Kurs variačního počtu

Podmíněný extrém

In: Michail Aleksejevič Lavrent'ev (author); Lazar Aronovič Ljusternik (author); Karel Winkelbauer (translator): Kurs variačního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 114–136.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402791

KAPITOLA V.

PODMÍNĚNÝ EXTRÉM

§ 20. Isoperimetrická úloha.

Příklady isoperimetrických úloh. Řada aplikací vede k úloze vyhledat křivku, pro kterou nabývá integrál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

extrému, když za třídu přípustných čar vezmeme křivky, spojující dva dané body A a B a vyhovující mimo to některým dalším podmínkám.

Začneme vyšetřováním konkretních příkladů. V § 4 jsme řešili úlohu o minimální rotační ploše: mezi všemi jednoznačnými křivkami třídy C_1, které jdou body A a B, najít takovou křivku, aby plocha, vytvořená otáčením této křivky kolem osy Ox, měla nejmenší obsah. Dospějeme k podstatně novým úlohám, budeme-li vyšetřovat jenom ty plochy, které jsou vytvořeny na příklad otáčením křivek předepsané délky nebo jenom těch křivek, které při otáčení kolem osy Ox vytvářejí plochu, omezující spolu s rovinami $x = x_0$, $x = x_1$ těleso daného objemu. Protože délka křivky je vyjádřena integrálem

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

je možno první z daných úloh formulovat takto:

Mezi všemi křivkami $y = y(x)$ třídy C_1, podél nichž integrál K nabývá dané hodnoty l a které jdou dvěma danými body A a B, určit tu, pro niž integrál J nabývá nejmenší nebo největší hodnoty.

V druhé úloze hledáme rovněž extrém integrálu J za podmínky, že podél každé křivky třídy přípustných čar musí mít integrál

$$K_1 = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$$

předepsanou hodnotu.

Termín „isoperimetrická úloha" pochází od jedné z úloh podobného typu: *mezi všemi zavřenými křivkami délky l najít tu, která omezuje plochu největšího obsahu.* V tomto paragrafu rozřešíme v jednom z příkladů tuto úlohu za předpokladu, že se část hledané křivky skládá z úsečky konstantní délky (viz § 5).

Tyto příklady vedou k tomuto obecnému problému:

Formulace úlohy. *Jsou dány dvě funkce* $F(x, y, y')$ *a* $G(x, y, y')$. *Mezi všemi křivkami* $y = y(x)$ *třídy* C_1, *podél nichž integrál*

$$K = \int_a^b G(x, y, y') \, dx$$

nabývá předepsané hodnoty, určit tu, pro niž integrál

$$J = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$$

nabývá extremální hodnoty.

Podobně jako v předcházejících kapitolách je naším úkolem najít pro hledanou křivku takové základní nutné podmínky, aby ji bylo možno na základě těchto podmínek určit (když víme, že existuje).

Dříve než přejdeme k řešení dané úlohy, učiníme několik hypothes obecného charakteru, které jsou nutné k dalšímu výkladu:[1])

1. Funkce F a G nechť mají spojité parciální derivace prvního i druhého řádu pro $a \leqq x \leqq b$ a pro libovolné hodnoty proměnných y, y'.

2. Budeme předpokládat, že hledaná křivka není extremálou integrálu K.

Odůvodníme hypothesu 2. Aby úloha měla smysl, musíme požadovat, aby se předepsaná hodnota integrálu K vůbec nevyskytovala mezi extremálními hodnotami tohoto integrálu, t. j. aby nebyla extremální, neboť je-li daná hodnota integrálu K jeho extremální hodnotou, pak obecně existuje jenom jedna nebo konečný počet křivek, na nichž integrál K nabývá předepsané hodnoty, a tyto křivky tedy vyčerpají

---

[1]) Připomeňme, že zde uvedené důkazy jsou zcela přesné jenom za předpokladu, že hledaná křivka patří ke třídě C_2. Avšak jako při důkazu v kap. II základní rovnice Eulerovy, je vždycky možno upustit od předpokladu o existenci a spojitosti y'', nahradíme-li transformaci Lagrangeovu, jíž jsme pro jednoduchost použili při definici variace funkcionálu, transformací Du Bois-Reymondovou.

celou třídu přípustných čar, takže je patrné, že se methody, které jsme uvedli v předcházejících kapitolách, ukáží v tomto případě zcela nevhodnými (v příkladě s hmotným vláknem (viz dále) a v prvním ze shora uvedených příkladů musíme přirozeně předpokládat, že integrál K — délka křivky — je skutečně větší než vzdálenost mezi danými body). Tedy tam, kde extremála vede na absolutní extrém, je naše podmínka nutná.

Řešení úlohy. Způsob řešení dané úlohy vyplývá z následující věty.

Věta I (Euler). *Jestliže křivka $y = y(x)$ vede k extrému integrálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

za podmínek

$$K = \int_a^b G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = l,$$

$$y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1$$

a jestliže $y = y(x)$ není extremálou integrálu K, pak existuje taková konstanta λ, že naše křivka je extremálou integrálu

$$L = \int_a^b H(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

kde $H = F + \lambda G$.

Teď si dokážeme, že je-li již dříve známa existence hledané křivky, pak použitím Eulerovy věty lze tuto křivku fakticky určit. Integrujeme-li totiž Eulerovu rovnici pro funkci H, dostaneme obecný integrál závislý na dvou libovolných integračních konstantách α, β a na neznámém parametru λ:

$$y = f(x, \alpha, \beta, \lambda).$$

Podle Eulerovy věty náleží hledaná křivka do této soustavy. Zbývá stanovit α, β, λ. Stačí použít podmínky $K = l$ a podmínky, že křivka jde dvěma danými body A a B.

Přejdeme k důkazu Eulerovy věty. Předpokládejme, že křivka $y = y(x)$ vede k extrému integrálu J za podmínky $K = l$ a že tato křivka není extremálou pro integrál K. Vezměme v intervalu $[a, b]$ dva libovolné body x_1 a x_2 (obr. 17) a hledejme přírůstek funkcionálu J, když $y(x)$ variujeme v okolí bodů x_1 a x_2. Označíme-li ΔJ hledaný přírůstek J, dostaneme v souhlase s formulí (10′) § 10

$$\Delta J = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_1} + \varepsilon_1\right\} \int_a^b \delta_{x_1} y \,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_2} + \varepsilon_2\right\} \int_a^b \delta_{x_2} y \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_1} + \varepsilon_1\right\} \sigma_1 + \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_2} + \varepsilon_2\right\} \sigma_2,$$

kde

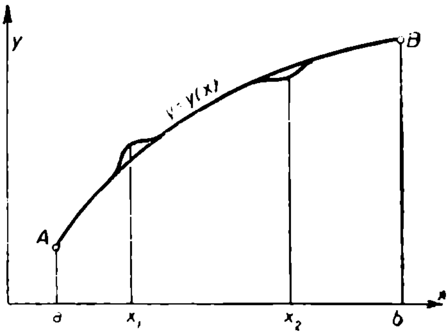
$$\sigma_1 = \int_a^b \delta_{x_1} y \,\mathrm{d}x, \quad \sigma_2 = \int_a^b \delta_{x_2} y \,\mathrm{d}x$$

a ε_1 a ε_2 konvergují k nule spolu se σ_1 a σ_2.

Pro libovolné variace $\delta_{x_1} y$ a $\delta_{x_2} y$ křivka

$$y = y_1(x) = y(x) + \delta_{x_1} y + \delta_{x_2} y$$

nebude obecně patřit do třídy přípustných čar. K tomu, aby variace byla přípustná, je nutné a stačí, aby bylo



Obr. 17.

$$K(y_1) = K(y),$$

t. j. aby

$$\Delta K = K(y_1) - K(y) = \left\{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x_1} + \varepsilon_1'\right\} \sigma_1 +$$

$$+ \left\{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x_2} + \varepsilon_2'\right\} \sigma_2 = 0, \tag{1}$$

kde ε_1' a ε_2' konvergují k nule spolu se σ_1 a σ_2.

Zvolíme nyní bod x_2 tak, aby bylo

$$\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x=x_2} \neq 0;$$

takový bod x_2 existuje, neboť $y = y(x)$ není extremálou pro K. V takovém případě lze dát podmínce (1) tvar

$$\sigma_2 = -\left\{\frac{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x=x_1}}{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x=x_2}} + \varepsilon'\right\}\sigma_1, \tag{2}$$

kde ε' konverguje k nule spolu se σ_1.

Položíme-li

$$\lambda = -\frac{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_2}}{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x=x_2}}$$

a dosadíme-li do výrazu ΔJ za σ_2 podle (2), můžeme uvést přírůstek ΔJ na tvar

$$\Delta J = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_1} + \lambda\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x=x_1} + \varepsilon\right\}\sigma_1,$$

kde ε konverguje k nule spolu se σ_1. Protože podle předpokladu křivka $y = y(x)$ dává minimum integrálu J, je $\Delta J \geqq 0$ pro libovolnou přípustnou variaci, t. j. pro jakoukoli dostatečně malou kladnou a zápornou hodnotu σ_1. Tudíž pro jakoukoli hodnotu x musí podél křivky $y = y(x)$ být podle pomocné věty na str. 51, § 8

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \lambda\left(G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right) = 0. \tag{3}$$

Tím je Eulerova věta dokázána.

Podmíněná extremála. Rovnice (3) vede k úplnému řešení také této úlohy: *mezi všemi křivkami, spojujícími dva dané body, určit křivku, při jejímž variování je $\delta J = 0$, jakmile $\delta K = 0$.*

Nazveme *podmíněnou extremálou* každou křivku, která bude řešením dané úlohy (pro libovolné pevné koncové body).

Věta 2. *Rovnice* (3) *je podmínkou nutnou a postačující k tomu, aby křivka $y = y(x)$ byla podmíněnou extremálou.*

Nejdříve dokážeme, že podmínka (3) je postačující. Vskutku, splňuje-li křivka podmínku (3), pak je $\delta(J + \lambda K) = 0$. A potom z podmínky $\delta K = 0$ plyne $\delta J = 0$, t. j. křivka je podmíněnou extremálou.

Při důkazu, že podmínka je nutná, rozlišujeme dva případy:

$$1)\ G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} \not\equiv 0 \text{ a}$$

$$2)\ G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} \equiv 0 \text{ v intervalu } [a, b].$$

V prvním případě se nutnost podmínky (3) dostane doslovným opakováním námi uvedeného důkazu formule (3), založeného na variování křivky ve dvou bodech.

Ve druhém případě má křivka $y = y(x)$ tu vlastnost, že jakákoli její variace dává $\delta K = 0$. A potom na základě toho, že tato křivka je podmíněnou extremálou, je rovněž $\delta J = 0$, t. j. $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$, a tedy je podmínka (3) rovněž splněna.

Zákon reciprocity. Shora uvedené úvahy ukazují, že isoperimetrická úloha variačního počtu vede k nejjednodušší úloze s funkcí $H = F + \lambda G$. Připomeneme-li, že násobení integrované funkce konstantou nezmění soustavu extremál pro integrál, můžeme funkci H zapsat v symetrickém tvaru:

$$H = \lambda_1 F + \lambda_2 G,$$

kde λ_1 a λ_2 jsou konstanty. Takové vyjádření fukce H nám ukazuje, že funkce F a G ve výrazu H vystupují symetricky. Vyloučíme-li případ $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 0$, pak *soustava extremál bude jedna a táž, budeme-li hledat extrém integrálu J za podmínky, že integrál K má konstantní hodnotu, nebo budeme-li hledat extrém integrálu K za podmínky, že integrál J zachovává konstantní hodnotu.* V tom je obsažen zákon reciprocity ve své nejjednodušší formě.

Je-li $\lambda_2 = 0$, pak H je až na konstantní faktor právě rovno F; podmíněná extremála integrálu J bude identická s nepodmíněnou extremálou téhož integrálu, a tato extremála v obecném případě nebude zřejmě podmíněnou extremálou pro integrál K. Analogicky, jestliže $\lambda_1 = 0$, pak H je rovno G a podmíněná extremála integrálu K bude jeho nepodmíněnou extremálou.

Příklad 1. Jako první příklad provedeme vyšetření tvaru hmotného ohebného neroztažitelného vlákna délky l, které je na obou koncích zavěšeno. Tato úloha zřejmě vede na úlohu stanovit takovou polohu vlákna, při němž těžiště zaujímá nejnižší polohu. Proto za předpokladu, že vlákno leží v rovině xOy a že osa Ox běží horizontálně a osa Oy směřuje vertikálně nahoru, máme následující úlohu: mezi všemi rovinnými čarami délky l, jejichž koncové body leží v daných bodech $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, najít tu, u níž je pořadnice těžiště minimální.

Pořadnice Y těžiště čáry $y = y(x)$ se stanoví z formule

$$Y = \frac{1}{l} \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

chceme tedy najít minimum integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

za podmínky

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+ y'^2}\, dx = l.$$

Funkce H nabude v tomto případě tvaru

$$H(x, y, y') = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}.$$

Provedeme-li záměnu proměnné

$$y + \lambda = z,$$

nalezneme, že funkce H má tentýž tvar jako integrovaná funkce F v úloze o minimální rotační ploše (viz § 4).

Použijeme-li dříve získaných výsledků, dostaneme soustavu extremál v tomto tvaru:

$$y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha} - \lambda.$$

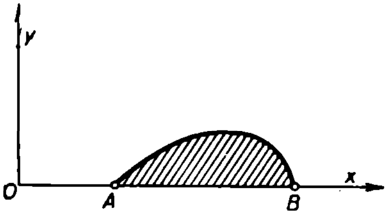
To je obecná rovnice řetězovky. Konstanty se určí z podmínek

$$y_0 = \alpha \operatorname{ch} \frac{x_0 - \beta}{\alpha} - \lambda, \quad y_1 = \alpha \operatorname{ch} \frac{x_1 - \beta}{\alpha} - \lambda,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha}\, dx = \alpha \left[\operatorname{sh} \frac{x_1 - \beta}{\alpha} - \operatorname{sh} \frac{x_0 - \beta}{\alpha}\right] = l.$$

Příklad 2. Mezi všemi křivkami délky l, spojujícími dva dané body A a B,[2]) určit tu, která omezuje spolu s úsečkou AB plochu největšího obsahu.

Vezmeme za osu Ox přímku, která jde dvěma danými body A a B (obr. 18); potom obsah plochy, ohraničené křivkou $y = y(x)$, o které zřejmě můžeme vždycky předpokládat, že leží celá nad osou Ox, je vyjádřen integrálem



Obr. 18.

$$J = \int_a^b y \, \mathrm{d}x,$$

kde a, b jsou úsečky bodů A a B. Vede tedy naše úloha na úlohu hledat maximum integrálu J za podmínky

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x = l$$

a za počátečních podmínek $y(a) = y(b) = 0$. Aplikujeme-li Eulerovu methodu, potřebujeme především určit soustavu extremál pro integrál

$$J = \int_a^b H(y, y') \, \mathrm{d}x,$$

kde

$$H(y, y') = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$

První integrál Eulerovy rovnice pro integrál J bude

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - y'\lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha$$

neboli

$$y = \alpha - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Položme

$$y' = \operatorname{tg}\varphi;$$

potom

$$y = \alpha - \lambda \cos\varphi.$$

Derivujeme-li tento vztah podle x, dostaneme

$$y' = \lambda \sin\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Z toho

$$x = \lambda \sin\varphi + \beta.$$

[2]) Předpokládáme předem, že je $l > \overline{AB}$, protože v opačném případě ztrácí úloha smysl.

Budou tedy rovnice soustavy extremál

$$x = \lambda \sin\varphi + \beta,$$
$$y = -\lambda \cos\varphi + \alpha,$$

neboli po vyloučení φ

$$(x-\beta)^2 + (y-\alpha)^2 = \lambda^2.$$

Jestliže tedy hledaná křivka existuje, pak tato křivka je kružnice. Tři parametry α, β, λ, určující polohu a poloměr kružnice, se najdou zřejmě jednoznačně z toho, že kružnice jde body A a B, a z podmínky, že délka hledané křivky je rovna l.

Zobecnění. Shora rozebranou methodu řešení nejjednodušší soperimetrické úlohy je možno snadno rozšířit na případ, když za třídu přípustných čar bereme křivky třídy C_1, spojující dva dané body a vyhovující k podmínkám:

$$K_i = \int_a^b G^{(i)}(x, y, y')\,\mathrm{d}x = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{1'}$$

kde funkce $G^{(i)}$ splňují obvyklé podmínky, kdežto l_i jsou konstanty.

Věta 3. *Jestliže křivka $y = y(x)$ vede k extrému integrálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na třídě přípustných křivek C_1, splňujících podmínky (1′), a jestliže kromě toho existuje k bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k$ v intervalu (a, b) takových, že determinant

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left| G^{(i)}[x_j, y(x_j), y'(x_j)] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G^{(i)}_{y'}[x_j, y(x_j), y'(x_j)] \right|$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

není roven nule, pak existuje k konstant λ_i takových, že křivka $y(x)$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'} = 0,$$

kde

$$H = F + \lambda_1 G^{(1)} + \lambda_2 G^{(2)} + \ldots + \lambda_k G^{(k)}.$$

Důkaz této věty se provede zcela analogicky jako v nejjednodušším případě.

Isoperimetrická úloha s volnými konci. Studujme nyní tuto úlohu. Nechť třída křivek $[\gamma]$ se skládá z těch křivek třídy C_1, pro něž funkcionál $K(\gamma) = \int_\gamma G_1(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ nabývá předepsané hodnoty l a jejichž koncové body leží na křivkách φ a ψ třídy C_1, definovaných rovnicemi $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Na třídě křivek $[\gamma]$ je definován funkcionál $J(\gamma) = \int\limits_{\gamma} F(x, y, y')\, \mathrm{d}x$. Hledáme tu křivku γ_0 třídy $[\gamma]$, pro niž $J(\gamma)$ dosahuje svého extrému.

Opakujeme-li úvahy § 16, zjistíme, že křivka γ_0 realisuje extrém funkcionálu $J(\gamma)$ mezi těmi křivkami třídy $[\gamma]$, které s ní mají společné koncové body, t. j. γ_0 realisuje extrém $J(\gamma)$ mezi křivkami o pevných koncových bodech, pro něž $K(\gamma) = l$.

Podle Eulerovy věty existuje konstanta λ taková, že γ_0 je extremálou pro integrál $J + \lambda K = \int H\, \mathrm{d}x$, t. j. vyhovuje Eulerově rovnici

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'} = 0.$$

Nyní dokážeme, že v koncových bodech A a B křivky γ_0 jsou splněny podmínky transversality

$$[H + (\varphi' - y_0')H_{y'}]^{(0)} = 0, \ [H + (\psi' - y_1')H_{y'}]^{(1)} = 0. \tag{4}$$

Sestrojme čtyrparametrovou soustavu oblouků, obsahující extremálu γ_0 a takovou, že každým párem bodů A' a B', ležících v některém okolí bodu A resp. bodu B, je možno vést jeden a jenom jeden oblouk této soustavy, spojitě závislý na jeho koncových bodech.

Pro oblouk γ_0 je

$$K(\gamma_0) = l,$$

avšak již pro oblouky γ této soustavy blízké ke γ_0 je

$$K(\gamma) = K(\gamma_0) + \varepsilon_\gamma = l + \varepsilon_\gamma,$$

kde ε_γ je malé číslo obecně různé od nuly.

Tyto oblouky je možno deformovat, aniž měníme polohu jejich koncových bodů tak, aby po deformaci bylo

$$K(\gamma) = l$$

na všech obloucích soustavy.

Vskutku, oblouk γ_0 není obloukem extremály funkcionálu $K(\gamma)$, proto lze najít takový vnitřní bod $C(x_1, y_1)$ tohoto oblouku, pro který výraz $G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}$ je na příklad větší než nula:

$$G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} > 0.$$

Pro křivky $y = y(x) + \delta y(x)$ naší soustavy blízké ke γ_0 je rovněž v bodech $(x_1, y_1 + \delta y_1)$ splněna tato nerovnost.

Jestliže zdeformujeme křivku γ v dostatečně malém okolí bodu $(x_1, y_1 + \delta y_1)$, pak přejde v křivku γ_1 s týmiž konci jako γ.

Při tom je

$$K(\gamma_1) - K(\gamma) \approx \left(G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right) \sigma,$$

kde σ značí plošku mezi γ a γ_1 (pravá strana tohoto výrazu je odpovídající variace v bodě funkcionálu $K(\gamma)$). Protože

$$G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} \neq 0,$$

pak je možno zvolit σ tak, aby

$$K(\gamma_1) - K(\gamma) = -\varepsilon_\gamma,$$

a tedy

$$K(\gamma_1) = l.$$

Deformace uvedeného tvaru lze provést spojitě na celé soustavě, takže jako výsledek dostaneme soustavu oblouků $\{\gamma_1\}$ takových, že

$$K(\gamma_1) = l.$$

Na soustavě oblouků $\{\gamma_1\}$ je $\mathrm{d}K(\gamma) = 0$. Je tudíž na naší soustavě

$$\mathrm{d}J(\gamma) = \mathrm{d}(J(\gamma) + \lambda K(\gamma)).$$

Křivka γ_0 je extremálou pro funkcionál

$$H = J + \lambda K.$$

Při přechodu od extremály γ_0 k jakékoli jiné křivce soustavy $\{\gamma_1\}$ je $\mathrm{d}J = \mathrm{d}(J + \lambda K)$ vyjádřeno formulí (11) § 16 při záměně J za $J + \lambda K$. Opakujeme-li úvahy § 16, dostaneme podmínky transversality (4).

Příklad. Najít rovnovážnou polohu hmotného pružného neroztažitelného řetězu, jehož konce kloužou po daných čarách φ a ψ.

Jak jsme již viděli (příklad str. 120), vede úloha k hledání minima $J = \int y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ za podmínky $K = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l$. Křivka, realisující minimum, je extremálou integrálu $\int (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$, t. j. řetězovka (str. 120). Protože integrovaný výraz má tvar $A\sqrt{1 + y'^2}$, kde $A = y + \lambda$, pak podle výsledku str. 99 podmínky transversality se stanou podmínkami orthogonality. Má tedy řetěz v rovnovážné poloze tvar řetězovky, orthogonální ve svých koncových bodech ke křivkám φ a ψ.

§ 21. Podmíněný extrém.

Formulace úlohy na podmíněný extrém. V § 12 jsme vyšetřovali extrémy funkcionálů, při čemž jsme vzali za třídu přípustných čar soustavu prostorových křivek spojujících buď dva dané body nebo body daných čar. V aplikacích na geometrii a mechaniku mají také velký význam úlohy, kdy za třídu přípustných čar bereme křivky, ležící na dané ploše, nebo pro případ více neznámých funkcí, ležící na některé varietě. Odpovídající variační úlohy mají název úlohy na *podmíněný extrém*. Methodika a hlavní myšlenky řešení se nám úplně objasní, jestliže vyšetříme nejjednodušší případ podobných úloh.

Formulace úlohy. *Mezi všemi křivkami*

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

třídy C_1, spojujícími dva dané body A a B a ležícími na dané ploše

$$\varphi(x, y, z) = 0,\text{[3]} \tag{5}$$

určit tu křivku, podél níž integrál

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx \tag{6}$$

nabývá extrémní hodnoty.

---

[3]) Budeme předpokládat, že plocha neobsahuje singulární body. Mimo to musíme napříště předpokládat, že

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 > 0,$$

t. j. že tečná rovina plochy ani v jednom bodě není kolmá k ose x. Od tohoto předpokladu lze upustit, řešíme-li úlohu v parametrickém tvaru.

Tuto úlohu lze bez obtíží redukovat na nejjednodušší úlohu variačního počtu o jedné neznámé funkci. Řešíme-li totiž rovnici (5) vzhledem k z a dosadíme-li dosažené výrazy z a z' do funkce F, dostaneme za integračním znamením funkci závislou jenom na x, y, y'.

Takový postup, který je principiálně možný, je však v řadě úloh prakticky nesnadno realisovatelný, neboť při jeho uskutečnění se řeší rovnice často velmi složité. Z toho důvodu se při řešení této úlohy používá postupu analogického odpovídajícím postupům, jichž jsme použili při vyšetřování úloh na podmíněný extrém funkcí více proměnných.

Lagrangeova methoda. Pro bezprostřední řešení shora formulované úlohy navrhl Lagrange methodu, která dostala název methoda neurčitých funkcionálních multiplikátorů. Tato methoda spočívá v následujícím postupu.

Konstruujeme funkci

$$\Phi(x, y, z, y', z') = F + \lambda(x)\varphi,$$

kde $\lambda(x)$ je zatím neurčená funkce proměnné x. Hledáme nepodmíněný extrém integrálu

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \, \mathrm{d}x. \tag{6'}$$

Vypíšeme pro tuto úlohu diferenciální rovnice Eulerovy

$$\left.\begin{aligned} \Phi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'} &= F_y + \lambda\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \\ \Phi_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{z'} &= F_z + \lambda\varphi_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

K soustavě (7) s třemi neznámými funkcemi: $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$ přidáme daný vztah

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Řešení tří rovnic (7) a (8) bude obsahovat dvě libovolné konstanty, které se určí z počátečních podmínek. Tato methoda je založena na této větě.

Věta 4. *Jestliže křivka*

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

vede k podmíněnému extrému integrálu J (6), pak existuje multiplikátor $\lambda(x)$ takový, že tato křivka je extremálou úlohy na nepodmíněný extrém integrálu J_1 (6').

Nechť křivka $y = y(x)$ a $z = z(x)$ z třídy přípustných čar realisuje minimum dané úlohy. Je-li $\bar{y} = \bar{y}(x)$, $\bar{z} = \bar{z}(x)$ jiná křivka z třídy přípustných čar, pak

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) = 0, \tag{9}$$

$$\Delta J = J(\bar{y}, \bar{z}) - J(y, z) \geqq 0. \tag{10}$$

Zvolíme libovolný bod x' z intervalu (x_0, x_1) a budeme předpokládat, že funkce $\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x)$, $\delta z(x) = \bar{z}(x) - z(x)$ jsou různé od nuly jenom v některém malém okolí bodu x'. Položíme

$$\sigma_1 = \int_{x_0}^{x_1} \delta y \,\mathrm{d}x, \quad \sigma_2 = \int_{x_0}^{x_1} \delta z \,\mathrm{d}x$$

a nechť v dalším ε_i označují vždycky veličiny nekonečně malé vyššího řádu než největší z hodnot $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$. Pruhem nad funkcemi φ_y, F_y atd. označíme hodnoty těchto funkcí pro hodnoty argumentů rovné x, $y + \Theta_1\delta y$, $z + \Theta_2\delta z$ atd., kde $|\Theta_i| \leqq 1$.

Máme

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x, y, \bar{z}) - \varphi(x, y, z)] \,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} (\bar{\varphi}_y\delta_y + \bar{\varphi}_z\delta_z) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \varphi_y|_{x=x'}\sigma_1 + \varphi_z|_{x=x'}\sigma_2 + \varepsilon_1.$$

Předpokládáme, že jeden z koeficientů u σ_1 a σ_2, na příklad φ_z, je různý od nuly; v tom případě

$$\sigma_2 = -\left[\frac{\varphi_y}{\varphi_z}\right]_{x=x'} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2. \tag{11}$$

Dále z (10), provedeme-li obvyklé transformace, dostaneme

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\bar{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{F}_{y'}\right) \delta y \,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} \left(\bar{F}_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{F}_{z'}\right) \delta z \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)_{x=x'} \cdot \sigma_1 + \left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)_{x=x'} \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \geqq 0. \tag{12}$$

Dosadíme-li σ_2 z (11) do (12), obdržíme

$$\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} - \frac{\varphi_y}{\varphi_z}\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right)\right]_{x=x'} . \, \sigma_1 + \varepsilon_4 \geqq 0. \tag{13}$$

Nerovnost (13) platí pro jakákoli dostatečně malá σ_1 kladná i záporná, kdežto ε_4 konverguje k nule rychleji než σ_1 a tudíž je nutné, aby (viz pomocnou větu § 8)

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} - \frac{\varphi_y}{\varphi_z}\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right) = 0. \tag{14}$$

To platí pro jakoukoli hodnotu $x = x'$ v intervalu (x_0, x_1), pro kterou $\varphi_z \neq 0$. Jestliže $(\varphi_z)_{x=x'} = 0$, potom $(\varphi_y)_{x=x'} \neq 0$ (viz poznámku na str. 125), a zaměníme-li úlohy y a z dojdeme k vztahu analogickému vztahu (14). Oba tyto vztahy lze zapsat v symetrickém tvaru:

$$\frac{F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}}{\varphi_z}.$$

Označíme-li stejné výrazy pravé a levé strany rovnosti znakem $-\lambda(x)$, obdržíme rovnice (7).

Z podaného důkazu věty je snadné zjistit, že z něho v podstatě plyne ještě tento výsledek: jestliže křivka (4) $y = y(x)$, $z = z(x)$ je taková, že pro jakákoli $\delta y(x)$, $\delta z(x)$, která splňují podmínky

$$\varphi_y(x, y, z)\delta y + \varphi_z(x, y, z)\delta z = 0, \tag{9'}$$

je variace J rovna nule:

$$\delta J = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right)\delta y + \left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right)\delta z\right]\mathrm{d}x = 0, \tag{10'}$$

pak existuje takové $\lambda(x)$, že jsou splněny podmínky (7).

Skutečně, když zintegrujeme (9'), dostaneme jako nahoře vztah (11), a z (10) dojdeme transformacemi analogickými transformacím formulí (12) a (13) ihned ke vztahu (14), c. b. d.

Obráceně, pro každé řešení systému (7) pro jakékoli $\lambda(x)$ rovnice (9') má svým důsledkem (10′). Pro to, abychom se o tom přesvědčili, stačí násobit obě strany rovnic (7) $\delta y(x)$ resp. $\delta z(x)$, provést integraci obou stran a obdržené rovnosti sečíst po členech.

Z toho a ze shora dokázané věty plyne:

K tomu, aby křivka (4) *realisovala podmíněný extrém integrálu* (6) *za podmínky* (5), *je nutné, aby pro ni*

$$\delta J = 0$$

pro všechny variace $\delta y(x)$, $\delta z(x)$, *vyhovující vztahu* (9′).

Hledání geodetických čar. Úloha najít oblouk γ:

$$y = y(x), \; z = z(x)$$

nejmenší délky, t. zv. geodetický oblouk, spojující body $A(x_0, y_0, z_0)$ a $B(x_1, y_1, z_1)$ plochy $\varphi(x, y, z) = 0$, vede k úloze najít minimum integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, \mathrm{d}x$$

za podmínky

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

a za podmínek pro koncové body

$$y(x_0) = y_0, \; z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1, \; z(x_1) = z_1.$$

Podle Lagrangeovy methody multiplikátorů vede tato úloha na hledání extremál integrálu

$$\int_{x_0}^{x_1} \{ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda\varphi(x, y, z)\} \, \mathrm{d}x.$$

Sestavíme Eulerovy rovnice:

$$\lambda(x)\varphi_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\lambda(x)\varphi_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Na základě známých vzorců Serret-Frenetových nabudou tyto rovnice tvaru

$$\lambda(x)\varphi_y = \frac{\cos\alpha_2}{r},$$

$$\lambda(x)\varphi_z = \frac{\cos\alpha_3}{r},$$

kde označujeme $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ směrové kosiny hlavní normály ke křivce γ a kde r je poloměr křivosti křivky γ. Z toho

$$\varphi_y : \varphi_z = \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3. \tag{15}$$

Dále z $\varphi(x, y, z) = 0$ plyne, že podél křivky γ: $y = y(x)$, $z = z(x)$ máme

$$\varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0. \tag{16}$$

Protože tedy hlavní normála ke křivce γ je kolmá k tečně téže křivky a směrnice tečny jsou úměrné $1, y', z'$, je

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 y' + \cos\alpha_3 z' = 0. \tag{17}$$

Z (15), (16) a (17) obdržíme

$$\varphi_x : \varphi_y : \varphi_z = \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3.$$

Protože však $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ jsou zároveň úměrné směrovým kosinům normály plochy $\varphi = 0$, dostaneme odtud tento výsledek: hlavní normály ke geodetickým čarám v každém bodě jsou současně normálami plochy.

§ 22. Obecný Lagrangeův problém.

Lagrangeovy methody multiplikátorů použijeme i v těch úlohách, v nichž bereme za třídu přípustných čar čáry, vyhovující některé soustavě diferenciálních rovnic.

Hledejme extrém integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, \mathrm{d}x,$$

když za třídu přípustných čar vezmeme prostorové křivky třídy C_1, vyhovující diferenciálnímu vztahu

$$\varphi(x, y, z, y', z') = 0 \tag{18}$$

a splňující na svých koncích některé další podmínky (t. j. pro $x = x_0$, $x = x_1$). Potom platí věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 5. *Jestliže křivka γ_0 činí funkcionál J extrémním za podmínky* (18) *a jestliže podél γ_0 jedna z derivací $\varphi_{y'}$ nebo $\varphi_{z'}$ není rovna nule, pak existuje funkce proměnné x, $\lambda(x)$, taková, že γ_0 bude integrální křivkou soustavy rovnic*

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'} = 0,\ H_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{z'} = 0, \tag{19}$$

kde

$$H = F + \lambda\varphi.$$

Tato věta udává methodu pro stanovení hledané křivky γ_0. Řešíme-li totiž současně rovnice (18) a (19), nalezneme neznámé funkce y, z, λ.

K odhadu počtu libovolných konstant v řešení naší soustavy rovnic a tedy počtu nutných počátečních podmínek zavedeme nové neznámé funkce:

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \; v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \tag{20}$$

Dojdeme k soustavě čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu (19) a (20) vzhledem k λ, y, z, u, v a k jednomu konečnému vztahu (18): $\varphi(y, z, u, v) = 0$.

Pokud jeden z výrazů $\varphi_u = \varphi_{y'}$ nebo $\varphi_v = \varphi_{z'}$ je různý od nuly, jak přirozeně předpokládáme, můžeme jednu z funkcí u nebo v vyjádřit ostatními a vyloučit ji ze soustavy (19) a (20). Dostaneme soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu o čtyřech neznámých funkcích, jejíž obecný integrál v obecném případě obsahuje čtyři libovolné konstanty.

Tři z nalezených funkcí, totiž

$$y = y(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$
$$z = z(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$
$$\lambda = \lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

budou zřejmě obecným řešením soustav (18) a (19). Stačí tedy k vyloučení libovolných konstant klást na koncové body čtyři podmínky (na příklad podmínky, že křivka prochází dvěma danými body prostoru).

Tak to bude vypadat v obecném případě. Avšak v některých problémech se může počet libovolných konstant snížit. Vyšetříme na příklad případ, když rovnice (18) má integrál

$$\psi(x, y, z) = C \tag{21}$$

(na příklad, má-li tato rovnice tvar $\psi_x + \psi_y y' + \psi_z z'$).

Má-li křivka dávající extrém procházet dvěma určenými body $A(x_0, y_0, z_0)$ a $B(x_1, y_1, z_1)$, pak lze v rovnici (21) stanovit konstantu C z rovnosti

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = C.$$

Koncový bod $B(x_1, y_1, z_1)$ křivky dávající extrém musí rovněž patřit k ploše $\psi(x, y, z) = C$ a tedy čtyři podmínky pro koncové body

$$y_0 = y(x_0),\ z_0 = z(x_0),\ y_1 = y(x_1),\ z_1 = z(x_1)$$

nejsou mezi sebou nezávislé; mezi nimi platí vztah

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = \psi(x_1, y_1, z_1). \tag{21'}$$

Po stanovení C můžeme řešit naši úlohu jako úlohu na extrém tvaru rozebíraného v § 21. (Extrém integrálu za podmínky, že křivka dávající extrém leží na dané ploše.) A v tom případě integrování odpovídajících rovnic nám dá dvě libovolné konstanty (viz str. 126). Přidáme-li k nim C, dostaneme tři libovolné konstanty, které se určí z podmínek na koncové body, jež jsou rovněž jenom tři (podle (21')).

Formulace úlohy. Shora uvedenou methodu lze rozšířit rovněž na úlohy obecnější. Hledejme na příklad extrém integrálu

$$\int_a^b F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x \tag{22}$$

za podmínky, že všechny čáry třídy přípustných křivek vyhovují soustavě k diferenciálních rovnic:

$$\varphi_j(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k) \tag{23}$$

a některým podmínkám pro koncové body v počtu $2n + k$.

Podobně jako v rozebraném nejjednodušším případě je možno dokázat, že *existuje-li hledaná křivka γ_0 a je-li podél křivky jeden z hlavních determinantů funkcionální matice*

$$\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\right) \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, k, \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

vždycky různý od nuly, pak γ_0 je integrální křivka následující soustavy $n + k$ diferenciálních rovnic:

$$\left.\begin{aligned} H_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

kde $H = F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j$ a kde λ_j jsou některé funkce x.

Tato věta umožňuje jako v nejjednodušších případech dříve rozebíraných skutečně určit hledanou křivku, předpokládáme-li, že hledaná křivka existuje. Neboť soustava (24) udává $n + k$ diferenciálních rovnic, z nichž k je prvního řádu a n druhého řádu, a tudíž obecný integrál této soustavy

$$y = f_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+k}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bude obsahovat $2n + k$ libovolných konstant. Podle věty náleží hledaná křivka γ_0 do této soustavy a k jejímu stanovení zbývá najít hodnoty konstant α. K tomuto cíli zřejmě stačí použít podmínek pro koncové body, jichž má být podle předpokladu právě $2n + k$.

Je-li počet podmínek pro koncové body větší než $2n + k$, pak je úloha obecně neřešitelná. Je-li těchto podmínek méně než $2n + k$, pak můžeme buď volit zbývající konstanty α tak, aby pro tyto hodnoty integrál J vzatý podél křivky γ_0 nabýval extremální hodnoty nebo, jak to činíme v § 18, hledat methodou variací další podmínky — zobecnit pojem transversality.

Uvedená úloha má název obecný Lagrangeův problém.[4])

Příklad. *Po jaké zavřené křivce musí letět letadlo, jež má vlastní rychlost v_0, aby v časovém intervalu T obletělo plochu největšího obsahu; při tom se předpokládá, že rychlost větru je konstantní a má konstantní směr.*

Nechť osa Ox jde ve směru rychlosti větru. Označme α úhel mezi vlastním směrem letadla a osou Ox a $x(t)$, $y(t)$ souřadnice polohy letadla v okamžiku t. Rychlost v letadla je geometrickým součtem jeho vlastní rychlosti v_0 a rychlosti větru. Protože komponenty v jsou rovny x' a y', je

$$x' = v_0 \cos\alpha + a, \quad y' = v_0 \sin\alpha. \tag{25}$$

Plocha, omezená zavřenou trajektorií letadla, má obsah vyjádřený integrálem

$$\tfrac{1}{2}\int_0^T (xy' - yx')\, dt. \tag{26}$$

Naše úloha vede k úloze najít maximum (26) za dvou podmínek (25). K tomu je třeba nalézt nepodmíněný extrém integrálu

$$\int_0^T [xy' - yx' + \lambda_1(x' - v_0 \cos\alpha - a) + \lambda_2(y' - v_0 \sin\alpha)]\, dt; \tag{27}$$

zde jsou hledanými funkcemi: $x(t)$, $y(t)$, $\alpha = \alpha(t)$.

---

[4]) Geometrický výklad obecné úlohy podmíněného extrému podal v r. 1934 ve své práci L. A. Ljusternik.

Podmínky kladené na funkci znamenají geometricky ve funkcionálním prostoru některou „varietu“ N. Body extrému funkcionálu $J(\gamma)$ na „varietě“ N jsou ty její body, v nichž se dotýká hyperplochy $J(\gamma) = \text{const}$. Z toho je zřejmo, jaký je geometrický význam pravidla Lagrangeových multiplikátorů. (Pozn. red. Gostechizdat, Moskva, Leningrad 1950.)

Sestavíme pro ně Eulerovy rovnice. Označíme-li F výraz za integračním znamením v (27), máme

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \text{ neboli } y' - \frac{d}{dt}(-y + \lambda_1) = 0, \tag{28}$$

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0 \text{ neboli } -x' - \frac{d}{dt}(x + \lambda_2) = 0, \tag{29}$$

$$F_\alpha = 0 \text{ neboli } \lambda_1 \sin\alpha - \lambda_2 \cos\alpha = 0. \tag{30}$$

Z (28) a (29) plyne, že

$$2x + C_2 = \lambda_2,\ 2y + C_1 = -\lambda_1. \tag{31}$$

Rovnoběžným posunutím počátku souřadnic lze dosáhnout, aby se konstanty C_1 a C_2 ve výrazech (31) pro x a y staly rovnými nule; potom je

$$x = \frac{\lambda_2}{2},\ y = -\frac{\lambda_1}{2}. \tag{32}$$

Přejdeme k polárním souřadnicím. Označíme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a φ průvodič a argument bodu (x, y), udávajícího polohu letadla v některém časovém okamžiku. Protože

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

dostaneme z (32)

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{33}$$

Z (30) plyne na druhé straně:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{34}$$

Porovnáme-li (33) a (34), obdržíme

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Směr letadla je kolmý k průvodiči. Substituce (35) do výrazu (25) vede k soustavě:

$$x' = -v_0 \sin\varphi + a,\ y' = v_0 \cos\varphi. \tag{36}$$

Násobíme-li první rovnici x, druhou y a dosadíme-li $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, dostaneme po sečtení

$$xx' + yy' = ax = ar\cos\varphi = ar\sin\alpha$$

neboli

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 = r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = ar\sin\alpha.$$

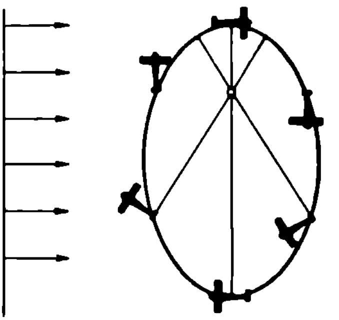
Použijeme-li formule (25), máme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{v_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$r = \frac{a}{v_0}y + C. \tag{37}$$

To je rovnice kuželosečky s ohniskem v počátku souřadnic. Protože $\frac{a}{v_0}$ musíme podle smyslu úlohy považovat za číslo menší než jedna (rychlost letadla musí převyšovat rychlost větru), pak rovnice (37) znamená elipsu o výstřednosti $\frac{a}{v_0}$ a s velkou osou probíhající ve směru osy Oy (obr. 19).

Je tedy křivka s maximální velikostí obsahu oblétnuté plochy elipsou s velkou osou kolmou na směr větru a s výstředností rovnou poměru rychlosti větru k rychlosti letadla, při čemž směr letadla musí být kolmý k průvodiči elipsy.


Obr. 19.

Souvislost mezi problémem isoperimetrickým a Lagrangeovým. Isoperimetrický problém lze převést na problém Lagrangeův.[5])

Chtějme najít extrém integrálu

$$J = \int_a^b F(x;\, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)};\; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)} \ldots;$$
$$y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)})\,\mathrm{d}x,$$

máme-li předepsány podmínky pro koncové body a další podmínky

$$K_i = \int_a^b F_i(x;\, y_1, y_1', \ldots;\, y_n, y_n', \ldots)\,\mathrm{d}x = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Označíme-li

$$\Psi_i(t) = \int_a^t F_i\,\mathrm{d}x \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

[5]) Lagrangeovu úlohu nelze na isoperimetrický problém převést.

máme

$$\Psi_i'(x) = F_i(x; y_1, y_1', \ldots; y_n, y_n', \ldots), \tag{38}$$

při čemž

$$\Psi_i(a) = 0, \ \Psi_i(b) = l_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{39}$$

Je tedy naše isoperimetrická úloha ekvivalentní úloze Lagrangeově: najít soustavu $n + m$ funkcí: $y_1, y_2, \ldots, y_n; \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$, spojených vztahy (38) a splňujících odpovídající podmínky pro koncové body pro funkce y_i a podmínky (39) pro funkce Ψ_i, a to takovou, aby za daných podmínek realisovala extrém integrálu

$$\int_a^b F \, \mathrm{d}x.$$

V souhlase s methodou Lagrangeovou vede naše úloha na problém vyhledat nepodmíněný extrém integrálu

$$\int_a^b [F - \Sigma\lambda_i(\Psi_i' - F_i)] \, \mathrm{d}x,$$

kde $\lambda_i(x)$ jsou nějaké funkce; F_i a F nezávisí na Ψ_i a jejich derivacích. Soustava $n + m$ rovnic pro naši Eulerovu úlohu se rozpadne na soustavu n rovnic vzhledem k funkcím y_i:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}[F + \Sigma\lambda_i F_i] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y_i'}[F + \Sigma\lambda_i F_i] - \ldots = 0$$

a na soustavu m rovnic vzhledem k funkcím Ψ_i, které nabudou tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

t. j. koeficienty λ_i se stanou konstantními čísly.