THEORIE POLE

§ 26. Geometrický způsob vyjadřování. Kanonický tvar Eulerových rovnic.

V dalších úvahách budeme nazývat „*J-délkou*" křivky γ, jejíž rovnice je $y = y(x)$, hodnotu funkcionálu

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

podél křivky γ. Mimo to budeme neustále předpokládat, že čáry γ náleží do třídy C_1 a že funkce F má spojité parciální derivace podle všech tří argumentů do třetího řádu včetně.

Připomínáme, že když $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$, je J-délka křivky její obyčejnou délkou. V tomto posledním případě jsou extremálami přímky. V obecném případě budeme každou extremálu funkcionálu J nazývat *J-přímkou* a hodnotu $J(\gamma)$ podél extremály γ, spojující dva dané body A a B, budeme nazývat *J-vzdáleností* mezi body A a B. Tato terminologie vedle výhodnosti je založena na hlubokých úvahách, jichž se však zde nedotkneme.

Analogické pojmy zavedeme pro funkcionál $I(\gamma)$:

$$I(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t = \int_\gamma F(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y), \tag{2}$$

kde F je kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x' a y'. Hodnotu $I(\gamma)$ nazveme I-délkou γ. Každou extremálu nazveme I-přímkou a I-délku extremály nazveme vzdáleností jejích koncových bodů.

Budeme nyní vyšetřovati čtyrparametrovou soustavu J-přímek $\{\gamma\}$, z jejichž koncových bodů jeden bod $A(x_0, y_0)$ leží v nějakém daném oboru D_0 a druhý v jiném oboru D_1. Předpokládejme, že libovolný pár bodů $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, patřících do D_0 resp. do D_1, spojuje jedna a jenom jedna extremála soustavy

$$\gamma \equiv \gamma(x_0, y_0, x_1, y_1).$$

Za provedených předpokladů J-délka libovolné extremály soustavy bude jednoznačnou funkcí čtyř proměnných — souřadnic jejích koncových bodů:

$$J(\gamma) = J(x_0, y_0, x_1, y_1).$$

Označíme

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, y, y') &= F(x, y, y') - y'F_{y'}(x, y, y'), \\ p(x, y, y') &= F_{y'}(x, y, y'); \end{aligned} \tag{3}$$

potom lze zapsat vzorce (10) kap. IV takto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_0} &= -\overline{H}(x_0, y_0, y_0') = -\overline{H}_0, \\ \frac{\partial J}{\partial y_0} &= -p(x_0, y_0, y_0') = -p_0, \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} &= \overline{H}(x_1, y_1, y_1') = \overline{H}_1, \\ \frac{\partial J}{\partial y_1} &= p(x_1, y_1, y_1') = p_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}J = -(\overline{H}_0\delta x_0 + p_0\delta y_0) + (\overline{H}_1\delta x_1 + p_1\delta y_1). \tag{5}$$

Vzhledem k základní roli, kterou hrají funkce $p = F_{y'}(x, y, y')$ a $\overline{H} = F - y'F_{y'}(x, y, y')$ v theorii soustavy extremál, je nejlépe uvést Eulerovu rovnici na tvar, v níž by explicitně vystupovaly funkce p a $\overline{H}$. Budeme tedy spolu s proměnnými x, y, y' vyšetřovati proměnné x, y a $p = F_{y'}(x, y, y')$. Každou funkci $u(x, y, y')$ tří argumentů x, y, y' můžeme vyšetřovati, používajíce vztahu $p = F_{y'}$, rovněž jako funkci proměnných x, y, p.[1]) V souhlase s tím označíme $H(x, y, p)$ výsledek substituce do $\overline{H}(x, y, y')$ výrazu y' vyjádřeného pomocí p a x, y. Abychom zjednodušili psaní, umluvíme se, že napříště budeme označovati jako obvykle $u_x, u_y, u_{y'}$ parciální derivace každé funkce $u(x, y, y')$, když ji pokládáme za funkci proměnných x, y, y', kdežto $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial p}$ odpovídající parciální derivace, když u pokládáme za funkci proměnných x, y, p.

[1]) Pokud je $F_{y'y'} \neq 0$, pak podle věty o implicitních funkcích z rovnice $p = F_{y'}(x, y, y')$ můžeme vyjádřit y' jako funkci x, y, p.

Při těchto označeních nalezneme v případě argumentů x, y, y'

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overline{H} &= \mathrm{d}F - y'\,\mathrm{d}p - p\,\mathrm{d}y' = \\ &= F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + p\,\mathrm{d}y' - y'\,\mathrm{d}p - p\,\mathrm{d}y' = \\ &= F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{6}$$

S druhé strany platí pro proměnné x, y, p:

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial H}{\partial p}\,\mathrm{d}p.$$

Dostaneme tedy, ježto $\mathrm{d}\overline{H} = \mathrm{d}H$,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = -y'. \tag{7}$$

Obdržené vztahy umožňují uvésti Eulerovu rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$$

na takovýto tvar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Soustava rovnic (8) se nazývá Hamiltonovou neboli kanonickou formou Eulerovy rovnice. Nahrazuje Eulerovu rovnici druhého řádu s jednou neznámou funkcí dvěma rovnicemi prvního řádu s neznámými funkcemi $y = y(x)$ a $p = p(x)$.

Z (6), (7) a (8) vyplývá, že podél extremály je

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Speciálně, jestliže ani F, a tedy ani H nezávisí explicitně na x, je podél extremály

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 0, \ H = \text{const.}$$

Zobecnění. Shora uvedené pojmy lze bez obtíží rozšířit na případ funkcionálů čar prostoru o n rozměrech a také na případ obecného Lagrangeova problému. Probereme Lagrangeovu úlohu pro funkcionál

$$J = \int_\gamma F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x,$$

kde funkce $y_i(x)$ splňují podmínky

$$\varphi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m, \; m < n.$$

Jak je zvykem, budeme napříště za znaky funkcí F a φ_j zkráceně psát jenom tři argumenty x, y, y': $F(x, y, y')$ a $\varphi_j(x, x, y')$. Zavedeme-li Lagrangeovy součinitele $\lambda_j(x)$, položme

$$\Phi(x, y, y', \lambda) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j.$$

Nyní, užijeme-li vztahů $\varphi_j = 0$, zavedeme místo proměnných x, y_i, y_i' proměnné $x, y_j, p_i = \Phi_{y_i'}$ a vyjádříme v nových proměnných funkci $\overline{H} = \Phi - \sum_i y_i' \Phi_{y_i'}$. Na jedné straně budeme míti

$$\begin{aligned} d\overline{H} &= d\Phi - \sum_i d(y_i' p_i) = \\ &= (\Phi_x \, dx + \sum_i \Phi_{y_i} \, dy_i + \sum_i p_i \, dy_i') - (\sum_i p_i \, dy_i' + y_i' \, dp_i) = \\ &= \Phi_x \, dx + \sum_i \Phi_{y_i} \, dy_i - \sum_i y_i' \, dp_i. \end{aligned} \tag{6'}$$

Na druhé straně při přechodu k proměnným x, y_i, p_i máme:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i.$$

Porovnání dosaženého výsledku se vzorcem (6′) nám dá:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \Phi_x, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = F_{y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -y_i'. \tag{7'}$$

Formule (7) umožňují soustavu Eulerových rovnic

$$\Phi_{y_i} = \frac{d}{dx} \Phi_{y_i'}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

napsati ve tvaru

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = \frac{dp_i}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{dy_i}{dx}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8'}$$

To je právě obecný kanonický tvar Euler-Lagrangeových rovnic.

§ 27. Pole extremál a transversály.

Pojem pole extremál. Zavedeme řadu pojmů, které budou hráti základní roli v geometrii extremál.

Mějme soustavu $\{\gamma\}$ oblouků γ křivek třídy C_1 a jednoduše souvislou oblast D, které mají následující vlastnosti:

1. Koncové body oblouků soustavy $\{\gamma\}$ leží na hranici D.

2. Každým bodem oblasti D prochází jeden a jenom jeden oblouk soustavy.

Za těchto podmínek řekneme, že vyšetřovaná soustava $\{\gamma\}$ tvoří *pole* a že toto pole *pokrývá* oblast D. Jestliže oblouky γ jsou extremály a tvoří pole, pak toto pole nazveme *polem extremál.*

Regulární pole. V dalších úlohách budou hráti zvláštní úlohu pole extremál speciálnějšího typu. Mějme jednoparametrovou soustavu oblouků $\{\gamma\}$ extremál funkcionálu J, jejichž rovnice mají tvar

$$y = \varphi(x, \alpha), \ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2, \ x_0(\alpha) \leqq x \leqq x_1(\alpha). \tag{9}$$

Soustavu (9) budeme nazývati *regulárním polem extremál* neboli jednoduše *polem extremál,* jestliže budou splněny tyto podmínky:

1. Koncové body oblouků křivek (9) opisují křivky Γ_1 a Γ_2 třídy C_1.
2. Pro

$$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2, \quad x_0(\alpha) \leqq x \leqq x_1(\alpha),$$

má funkce φ spojité derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\alpha}$, při čemž

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} > 0.$$

Připomeňme, že splňuje-li soustava čar (9) tyto dvě podmínky, může být rovnice $y = \varphi(x, \alpha)$ rozřešena vzhledem k α,

$$\alpha = \alpha(x, y), \tag{10}$$

při čemž funkce $\alpha(x, y)$ bude jednoznačná a bude míti parciální derivace prvního a druhého řádu v uzavřené oblasti omezené křivkami Γ_1, Γ_2, $y = \varphi(x, \alpha_1)$ a $y = \varphi(x, \alpha_2)$.

Je jasné, že mimoto každá soustava čar, která má vlastnosti 1, 2, bude rovněž polem.

Centrální pole. Jiným speciálním typem pole je tak zvané *centrální pole.* Předpokládejme, že všechny křivky soustavy extremál $\{\gamma\}$ vycházejí z jediného bodu $A(x_1, y_1)$, t. j.

$$\varphi(x_1, \alpha) = y_1 \ (\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2),$$

a předpokládejme dále, že soustava čar

$$y = \varphi(x, \alpha) \begin{cases} x_1' \leqq x \leqq x_2, \\ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2 \end{cases}$$

tvoří regulární pole pro libovolné $x_1' > x_1$.

Potom soustava čar

$$y = \varphi(x, \alpha) \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2 \end{cases}$$

tvoří centrální pole extremál.

Pole funkcionálu *I*. Při použití pojmu pole k studiu funkcionálu I definovaného výrazem (2) budeme se rovněž jako v případě funkcionálu J zabývat poli, která vyhovují řadě theoreticko-funkcionálních podmínek. Zastavíme se u těchto podmínek. Budiž $\{\gamma\}$ jednoparametrová soustava extremál funkcionálu I:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, \alpha), \\ y &= \psi(t, \alpha). \end{aligned} \tag{11}$$

Předpokládejme, že při změnách t a α v mezích

$$\left.\begin{aligned} t_1 \leqq t \leqq t_2, \\ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

vytvoří vyšetřovaná soustava čar $\{\gamma\}$ pole. V aplikacích budeme bez výslovného prohlášení předpokládat, že v uzavřeném obdélníku (12) funkce φ a ψ jsou spojité spolu se svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu a že mimoto v tomtéž obdélníku je

$$\begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_\alpha \\ \psi_t & \psi_\alpha \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Označíme Q oblast pokrytou polem. Z přijatých podmínek o funkcích φ a ψ vyplývá řešitelnost systému (11) vzhledem k t a α: existují funkce

$$\begin{aligned} t &= z(x, y), \\ \alpha &= u(x, y), \end{aligned}$$

definované a spojité spolu se svými derivacemi v oblasti Q a takové, že

$$\begin{aligned} x &= \varphi[z(x, y), u(x, y)], \\ y &= \psi[z(x, y), u(x, y)]. \end{aligned}$$

Připomeňme, že jestliže čáry $\{\gamma\}$, definované systémem (11), tvoří centrální pole extremál, pak pro jakékoli t_1', kde $t_1 < t_1' < t_2$, čáry γ, definované systémem

(11) a podmínkami $t_1' \leqq t \leqq t_2$, tvoří pole, vyhovující všem shora připomenutým theoreticko-funkcionálním podmínkám.

Transversála pole. Budiž $\{\gamma\}$ pole extremál funkcionálu J nebo I. Říkáme, že čára Γ je *transversála* pole $\{\gamma\}$, jestliže každá extremála γ pole, protínající Γ, protíná ji transversálně.

Zastavíme se podrobně u funkcionálu J. Jak známo, má podmínka transversality v případě funkcionálu J tvar (viz § 16)

$$F(x, y, y') - y'F_{y'}(x, y, y') + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y, y') = 0 \tag{14}$$

neboli

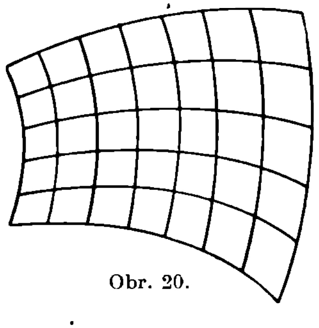
$$\overline{H}\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y = 0. \tag{14'}$$

Tato podmínka váže směrnici y' tečny k extremále se směrnicí $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ transversálního směru. Z toho soudíme, že máme-li dáno pole $y = \varphi(x, \alpha)$, v jehož každém bodě je $\overline{H}^2 + p^2 \neq 0$, je nám pak v každém bodě pole znám směr transversály pole, procházející tímto bodem. Všechny transversály pole dostaneme jako řešení diferenciální rovnice prvního řádu:

$$F_{y'}[x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x'(x, \alpha)] \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$$

$$= \varphi_x'(x, \alpha)\, F_{y'}[x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x'(x, \alpha)] - F[x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x'(x, \alpha)], \tag{15}$$

kde za parametr α, určující extremály pole, je třeba dosaditi vyjádření tohoto parametru souřadnicemi bodů pole. Z toho, uvědomíme-li si shora učiněné předpoklady o poli, obdržíme, že každým bodem pole prochází jedna a jenom jedna transversála. Tedy za podmínky $\overline{H}^2 + p^2 \neq 0$ soustava transversál je jednoparametrová soustava křivek tvořících pole. Takové pole budeme napříště nazývat *polem transversál*.



Obr. 20.

Je-li $F \neq 0$, pak, jak snadno nahlédneme ze vzorce (15), protíná transversála extremálu v úhlu různém od nuly a soustava extremál a transversál tvoří síť křivek, pokrývající oblast (obr. 20). Pro funkcionály speciálního typu

$$F = A(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

kde $A \neq 0$, stane se podmínka transversality podmínkou orthogonality: soustavy extremál a transversál tvoří orthogonální síť křivek.

Platí-li v bodě $B(x, y = \varphi(x, \alpha))$ pole vztah $F(x, \varphi, \varphi'_x) = 0$, pak v tomto bodě je směrnice $\frac{dy}{dx}$ tečny k transversále rovna $\varphi'_x(x, \alpha)$, t. j. v bodě B se transversála dotýká extremály. V tomto případě již nelze mluviti o „síti" extremál a transversál. Protože v řadě otázek theorie pole je pro nás však podstatnou existence sítě, budeme předpokládat, že v poli je splněn vztah

$$F(x, \varphi(x, \alpha), \varphi'_x(x, \alpha)) \neq 0.$$

Poznámka. Ve většině aplikací theorie pole lze toto omezení odstranit takto. Označíme znakem M supremum $|F(x, \varphi, \varphi'_x)|$ pro všechny body oblasti pokryté polem a zavedeme funkci

$$F_1(x, y, y\ ) = F(x, y, y\ ) + M + 1.$$

Ve všech bodech pole budeme míti

$$F_1(x, \varphi, \varphi'_x) \geqq 1 > 0.$$

Kromě toho je zřejmé, že soustavy extremál funkcionálů $\int F\, dx$ a $\int F_1\, dx$ jsou identické a že v úloze o pevných koncích křivka, činící $\int F\, dx$ extremálním, bude udílet extrém $\int F_1\, dx$, a obráceně.

Právě tak je možno odstranit omezení $\overline{H}^2 + p^2 \neq 0$. Budiž totiž $\overline{M}$ supremum $|F_{y'}(x, \varphi(x, \alpha), \varphi'(x, \alpha))|$ pro všechny body téže oblasti. Zavedeme funkci

$$\overline{F}(x, y, y') = F(x, y, y') + (\overline{M} + 1)y'.$$

Máme: $\overline{F}_{y'} = F_{y'} + \overline{M} + 1$. Na základě definice $\overline{M}$ je $\overline{p} = \overline{F}_{y'} > 0$, z čehož plyne, že $\overline{H}^2 + \overline{p}^2 > 0$ všude v naší oblasti. Je však $\overline{F}_y = F_y$, $\frac{d}{dx}\overline{F}_{y'} = \frac{d}{dx} F_{y'}$, proto extremály funkcionálů $\int \overline{F}\, dx$ a $\int F\, dx$ jsou stejné. Dále $\int_\gamma \overline{F}\, dx = \int_\gamma F\, dx + (\overline{M} + 1)(y_1 - y_0)$, kde

y_1 a y_0 jsou pořadnice koncového a počátečního bodu křivky γ. Na křivkách se společnými koncovými body se funkcionály $\int \overline{F}\, dx$ a $\int F\, dx$ liší o konstantní hodnotu a křivky, realisující extrém v úloze s pevnými konci, jsou pro oba integrály stejné.

Konstrukce pole extremál podle transversály. Použijeme-li podmínky transversality, můžeme také řešit úlohu obrácenou k úloze vyšetřované: *je dána transversála pole Γ; chceme konstruovat toto pole.* Podmínka transversality nám udává v každém bodě transversály Γ směr extremály pole. Tedy úloha sestrojit pole podle dané transversály vede k sestrojení soustavy integrálů Eulerovy rovnice, vycházejících z bodů Γ v daných směrech. Je-li pro body Γ a pro směry transversální ke Γ, $F_{y'y'} \neq 0$, t. j. koeficient u y'' v Eulerově rovnici je různý od nuly, pak lze v tomto případě uvedenou úlohu řešit jednoznačným způsobem. Z toho plyne výsledek: *transversála pole určuje toto pole jednoznačně.*[2])

Viděli jsme dříve, že pole extremál určuje pole transversál jednoznačným způsobem; tudíž každá transversála pole extremál určuje jednoznačně celé pole transversál.

Uvedeme několik příkladů polí extremál a transversál.

Příklad 1. Svazek rovnoběžných přímek, extremál integrálu

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

tvoří pole pokrývající celou rovinu. Transversálami pole budou přímky orthogonální k přímkám svazku.

Příklad 2. Budiž D konvexní oblast, neobsahující bod A. Soustava úseček, ležících v D a současně na polopaprscích vycházejících z A, tvoří pole extremál integrálu $\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, pokrývající D.[2']) Jestliže A neleží na hranici D, pak je pole regulární; jestliže A leží na hranici D, pak pole je centrální. V obou případech jsou transversálami pole oblouky kružnic se středem v bodě A.

Příklad 3. Budiž Γ křivka třídy C_2. Vedeme každým bodem Γ přímku γ kolmou ke Γ. V dostatečném malém okolí Γ tvoří sestrojené přímky pole

---

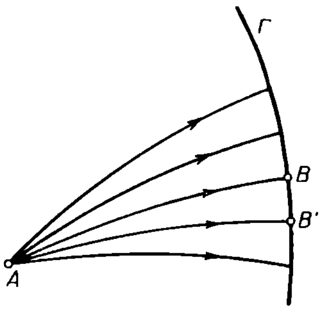
[2]) Vytkněme ty podmínky, za nichž jsme tento výsledek dostali: 1) abychom určili směr extremály v bodě transversály Γ, potřebujeme, aby y' bylo možno vyjádřit ze (14) pomocí x a y jednoznačně; 2) podél Γ musíme mít pro y' určené z (14)

$$F_{y'y'} \neq 0.$$

[2']) Za parametr α, definující přímku — extremálu pole, lze vzít směrnici této přímky.

extremál funkcionálu $\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$; čára Γ bude transversálou tohoto pole. Jestliže na každou přímku pole, počínaje bodem ležícím na Γ, naneseme úsečku konstantní délky h, pak, jak je známo, tvoří geometrické místo koncových bodů těchto úseček čáru orthogonální ke všem přímkám pole, t. j. konstruované geometrické místo bodů je transversálou pole. Nabývá-li h všech možných hodnot, dostáváme pole transversál. Ukázaná zde methoda konstrukce pole transversál, jak uvidíme níže, se dá rozšířiti na funkcionály obecného typu.

Věty o transversálách. Uvedeme základní věty o vlastnostech pole extremál a pole transversál. Všechny tyto věty platí jak pro případ extremál funkcionálu J, tak i pro případ extremál funkcionálu I. Důkazy vět v obou případech jsou zcela analogické; uvedeme je pro případ funkcionálu J.



Obr. 21.

Budiž $\{\gamma\}$ centrální pole extremál se středem v bodě A. Naneseme na všechny extremály tohoto pole oblouky stejné J-délky za předpokladu, že počáteční body všech těchto oblouků leží v bodě A. Geometrické místo koncových bodů těchto oblouků je jistá čára Γ (obr. 21).

Věta I. *Čára Γ je transversálou našeho pole, t. j.* (pro případ funkcionálu J)

$$F\,x, y, y') - \left(y' - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) F_{y'}(x, y, y') = 0,$$

kde y' a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jsou směrnice tečny k extremále γ a tečny ke křivce Γ v bodě, v němž se obě čáry protnou.

Označíme-li totiž $J(B)$ J-vzdálenost bodu B křivky Γ od středu pole A, máme pro všechny body křivky Γ

$$J(B) = \text{const},$$

kde $J(B)$ je integrál $\int F(x, y, y')\, \mathrm{d}x$ podél oblouku AB extremály γ. Při přechodu od bodu $B(x, y)$ k blízkému bodu $B'(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ křivky Γ máme tudíž

$$\mathrm{d}J = 0.$$

Avšak v daném případě je

$$\mathrm{d}J(B) = \overline{H}^{(1)}\,\mathrm{d}x + p^{(1)}\,\mathrm{d}y$$

a rovnice $\mathrm{d}J(B) = 0$ se stane podmínkou transversality v bodě B oblouku extremály γ a křivky Γ.

Platí i věta obrácená:

Věta 2. *Je-li křivka Γ transversálou centrálního pole se středem v bodě A, pak oblouky extremál od bodu A do Γ mají stejnou J-délku.*

Jestliže totiž $J(B)$ je J-délka oblouku extremály od bodu A do bodu $B(x, y)$ transversály Γ, pak při přechodu k nekonečně blízkému oblouku extremály AB', kde $B' \subset \Gamma$ má souřadnice $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$, platí:

$$\mathrm{d}J(B) = \overline{H}^{(1)}\,\mathrm{d}x + p^{(1)}\,\mathrm{d}y.$$

Na základě transversality křivek γ a Γ je

$$\mathrm{d}J(B) = 0, \text{ z čehož } J(B) = \text{const}.$$

Příklad 1. Je-li $F = \sqrt{1 + y'^2}$, pak jsou extremály γ přímkami, procházejícími bodem A, a čára Γ je kružnice; podmínka transversality je podmínkou orthogonality a naše poslední věta nás poučuje o známém faktu, že kružnice je orthogonální ke svým poloměrům.

Příklad 2. Jsou-li extremály geodetickými čarami na ploše, pak transversálami centrálního pole jsou geodetické kružnice; transversalita jako dříve znamená orthogonalitu a dostaneme, že geodetická kružnice je orthogonální ke geodetickým poloměrům.

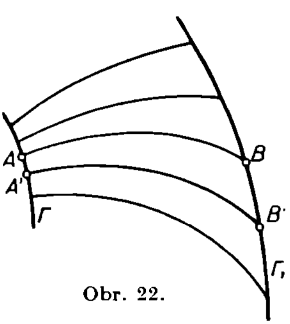
Příklad 3. V případě Fermatova principu je centrálním polem extremál svazek světelných paprsků, vycházejících ze svíticího bodu A, čára Γ je vlnovou křivkou, t. j. geometrickým místem bodů ležících ve stejné optické vzdálenosti od A, t. j. geometrické místo bodů, do nichž se současně dostane světelný signál vyslaný z bodu A. Transversalita v tomto případě znamená orthogonalitu. Náš předpoklad vede na zvláštní případ Malusova principu — vlnová křivka je kolmá na paprsky.

Příklad 4. V případě principu Maupertuis-Eulerova je centrálním polem extremál svazek trajektorií, vycházejících z bodu A za stejných počátečních rychlostí. Čára Γ je tak zvaná křivka stejného účinku. Je orthogonální ke všem trajektoriím svazku, neboť i v tomto případě znamená transversalita orthogonalitu.

Věta 3. *Budiž Γ transversálou pole $\{\gamma\}$. Naneseme-li na všechny extremály γ našeho pole v jednom směru oblouky téže J-délky s počátečními* *body na Γ, pak koncové body těchto oblouků tvoří rovněž transversálu pole $\{\gamma\}$.*

Označíme Γ_1 geometrické místo bodů B, stejně J-vzdálených od Γ (obr. 22). Přejdeme od oblouku $\widehat{AB}$ extremály γ k blízkému extremálnímu oblouku $\widehat{A'B'}$ pole téže délky, při čemž A a A' leží na Γ. Ježto diferenciál J-délky je při přechodu od $\widehat{AB}$ k $\widehat{A'B'}$ roven nule, pak, označíme-li dx_1, dy_1 a dx_2, dy_2 diferenciály souřadnic bodů A a B, máme při tomto přechodu:

$$0 = dJ = -(\bar{H}_1\, dx_1 + p_1\, dy_1) + (\bar{H}_2\, dx_2 + p_2\, dy_2).$$



Obr. 22.

První závorka je rovna nule vzhledem k transversalitě γ a Γ. Je tudíž rovný nule i výraz ve druhé závorce, z čehož vyplývá transversalita γ a Γ_1.

Uvědomíme-li si, že každým bodem pole prochází jenom jedna transversála, dostaneme také obrácené tvrzení:

Věta 4. *Jsou-li Γ_1 a Γ_2 dvě transversály pole $\{\gamma\}$, pak úseky extremál pole mezi Γ_1 a Γ_2 mají stejnou J-délku.*

Příklad. Vyšetřujme případ, kdy $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Zde je polem extremál transversálním ke křivce svazek normál ke křivce. Věta 4 nás poučuje o rovnosti úseků normál mezi dvěma křivkami o společných normálách. Naneseme-li na všechny normály k dané křivce stejné úseky, pak podle věty 2 dostaneme novou transversálu, jež má společné normály s první transversálou. Větu 4 lze rozšířit i na geodetické normály ke křivkám na ploše.

§ 28. Konjugované body. Konstrukce pole.

Konjugovaný bod. Budiž dán oblouk extremály γ_0: $y = y(x)$, $x_0 \leqq x$ o počátečním bodě $A(x_0, y_0)$. Sestrojme svazek extremál $\{\gamma\}$, $y = y(x, \alpha)$, $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, které mají s γ_0 společný počátek A. Tato konstrukce je vždycky možná, je-li pro souřadnice x_0, y_0 bodu A a pro směrnici tečny y_0' k oblouku γ_0 v bodě A splněna nerovnost

$$F_{y'y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0.$$

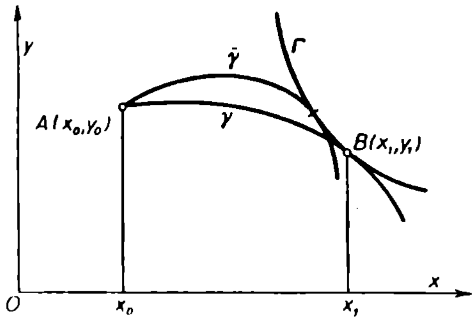
Vskutku, potom i $F_{y'y'}(x_0, y_0, y_0')$ bude různé od nuly pro všechny hodnoty y' dostatečně blízké k y_0'; bude tudíž Eulerova rovnice vyhovovati všem podmínkám věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice, a proto lze sestrojit integrální křivky této rovnice procházející bodem A, které mají směrnici v bodě A rovnu předepsané hodnotě y' (dostatečně blízké k y_0'). Soustava těchto křivek vytvoří žádaný svazek extremál; γ_0 bude obsažena v tomto svazku, t. j. pro některé α_0, $\alpha_1 \leqq \alpha_0 \leqq \alpha_2$,

$$y(x, \alpha_0) = y(x).$$

Budeme předpokládat, že parametr α je směrnicí tečny extremály v bodě A

$$y'(x_0, \alpha) = \alpha. \tag{16}$$

Má-li obálka Γ svazku $\{\gamma\}$ s γ_0 společný bod $B(x_1, y_1)$ (různý od A), pak se B nazývá bodem *konjugovaným* s A (obr. 23). Jinak řečeno, s bodem A konjugovaný bod B extremály γ_0 je bod, v němž se γ_0 protíná s nekonečně blízkou extremálou $\bar{\gamma}$, procházející tímtéž bodem A.



Obr. 23.

Uvidíme později, že možnost konstruování pole, obsahujícího daný oblouk extremály γ_0, je úplně zajištěna tím, když γ_0 obsahuje bod konjugovaný s jejím počátkem.

Je-li bod $B(x_1, y_1)$ extremály γ_0 konjugován s bodem $A(x_0, y_0)$ téže extremály, pak říkáme, že x_1 je hodnota konjugovaná s hodnotou x_0 vzhledem k extremále γ_0.

Hledání konjugovaných bodů. Jacobiovy rovnice. Máme-li rovnici svazku extremál vycházejících z bodu A, není těžké dostat vztahy ke stanovení souřadnic bodu B, konjugovaného s A. Musíme totiž podle známého pravidla diferenciální geometrie v každém bodě obálky Γ míti

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \tag{17}$$

Speciálně v bodě B, ležícím na křivkách Γ a γ_0, budeme míti

$$\frac{\partial y(x_1, \alpha_0)}{\partial \alpha} = 0. \tag{17'}$$

Tedy všechny hodnoty x_1 konjugované s x_0 pro extremálu γ_0 budou kořeny rovnice (17′).

Definice konjugovaných bodů z rovnice (17′) má dvě vady: 1) kromě samotné extremály potřebujeme znáti celý svazek extremál vycházejících z jejího koncového bodu a 2) podmínka (17′) je pouze nutnou podmínkou pro existenci obálky a tedy, máme-li kořeny rovnice (17′), je třeba ještě navíc vyšetřit, vedou-li skutečně tyto kořeny ke konjugovaným hodnotám.[3])

Opíráme-li se o rovnice Eulerovy, lze uvésti přímou methodu ke stanovení konjugovaných hodnot.

Zachováme-li dřívější označení, označme navíc znakem $\eta(x)$ funkci

$$\eta(x) = \left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha = \alpha_0}.$$

Všechny funkce $y(x, \alpha)$ vyhovují Eulerově rovnici

$$F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) = 0, \tag{18}$$

při čemž tato rovnice je splněna pro každé α (pro $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$).

Diferencujeme-li obě části rovnice (18) podle α a užijeme-li toho, že diferencování podle α a totální diferenciaci podle x lze zaměnit, obdržíme

$$F_{yy}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + F_{yy'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial x} -$$
$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{F_{yy'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \right.$$
$$\left. + F_{y'y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right\} = 0.$$

---

[3]) Uvedeme nejjednodušší příklad soustavy čar $y = y(x, \alpha)$, pro kterou (17) určuje křivku, která není obálkou soustavy. Položme

$$y = \alpha x^2 + \alpha^3 \quad \text{pro } x \geqq 0,$$
$$y = \alpha^3 \quad \text{pro } x < 0.$$

Rovnice (17) nám dá zápornou část osy Ox, avšak zároveň tato soustava je polem, které zaplní celou rovinu a nemá tedy obálku.

Avšak

$$\left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \eta(x), \quad \left[\frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \eta'(x),$$

a tedy pro $\eta(x)$ dostaneme tuto rovnici:

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F_{yy'}\eta + F_{y'y'}\eta'] = 0.$$

V této rovnici je položeno:

$$\left.\begin{aligned} F_{yy} &= F_{yy}\,[x, y(x, \alpha_0),\ y'(x, \alpha_0)],\\ F_{yy'} &= F_{yy'}\,[x, y(x, \alpha_0),\ y'(x, \alpha_0)],\\ F_{y'y'} &= F_{y'y'}[x, y(x, \alpha_0),\ y'(x, \alpha_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Označíme-li pravé strany (19) $P = P(x, \alpha_0)$ resp. $Q = Q(x, \alpha_0)$ resp. $R = R(x, \alpha_0)$ a odstraníme-li závorky, obdržíme nakonec

$$\left(P - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,Q\right)\eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(R\eta') = 0. \tag{20}$$

Rovnice (20) s neznámou funkcí η se nazývá *Jacobiova rovnice*. Je to lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Označme $\Delta(x_0, x)$ integrál Jacobiovy rovnice (20), vyhovující těmto počátečním podmínkám:

$$\Delta(x_0, x_0) = 0, \quad \Delta'(x_0, x_0) = 1.$$

Dokážeme nyní tuto základní větu.

Věta 5. *Jestliže podél extremály γ_0 je veličina $R \neq 0$, pak k tomu, aby hodnota x_1, $x_1 \neq x_0$, byla hodnotou konjugovanou s x_0* (vzhledem ke γ_0), *je nutné a stačí, aby x_1 bylo kořenem rovnice*

$$\Delta(x_0, x) = 0.$$

Dokážeme nutnost podmínky. Je-li x_1 hodnota konjugovaná s x_0, pak vyhovuje vztahu (17'), t. j.

$$\eta(x_1) = 0.$$

Dokážeme, že

$$\eta(x) \equiv \Delta(x_0, x). \tag{21}$$

Vskutku, obě funkce vyhovují Jacobiově rovnici; mimo to podle definice funkce η a podle toho, že je $y(x_0, \alpha) \equiv y_0$, máme

$$\eta(x_0) = 0 = \Delta(x_0, x_0),$$

a protože podle (16)

$$\eta'(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x_0, \alpha) = 1 = \Delta'(x_0, x_0),$$

pak podle jednoznačnosti řešení rovnice Jacobiovy dostaneme (21).

Dokážeme nyní dostatečnost podmínky. Předpokládejme, že je

$$\Delta(x_0, x_1) = 0, \quad x_1 \neq x_0,$$

a dokažme, že pro dostatečně malé hodnoty $\delta\alpha$ všechny extremály

$$y = y(x, \alpha_0 + \delta\alpha)$$

protínají extremálu $y = y(x, \alpha_0)$ v libovolně malém okolí bodu $B(x_1, y(x_1, \alpha_0))$.

Vezměme funkci

$$\psi(x, \alpha) = \frac{y(x, \alpha) - y(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \text{ pro } \alpha \neq \alpha_0,$$

$$\psi(x, \alpha_0) = \left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \Delta(x_0, x) \text{ pro } \alpha = \alpha_0.$$

Tímto způsobem definovaná funkce $\psi(x, \alpha)$ je spojitá podle obou argumentů a mimo to má podle nich spojité parciální derivace (spojitá diferencovatelnost ψ podle α plyne z toho, že $y(x, \alpha)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná podle α).

Dále je

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1, \alpha_0) &= \Delta(x_0, x_1) = 0 \\ \frac{\partial \psi(x_1, \alpha)}{\partial x} &= [\Delta'_x(x_0, x)]_{x=x_1} \neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Kdyby totiž řešení $\Delta(x_0, x)$ lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu bylo rovno nule pro $x = x_1$ spolu se svou derivací, pak by z věty o jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic vyplývalo, že $\Delta(x_0, x) \equiv 0$.

Z (22) plyne, že rovnice

$$\psi(x, \alpha) = 0$$

definuje x jako implicitní funkci α v okolí (x_0, α_0), při čemž pro $\alpha \to \alpha_0$ je $x \geqq x_1$. Píšeme-li tuto rovnici ve tvaru

$$\psi(x_1 + \varepsilon, \alpha + \delta\alpha) = 0, \tag{22'}$$

bude ε jakožto spojitá funkce $\delta\alpha$ libovolně malé pro dostatečně malé $\delta\alpha$. Vzhledem k definici ψ znamená rovnice (22'):

$$y(x_1 + \varepsilon, \alpha_0 + \delta\alpha) = y(x_1 + \varepsilon_1, \alpha_0).$$

To znamená, že se křivky $y = y(x, \alpha_0 + \delta\alpha)$ a $y(x, \alpha_0)$ protínají pro dostatečně malé $\delta\alpha$ v bodě $B_\varepsilon(x_1 + \varepsilon, y(x_1 + \varepsilon, \alpha + \delta\alpha))$ libovolně blízkém k bodu $B(x_1, y(x_1, \alpha_0))$.

Z dokázané věty a ze známých vlastností lineárních rovnic vyplývá řada důležitých vlastností konjugovaných hodnot (samozřejmě za podmínky $R \neq 0$). Uvedeme je :

1) Je-li x_1 hodnota konjugovaná s x_0, pak je x_0 hodnota konjugovaná s x_1.

2) Nechť $x_1, x_1 > x_0$ a $x_1', x_1' > x_0'$ jsou nejmenší z hodnot konjugovaných k x_0 resp. k x_0'. Je-li $x_0' > x_0$, pak také $x_1' > x_1$.[4])

3) Budiž $x_1, x_1 > x_0$ nejmenší z hodnot konjugovaných s x_0. Hodnota x_1 je spojitá funkce jak proměnné x_0 tak i obou parametrů definujících extremálu, vzhledem k níž bereme konjugovanou hodnotu.[5])

Budeme říkati, že *oblouk γ_0 extremály $y = y(x)$ ležící mezi x_0 a x_1 vyhovuje podmínce Jacobiově, je-li pro $x_0 < x < x_1$*

$$\Delta(x_0, x) \neq 0. \tag{22''}$$

Budeme rovněž říkat, že *oblouk γ_0 extremály vyhovuje zesílené Jacobiově podmínce, jestliže nerovnost* (22'') *platí pro $x_0 < x \leqq x_1$.*

Poznámka 1. Jsou-li $y = y(x)$ a $y = y(x) + \eta(x)$ dvě nekonečně blízké extremály, pak lze dokázat, že až na veličinu nekonečně malou řádu vyššího

---

[4]) To ihned plyne z věty Sturmovy. Viz V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, kap. VI, § 2. (Přeložil univ. prof. Dr Eduard Čech.)

[5]) To je přímým důsledkem vět o spojité závislosti řešení diferenciální rovnice na libovolných konstantách a na daných počátečních podmínkách.

Viz V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, kap. VII, § 3 (přeložil prof. Dr Eduard Čech).

než je vzdálenost druhého řádu funkcí $y(x)$ a $y(x) + \eta(x)$ vyhovuje funkce $\eta(x)$ Jacobiově rovnici.

Funkce $y(x)$ a $y(x) + \eta(x)$ vyhovují totiž Eulerově rovnici

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0,$$

$$F_y(x, y + \eta, y' + \eta') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y + \eta, y' + \eta') = 0.$$

Odečteme-li člen po členu první rovnici od druhé, nalezneme

$$F_y(x, y + \eta, y' + \eta') - F_y\,(x, y, \eta) -$$
$$- \frac{d}{dx}\,[F_{y'}(x, y + \eta, y' + \eta') - F_{y'}(x, y, y')] = 0,$$

neboli, zanedbáme-li nekonečně malé veličiny vyššího řádu,

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{d}{dx}\,[F_{yy'}\eta + F_{y'y'}\eta'] = 0,$$

což je zřejmě identické s rovnicí (20).

Jestliže obě nekonečně blízké extremály procházejí bodem $A(x_0, y_0)$, pak je $\eta(x_0) = 0$. Jestliže se protínají v bodě $B(x_1, y_1)$, pak je $\eta(x_1) = 0$. Dostaneme tak znovu přechod od dřívější definice k definici nové.

Poznámka 2. Analogicky se definuje konjugovaný bod v případě funkcionálu I, t. j.: *bod B extremály γ je konjugován s bodem A téže extremály, jestliže obálka Γ svazku extremál $\{\gamma\}$ vycházejících z bodu A se dotýká křivky γ v bodě B.*

Existence pole. Řekneme, že extremála γ je *obklopena polem extremál*, jestliže existuje pole extremál $\{\gamma\}$, které má tyto vlastnosti:

1. Extremála γ je jedním z oblouků pole $\{\gamma\}$.
2. Extremála γ leží ve vnitřku oblasti pokryté polem.

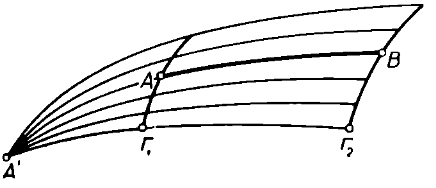
Tato definice se hodí jak pro případ extremál funkcionálu J (obyčejný tvar), tak i pro případ funkcionálu I (parametrický tvar).

Při použití tohoto pojmu budeme předpokládat, že pole $\{\gamma\}$, jímž je γ obklopena, je vlastní pole, t. j. pole extremál vyhovujících podmínkám uvedeným v § 27.

Zastavme se podrobně u případu funkcionálu J.

Nechť je dána extremála γ spojující dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ (obr. 24). Řešme otázku, za jakých podmínek je možno extremálu γ

obklopit polem extremál. Předpokládejme, že ani bod B ani žádný jiný vnitřní bod extremály γ není bodem konjugovaným s A, t. j. bod, pro nějž $\Delta(x_0, x_1) = 0$ (viz nahoře). Nechť je kromě toho podél extremály γ a v jejích koncových bodech A a B $F_{y'y'} > 0$. V tomto případě existuje bod $A'(x_0', y_0')$, $x_0' < x_0$ ležící na prodloužení extremály γ za bod A tak, že extremální oblouk $A'B$ (spolu s koncem B) neobsahuje body konjugované s A' (viz vlastnost 3) konjugovaných hodnot na str. 173).



Obr. 24.

Oblouk $A'B$ označíme znakem γ'. Konstruujme svazek extremál procházejících bodem A', určených rovnicemi

$$y = y(x, \alpha),$$

kde je vzata za parametr směrnice tečny k extremále v bodě A'

$$y_x'(x_0', \alpha) = \alpha$$

(viz str. 169). Podél extremály γ' pro $x_0 \leqq x \leqq x_1$ máme

$$\left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha = \alpha_0} > 0.$$

V tomto případě však na základě spojitosti $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ existuje takové číslo h, $h > 0$, že pro $|\alpha - \alpha_0| \leqq h$ a $x_0 \leqq x \leqq x_1$ jest

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} > 0.$$

Mimo to podle věty o diferencovatelnosti integrálu podle počátečních[6]) daných podmínek jako parametrů bude míti funkce $y(x, \alpha)$

[6]) Viz V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, § 3. Avšak k tomu, aby bylo možno přímo aplikovat větu tam uváděnou na náš případ, je třeba zavedením nové proměnné $z = \frac{dy}{dx}$ převést Eulerovu rovnici na soustavu dvou rovnic prvního řádu a řešit tuto soustavu vzhledem k $\frac{dz}{dx}$ a $\frac{dy}{dx}$, což je možné vzhledem k podmínce $F_{y'y'} \neq 0$.

spojité derivace $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}$ a rovněž ovšem i derivaci $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Jinými slovy, sestrojený svazek extremál tvoří regulární pole, jímž je obklopena extremála γ' (viz str. 161). Dostaneme tímto způsobem další výsledek.

Věta 6. *K tomu, aby extremálu γ bylo lze obklopit polem extremál, stačí, aby*

1) *podél extremály* (i v jejích koncových bodech) *platilo*: $F_{y'y'} > 0$ (resp. $F_{y'y'} < 0$),

2) *oblouk γ spolu s jedním ze svých koncových bodů neobsahoval bod konjugovaný s druhým koncovým bodem.*

Aniž bychom něco měnili na uvedených úvahách, dostaneme v případě funkcionálu I takovouto podmínku pro existenci pole obklopujícího extremálu.

Věta 6'. *K tomu, aby extremálu γ funkcionálu I bylo možno obklopit polem extremál, stačí, aby*

1) *podél γ* (i na jejích koncích) *platilo* $F_1 > 0$ (resp. $F_1 < 0$, viz § 23 (6));

2) *oblouk γ spolu s jedním ze svých koncových bodů neobsahoval bod konjugovaný s druhým koncovým bodem.*

§ 29. Věta o obálce.

Mějme křivku Γ třídy C_1, která se může ve zvláštním případě redukovat na bod. Nechť je dále $\{\gamma\}$ jednoparametrová soustava extremál funkcionálu

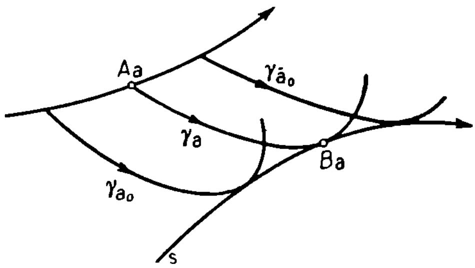
$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Funkce F vyhovuje obvyklým podmínkám spojitosti a diferencovatelnosti. Předpokládejme, že extremály γ jsou transversální k Γ a mají obálku s třídy C_1 (soustava $\{\gamma\}$ zřejmě netvoří pole extremál, viz obr. 27). Označíme znakem α parametr určující křivky naší soustavy a nechť rovnice soustavy má tvar

$$y = \varphi(x, \alpha),\ \alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1.$$

Budeme předpokládat, že v uzavřené oblasti D omezené křivkami Γ,

s, γ_{α_0}, γ_{α_1} funkce $\varphi(x, \alpha)$ má spojité parciální derivace prvního řádu a spojitou smíšenou derivaci druhého řádu a nechť γ_α jest křivka soustavy odpovídající hodnotě α. Označíme dále $A_\alpha(x_0, y_0)$ (obr. 25) bod, v němž se protnou γ_α a Γ a $B_\alpha(x_1, y_1)$ bod, v němž se protnou γ_α a s. Zavedeme na čarách γ a s kladné směry. Na čáře γ_α vezmeme za kladný směr od A_α k B_α. Kladný směr na s určíme tak, aby v bodech B_α kladné směry na γ_α a s souhlasily. Parametr α budeme všude v dalším považovat za tak zvolený, aby se s jeho růstem bod B_α pohyboval v kladném směru po s.



Obr. 25.

Označíme znakem J_α J-délku $\overset{\frown}{A_\alpha B_\alpha}$ extremály γ_α. Ve zvláštním případě, když J-délka je obvyklá délka, náš svazek extremál transversálních ke křivce Γ se změní ve svazek normál ke Γ a obálka s tohoto svazku se změní v evolutu křivky Γ (křivka Γ je pak evolventou s).

Jak známo, je délka oblouku evoluty rovna rozdílu délek úseků normál, ležících mezi evolutou a evolventou a dotýkajících se evoluty v koncových bodech tohoto oblouku. Uvedená vlastnost evoluty umožňuje široké zobecnění. Platí tato věta.

Věta 7 (Kneser). *Mějme soustavu extremál transversálních k čáře Γ třídy C_1, které mají obálku s třídy C_1. Buďte γ_1 a γ_2 dva oblouky s koncovými body A_1 a A_2 na Γ a B_1 a B_2 na s. Při tomto označení, jestliže bod B_1 leží před bodem B_2 na s, pak rozdíl J-délek γ_2 a γ_1 je roven J-délce oblouku obálky ležícího mezi body B_1 a B_2.*

Důkaz. Zachovejme předcházející označení a J_α nechť označuje J-délku úseku $\overset{\frown}{A_\alpha B_\alpha}$ extremály γ_α ležící mezi Γ a s. Přejdeme od hodnoty parametru α k nekonečně blízké hodnotě $\alpha + d\alpha$. Souřadnice (x_0, y_0) a (x_1, y_1) bodů A_α a B_α vzrostou při tom o diferenciální přírůstky dx_0, dy_0 a dx_1, dy_1 (posun A_α nastane po transversále Γ, posun B_α po obálce s). Na základě vzorců (6) a (10) § 16 máme:

$$dJ_\alpha = -(\overline{H}_0\, dx_0 + p_0\, dy_0) + (\overline{H}_1\, dx_1 + p_1\, dy_1).$$

Vzhledem k transversalitě γ_α a Γ vymizí první výraz v závorkách a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J_\alpha &= \overline{H}_1\,\mathrm{d}x_1 + p_1\,\mathrm{d}y_1 = \\ &= [F(x_1, y_1, y_1') + (\overline{y}' - y_1')\,F_{y'}(x_1, y_1, y_1')]\,\mathrm{d}x_1, \end{aligned} \tag{23}$$

kde $\overline{y}' = \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}$ a y_1' jsou směrnice tečen ke křivkám γ_α resp. s v bodě B_α. Protože se ale v bodě B_α obě křivky dotýkají, je

$$\mathrm{d}J_\alpha = F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = F(x, y, \overline{y}')\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

(kde píšeme x, y, y' místo x_1, y_1, y_1'). Integrujeme-li obě strany (24) v mezích od α_0 do α_1, dostaneme odtud

$$J_{\alpha_1} - J_{\alpha_0} = \int_s F\,\mathrm{d}x,$$

kde se integrál na pravé straně bere po oblouku $\widehat{B_{\alpha_0}B_{\alpha_1}}$ křivky s. Podle naší definice je tento integrál J-délka oblouku $\widehat{B_{\alpha_0}B_{\alpha_1}}$ obálky s. Tím je věta dokázána.

Případ degenerace. Jestliže křivka Γ degeneruje v bod A, pak soustava extremál $\{\gamma\}$ v předcházející větě se změní ve svazek extremál, vycházející z bodu A; dostaneme tento mezný případ věty 7:

Věta 7'. *Mějme svazek extremál vycházejících z bodu A, které mají obálku s třídy C_1. Buďte γ_1 a γ_2 dvě extremály naší soustavy s koncovými body B_1 a B_2 na s. Při těchto označeních, jestliže bod B_1 leží před bodem B_2, je rozdíl J-délek γ_1 a γ_2 roven J-délce oblouku $\widehat{B_1B_2}$ obálky s.*

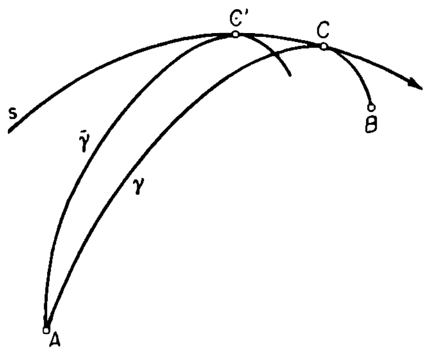
Jiný důležitý zvláštní případ věty 7 obdržíme, když předpokládáme, že obálka degeneruje v bod B, t. j. když všechny čáry procházejí bodem B. V tomto případě soustava $\{\gamma\}$ degeneruje ve svazek extremál vycházejících z B a transversálních ke Γ. Ve formuli (23) je člen $F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ potom roven nule, ježto $\mathrm{d}x = 0$; stejnou úvahou, jako v uvedeném důkazu zjistíme, že J-délky všech úseků extremál vycházejících z B a transversálních ke Γ jsou si rovny. Jestliže navíc předpokládáme, že se i čára Γ redukuje v bod A, pak se soustava změní v soustavu extremál spojujících body A a B. I v tomto případě J-délky všech těchto čar si budou rovny. Na příklad svazek hlavních kružnic na povrchu koule, vycházejících z jakéhokoli bodu povrchu koule, je realisací posledního případu.

Příklad 1. V případě geodetických čar na ploše (extremál pro $\int ds$) změní se soustava $\{\gamma\}$ v soustavu geodetických normál ke křivce Γ, jejichž obálka je tak zvaná geodetická evoluta křivky γ. Věta 7 se změní v Gaussovu větu:

Délka oblouku geodetické evoluty ke křivce Γ je rovna rozdílu délek úseků geodetických normál křivky Γ dotýkajících se evoluty v koncových bodech tohoto oblouku.

Nutná podmínka Jacobiova. Jak bylo dříve dokázáno, zesílená Legendreova podmínka $F_{y'y'} > 0$ a zesílená podmínka Jacobiova: $\Delta(x_0, x) > 0$ pro $x_0 < x \leq x_1$ stačí obě dohromady k tomu, aby daný oblouk extremály bylo možno obklopit polem extremál. Později dokážeme, že tyto podmínky jsou také postačující pro to, aby daný oblouk dával slabý extrém. Použijeme-li teď věty 7, dokážeme, že Jacobiova podmínka je podmínkou nutnou k tomu, aby daný oblouk dával slabý extrém.

Věta 8. *Jestliže podél oblouku extremály γ_0 s koncovými body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ výraz $F_{y'y'} \neq 0$ a jestliže interval (x_0, x_1) obsahuje hodnotu konjugovanou s x_0, pak γ_0 nedává ani minimum ani maximum.*



Obr. 26.

Předpokládejme totiž, že oblouk γ_0 obsahuje bod C konjugovaný s koncovým bodem A oblouku γ_0 a různý od koncového bodu B. Vyšetříme svazek extremál vycházejících z bodu A. Geometrické místo bodů těchto extremál konjugovaných s bodem A je obálka s naší soustavy. Geometricky jsou možné čtyři případy:

1) obálka s se neredukuje na bod a dotykový bod extremály γ s obálkou s je regulárním bodem křivky s (obr. 26);[7]

2) obálka se neredukuje na bod, bod C je bodem vratu pro s (obr. 27), při čemž body oblouku extremály $\overset{\frown}{AC}$ blízké k C a body křivky s blízké k C leží po téže straně normály ke křivce s v bodě C;

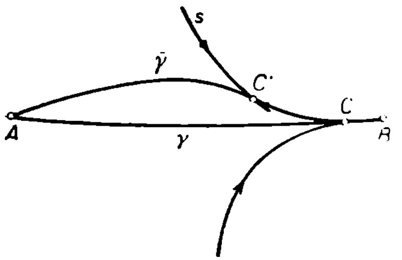
---

[7]) T. j. v okolí bodu C je křivka s křivkou třídy C_1.

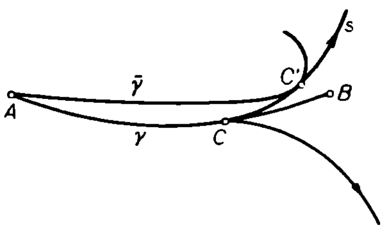
3) obálka s se neredukuje na bod, bod C je bod vratu pro s, při čemž body oblouků $\overset{\frown}{AC}$ a s blízké k C leží na různých stranách od normály k s v bodě C (obr. 28);

4) obálka s degeneruje v bod (obr. 29). Případy 2), 3), 4) lze považovat za „singulární" případy. Zůstaneme pro jednoduchost pouze u případů 1), 2), 4).

První případ. Z našeho předpokladu plyne, že se extremála γ dotýká obálky s v bodě C. Budiž $\overset{\frown}{AC'}$ extremálou svazku, která se



Obr. 27.



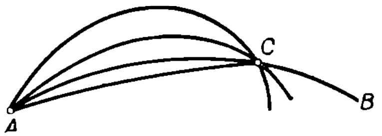
Obr. 28.

dotýká s v bodě C'. Z toho, že bod C je regulárním bodem s, plyne existence extremály $\overset{\frown}{AC'}$ svazku, dotýkající se s v bodě C', předcházejícím bodu C a k němu blízkém. Podle věty 7 J-délka $\overset{\frown}{AC'}$ plus J-délka $\overset{\frown}{CC'}$ obálky s je rovna J-délce $\overset{\frown}{AC}$.

Oblouk $\overset{\frown}{CC'}$ obálky s není extremálou. Předpokládáme-li totiž opak, dostali bychom, že bodem C procházejí dvě extremály s a γ, které mají v bodě C společnou tečnu. To je ale nemožné, neboť v bodě C máme pro směr y' extremály γ $F_{y'y'} \neq 0$, a tudíž je možno bodem C ve směru y' vésti jedinou integrální křivku Eulerovy rovnice, t. j. jedinou extremálu. Odtud plyne, že body C' a C lze spojit obloukem $\overset{\frown}{C'C}$ (různým od oblouku $\overset{\frown}{C'C}$ obálky s), jenž má menší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{C'C}$ (zrovna tak existuje oblouk, jenž má větší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{C'C}$); tudíž křivka $\bar{\gamma}$ skládající se z oblouků $\overset{\frown}{AC'}$ a $\overset{\frown}{C'C}$ má menší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{AC'C}$, skládající se z oblouku extremály $\overset{\frown}{AC'}$ a z oblouku $\overset{\frown}{C'C}$ obálky nebo než jí rovný vzhledem k J-délce oblouk $\overset{\frown}{AC}$ extremály γ, t. j. $\overset{\frown}{AC}$ nedává minimum J-délek oblouků spojujících

A a C. Tudíž tím spíše oblouk $\overset{\frown}{AB}$ extremály γ nedává minimum délek oblouků spojujících A a B (jde zřejmě o slabé minimum, neboť křivky A a B leží ve vzdálenosti prvního řádu). Analogicky se dokazuje, že $\overset{\frown}{AB}$ nedává maximum.

Druhý případ převede se na první. K tomu stačí odmysliti si část obálky, počínající bodem C a obsahující body následující za bodem C, a vyšetřovat jenom část, předcházející bodu C. Potom jsou splněny všechny podmínky jako v prvním případě a tedy soudíme, že oblouk $\overset{\frown}{AB}$ nemůže dávat minimum funkcionálu J.



Obr. 29.

Čtvrtý případ. Vyšetříme nyní případ, když se obálka s redukuje na jediný bod C ležící mezi A a B. Bodem C v probíraném případě prochází spolu s obloukem $\overset{\frown}{AC}$ extremály γ celá soustava blízkých extremálních oblouků. Budiž $\overset{\frown}{AC}$ jeden z takových oblouků; J-délka $\overset{\frown}{AC}$ je rovna J-délce $\overset{\frown}{AC}$; J-délka lomené čáry $\overset{\frown}{ACB}$, skládající se z oblouku $\overset{\frown}{AC}$ a z části $\overset{\frown}{CB}$ extremály γ je rovna J-délce extremály $\overset{\frown}{AB}$.

Dokážeme, že v bodě C lomu čáry $\overset{\frown}{ACB}$ není vyhověno nutné podmínce Weierstrass-Erdmanově (viz § 17) pro lomené extremály. Vskutku podle podmínky $F_{y'y'}(x, y, \bar{y}') \neq 0$ pro $\bar{y}'$ dostatečně blízká k y' (y' je směrnicí γ v bodě C) máme v bodě C (označíme-li znakem $\tilde{y}'$ veličinu ležící mezi y' a $\bar{y}'$)

$$F_{y'}(x, y, \bar{y}') - F_{y'}(x, y, y') = (\bar{y}' - y')\, F_{y'y'}(x, y, \tilde{y}') \neq 0,$$

neboli

$$F_{y'}(x, y, \bar{y}') \neq F_{y'}(x, y, y').$$

Odtud soudíme, že $\overset{\frown}{ACB}$ nemůže dávat relativní minimum J-délek křivek spojujících body A a B. Existuje křivka blízká k $\overset{\frown}{ACB}$ (a tudíž k $\overset{\frown}{ACB} \equiv \overset{\frown}{AB}$) spojující tytéž body A a B, jejíž J-délka je menší než J-délka $\overset{\frown}{ACB}$ a tedy než délka $\overset{\frown}{AB}$. Věta je tímto způsobem dokázána i v tomto případě.

Uvedené úvahy nás vedou také k dalšímu výsledku, doplňujícímu shora formulovanou Jacobiovu podmínku. Jestliže oblouk $\overset{\frown}{AB}$ extremály γ dává slabé minimum funkcionálu J a je-li na $\overset{\frown}{AB}$, obsahujícím i bod B, $F_{y'y'} > 0$, a dále, je-li bod C dotyku obálky s (svazku extremál vycházejících z A) s extremálou γ regulárním bodem křivky s, pak C leží zcela vně $\overset{\frown}{AB}$.

Jacobiova podmínka pro úlohy s volnými konci. Věta 7 umožňuje rozšířit nutnou podmínku Jacobiovu slabého minima také na případ úlohy s volným koncem.

Mějme soustavu $\{\gamma\}$ extremál transversálních ke křivce Γ. Nechť $\overset{\frown}{AB}$ je oblouk jedné z těchto extremál γ_0, kde A leží na Γ. Jestliže obálka s soustavy $\{\gamma\}$, která se může skládat z jediného bodu, protíná $\overset{\frown}{AB}$ v bodě C ležícím mezi A a B, pak oblouk $\overset{\frown}{AB}$ nevede k minimu J-vzdálenosti bodu B od křivky Γ. Důkaz je zcela analogický předcházejícímu; liší se od něho jenom tím, že se věta 7 aplikuje na soustavu extremál transversálních ke křivce Γ. Odtud obdržíme nutnou Jacobiovu podmínku: *k tomu, aby oblouk extremály $\overset{\frown}{AB}$, transversální v bodě A ke křivce Γ, minimalisoval J-vzdálenosti mezi bodem B a křivkou Γ, je nutné, aby se $\overset{\frown}{AB}$ neprotínal s transversální extremálou nekonečně blízkou ke Γ.*

Na příklad k tomu, aby úsek normály k některé křivce Γ minimalisoval vzdálenosti bodu M od křivky Γ, je nutné, aby se nedotýkal evoluty křivky Γ.

§ 30. Integrování Eulerovy rovnice.

J-hyperboly. Buďte dány dvě křivky Γ_1 a Γ_2. Veďme z různých bodů A roviny oblouky γ_1, γ_2 extremál, protínajících Γ_1 a Γ_2 transversálně. Označíme znaky $J(\gamma_1)$ a $J(\gamma_2)$ jejich J-délky. Potom geometrické místo bodů A, pro něž rozdíl J-vzdáleností od křivek Γ_1 a Γ_2, t. j. $J(\gamma_1) - J(\gamma_2)$, je konstantní:

$$J(\gamma_1) - J(\gamma_2) = C = \text{const},$$

nazveme J-hyperbolou. Budeme předpokládati všude dále, že soustavy extremál, na nichž určujeme vzdálenosti A od Γ_1 a Γ_2, vyhovují podmínkám 2, str. 161 (viz § 27). Potom $J(\gamma_1)$ a $J(\gamma_2)$, vyšetřované jako funkce koncových bodů oblouků γ_1 a γ_2, mají totální diferenciál. Předpokládejme kromě toho, že všude ve vyšetřované části roviny platí $F_{y'y'} \neq 0$ a že podél každé z extremál, kterou vyšetřujeme, je $F(x, y, y') \neq 0$ (viz str. 164).

Křivky Γ_1 a Γ_2 budeme nazývat fokálními křivkami hyperboly.

Podél J-hyperboly platí

$$\mathrm{d}J(\gamma_1) - \mathrm{d}J(\gamma_2) = 0,$$

z čehož podle toho, že γ_1, γ_2 jsou extremály, které protínají Γ_1 a Γ_2 transversálně, nalezneme, že v bodě A je

$$\overline{H}_1\,\mathrm{d}x + p_1\,\mathrm{d}y - (\overline{H}_2\,\mathrm{d}x + p_2\,\mathrm{d}y) = 0$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\overline{H}_1 - \overline{H}_2}{p_1 - p_2}, \tag{25}$$

kde $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ a p_1, p_2 jsou hodnoty funkcí $\overline{H} = F - y'F_{y'}$ a $p = F_{y'}$ v bodě A pro extremály γ_1 a γ_2, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ směrnice tečny k hyperbole v bodě A.

Funkce $\overline{H}_1$ a $\overline{H}_2$ můžeme studovat jako funkce proměnných x, y, p. V tomto případě lze klásti $\overline{H}_1 = H(x, y, p_1)$, $\overline{H}_2 = H(x, y, p_2)$, kde (x, y) jsou souřadnice bodu A; rovnice (25) nabude potom tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{H(x, y, p_2) - H(x, y, p_1)}{p_2 - p_1}. \tag{26}$$

Budiž nyní $s(\Gamma_1, \Gamma_2)$ oblouk hyperboly s fokálními křivkami Γ_1 a Γ_2, jdoucí pevným bodem A. Bude-li se Γ_1 neomezeně přibližovat ke Γ_2 tak, že pro jakkoli malé ε bude, počínaje známým okamžikem, ležet Γ_1 v ε-okolí prvního řádu křivky Γ_2, pak se bude v tomto případě oblouk hyperboly $s(\Gamma_1, \Gamma_2)$ neomezeně přibližovat k extremále procházející bodem A, která je transversální ke Γ_1. Jinými slovy: při splynutí obou fokálních křivek každý oblouk hyperboly degeneruje v oblouk extremály. Tato vlastnost J-hyperboly je přirozeným zobecněním případů degenerace obyčejné hyperboly.

Při provádění důkazu upozorňujeme na toto: jestliže Γ_1 splyne s Γ_2, pak γ_2 splyne s γ_1; tedy p_1 konverguje k p_2 a rovnice (26) přejde v rovnici

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{27}$$

V této rovnici ve výrazu $p = F_{y'}(x, y, y')$ x a y jsou souřadnice bodu A a y' je směrnice tečny ke γ_1 v bodě A. Rovnice (27) je jednou z rovnic kanonického tvaru Eulerovy rovnice.

Abychom dostali druhou rovnici, sestrojme svazek extremál $\{\gamma\}$ transversálních ke Γ_1; čára γ_1 bude zřejmě patřit k tomuto svazku. Označíme znakem $J(x, y)$ J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ_1. Potom vzhledem k transversalitě γ a Γ najdeme podle rovnosti (5)

$$dJ = H\,dx + p\,dy;$$

přitom je $H = H(x, y, p)$ a $p = F_{y'}(x, y, y')$; y' je rovno směrnici tečny k extremále svazku $\{\gamma\}$.[8]) Odtud, použijeme-li podmínky totálního diferenciálu, dostaneme

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{28}$$

Zaměníme-li podle (27) $\frac{\partial H}{\partial p}$ označením $-\frac{dy}{dx}$, obdržíme

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{29}$$

Nahradíme-li pravou stranu rovnice (29) úplnou derivací $\frac{dp}{dx}$, pak nám dá spolu s (27) hledané Eulerovy rovnice v kanonickém tvaru.

Tak jsme dostali výsledek:

Věta 9. *Jestliže fokální křivka Γ_2 splývá s fokální křivkou Γ_1, pak větev J-hyperboly procházející bodem A se změní v extremálu, procházející bodem A, která je transversální ke Γ_2.*[9])

Příklad 1. Nechť Γ_1 a Γ_2 degenerují ve dva body a budiž $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Potom extremálami budou přímky, J-hyperbola se stane jednou větví obyčejné

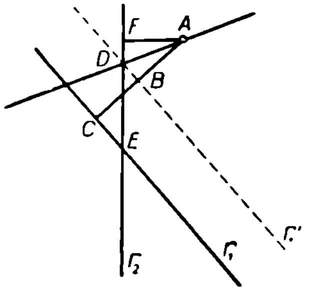
---

[8]) Bereme extremálu svazku, procházejícího bodem A, a tečnu vedeme v bodě A.

[9]) Viz L. Ljusternik, Zamečanija k nekotorym variacionnym zadačam, Učennye zapiski MGU, vyp. II.

hyperboly s ohnisky Γ_1 a Γ_2 procházející daným bodem A. Přibližujme nyní neomezeně Γ_2 ke Γ_1; potom zřejmě hyperbola degeneruje ve dvojici přímek, z nichž jedna, procházející body Γ_1 a A, bude extremálou určující vzdálenost A od Γ_1.

Příklad 2. Buďte opět $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, Γ_1 a Γ_2 dvě protínající se přímky a A daný bod (obr. 30). J-hyperbola je přímkou procházející bodem A a bodem D, v němž se přímka Γ_2 protne s přímkou Γ_1', kterou obdržíme posunutím přímky Γ_1 o vzdálenost CB, rovnou rozdílu délek kolmic, spuštěných s A na Γ_1 a Γ_2. Jestliže se přímka Γ_2 při otáčení kolem bodu E setká s přímkou Γ_1, pak J-hyperbola přejde v přímku kolmou ke Γ_1.



Obr. 30.

Příklad 3. Jsou-li extremály geodetickými čarami na ploše, pak věta uvádí přirozené zobecnění vlastností obyčejné hyperboly na vlastnosti geodetické „hyperboly" geometrie na ploše.

Z dokázané věty dostaneme jako důsledek takovýto výsledek:

Věta 10. *Je-li $J(x, y, \alpha)$ J-vzdálenost*[10]*) bodu A od čáry Γ_α: $y = \varphi(x, \alpha)$, kde α je parametr, a jestliže $\varphi(x, \alpha)$ spolu se svými parciálními derivacemi je spojitá, pak je*

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$$

pro konstantní β rovnicí extremály.

Rovnice

$$J(x, y, \alpha') - J(x, y, \alpha) = \text{const} \tag{30}$$

určuje totiž některou J-hyperbolu. Konstantní veličinu v (30) zvolíme rovnou $\beta(\alpha' - \alpha)$. Rovnice naší J-hyperboly nabude tvaru

$$\frac{J(x, y, \alpha') - J(x, y, \alpha)}{\alpha' - \alpha} = \beta. \tag{30'}$$

Jestliže $\alpha' \to \alpha$, t. j. křivka $\Gamma_{\alpha'}$ konverguje ke křivce Γ_α, přejde

---

[10]) Vzdálenost bodu od čáry se měří podél extrémály protínající danou čáru transversálně.

J-hyperbola v extremálu. Z rovnice (30') plyne, že podél této extremály jest

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \beta.$$

Methoda integrace Jacobi-Ostrogradského. Se shora uvedených úvah velmi jednoduše lze ustanovit vztah mezi úlohou integrovat Eulerovy rovnice (obyčejné rovnice) a integrovat parciální diferenciální rovnice.

Dokážeme předběžně dvě věty.

Věta 11. *Je-li Γ křivka třídy C_1, pak J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ vyhovuje následující parciální diferenciální rovnici:*

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right), \tag{31}$$

kde H je funkce proměnných x, y, p definovaná v § 26.

J-vzdálenost je totiž J-délkou oblouku extremály γ, spojující bod A s křivkou Γ a transversální ke Γ. Budiž bod B koncovým bodem oblouku γ, ležícím na křivce Γ. Přejdeme od bodu A k blízkému bodu $A'(x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y)$. Označíme znakem γ' extremálu $A'B'$, spojující bod B' s křivkou Γ transversální k poslední křivce. Nechť souřadnice koncového bodu B extremály γ, ležícího na Γ, při přechodu k oblouku Γ vzrostou o přírůstky $\mathrm{d}x_0$, $\mathrm{d}y_0$; potom přírůstek J-vzdálenosti při přechodu od A k A' bude

$$\mathrm{d}J = (H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y) - (H_0\,\mathrm{d}x_0 + p_0\,\mathrm{d}y_0).$$

Avšak druhá závorka vzhledem k transversalitě γ ke Γ je rovna nule. Je tudíž

$$\mathrm{d}J = H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y.$$

Z toho je

$$H = \frac{\partial J}{\partial x},\ p = \frac{\partial J}{\partial y}.$$

Bereme-li H jako funkci proměnných x, y, p a zaměníme-li v ní p derivací $\frac{\partial J}{\partial y}$, dostaneme hledanou rovnici

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right). \tag{31}$$

Věta 12 (obrácená). *Jestliže $J(x, y)$ je funkce proměnných x, y spojitá spolu se svými parciálními derivacemi a vyhovuje rovnici* (31), *pak pro konstantní K funkce $J(x, y) - K$ vyjadřuje J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky $J(x, y) \doteq K$.*

Označme totiž znakem Γ křivku, vyjádřenou rovnicí $J(x, y) = K$; podle věty 11 J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ, kterou označíme J_1, vyhovuje rovnici (31). Poněvadž J nevystupuje explicitně v rovnici (31), je nutně $J^* = J(x, y) - K$ rovněž integrálem rovnice (31). Na základě geometrického významu $J^*(x, y)$ a podmínek věty máme podél Γ

$$J_1 = J^* = 0.$$

Avšak z theorie parciálních diferenciálních rovnic tvaru (31) je známo, že souhlasí-li integrály podél některé křivky, pak jsou všude identické, takže je $J_1(x, y) = J^*(x, y)$; věta je tím dokázána.

Tuto větu lze dokázat bez použití theorie parciálních diferenciálních rovnic. Je možno na příklad zjistit přímo, že každá čára, protínající transversálně všechny čáry soustavy $J(x, y) = K$, je extremálou. Z toho bude vyplývat, že soustava $J(x, y) = K$ je polem transversál. Zbude dokázat, že J-vzdálenost mezi transversálami $J = K_1$ a $J = K_2$ je právě rovna $K_2 - K_1$.

Rovnice (31) má název Hamiltonova rovnice.

Jacobi po prvé dokázal, že problém integrace rovnice (31) vede k úloze integrovati Eulerovu rovnici a obráceně.

Věta 13. *Známe-li úplný integrál Hamiltonovy rovnice* (31), *lze najíti obecný integrál Eulerovy rovnice* (8), *a obráceně, známe-li obecný integrál rovnice Eulerovy, lze najíti úplný integrál Hamiltonovy rovnice.*

Mysleme si, že jsme našli obecné řešení Eulerovy rovnice, t. j. že jsme nalezli soustavu extremál závislých na dvou parametrech:

$$y = y(x, \alpha, \beta);$$

každým bodem (x, y) v kterémkoli směru lze vésti extremálu této soustavy. Mějme libovolnou křivku Γ třídy C_1. V každém bodě této křivky lze vésti směr transversální ke Γ. Tímto směrem lze vésti extremálu soustavy transversální ke křivce Γ, a tím tedy určit pojem

J-vzdálenosti libovolného bodu (x, y) od Γ. Tato J-vzdálenost vyhovuje Hamiltonově rovnici

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right). \tag{32}$$

Protože v rovnici (32) nevystupuje samotná funkce J, nýbrž pouze její derivace, bude pro libovolné konstantní K funkce $J(x, y) + K$ rovněž řešením rovnice (32).

Vyšetřujme nyní jednoparametrovou soustavu Γ_α rovinných křivek, která netvoří pole transversál v žádné části roviny. Označme $J(x, y, \alpha)$ J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ_α. Ježto umíme řešit Eulerovu rovnici, můžeme, jak jsme to již viděli, určit funkci $J(x, y, \alpha)$. Přidáme-li konstantu β, dostaneme řešení $J(x, y, \alpha) + \beta$ rovnice (32) závislé na dvou parametrech (tak zvaný úplný integrál této rovnice). Z podmínky, že Γ_α netvoří pole transversál, plyne, že dvě libovolné konstanty α a β nelze redukovat na jednu.

K provedení důkazu předpokládejme opak. Ježto zřejmě β nezávisí na α, stanou se α a β jenom tehdy jedinou konstantou, když α bude rovněž aditivní konstantou, t. j. když

$$J(x, y, \alpha) = J(x, y) + \alpha.$$

Potom však, jestliže Γ_α a Γ_{α_1} jsou dvě libovolné křivky soustavy, je jejich vzdálenost rovna výrazu (znaky x, y jsou označeny souřadnice libovolného bodu A roviny)

$$J(x, y, \alpha_1) - J(x, y, \alpha) = \alpha_1 - \alpha,$$

t. j. J-vzdálenost Γ_1 od Γ je konstantní a tedy je soustava Γ_α soustavou transversál, což je nemožné.

Nechť obráceně je dán úplný integrál rovnice (32). Tento integrál vzhledem k tomu, že J se v rovnici explicitně nevyskytuje, lze psáti ve tvaru

$$J = J(x, y, \alpha) + \beta.$$

Na základě věty 12 pro dané α vyjadřuje funkce $J(x, y, \alpha) - K$ J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky $J(x, y, \alpha) = K$, kde K je nějaká konstanta. Podle věty 10, položíme-li $\dfrac{\partial J}{\partial \alpha}$ rovné konstantě, dostaneme extremálu

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta. \tag{33}$$

Tato extremála závisí na dvou parametrech α a β. Tímto způsobem formule (33) dává obecný integrál Eulerovy rovnice.[11])

Dodatek. Jak je známo, nazývá se obecným integrálem parciální diferenciální rovnice prvního řádu integrál rovnice, v jehož vyjádření je obsažena libovolná funkce.

Vyšetřujme J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od libovolné čáry Γ třídy C_1. Funkce $J(x, y)$, která je integrálem Hamiltonovy rovnice, závisí na libovolné čáře Γ, t. j. na libovolné funkci. Tedy podle definice obecného integrálu je $J(x, y)$ obecným integrálem Hamiltonovy rovnice.

Tudíž, známe-li obecný integrál Eulerovy rovnice, můžeme sestrojiti obecný integrál odpovídající rovnice Hamiltonovy.

Příklad 1. Budiž

$$F = \sqrt{1 + y'^2};$$

v tomto případě je

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{1 - p^2},\ p = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Rovnice (32) má tvar

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = 1. \tag{34}$$

Za čáry Γ_α vezměme přímky procházející počátkem souřadnic:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = 0;$$

v takovém případě J-vzdálenost $J(x, y, \alpha)$ bodu $A(x, y)$ od Γ_α bude obyčejnou vzdáleností A od přímky:

$$J(x, y, \alpha) = x \cos\alpha + y \sin\alpha.$$

Podle věty 13 integrál rovnice (34) má tvar

$$J = x \cos\alpha + y \sin\alpha + \beta,$$

kde α a β jsou libovolné konstanty.

---

[11]) Je patrno, že v rovnici (33) nelze libovolné konstanty α, β převést na jedinou libovolnou konstantu; v opačném případě by měl daný integrál rovnice (32) tvar $J(x, y) = \varphi(\alpha) + \beta$, t. j. nebyl by úplným integrálem.

Příklad 2. Budiž

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} \quad \text{(Fermatův princip)};$$

v tomto případě

$$p = \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}}, \; H^2 + p^2 = \frac{1}{[v(x, y)]^2}.$$

Hamiltonova rovnice má tvar

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2}.$$

J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od libovolné křivky Γ vyjadřuje pak optickou vzdálenost A od Γ.

Vyšetříme ještě zvláštní případ, kdy je $v = y$; v tomto případě jsou extremálami úlohy kružnice orthogonální k ose Ox. Za křivky Γ_α vezmeme znovu přímky

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = 0;$$

potom optická vzdálenost $J(x, y, \alpha)$ bodu $A(x, y)$ od křivky Γ_α nabude tvaru

$$J(x, y, \alpha) = \varrho(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha - \varphi),$$

kde ϱ a φ jsou polární souřadnice bodu A. Odtud dostaneme úplný integrál rovnice (31) pro $v = y$

$$J = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\alpha_1 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) + \beta,$$

kde α_1 a β jsou libovolné konstanty.

Případ separace proměnných. Dokážeme teď tuto větu:

Věta 14. *Jestliže rovnici* (32) *lze uvést na tvar*

$$\Phi\left(x, \frac{\partial J}{\partial x}\right) + \overline{\Phi}\left(y, \frac{\partial J}{\partial y}\right) = 0,$$

pak rovnice Hamiltonovu a Eulerovu lze řešit kvadraturami.

Položíme totiž

$$\Phi\left(x, \frac{\partial J}{\partial x}\right) = \alpha, \; \overline{\Phi}\left(y, \frac{\partial J}{\partial y}\right) = -\alpha,$$

kde α je libovolná konstanta. Řešíme-li každou z těchto rovnic vzhledem k $\frac{\partial J}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial J}{\partial y}$, obdržíme

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \Phi_1(x, \alpha), \; \frac{\partial J}{\partial y} = \overline{\Phi}_1(y, \alpha).$$

Z toho ihned dostaneme úplný integrál rovnice (32)

$$J = \int \Phi_1(x, \alpha)\, \mathrm{d}x + \int \overline{\Phi}_1(y, \alpha)\, \mathrm{d}y.$$

Použijeme-li věty 10, dostaneme obecný integrál odpovídající Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial \Phi_1(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\partial \overline{\Phi}_1(y, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}y = \beta.$$

Integrování rovnice geodetické čáry. Nechť má element čáry na ploše tvar

$$\mathrm{d}s^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

Rovnice (32) nabude tvaru

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y);$$

J je délka geodetické čáry, t. j.

$$J = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}.$$

Klademe

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 = \varphi_1(x) - \alpha,\quad \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \alpha + \varphi_2(y);$$

odtud dostaneme úplný integrál rovnice (32)

$$J = \int \sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}\, \mathrm{d}x + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}\, \mathrm{d}y. \tag{35}$$

Rovnice geodetických čar nabude tvaru

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}} = \beta. \tag{36}$$

Tyto vzorce nalezl Liouville.

Lze tedy i rovnice geodetické čáry (36) a výraz (35) pro její délku vyjádřit kvadraturami.

Na Liouvilleův případ se převede také integrování rovnice geodetických čar, má-li element délky tvar

$$\mathrm{d}s^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)][\psi_1(x)\, \mathrm{d}x^2 + \psi_2(y)\, \mathrm{d}y^2].$$

Klademe-li totiž

$$\psi_1(x)\, \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}u^2,\quad \psi_2(y)\, \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}v^2$$

a vyjádříme-li x pomocí u, y pomocí v, obdržíme

$$\mathrm{d}s^2 = \{\varphi_1[x(u)] + \varphi_2[y(v)]\}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2).$$

Dospěli jsme k případu Liouvilleově. Délka geodetické čáry je vyjádřena integrálem

$$\begin{aligned} J &= \int \sqrt{\varphi_1[x(u)] - \alpha}\, \mathrm{d}u + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2[y(v)]}\, \mathrm{d}v = \\ &= \int \sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}\, \sqrt{\psi_1(x)}\, \mathrm{d}x + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}\, \sqrt{\psi_2(y)}\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Rovnice geodetické čáry $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$ nabude tvaru

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x) - \alpha}}\, dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{\varphi_2(y)}{\alpha + \varphi_2(y)}}\, dy = \beta.$$

Příklad. Geodetické čáry na elipsoidu. Nechť a_1, a_2, a_3 jsou různá libovolná reálná čísla $a_1 > a_2 > a_3 > 0$. Vyšetřujme systém ploch S_k druhého stupně

$$\frac{x^2}{k - a_1} + \frac{y^2}{k - a_2} + \frac{z^2}{k - a_3} = 1. \tag{37}$$

Je-li $k > a_1$, je S_k elipsoid; pro $a_1 > k > a_2$ je S_k jednodílný hyperboloid; pro $a_2 > k > a_3$ dvojdílný hyperboloid; pro k rovné jednomu z čísel a_1, a_2, a_3 degenerují plochy S_k ve dvojici identických rovin.

Je-li $A(x, y, z)$ pevný bod, pak rovnice (37) určuje takovou hodnotu k, že pro ni S_k prochází bodem A. Rovnice (37) je rovnice třetího řádu vzhledem ke k:

$$P(k) = (k - a_1)(k - a_2)(k - a_3) - \{x^2(k - a_2)(k - a_3) +$$
$$+ y^2(k - a_3)(k - a_1) + z^2(k - a_1)(k - a_2)\} = 0.$$

Mění-li se k od $+\infty$ do a_3, změní mnohočlen $P(k)$, jak si snadno ověříme, třikráte znaménko tak, že kořeny rovnice $P(k) = 0$ leží v pořadí:

$$k_1 > a_1 > k_2 > a_2 > k_3 > a_3,$$

při čemž se předpokládá, že je $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Z toho plyne, že každým bodem A, který neleží na žádné ze souřadnicových rovin, procházejí tři plochy: S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3} — elipsoid, jednodílný hyperboloid a dvojdílný hyperboloid.[12]) Přitom můžeme vyjádřit souřadnice x, y, z bodu A pomocí k_1, k_2, k_3. Je možno totiž napsat

$$k_1k_2k_3 = a_1a_2a_3\left(1 + \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3}\right),$$

$$k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 =$$
$$= a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 + x^2(a_2 + a_3) + y^2(a_3 + a_1) + z^2(a_1 + a_2),$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = a_1 + a_2 + a_3 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Odtud najdeme

$$x^2 = \frac{(k_1 - a_1)(k_2 - a_1)(k_3 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$$

a analogické výrazy pro y^2 a z^2, které dostaneme z uvedeného výrazu cyklickou

---

[12]) Leží-li bod A na jedné za souřadnicových rovin, pak pro $x = 0$ je $k_1 = a_1$; pro $y = 0$ je $k_2 = a_2$, atd. Odpovídající plocha degeneruje při tom ve dvojici splynuvších rovin, totožných se souřadnicovou rovinou, v níž leží bod A.

záměnou. Pak není těžké vyjádřiti element oblouku ds pomocí dk_1, dk_2, dk_3:

$$ds^2 = \frac{1}{4} \, \mathbf{S} \, \frac{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)}{(k_1 - a_1)(k_1 - a_2)(k_1 - a_3)} \, dk_1^2.$$

Znak $\mathbf{S}$ označuje sumu, v níž se z prvního členu uvedeného za znakem $\mathbf{S}$ ostatní dva dostanou cyklickou záměnou.

Lze tedy k_1, k_2, k_3 chápati jako soustavu křivočarých souřadnic v prostoru. Tyto souřadnice se nazývají eliptickými. Souřadnicové plochy, jak lze nahlédnouti z výrazu pro ds^2, se protínají orthogonálně.

Klademe-li $k_1 = \text{const}$, obdržíme elipsoid S_{k_1}; k_2, k_3 jsou křivočarými souřadnicemi na tomto elipsoidu. Jeho rovnici lze napsat takto:

$$\frac{x^2}{k_1 - a_1} + \frac{y^2}{k_1 - a_2} + \frac{z^2}{k_1 - a_3} = 1 \quad (k_1 > a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 > 0);$$

element oblouku ds křivky na elipsoidu je vyjádřen výrazem

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)} \, dk_2^2 + \frac{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)} \, dk_3^2 \right].$$

Klademe-li

$$\varphi_1 = k_2, \quad \varphi_2 = -k_3,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4} \, \frac{k_2 - k_1}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)},$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{4} \, \frac{k_3 - k_1}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)},$$

dostaneme

$$ds^2 = (\varphi_1 + \varphi_2)(\psi_1 \, dk_2^2 + \psi_2 \, dk_3^2).$$

Na základě předcházejícího výsledku je délka geodetické čáry na elipsoidu vyjádřena integrálem

$$J = \int \sqrt{\varphi_1 - \alpha} \sqrt{\psi_1} \, dk_2 + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2} \sqrt{\psi_2} \, dk_3,$$

neboli

$$J = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{(k_2 - \alpha)(k_2 - k_1)}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)}} \, dk_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{(\alpha - k_3)(k_1 - k_3)}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)}} \, dk_3.$$

Rovnice geodetické čáry má tvar (který našel Jacobi)

$$-\frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{k_2 - k_1}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)(k_2 - \alpha)}} \, dk_2 +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)(k_3 - \alpha)}} \, dk_3 = \beta = \text{const.}$$