# Postačující podmínky silného a slabého extrému

In: Michail Aleksejevič Lavrent'ev (author); Lazar Aronovič Ljusternik (author); Karel Winkelbauer (translator): Kurs variačního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 194–210.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402794

# POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY SILNÉHO A SLABÉHO EXTRÉMU

## § 31. Některé pojmy theorie pole.

Theorie pole, již jsme rozvinuli v §§ 26—28, umožňuje nám v této kapitole rozvinouti theorii postačujících podmínek extrému. Byly nalezeny Jacobim pro případ slabého extrému a Weierstrassem pro případ silného extrému.

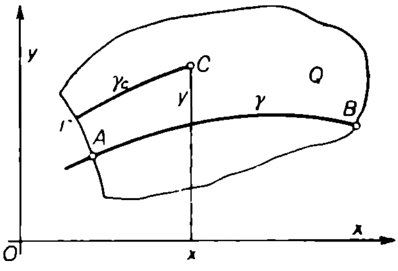
Zachováme-li označení předcházejících kapitol, budeme předpokládati, že je dán funkcionál

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

dále dva body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ a extremála $\gamma$

$$y = y(x) \tag{2}$$

integrálu (1) spojující body $A$ a $B$. Předpokládáme, že lze extremálu (2) obklopit vlastním polem extremál $\{\gamma\}$, pokrývajícím některou oblast $Q$, a že podél extremál pole je $F(x, y, y') \neq 0$ (viz. str. 164). Každým bodem $C(x, y)$ této oblasti lze vést extremálu $\gamma_C$ našeho pole: $y = y_C(x)$. Označíme znakem $u(C) = u(x, y)$ směrnici tečny ke křivce $\gamma_C$ v bodě $C$:




Obr. 31.

$$u(C) = u(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y_o(x). \tag{3}$$

Podle podmínek, jimž vyhovuje pole $\{\gamma\}$, je $u(x, y)$ definována v celé oblasti $Q$, při čemž v této oblasti je spojitou funkcí spolu se svými parciálními derivacemi. Funkce $u = u(x, y)$ hraje v theorii pole podstatnou úlohu; nazývá se *směrovou funkcí pole* $\{\gamma\}$. Hodnotu $u(x, y)$ v bodě $C(x, y)$ nazveme *směrem pole* v bodě $C$. Pro body výchozí extremály (2) je $u[x, y(x)] = y'(x)$. Veďme bodem $A(x_0, y_0)$ transversálu $\Gamma$ našeho pole.

Na základě podmínky $F \neq 0$ transversála pole protíná všechny extremály pole v úhlu různém od nuly. Vezměme jakýkoli bod $C(x, y)$ pole. Jím prochází extremála $\gamma_C$ pole. $J$-délka úseku $\gamma_C$ mezi $\Gamma$ a $C$ (obr. 31), neboli jinak, $J$-vzdálenost $C$ od $\Gamma$ je funkce souřadnic $(x, y)$ bodu $C$, definovaná v celé oblasti $Q$; tuto funkci označíme

$$J(C) = J(x, y).$$

Podle vzorců (5) § 26 (viz rovněž str. 163) máme pro libovolné posunutí $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ bodu $C(x, y)$:

$$\mathrm{d}J(x, y) = H[x, y, u(x, y)]\,\mathrm{d}x + p[x, y, u(x, y)]\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

(Píšeme zde $u(x, y)$ místo $y'$; členy této formule odpovídající koncovému bodu úseku extremály $\gamma_C$, ležícímu na $\Gamma$, jsou rovny nule vzhledem k transversalitě $\gamma_C$ a $\Gamma$.) Ježto je

$$H(x, y, u) = F(x, y, u) - uF_{y'}(x, y, u)$$

a

$$p(x, y, u) = F_{y'}(x, y, u),$$

je možno (4) napsati v takovémto tvaru:

$$\mathrm{d}J(x, y) = \left\{F[x, y, u(x, y)] + \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u(x, y)\right] F_{y'}[x, y, u(x, y)]\right\} \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Avšak pravá strana rovností (4) a (5) je úplný diferenciál; proto platí tato věta:

**Věta I** (Hilbertova). *Integrál*

$$\int \left\{F(x, y, u) + \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u(x, y)\right] F_{y'}(x, y, u)\right\} \mathrm{d}x \tag{6}$$

*podél jakékoli křivky třídy $C_1$, ležící v $Q$, závisí jenom na koncových bodech křivky $\bar{\gamma}$, avšak nezávisí na volbě křivky spojující tyto koncové body.*[1])

Napříště, podobně jako v některých předešlých případech, budeme označovati znakem $y'$ jenom směrnici tečny výchozí extremály, kdežto pro všechny ostatní křivky budeme označovat směrnice jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

---

[1]) Protože je $J(x, y)$ $J$-vzdáleností bodu $C(x, y)$ od transversály $\Gamma$, je $\mathrm{d}J(x, y)$ rozdílem vzdáleností dvou nekonečně blízkých bodů $C$ od $\Gamma$ a integrál (6) je roven rozdílu $J$-vzdáleností koncových bodů křivky $\gamma$ od transversály $\Gamma$.

Jestliže vezmeme za křivku $\bar{\gamma}$ výchozí extremálu $\gamma$, pak je

$$u(x, y) = y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

a tudíž výraz za integračním znamením v (6) se změní v $F(x, y, y')$ a sám integrál přejde v

$$\int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = J(\gamma).^{2)} \tag{1}$$

Pro libovolnou křivku $\bar{\gamma}$ třídy $C_1$, ležící v $Q$ a spojující body $A$ a $B$, platí na základě věty 1 tato rovnost:

$$\int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{\gamma}} \left[F(x, y, u) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u\right) F_{y'}(x, y, u)\right] \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Rozšíříme větu 1 na případ funkcionálu $I$. Budiž $\gamma_0$ extremálou integrálu $I$. Zůstaneme u geometrických konstrukcí, uvedených při důkazu věty 1 pro případ funkcionálu $J$. Označíme-li znakem $\gamma$ extremálu pole $\{\gamma\}$ obklopujícího extremálu $\gamma_0$ procházející bodem $M(x, y)$, znaky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ směrové kosiny tečny ke křivce $\gamma$ v bodě $M$ a jako dříve znakem $I(x, y)$ $I$-vzdálenost bodu $M(x, y)$ od transversály pole $\Gamma_1$ (procházející koncovým bodem $\gamma_0$), dostaneme (viz § 24):

$$\mathrm{d}I(x, y) = F_{x'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,\mathrm{d}x + F_{y'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,\mathrm{d}y =$$
$$= H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y.$$

Bude tedy v probíraném případě výraz $H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y$ rovněž totálním diferenciálem. Z toho soudíme, že dosadíme-li ve shora uvedené formulaci věty 1 místo $H$ a $p$ výrazy $F_{x'}$ resp. $F_{y'}$, bude věta platiti pro funkcionály $I$.

**Funkce E** (Weierstrassova). Funkci čtyř proměnných $x$, $y$, $\xi$, $\eta$:

$$\mathsf{E}(x, y, \xi, \eta) = F(x, y, \eta) - F(x, y, \xi) - (\eta - \xi)F_{y'}(x, y, \xi) \tag{8}$$

nazveme Weierstrassovou funkcí (pro funkcionál $J$).

Použijeme-li věty 1, ukáže se, že je možno najíti velmi jednoduše přírůstek funkcionálu $J(\gamma)$ pomocí Weierstrassovy funkce.

Budiž $\gamma$ extremála spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$. Nechť mimo to lze extremálu $\gamma$ obklopiti polem extremál $\{\gamma\}$ pokrývajícím oblast $Q$.

---

2) To znamená, že rozdíl $J$-vzdáleností koncových bodů extremály $\gamma$ od transversály $\Gamma$ (viz předcházející poznámku) je roven $J$-délce $\gamma$.

V takovém případě na základě věty 1, ať je čára $\bar{\gamma}$ třídy $C_1$ spojující body $A$ a $B$ a ležící v oblasti $Q$ jakákoli, máme

$$J(\gamma) = \int_{\gamma} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\bar{\gamma}} \left\{ F(x, y, u) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u\right) F_{y'}(x, y, u) \right\} \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Avšak je

$$J(\bar{\gamma}) = \int_{\bar{\gamma}} F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x.$$

Je tedy

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) =$$
$$= \int_{\bar{\gamma}} \left\{ F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - F(x, y, u) - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u\right) F_{y'}(x, y, u) \right\} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x. \tag{9}$$

V tomto výrazu $u = u(x, y)$ je směr pole v bodě $(x, y)$ křivky $\bar{\gamma}$ a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je směrnice tečny ke křivce $\bar{\gamma}$ v tomtéž bodě.

Budiž

$$y = \bar{y}(x)$$

rovnice křivky $\bar{\gamma}$. Ve vzorci (9) můžeme přejít od křivočarých integrálů k obyčejným (zaměníme-li $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ výrazem $\bar{y}'(x)$). Potom

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{E}\{x, \bar{y}(x), u[x, \bar{y}(x)], \bar{y}'(x)\}\,\mathrm{d}x. \tag{9'}$$

Z formule (9′) dostaneme přímo následující výsledek: *lze-li extremálu $\gamma$ obklopiti polem extremál, pak k tomu, aby $\gamma$ dávala silný extrém, je nutné a stačí, aby každá čára $\bar{\gamma}$, $y = \bar{y}(x)$, třídy $C_1$, ležící v poli a spojující koncové body $\gamma$, splňovala vztah*

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{E}(x, \bar{y}, u, \bar{y}')\,\mathrm{d}x \geqq 0 \text{ resp. } \leqq 0. \tag{10}$$

Uvedené kriterium pro silný extrém je samo o sobě pro svoji pracnost prakticky málo vhodné, avšak z tohoto kriteria, jak uvidíme dále, se jednoduše odvodí nové nutné podmínky pro silné minimum a také se dostanou prakticky cenné postačující podmínky.

**Geometrický smysl funkce** $\mathbf{E}(x, y, u, \bar{u})$. Vraťme se k poli $\{\gamma\}$ a k funkci $J(x, y)$. Čáry $J(x, y) = C$ (geometrická místa bodů stejně vzdálených od transversály $\Gamma$) jsou transversálami pole (věta 3, § 27).

Mějme dány body $M(x, y)$ a $M'(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$, které leží na blízkých transversálách $\Gamma_1$ a $\Gamma_2$. Při přechodu od $M$ k $M'$ (od $\Gamma_1$ k $\Gamma_2$) vzroste $J$ o přírůstek:

$$\mathrm{d}J = H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y = [F(x, y, \bar{u}) - (\bar{u} - u)F_{y'}(x, y, u)]\,\mathrm{d}x,$$

kde $\bar{u}$ je směr $\overline{MM'}$ a $u = u(x, y)$.

Přírůstek $\mathrm{d}J$ je roven $J$-délce nekonečně malého úseku extremály pole mezi $\Gamma_1$ a $\Gamma_2$. Na druhé straně má úsečka $\overline{MM'}$ $J$-délku $F(x, y, \bar{u})\,\mathrm{d}x$.

Rozdíl $F(x, y, \bar{u})\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}J = \mathbf{E}(x, y, u, \bar{u})\,\mathrm{d}x$ nám udává, o co je větší $J$-délka elementu $\overline{MM'}$ než $J$-vzdálenost mezi transversálami procházejícími body $M$ a $M'$.

Udává tedy $\int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}(x, y, u, \bar{u})\,\mathrm{d}x$, o co je větší $J$-délka křivky $\bar{\gamma}$ než $J$-vzdálenost mezi transversálami procházejícími koncovými body $\bar{\gamma}$.

**Funkce E pro funkcionál I.** V případě funkcionálu $I$ se funkcí Weierstrassovou nazývá funkce šesti proměnných $x, y, \xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(x, y, \xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \bar{\xi}[F_{x'}(x, y, \bar{\xi}, \bar{\eta}) - F_{x'}(x, y, \xi, \eta)] + \\ + \bar{\eta}[F_{y'}(x, y, \bar{\xi}, \bar{\eta}) - F_{y'}(x, y, \xi, \eta)].\end{aligned} \tag{11}$$

Při zachování označení, která jsou analogická předcházejícím, máme podle věty 1

$$\int_{\gamma_0} F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\bar{\gamma}} F_{x'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,\mathrm{d}x + F_{y'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,\mathrm{d}y.$$

Označíme-li $\mathrm{d}s$ element oblouku čáry $\gamma$ a $\bar{u}(x, y)$ a $\bar{v}(x, y)$ směrové kosiny ke křivce $\bar{\gamma}$ v bodě $(x, y)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \bar{u}(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \bar{v}(x, y),$$

máme

$$\int_{\gamma_0} F\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{\gamma}} [F_{x'}(x, y, u, v)\bar{u} + F_{y'}(x, y, u, v)\bar{v}]\,\mathrm{d}s.$$

Odtud, vezmeme-li za parametr délku oblouku, dostaneme

$$I(\bar{\gamma}) - I(\gamma_0) =$$

$$= \int_{\bar{\gamma}} \{F(x, y, \bar{u}, \bar{v}) - \bar{u}F_{x'}(x, y, u, v) - \bar{v}F_{y'}(x, y, u, v)\} \, ds.$$

Použijeme-li podmínek homogenity, lze funkci $F$ vyjádřiti takto:

$$F(x, y, \bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}F_{x'}(x, y, \bar{u}, \bar{v}) + \bar{v}F_{y'}(x, y, \bar{u}, \bar{v}).$$

Dosadíme-li tento výraz pro $F$ za integrační znamení a zavedeme-li funkci $\mathbf{E}_1$, dostaneme nakonec

$$I(\bar{\gamma}) - I(\gamma_0) = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}_1(x, y, u, v, \bar{u}, \bar{v}) \, ds. \tag{12}$$

To je obdoba formule (9') pro funkcionál $I$.

Z formule (12) plyne, že v případě funkcionálu $I$ nutná a postačující podmínka pro minimum (10) přejde v podmínku

$$\int_{\gamma_0} \mathbf{E}_1(x, y, u, v, \bar{u}, \bar{v}) \, ds \geqq 0. \tag{12'}$$

## § 32. Nutná podmínka silného extrému.

Nechť extremála $\gamma_0$ spojuje body $A$ a $B$. Opíráme-li se o úvahy předcházejícího paragrafu, stanovíme novou nutnou podmínku, pocházející od Weierstrassa, k tomu, aby $\gamma_0$ realisovala silné minimum.

**Věta 2.** *K tomu, aby extremála $\gamma_0$ realisovala silné minimum funkcionálu $J$, je nutné, aby podél $\gamma_0$ pro jakékoli hodnoty $\eta$ bylo vyhověno nerovnosti*

$$\mathbf{E}(x, y, y', \eta) \geqq 0.^{3)} \tag{13}$$

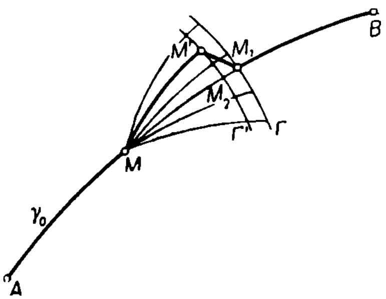
Budeme předpokládati opak. Nechť v některém bodě $M_1(x, y)$ extremály $\gamma_0$ a pro některou hodnotu $\bar{\eta}$ platí obrácená nerovnost:

$$\mathbf{E}(x, y, y', \bar{\eta}) < 0. \tag{14}$$

Můžeme předpokládat, že bod $M_1$ je různý od koncových bodů $A$ a $B$ extremály $\gamma_0$; v opačném případě na základě spojitosti funkce $\mathbf{E}$ by bylo možno zaměnit bod $M_1$ blízkým bodem extremály, který

[3]) Tato nerovnost musí být splněna vzhledem k podmínkám věty „podél" $\gamma_0$, t. j. v libovolném bodě $(x, y)$ křivky $\gamma_0$ pro hodnotu $y'$ rovnou směrnici tečny ke $\gamma_0$ vedené bodem $(x, y)$ a pro libovolné $\eta$.

je již různý od koncových bodů $A$, $B$ a který by jako dříve splňoval nerovnost (14). Analogicky můžeme předpokládat, že směr o směrnici $\bar{\eta}$ není směrem tečným nebo transversálním k naší extremále v bodě $\gamma_0$. Zvolíme na extremále $\gamma_0$ bod $M$ ležící mezi $M_1$ a $A$ takový, že oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ extremály $\gamma_0$ neobsahuje dvojici konjugovaných bodů (obr. 32). V takovém případě můžeme konstruovati pole extremál $\{\gamma\}$ se středem v bodě $M$, obsahující oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ extremály $\gamma_0$. Vedeme transversály $\Gamma'$ a $\Gamma$ pole $\{\gamma\}$, protínající $\gamma_0$ v bodech $M_2$ a $M_1$, kde $M_2$ leží mezi $M$ a $M_1$. Dále z bodu $M_1$ vedeme paprsek $M_1M'$ o směrnici $\bar{\eta}$ do bodu, v němž se protnou s transversálou $\Gamma'$ v bodě $M'$. Jestliže body $M_1$ a $M_2$, neboli, což je totéž, čáry $\Gamma'$ a $\Gamma$ jsou dostatečně blízké, pak konstrukce je možná a $J$-délka úsečky $M'M_1$ je menší než $J$-vzdálenost mezi transversálami $\Gamma$ a $\Gamma'$, t. j. $J$-délka $M'M_1$ je menší než $J$-délka oblouku $M_1M_2$ extremály $\gamma_0$. To vyplývá z geometrické definice funkce $\mathbf{E}$ a z podmínky $\mathbf{E} < 0$ (viz § 31, str. 198). Spojíme nyní bod $M'$ s bodem $M$ extremálou $\overset{\frown}{MM'}$ pole $\{\gamma\}$. $J$-délky extremálních oblouků $\overset{\frown}{MM'}$ a $\overset{\frown}{MM_2}$ jsou si rovny (ježto to jsou dvě extremály centrálního pole, jejichž koncové body $M'$ a $M_2$ leží na jedné transversále $\Gamma'$). Z toho plyne: lomená čára $MM'M_1$ skládající se z oblouku $\overset{\frown}{MM'}$ a úsečky $\overline{M'M_1}$ má menší $J$-délku než oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ extremály $\gamma_0$. Zaměníme-li v $\gamma_0$ oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ lomeným obloukem $MM'M_1$, dostaneme křivku spojující tytéž body $A$ a $B$, jejichž $J$-délka je menší než $J$-délka $\gamma_0$.



Obr. 32.

Tato křivka nepatří k třídě přípustných čar, ježto má tři úhlové body. Avšak na této křivce je hodnota funkcionálu $J$ menší než jeho hodnota $J_0$ na původním oblouku extremály. Tuto křivku je možno „zaokrouhliti" tím, že ji zaměníme křivkou třídy $C_1$, která s ní souhlasí všude, až na intervaly obklopující tři body lomu. Tyto intervaly lze učiniti tak malými, že rozdíl hodnot $J$ pro lomenou křivku i „zaokrouhlenou“ křivku třídy $C_1$ bude jakkoli malý. Tak je možno dostati křivku třídy $C_1$, pro niž hodnota $J$ bude jako dříve menší než $J_0$. Dojdeme ke sporu s podmínkou věty, a tedy nerovnost (14) nemůže platit. Tím je věta dokázána.

Je zřejmé, že pro případ maxima je třeba nerovnost (13) zaměniti nerovností obrácenou.

Zcela analogicky lze dokázati, že pro případ extremály $\gamma_0$ funkcionálu $I$ spočívá nutná podmínka minima $I$ v tom, že podél $\gamma_0$ pro libovolné $\Theta$ platí vztah:

$$\mathsf{E}_1(x, y, u, v, \cos\Theta, \sin\Theta) \geqq 0.$$

## § 33. Postačující podmínky silného extrému.

Přejdeme k odvození postačujících podmínek pro silné minimum. Dokážeme tuto základní větu.

**Věta 3** (Weierstrassova). *K tomu, aby extremála $\gamma$ spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ vedla k minimu $J$-délek křivek (třídy $C_1$), spojujících body $A$ a $B$ stačí, aby:*

1) *$\gamma$ bylo možno obklopiti vlastním polem extremál $\{\gamma\}$;*

2) *existovalo okolí extremály $\gamma$, v jehož každém bodě $(x, y)$ by pro libovolnou hodnotu $\eta$ platila nerovnost*

$$\mathsf{E}[x, y, u(x, y), \eta] \geqq 0, \tag{15}$$

*kde $u(x, y)$ je směrová funkce pole.*

Vskutku pro dostatečně malé $\varepsilon$ každá křivka $\bar{\gamma}$ ze třídy přípustných čar, náležející do $\varepsilon$-okolí nultého řádu čáry $\gamma$, bude náležeti do oblasti pokryté polem $\{\gamma\}$. Tudíž podle formule (9') pro $\bar{\gamma}$ máme

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{\bar{\gamma}} \mathsf{E}\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x.$$

Avšak podle druhé podmínky věty pro $\varepsilon$ dostatečně malé podél $\bar{\gamma}$ je

$$\mathsf{E}\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \geqq 0.$$

Existuje tedy takové $\varepsilon > 0$, že pro libovolnou křivku $\bar{\gamma}$ třídy přípustných křivek, patřících do $\varepsilon$-okolí nultého řádu extremály $\gamma$, máme

$$J(\bar{\gamma}) \geqq J(\gamma).$$

Tím je věta úplně dokázána.

**Zjednodušená postačující podmínka.** Jestliže je možno danou extremálu $\gamma$ obklopit polem extremál, pak otázka, zda bude dávat extremála minimum, se tím převede na úlohu určit znaménko funkce $\mathbf{E}$. Vzhledem k tomu, že funkce $\mathbf{E}$ má libovolně složitý tvar, zaměňují se často Weierstrassovy podmínky podmínkou hrubší, ale jednodušší.

Rozvedeme-li rozdíl $F(x, y, \eta) - F(x, y, \xi)$ v Taylorovu řadu podle mocnin $(\eta - \xi)$ s druhým zbytkovým členem, vyjádříme funkci Weierstrassovu ve tvaru

$$\mathbf{E}(x, y, \xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(\eta - \xi)^2 F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}), \tag{16}$$

kde $\bar{\eta}$ leží mezi $\xi$ a $\eta$. Upozorňujeme, že pro kladnost funkce $\mathbf{E}$ stačí, aby pro jakékoli $\bar{\eta}$ platila nerovnost

$$F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}) \geqq 0.$$

Odtud dostaneme následující zjednodušené kriterium pro existenci minima: *K tomu, aby extremála $\gamma$ spojující body $A$ a $B$ dávala silné minimum $J$-délek křivek spojujících body $A$ a $B$, stačí, aby bylo možno extremálu $\gamma$ obklopiti polem extremál, v jehož každém bodě $(x, y)$ pro jakékoli $\bar{\eta}$*

$$F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}) \geqq 0.$$

Poznámka. Nutná podmínka Weierstrassova (13) zejména podél extremály pro jakékoli $\eta$

$$\mathbf{E}(x, y, y', \eta) \geqq 0$$

po rozložení funkce $\mathbf{E}$ podle vzorce (16) nabývá tohoto tvaru:

$$F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}) \geqq 0,$$

kde $\bar{\eta}$ leží mezi $y'$ a $\eta$. Pro $\eta \to y'$ je $\bar{\eta} \to y'$; proto poslední nerovnost přejde v tuto nerovnost:

$$F_{y'y'}(x, y, y') \geqq 0.$$

A to je nám již známá podmínka Legendreova (viz. str. 69).

**Postačující podmínky silného minima funkcionálu $I$.** Tyto podmínky jsou zcela analogické podmínkám formulovaným na začátku paragrafu pro funkcionál $J$, zaměníme-li v nich nerovnost (15) nerovností (pro jakékoli $\Theta$)

$$\mathbf{E}_1(x, y, u, v, \cos\Theta, \sin\Theta) \geqq 0.$$

## § 34. Postačující podmínky slabého extrému.

Ze shora rozvedené theorie lze odvoditi také postačující podmínky pro slabé minimum.

**Věta 4** (Jacobiova). *K tomu, aby křivka $\gamma$: $y = y(x)$ udílela slabé minimum integrálu $J(\gamma) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ mezi křivkami, které mají s ní společné koncové body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, stačí:*

1) *aby $\gamma$ byla extremálou;*

2) *aby podél $\gamma$ platila zesílená Legendreova podmínka $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$;*

3) *aby interval $[x_0, x_1]$ neobsahoval hodnoty konjugované s $x_0$* (t. j. aby bylo $\Delta(x_0, x) \neq 0$ pro $x_0 < x \leqq x_1$).

Především upozorňujeme, že zde žádáme splnění některých podmínek pouze podél samotné křivky. Dále jsou tyto postačující podmínky velmi blízké nutným podmínkám Legendreovým a Jacobiovým; důležitým zůstává jen případ, kdy $F_{y'y'}$ je rovno nule podél extremály a když samotné $x_1$ je hodnota konjugovaná s $x_0$.

*Důkaz.* Z podmínek 2) a 3) plyne možnost sestrojení pole extremál $\{\gamma\}$ obklopujícího oblouk $\gamma$. Existuje takové číslo $\varepsilon_1 > 0$, že každá oblast definovaná nerovnostmi $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $y(x) - \varepsilon_1 \leqq y \leqq y(x) + \varepsilon_1$ je pokryta polem extremál.

V oblasti $Q$ je definována funkce $u(x, y)$, která je směrem pole a která podél $\gamma$ souhlasí s $y'(x)$: $u[x, y)] = y'(x)$. Podle předpokladu (podmínka 2) jest:

$$F_{y'y'}[x, y(x), y'(x)] > 0. \tag{17}$$

Vzhledem ke spojitosti $F_{y'y'}$ existuje takové číslo $\varepsilon_2 > 0$, že pro všechna $\bar{y}$ a $k$ vyhovující nerovnostem

$$|\bar{y} - y(x)| \leqq \varepsilon_2, \quad |k - y'(x)| \leqq \varepsilon_2, \tag{18}$$

jest:

$$F_{y'y'}(x, \bar{y}, k) > 0. \tag{19}$$

Dále vzhledem k spojitosti funkce $u$ existuje takové číslo $\varepsilon_3 > 0$, že pro $|\bar{y} - y(x)| \leqq \varepsilon_3$ je

$$|u(x, \bar{y}) - u[x, y(x)]| = |u(x, \bar{y}) - y'(x)| \leqq \varepsilon_2. \tag{20}$$

Označíme znakem $\varepsilon$ nejmenší ze tří čísel $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$; podle definice $\varepsilon_1$ a $\varepsilon$ je oblast $\overline{Q}$, definovaná nerovnostmi

$$x_0 \leqq x \leqq x_1,\ y(x) - \varepsilon \leqq y \leqq y(x) + \varepsilon,$$

pokryta polem extremál $\{\gamma\}$.

Budiž nyní $\bar{\gamma}$ určené vztahem $y = \bar{y}(x)$ libovolná křivka spojující $A$ a $B$ a ležící v $\varepsilon$-okolí prvního řádu křivky $\gamma$, t. j.

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leqq \varepsilon,\ |\bar{y}'(x) - y'(x)| \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Tato křivka leží v oblasti $\overline{Q}$ pokryté polem extremál $\{\gamma\}$.

Proto na základě výsledků předcházejících paragrafů je

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}(x, \bar{y}, u(x, \bar{y}), \bar{y}'] \, dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}} [u(x, \bar{y}) - \bar{y}'(x)]^2 F_{y'y'}(x, \bar{y}, k) \, dx, \tag{22}$$

kde $k$ leží mezi $\bar{y}'(x)$ a $u(x, \bar{y})$.

Vzhledem k nerovnostem (21) a (20) máme, že $\bar{y}'(x)$ a $u(x, \bar{y})$ leží současně mezi $y'(x) - \varepsilon_2$ a $y'(x) + \varepsilon_2$ a tedy leží $k$ v těchže mezích:

$$|k - y'(x)| \leqq \varepsilon_2; \tag{23}$$

z (18), (19), (21) a (23) plyne

$$F_{y'y'}(x, \bar{y}, k) < 0,$$

a tedy (viz (22))

$$J(\bar{\gamma}) \geqq J(\gamma).$$

Tím je věta dokázána.

Uvedené podmínky nestačí ovšem pro silné minimum.

Zcela analogický charakter mají postačující podmínky slabého minima funkcionálu $I$, zaměníme-li podmínku 2) podmínkou $F_1 > 0$.

Porovnáme-li nutné podmínky s podmínkami postačujícími, vidíme, že nutné podmínky — podmínka Jacobiova a Weierstrassova — kladou omezení na funkci $\mathbf{E}$ v bodech studované extremály; mezi postačujícími podmínkami zesílená podmínka Jacobiova rovněž klade omezení na funkci $\mathbf{E}$ v bodech samotné extremály, a co se týče podmínky Weierstrassovy, pak k jejímu aplikování je třeba znáti průběh funkce $\mathbf{E}$ v některém určitém okolí studované extremály. Odtud přirozeně vzniká otázka, zda nelze tuto první podmínku nahraditi zesílenou nutnou podmínkou Weierstrassovou:

$$\mathbf{E}(x, y, y', k) > 0$$

podél extremály.

Uvedeme příklad, který ukáže, že připomenuté oslabení v nutných podmínkách provést nelze. Tento příklad rovněž ukáže nedostatečnost zeslabené podmínky, jestliže navíc předpokládáme, že podél extremály je $\mathbf{E}(x, y, y', k) > 0$.[4])

**Příklad.** Položíme úlohu: najíti minimum funkcionálu

$$J = \int_0^1 (y'^2 - 4yy'^3 + 2xy'^4)\, dx,$$

tvoří-li třídu přípustných čar čáry třídy $C_1$ spojující body $A(0, 0)$ a $B(1, 0)$.

Eulerova rovnice má tvar: $y''(12xy'^2 - 12yy' + 2) = 0$ neboli $y'' = 0$. To znamená, že přímky $y = ax + b$ jsou extremálami pro $J$. Extremála $\gamma_0$ spojující body $A$, $B$, je úsečka $[0, 1]$ osy $Ox$ a tato extremála může zřejmě být obklopena polem extremál (soustava přímek rovnoběžných s osou $Ox$). Mimo to máme

$$\mathbf{E}(x, y, y', \eta) = (\eta - y')^2\{1 - 8yy' + 6xy'^2 - 4\eta(y - xy') + 2x\eta^2\}.$$

Podél $\gamma_0$ dostaneme

$$F_{y'y'} = 2 > 0,$$
$$\mathbf{E} = \eta^2(1 - 2x\eta^2) > 0 \quad (\text{pro } \eta \neq 0).$$

Vyhovuje tedy extremála $\gamma_0$ první z postačujících podmínek a rovněž zesílené nutné podmínce Weierstrassově. Dokážeme, že přesto $\gamma_0$ nedává silné minimum. Abychom dokázali toto tvrzení, sestrojíme lomenou čáru $AMB$, jejíž vrchol umístíme do bodu $M$ o souřadnicích $h > 0$ a $k$. Potom, použijeme-li formule (9′) a shora napsaného výrazu pro $\mathbf{E}$, dostaneme

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma_0) = k^2 \left[-\frac{k^2}{h^2} + \frac{1}{h} + \frac{1}{1-h} - \frac{k^2(1+h)}{(1-h)^3}\right].$$

Zde je $\bar{\gamma}$ lomená čára $AMB$, $\gamma_0$ úsečka $[0, 1]$. Odtud soudíme, že pro jakékoli $k$ lze vždycky zvolit $h$ natolik malé, aby bylo $J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) < 0$. Křivka $\gamma_0$ nedává silné minimum $J$ mezi čarami třídy $D_1$ a tudíž ani mezi čarami třídy $C_1$.

**Slabý extrém pro oblouky malé délky, princip nejmenší akce.** Budiž $\gamma_0$ extremála funkcionálu $J$ vycházející z bodu $A(x_0, y_0)$ a nechť je podél křivky $\gamma_0$ splněna zesílená Legendreova podmínka $F_{y'y'} > 0$. Bod $C$

---

[4]) Tato okolnost je odchylným rysem theorie extrému $J$ ve srovnání s theorií silného extrému $I$.

extremály $\gamma_0$ konjugovaný s $A$ leží v určité vzdálenosti od bodu $A$ různé od nuly. Každý oblouk $\widetilde{AB}$ extremály $\gamma_0$, ležící na oblouku $\widetilde{AC}$ s koncovým bodem $B$ různým od $C$, povede k slabému minimu funkcionálu $J$. Je tedy Legendreova podmínka $F_{y'y'} > 0$ postačující podmínkou pro slabé minimum, je-li příslušný oblouk extremály dostatečně malý.

Připomenuté tvrzení lze rozšířiti také na případ funkcionálů definovaných na prostorových křivkách; při platnosti Legendreovy podmínky (viz § 13) dostatečně malé oblouky extremál vždycky realisují minimum. Jako příklad vyšetříme integrál účinku (akce) (viz formuli (18) § 2)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2U + h}\, \sqrt{a_{11}q_1'^2 + 2a_{12}q_1'q_2' + a_{22}q_2'^2}\, \mathrm{d}t.$$

Snadno nahlédneme, že pro funkcionál $J$ je Legendreova podmínka vždy splněna, a tedy pro dostatečně malé části trajektorie skutečného pohybu *integrál účinku* (akce) podél těchto částí *dosahuje slabého minima.* Tím je právě oprávněn sám název principu.

Není těžké ukázat na příkladech, že dostatečně veliká konečná část trajektorie skutečného pohybu nemusí minimalisovat integrál účinku. Vyšetřujme na příklad setrvačný pohyb bodu na povrchu koule. V tomto případě integrál účinku nabude tvaru

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, \mathrm{d}t.$$

Trajektoriemi-extremálami jsou oblouky hlavních kružnic na kouli. Oblouk extremály dává účinek minimální tehdy a jenom tehdy, když tento oblouk neobsahuje oba koncové body průměru koule.

## § 35. Přehled nutných a postačujících podmínek pro extrém.

Shrneme hlavní nutné a postačující podmínky pro minimum funkcionálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, \mathrm{d}x,$$

které jsme v předcházejících úvahách obdrželi.

K tomu, aby čára $\gamma$ třídy $C_1$, spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, mezi křivkami třídy $C_1$, spojujícími body $A$ a $B$, dávala *slabé minimum*, je nutné, aby:

1) čára $\gamma$ byla extremálou, t. j. aby byla integrálem rovnice Eulerovy

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0;$$

2) podél $\gamma$ byla splněna Legendreova podmínka

$$F_{y'y'} \geqq 0;$$

3) je-li podél $\gamma$ splněn vztah $F_{y'y'} > 0$, $\gamma$ vyhovovala podmínce Jacobiově, t. j. aby neobsahovala body konjugované se svým koncovým bodem, neboli analyticky, aby integrální křivka Jacobiovy rovnice

$$\left(P - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q\right) \eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (R\eta') = 0,$$

vycházející z bodu $(x_0, 0)$, neprotínala osu $x$ v bodech intervalu

$$x_0 < x < x_1.$$

Aby $\gamma$ dávala *silné minimum*, je dále nutné, aby

4) podél $\gamma$ pro libovolné hodnoty $k$ platilo

$$\mathbf{E}(x, y, y', k) \geqq 0.$$

K tomu, aby čára $\gamma$ dávala *slabé minimum*, stačí, aby

1) $\gamma$ byla extremálou;

2) podél $\gamma$ (včetně koncových bodů) byla splněna zesílená Legendreova podmínka

$$F_{y'y'} > 0;$$

3) $\gamma$ vyhovovala zesílené podmínce Jacobiově: t. j. aby integrál rovnice Jacobiovy, vycházející z bodu $(x_0, 0)$, neprotínal osu $x$ v bodech zprava uzavřeného intervalu

$$x_0 < x \leqq x_1.$$

Pro *silné minimum* stačí, aby ještě

4) existovalo okolí křivky $\gamma$, v jehož každém bodě $(x, y)$ pro libovolné hodnoty $\eta$ platí

$$\mathsf{E}(x, y, u(x, y), \eta) \geqq 0,$$

kde $u(x, y)$ je směr pole obklopujícího $\gamma$.

Příslušné podmínky pro maximum se dostanou změnou smyslu nerovností.

**Příklad 1.** Úloha o brachystochroně. Jak vyplývá z výsledků § 2, jsou pro tuto úlohu pro jakoukoli polohu bodů

$$A(x_1, y_1), \; B(x_2, y_2)$$

podmínky Legendreovy a Jacobiovy splněny a tedy extremálu, spojující body $A$ a $B$, lze obklopit polem extremál. Mimo to je pro tuto úlohu

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\cdot(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

pro jakékoli $y$ a $y'$; tudíž extremála $\gamma_0$ dává silné minimum.

**Příklad 2.** Úloha o refrakci. Pro tuto úlohu funkce $F(x, y, y')$ má tvar

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} \quad (v(x, y) > 0).$$

Zde je podmínka Weierstrassova vyplněna pro kteroukoli funkci $v > 0$:

$$F_{y'y'} = \frac{1}{v} (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Tedy otázka, zda extremála $\gamma_0$ minimalisuje $J$-délky, se zcela převede na otázku, je-li možno $\gamma_0$ obklopit polem extremál. Speciálně, když rychlost šíření světla je nepřímo úměrná $y$, jsou extremálami polokružnice orthogonální k ose $x$. V tomto případě pro jakoukoli polohu bodů $A$ a $B$ lze sestrojit extremálu, spojující tyto body, a je možno také sestrojit pole extremál, obklopující extremálu $\gamma_0$. Oblouk kružnice dává silné minimum.

**Příklad 3.** Úloha o geodetických čarách. Funkce $F$ má tvar

$$F = \sqrt{A + 2By' + Cy'^2},$$

kde $A$, $B$, $C$ jsou spojité funkce proměnných $x$, $y$ a forma

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

je kladná v libovolném bodě $(x, y)$, t. j. $B^2 - AC < 0$. Pro tuto úlohu je

$$F_{y'y'} = \frac{AC - B^2}{(A + 2By' + Cy'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tedy každá geodetická čára $\gamma_0$, kterou lze obklopit polem geodetických čar (t. j. každá čára neobsahující konjugované body) dává silné minimum délek oblouků, spojujících body $A$ a $B$.

**Příklad 4.** Minimální rotační plocha. Stejně jako v příkladě 2 je podmínka Weierstrassova splněna pro libovolnou extremálu; tudíž mezi dvěma extremálami, spojujícími body $A$ a $B$, dává horní extremála silné minimum obsahu rotační plochy.

**Příklad 5.** Eulerovo kritické zatížení. Mějme dánu vertikální válcovou pružnou tyč $AB$. Nechť je vetknutí spodního konce $A$ tuhé a nechť horní konec $B$ se může volně pohybovat po vertikální přímce tak, aby tečna k čáře ohybu, vedená bodem $B$, zůstala stále konstantní. Předpokládáme nyní, že na horní konec $B$ působí síla $P$ směřující vertikálně dolů. Tyč bude v rovnováze pro jakoukoli sílu $P$, avšak tato rovnováha bude stabilní pouze pro některé hodnoty $P$. Supremum hodnot $P$, pro něž vertikální poloha tyče dává stabilní rovnováhu, se nazývá *kritickým zatížením* tyče. K definici kritického zatížení použijeme principu:

K tomu, aby soustava byla ve stavu stabilní rovnováhy, je nutné a stačí, aby daná poloha soustavy mezi všemi jinými polohami odpovídajícími vazbám dávala její potenciální energii nejmenší hodnotu.[5])

Jak je známo, potenciální energie ohýbané tyče, působí-li na ni síla $P$, má tvar

$$E = \int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 \mathrm{d}s + PY,^{6)} \tag{24}$$

kde $l$ je délka tyče, $k$ konstanta závislá na vlastnostech tyče, $\varphi$ úhel, který svírá tečna k ose ohybu tyče s vertikálou a $Y$ vzdálenost horního konce tyče od některé pevné horizontální roviny. Zřejmě lze položit

$$Y = \int_0^l \cos\varphi \, \mathrm{d}s.$$

Z toho

$$E = \int_0^l \left[k\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 + P\cos\varphi\right] \mathrm{d}s. \tag{25}$$

Tím se naše úloha převede na následující variační problém: *pro jaké hodnoty $P$ funkce $\varphi \equiv 0$ bude dávat minimum funkcionálu $E$, jestliže za třídu přípustných funkcí vezmeme funkce $\varphi = \varphi(s)$ třídy $C_1$ pro $0 \leqq s \leqq l$ vyhovující počátečním podmínkám: pro $s = 0$ je $\varphi = 0$ a pro $s = l$ je $\varphi = 0$.*

---

[5]) Tento princip v obecném tvaru platí pouze v řadě dodatečných podmínek, které zde neuvedeme. Tyto podmínky v každém případě jsou v naší úloze splněny.

[6]) Váhu nosníku zanedbáváme a s jeho stlačením nepočítáme (viz příklad v § 14).

Pro jakoukoli hodnotu $P$ přímka $\varphi \equiv 0$ je extremálou funkcionálu $E$. Označíme-li znakem $F(\varphi, \varphi')$ integrovanou funkci, budeme mít

$$F > 0, \; F_{\varphi'\varphi'} = k > 0.$$

Naše otázka se tedy převede na úkol ověřit splnění Jacobiových podmínek. Rovnice Jacobiova naší úlohy má tvar

$$Pu + 2ku'' = 0. \tag{26}$$

Integrál $\Delta(0, s)$ této rovnice, splňující podmínky $\Delta(0, 0) = 0$, $\Delta'(0, 0) = 1$, bude

$$\Delta(0, s) = \sin \sqrt{\frac{P}{2k}}\, s.$$

Tedy úsečku $l'$ bodu, v němž se protne extremála $\varphi = 0$ s nekonečně blízkou extremálou, určíme z rovnice

$$\sin \sqrt{\frac{P}{2k}}\, l' = 0. \tag{27}$$

Použijeme-li toho, že $l'$ musí být ze všech kladných kořenů rovnice (27) k nule nejblíže, dostaneme nakonec

$$l' = \pi \sqrt{\frac{2k}{P}}.$$

Tedy k tomu, aby přímka $\varphi = 0$ dávala hledané minimum, je nutné, aby

$$\pi \sqrt{\frac{2k}{P}} - l \geqq 0,$$

a stačí, aby

$$\pi \sqrt{\frac{2k}{P}} - l > 0.$$

Z toho pro hledané kritické zatížení $P_0$ nalezneme následující hodnotu:

$$P_0 = \frac{2k\pi^2}{l^2}.$$