{aligned}$$

Maximum absolutní hodnoty rozdílu

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]|$$

nemůže být menší než h podle definice h. To znamená, že je

$$\max|f(x) - \tfrac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]| = h, \; a \leqq x \leqq b,$$

t. j. $\frac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]$ je rovněž mnohočlen n-tého stupně nejlepší aproximace $f(x)$. Podle věty (1) existují $n + 2$ body x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n + 1$, v nichž

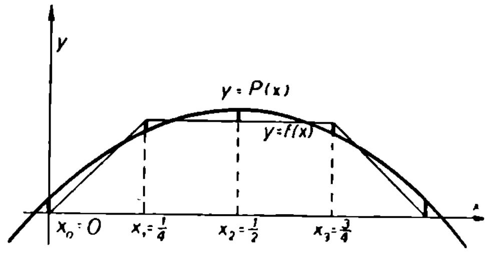
$$\tfrac{1}{2}\{[f(x_i) - P_n(x_i)] + [f(x_i) - Q_n(x_i)]\} =$$
$$= f(x_i) - \tfrac{1}{2}[P_n(x_i) + Q_n(x_i)] = h \text{ nebo } = -h$$

Protože $[f(x_i) - P_n(x_i)]$ a $[f(x_i) - Q_n(x_i)]$ leží mezi $-h$ a $+h$, pak k tomu, aby aritmetický průměr těchto výrazů se rovnal h nebo $-h$, je třeba, aby se $f(x_i) - P_n(x_i)$ a $f(x_i) - Q_n(x_i)$ současně rovnaly h nebo $-h$. Je tedy $P_n(x_i) = Q_n(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Polynomy n-tého stupně $P_n(x)$ a $Q_n(x)$, jejichž hodnoty jsou v $(n + 2)$ bodech stejné, jsou identické, t. j. $P_n(x) \equiv Q_n(x)$. Tím je jednoznačnost mnohočlenu nejlepší aproximace dokázána.

Příklad. Vyšetřujme na úsečce [0, 1] funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } \frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}, \\ 1 - x & \text{pro } \frac{3}{4} \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Vyšetřujme mnohočlen $P(x) = x^2 - x + \frac{1}{32}$. V pěti bodech $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ je rozdíl $f(x) - P(x)$ roven postupně $\frac{1}{32}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$. Při tom, tak je patrno z obr. 35, jsou tyto body maxima rozdílu $f(x) - P(x)$. Podle vět 2 a 3 je $P(x)$ jediný mnohočlen stupně $\leqq 3$, který dává nejlepší aproximaci funkce $f(x)$ na úsečce [0, 1], a tato nejlepší aproximace jest $E_3 f(x) = \frac{1}{32}$. Pro jakýkoli jiný mnohočlen $Q(x)$ stupně $\leqq 3$ je $\max|f(x) - Q(x)| > \frac{1}{32}$.



Obr. 35.

Mnohočleny minimálně se lišící od nuly. Vyšetříme aproximaci v intervalu $[-1, 1]$ funkce x^n polynomy $P_{n-1}(x)$ stupně $\leqq n - 1$. Rozdíl $x^n - P_{n-1}(x)$ je polynom n-tého stupně, u něhož je koeficient u nejvyššího stupně roven jedné. Obráceně, každý takový mnohočlen $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ se dá vyjádřit ve tvaru $x^n - P_{n-1}(x)$, kde $P_{n-1}(x) = -a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n$. Nejlepší aproximací $E_n x^n$ je infimum maxim$|x^n - P_{n-1}(x)|$ pro všechny mnohočleny P_{n-1} stupně $\leqq n - 1$

v intervalu $[-1, 1]$, neboli, což je totéž, infimum maxim $|x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n|$ v intervalu $[-1, 1]$ vzhledem ke všem mnohočlenům n-tého stupně s koeficientem 1 u x^n:

$$E_n x^n = \inf_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n|.$$

Mnohočlen $x^n - P_n^{(0)}(x) = x^n + a_1^{(0)} x^{n-1} + a_2^{(0)} x^{n-2} + \ldots + a_n^{(0)}$, pro který je $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |x^n - P_n^{(0)}(x)| = E_n x^n$, se nazývá mnohočlenem *minimálně se lišícím od nuly.*

Jak dokázal P. L. Čebyšev, mnohočlen minimálně se lišící od nuly n-tého stupně je roven výrazu

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$$

a minimální odchylka je

$$E_n x^n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pomocná věta. *Funkce*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

je mnohočlenem n-tého stupně

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-4} + \ldots,$$

a je sudý nebo lichý podle toho, je-li funkce x^n sudá nebo lichá, při čemž koeficient u nejvyšší mocniny tohoto mnohočlenu je roven 2^{n-1}.

Dokážeme tuto větu methodou matematické indukce. Máme

$$T_1(x) = \cos \arccos x = x,$$
$$T_2(x) = \cos 2 \arccos x = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Věta platí pro $n = 1, 2$.

Nechť věta platí pro všechna T_i pro $i \leq n - 1$. Dokážeme její platnost pro T_n.

Podle tohoto předpokladu je

$$\begin{aligned} T_{n-1} &= \cos[(n-1) \arccos x] = \\ &= 2^{n-2} x^{n-1} + b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-5} + \ldots, \\ T_{n-2} &= \cos[(n-2) \arccos x] = \\ &= 2^{n-3} x^{n-2} + c_1 x^{n-4} + \ldots \end{aligned}$$

Protože je

$$\cos nt + \cos(n-2)t = 2\cos(n-1)t\cos t,$$
$$\cos nt = 2\cos t\cos(n-1)t - \cos(n-2)t,$$

máme

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos n\,(\arccos x) = \\ &= 2\cos\arccos x\cos[(n-1)\arccos x] - \\ &- \cos[(n-2)\arccos x] = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Použijeme-li formulí pro T_{n-1} a T_{n-2}, obdržíme:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2x(2^{n-2}x^{n-1} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-5} + \ldots) - \\ &\quad - (2^{n-3}x^{n-2} + c_1x^{n-4} + \ldots) = \\ &= 2^{n-1}x^n + (2b_1 - 2^{n-3})x^{n-2} + (2b_2 - c_1)x^{n-4} + \ldots, \end{aligned}$$

t. j. $T_n(x)$ je rovněž mnohočlen n-tého stupně s koeficientem 2^{n-1} u x^n a $T_n(x)$ je funkce lichá nebo sudá podle toho, zda x^n je lichá nebo sudá. Pomocná věta je dokázána.

Dokážeme, že mnohočlen $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = x^n + c_nx^{n-1} + \ldots$ *je mnohočlenem n-tého stupně, který se minimálně liší od nuly*, neboli, když píšeme

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = x^n - P_{n-1}^{(0)}(x),$$

že mnohočlen $P_n^{(0)}(x)$ je mnohočlenem stupně $\leqq n-1$, který dává nejlepší aproximaci pro funkci x^n v intervalu $[0, 1]$.

Máme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos nt$, kde $t = \arccos x$. Když x probíhá úsečku $[0, 1]$, $t = \arccos x$ probíhá úsečku $[0, \pi]$. Zřejmě v intervalu $[0, \pi]$ $\cos nt$ nabývá střídavě $(n+1)$kráte maxim a minim rovných $+1$ a -1 (v bodě $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi$). Tedy mnohočlen $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos nt$ nabývá střídavě $(n+1)$kráte maxim a minim rovných $\frac{1}{2^{n-1}}$ v bodech $\cos\frac{i\pi}{n}$, $i = n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$. Podle věty 2 mnohočlen $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = x^n - P_n^{(0)}(x)$ je mnohočlenem n-tého stupně minimálně se lišícím od nuly neboli, což je totéž, $P_{n-1}^{(0)}(x)$ dává nejlepší aproximaci funkce x^n v intervalu $[-1, 1]$ mezi všemi mnohočleny stupně $\leqq n - 1$.

Protože je

$$\cos nt = \tfrac{1}{2}[\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n + (\cos t - \mathrm{i}\sin t)^n],$$
$$\mathrm{i}\sin t = \sqrt{-1}\sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{\cos t - 1},$$

jest

$$\cos nt = \tfrac{1}{2}[(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - 1})^n + (\cos t - \sqrt{\cos t^2 - 1})^n].$$

Klademe-li $\cos t = x$ a tedy $\cos nt = T_n(x)$, dostaneme

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n].$$

Uvedeme vyjádření pro mnohočleny několika prvních stupňů minimálně se lišící od nuly:

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x,\\
\tfrac{1}{2}T_2(x) &= x^2 - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{4}T_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{4}x,\\
\tfrac{1}{8}T_4(x) &= x^4 - \tfrac{1}{8}x^2,\\
\tfrac{1}{16}T_5(x) &= x^5 - \tfrac{5}{4}x^3 + \tfrac{5}{16}x.
\end{aligned}$$

S chybou menší než $\frac{1}{16}$ můžeme nahradit v intervalu $[-1, 1]$ polynom x^5 polynomem $\frac{5}{4}x^3 - \frac{5}{16}x$, při čemž tento polynom mezi všemi mnohočleny stupně $\leqq 4$ nejlépe aproximuje funkci x^5 v intervalu $[-1, 1]$.

§ 45. Minimaxová theorie vlastních hodnot.

Jako druhý příklad extremálních úloh na minimaxy uvedeme theorii vlastních hodnot. V § 38 uvedená extremální definice n-té vlastní hodnoty λ_n Sturm-Liouvilleova operátoru L je definice rekurentní. Uvedeme jinou její extremální definici.

Buďte $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots, \varrho_{n-1}(x)$ funkce třídy C, definované v intervalu $[a, b]$. Označíme znakem $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ minimum funkcionálu

$$K(y) = \int_a^b (Ry'^2 + Py^2)\,\mathrm{d}x$$

za podmínek

$$\int_a^b y^2 \, dx = 1, \quad \int_a^b \varrho_i(x) \, y(x) \, dx = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Věta 4. *Supremum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ pro libovolné funkce ϱ_i je rovno λ_n.*

K důkazu pokládejme z počátku funkce $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ za pevné. Buďte $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ normované vlastní funkce odpovídající prvním n vlastním hodnotám $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Vyšetřujme n-parametrovou soustavu funkcí:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

a zvolme c_i tak, aby bylo vyhověno $(n - 1)$ podmínkám:

$$\int_a^b \varrho_i\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\Big) \, dx = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b \varrho_i y_j \, dx = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{5}$$

Rovnice (5) tvoří vzhledem k n neznámým c_j soustavu $(n - 1)$ lineárních homogenních rovnic. Proto vždy existuje soustava hodnot $c_1, c_2, \ldots, c_n$, při čemž $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$, vyhovujících těmto rovnicím. Násobením konstantou lze dosíci, aby tato soustava hodnot c_i vyhovovala rovněž rovnicím

$$\int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\Big)^2 \, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1. \tag{6}$$

Funkce $Y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i$, odpovídající těmto hodnotám c_i, je funkce třídy přípustných funkcí ve shora uvedené variační úloze, pro které infimum hodnot funkcionálu K je rovno $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$, a proto

$$\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}) \leqq K\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\Big). \tag{7}$$

Dále je

$$K\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K(y_i) + 2 \sum_{i \neq j} c_i c_j K(y_i y_j).$$

Avšak na základě věty 4 § 37 a podle orthogonality vlastních funkcí y_i a y_j je $K(y_i, y_j) = 0$. Dále je $K(y_j) = \lambda_j$.

Proto máme

$$\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}) \leqq K(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2.$$

Pravou stranu (7′) zvětšíme, když zaměníme koeficienty u c_j^2 největším z těchto koeficientů, t. j. koeficientem λ_n:

$$\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}) \leqq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \lambda_n.$$

Budiž nyní $\varrho_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Věta 7 § 38 tvrdí, že je

$$\lambda(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \lambda_n.$$

Tedy supremum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1})$ je rovno λ_n a dosahuje se ho, když je $\varrho_i(x) = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Tedy

$$\lambda_n = \sup_{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}} \inf_{y(x) \subset C(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1})} K(y).$$

Z minimaxové definice vlastních hodnot plyne věta 9 § 38. Vskutku, jestliže $P(x)$ a $R(x)$ ve výrazu $K(y) = \int_a^b (Ry'^2 + Py^2)\,\mathrm{d}x$ rostou, pak roste pro každou funkci $y(x)$ hodnota $K(y)$, což znamená, že roste i supremum $K(y)$ pro funkce $y(x)$, vyhovující podmínkám (5), (6), t. j. $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1})$, a i roste infimum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1})$, t. j. λ_n.

Právě tak plyne z minimaxové definice vlastních hodnot věta *o klesání vlastních hodnot $\lambda_n(b)$ při růstu horní meze b.*

Budiž totiž $a < b_1 < b$. $\lambda_1(b)$ se definuje jako supremum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1})$ minim $K_i(y)$ za konstantních podmínek

$$\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = 1, \quad y(a) = y(b) = 0 \tag{8}$$

a proměnných podmínek

$$\int_a^b \varrho_i y\,\mathrm{d}x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{9}$$

λ_{b_1} je supremum $\lambda^{(b_1)}(\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1})$, kde $\lambda^{(b_1)}(\varrho_1\ \varrho_2\ \dots\ \varrho_{n-1})$ je definováno jako minimum K_{b_1} za podmínek, které dostaneme záměnou horní meze b menším číslem b_1. Lze říci, že $\lambda^{(b_1)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ se definuje jako minimum K_b za podmínek (8), (9) a za dodatečné podmínky:

$$y(x) = 0 \text{ pro } b_1 < x < b. \tag{9'}$$

Zavedení dodatečné podmínky zužuje třídu funkcí, mezi nimiž se hledá minimum, a proto minimum může jenom vzrůsti, t. j.:

$$\lambda^{(b_1)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}) \geqq \lambda^{(b)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}). \tag{10}$$

Proto i suprema výrazů, stojících na levé a pravé straně nerovnosti (10), jsou v témže vztahu:

$$\lambda_n(b_1) \geqq \lambda_n(b). \tag{11}$$

Zbývá dokázat, že rovnost

$$\lambda_n(b_1) = \lambda_n(b) = \lambda \tag{12}$$

pro $b_1 > b$ nemůže nastat. Vskutku, podle (9′) plyne: pro všechna b', ležící mezi b_1 a b, je $\lambda_n(b') = \lambda$.

Označíme jako $z_\lambda(x)$ netriviální řešení rovnice Sturm-Liouvilleovy $Ly = \lambda y$, vyhovující krajové podmínce $y(a) = 0$. Všechna jiná řešení naší rovnice o téže krajové podmínce (až na konstantního činitele) jsou totožná s $z_\lambda(x)$. Speciálně pro jakékoli b' z intervalu $[b_1, b]$ je vlastní funkce Ly při krajových podmínkách $y(a) = y(b') = 0$, odpovídající n-té vlastní hodnotě $\lambda_n(b') = \lambda$, rovna $z_\lambda(x)$. Je tedy $z_\lambda(b') = 0$ pro $b_1 \leqq b' \leqq b$. Avšak řešení $z_\lambda(x)$, které je identicky rovno nule v intervalu $[b_1, b]$, je identicky rovné nule na celé přímce vzhledem k definici $z_\lambda(x)$.

Tak předpoklad $\lambda_n(b_1) = \lambda_n(b)$ vede ke sporu. Platí ostrá nerovnost $\lambda_n(b_1) > \lambda_n(b)$.

Tvar uvedené minimaxové definice vlastních hodnot lze nepatrně změnit.

Budeme vyšetřovat lineární funkcionál $J(y)$, definovaný na funkcích $y(x)$, $a \leqq x \leqq b$, třídy C_2. Příkladem takového lineárního funkcionálu může být funkcionál

$$J(y) = \int_a^b \varrho(x)\, y(x)\, \mathrm{d}x,$$

kde $\varrho(x)$ je funkce třídy C_2. Jiným příkladem může sloužit hodnota funkce $y(x)$ v pevném bodě x_0 úsečky $[a, b]$:

$$J(y) = y(x_0)$$

atp.

Označíme znakem $\lambda(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1})$ infimum funkcionálu $K(y)$ za pevných podmínek

$$y(a) = y(b) = 0; \int_a^b y^2 \, dx = 1$$

a za $(n - 1)$ proměnných podmínek $J_i(y) = 0$; $i = 1, 2. \ldots, n - 1$.

Stejně jako nahoře dokážeme

$$\lambda(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}) \geqq \lambda_n.$$

Na druhé straně, jestliže

$$J_i^{(0)}(y) = \int_a^b y_i(x) \, y(x) \, dx, \; i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ je prvních $(n - 1)$ vlastních funkcí operátoru L, máme

$$\lambda(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_{n-1}^{(0)}) = \lambda_n,$$

t. j. *n-tá vlastní hodnota λ_n je supremum funkce $\lambda(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_{n-1}^{(0)})$ pro libovolné lineární funkcionály $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_{n-1}^{(0)}$:*

$$\lambda_n = \sup_{J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}} \; \inf_{\substack{J_i(y) = 0, i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ y(a) = y(b) = 0, \; \int_a^b y^2 \, dx = 1}} K(y)$$

Krajové podmínky $y'(a) = y'(b) = 0$. Budeme nyní vyšetřovat místo krajových podmínek $y(a) = y(b) = 0$ jiné krajové podmínky, a to:

$$y'(a) = y'(b) = 0. \tag{13}$$

Rovnici Sturm-Liouvilleovu:

$$Ly = \lambda y \tag{14}$$

pro krajové podmínky $y'(a) = y'(b) = 0$ dostaneme, jestliže budeme řešit úlohu o extrému funkcionálu $K(y)$ pro „isoperimerickou“ podmínku $\int_a^b y^2 \, dx = 0$ a pro volné konce, t. j. když třídu přípustných křivek tvoří libovolné křivky třídy C_1, vyhovující podmínce $\int_a^b y^2\,dx = 1$, jejichž koncové body leží na přímkách $x = a$, $x = b$.

Vlastní funkcí pro L při krajových podmínkách (13) se nazývá netriviální řešení rovnice (14) za podmínek (13), odpovídající hodnota λ se nazývá *vlastní hodnotou* L. Operátor L za podmínek (11) se jeví jako dříve symetrickým.

Věty § 38 a věty § 39 zůstanou v platnosti i při přechodu ke krajovým podmínkám (13). Nechť vlastní hodnoty operátoru L, uspořádané podle velikosti, jsou $\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \ldots$

Označíme znakem $\bar{\lambda}(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1})$ supremum funkcionálu $K(y) = \int_a^b (Ry'^2 + Py^2)\,dx$ za pevných podmínek $\int_a^b y^2\,dx = 1$ a dodatečných podmínek

$$J_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

kde J_i jsou libovolné lineární funkcionály. Tak jako dříve ukážeme, že

$$\bar{\lambda}_n = \sup \bar{\lambda}(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}),$$

a tohoto suprema se dosáhne, když je

$$J_i(y) = \int_a^b y_i(x)\,y(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Vlastní hodnoty $\bar{\lambda}_n$ jsou vázány s vlastními hodnotami λ_n dřívější krajové úlohy těmito vztahy:

$$\lambda_n \geqq \bar{\lambda}_n \geqq \lambda_{n-2}. \tag{15}$$

Vskutku, $\lambda_n(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1})$ a $\bar{\lambda}_n(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1})$ se definují jako infima funkcionálu $K(y)$ za jistých podmínek, při čemž v definici $\lambda_n(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1})$ jsou položeny pevné dodatečné podmínky $y(a) = y(b) = 0$. Zavedení dodatečných podmínek zužuje třídu přípustných čar a může infimum jenom zvětšit, t. j.

$$\lambda_n(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}) \geqq \bar{\lambda}_n(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}).$$

Přejdeme-li v obou stranách nerovnosti k supremu, dostaneme první z nerovností (15):

$$\lambda_n \geqq \bar{\lambda}_n$$

Dále $\lambda_{n-2}(J_3, J_4, \ldots, J_{n-1})$ se definuje jako infimum $K(y)$ za podmínky

$\int_a^b y^2\,dx = 1$, $(n - 3)$ proměnných podmínek $J_3(y) = J_4(y) = \ldots =$ $= J_{n-1}(y) = 0$ a dvou pevných podmínek

$$J_1^*(y) = y(a) = 0,\ J_2^*(y) = y(b) = 0.$$

Můžeme napsat

$$\lambda_{n-2}(J_3, J_4, \ldots, J_{n-1}) = \bar{\lambda}_n(J_1^*, J_2^*, J_2, J_4 \ldots, J_{n-1}),$$

$\bar{\lambda}_n$ je supremum $\lambda(J_1, J_2, J_3, \ldots, J_{n-1})$ pro všechny možné $J_1, J_2, J_3, \ldots$ $\ldots, J_{n-1}$; λ_{n-2} je supremum $\bar{\lambda}_n(J_1^*, J_2^*, J_3, \ldots, J_{n-1})$ pro pevná J_1^*, J_2^* a libovolné funkcionály $J_3, \ldots, J_{n-1}$. Ponecháme-li část proměnných konstantní, můžeme supremum jenom zmenšit, z čehož plyne, že

$$\bar{\lambda}_n \geqq \lambda_{n-2}.$$

Dokázali jsme tak druhou z nerovností (15).

Příklad. Pro rovnici $y'' - \lambda y = 0$ při krajových podmínkách $y'(0) = y'(1) = 0$ jsou vlastními funkcemi 1, $\cos\pi x$, $\cos 2\pi x, \ldots, \cos(n - 1)\pi x, \ldots$; příslušnými vlastními hodnotami jsou hodnoty $0, \pi^2, 4\pi^2, \ldots, (n - 1)^2\pi^2, \ldots$ Zde je $\bar{\lambda}_n =$ $= (n - 1)^2\pi^2$.

Na druhé straně pro tutéž rovnici za podmínek $y(0) = y(1) = 0$ jsou vlastními funkcemi funkce $\sin n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$, a $\lambda_n = n^2\pi^2$. Nerovnost $\lambda_n \geqq \bar{\lambda}_n \geqq \lambda_{n-2}$ přejde zde ve zřejmou nerovnost

$$n\pi^2 > (n - 1)^2\pi^2 > (n - 2)^2\pi^2.$$

Jiná extremální definice λ_n a $\bar{\lambda}_n$. Lze uvést jinou definici vlastních hodnot λ_n (a $\bar{\lambda}_n$).

Budiž $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$, $a \leqq x \leqq b$, n lineárně nezávislých funkcí třídy C_2 splňujících podmínky

$$z(a) = z(b) = 0.$$

Označíme znakem $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ soustavu funkcí $y(x)$ tvaru $\sum_i c_i z_i(x)$ vyhovujících podmínce $\int_a^b y^2\,dx = 1$ a znakem $\lambda_n\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ maximum $K(y)$ pro funkce $y(x)$ ze soustavy $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Lze zvolit n konstant c_i tak, aby funkce $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i z_i(x)$ byla orthogonální k $(n - 1)$ vlastním funkcím $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$. Lze tudíž dosíci, aby funkce $y(x) = \sum c_i z_i$ vyhovovala podmínce normování. Na základě věty 4 máme:

$$K(y) \geqq \lambda_n.$$

Je však $y(x) \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Platí tudíž

$$\lambda\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} = \max_{y \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}} K(y) \geqq \lambda_n.$$

Jestliže $z_i(x) = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ obsahuje n-tou normovanou vlastní funkci $y_n(x)$. Dokázali jsme již, že maximum $K(y)$ pro $y \subset \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je rovno λ_n.

Tedy *n-tá vlastní hodnota λ_i je minimum $\lambda\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, jehož se dosahuje, když $z_i(x) = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\lambda_n = \min_{[\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}]} \max_{y \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}} K(y). \tag{16}$$

Definice $\bar{\lambda}_n$ je dána formulí, analogickou formuli (16), jenom na funkce z_1, $z_2, \ldots, z_n$, definující soustavu $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, se již nekladou krajové podmínky.