Zobecnění nejjednodušší úlohy

In: Michail Aleksejevič Lavrent'ev (author); Lazar Aronovič Ljusternik (author); Karel Winkelbauer (translator): Kurs variačního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 71–93.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402789

KAPITOLA III.

ZOBECNĚNÍ NEJJEDNODUŠŠÍ ÚLOHY

§ 12. Prostorová úloha.

Formulace úlohy. Doposud jsme se omezovali na úlohy, kdy funkcionál závisel na čáře ležící v rovině. Mnoho námi uvedených příkladů z fysiky nás přivádí k úloze najít extrémy funkcionálů závislých na prostorových čarách. Takovou je na příklad úloha o lomu světla.

Předpokládejme, že rychlost, jíž se šíří světlo v nehomogenním prostředí, je danou funkcí bodu prostoru (x, y, z):

$$v = v(x, y, z);$$

chceme určit dráhu světelného paprsku jdoucího dvěma danými body $A(x_0, y_0, z_0)$ a $B(x_1, y_1, z_1)$.

Použijeme-li opět shora popsaného Fermatova principu, je možno tuto úlohu převést na úlohu stanovit čáru, podél níž se pohybující paprsek dostane z bodu A do bodu B v nejkratší době. Jsou-li

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

rovnice libovolné křivky spojující dva dané body, pak je doba T, jíž světlo potřebuje, aby proběhlo z A do B (podél této křivky), vyjádřena integrálem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} \, dx.$$

Tím se naše úloha převede na úlohu určit v prostoru čáru, podél níž integrál T nabývá nejmenší hodnoty.

Budeme se nyní zabývat úlohou nalézt extrém funkcionálu závislého na čáře, ležící v prostoru o třech nebo více rozměrech. Tuto úlohu můžeme zformulovat takto. Je dána funkce

$$F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')$$

$2n + 1$ proměnných:

$$x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n'.$$

F je spojitá spolu se svými parciálními derivacemi podle všech argumentů do druhého řádu včetně. Mezi všemi křivkami

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

($y_i'(x)$ jsou spojité) prostoru o $n + 1$ rozměrech, spojujícími dva dané body $A(a_0, b_1^0, \ldots, b_n^0)$ a $B(a_1, b_1^1, \ldots, b_n^1)$ určit tu, podél níž integrál

$$J = \int_{a_0}^{a_1} F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

nabývá extremální hodnoty.

Vzdálenost mezi prostorovými křivkami. Když jsme vyšetřovali nejjednodušší úlohu, zpřesnili jsme formulaci úlohy tím, že jsme zavedli pojem „ε-okolí" dvou křivek a rozdělili obecný pojem extrému na extrém absolutní, relativní silný a relativní slabý. Všechny tyto pojmy lze ihned rozšířit na obecnou úlohu námi právě danou.

Vzdáleností k-tého řádu mezi křivkami

$$y_i = y_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

a

$$y_i = \overline{y}_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

budeme rozumět největší z maximálních hodnot $(k + 1)n$ funkcí:

$$|\overline{y}_i(x) - y_i(x)|, \ |\overline{y}_i'(x) - y_i'(x)|, \ldots, |\overline{y}_i^{(k)}(x) - y_i^{(k)}(x)|,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad a \leqq x \leqq a_1.$$

Zavedeme-li takovým způsobem pojem vzdálenosti, můžeme ihned přenést, aniž bychom něco změnili ve shora přijatých definicích ε-okolí různých řádů, definice absolutního, relativního atd. extrému na naši obecnou úlohu.

Nutné podmínky pro extrém. V této kapitole se omezíme jenom na důkaz základních nutných podmínek, které musí splňovat každá křivka třídy přípustných čar, podél níž integrál J nabývá extremální hodnoty.

Věta 1. *Jestliže křivka*

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

patří do třídy C_1 přípustných čar a vede k extrému integrálu J, pak funkce

$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *vyhovují systému diferenciálních rovnic:*[1])

$$\left.\begin{aligned} F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} &= 0, \\ F_{y_2} - \frac{d}{dx} F_{y_2'} &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ F_{y_n} - \frac{d}{dx} F_{y_n'} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Úloha této věty je v aplikacích táž, jako úloha již dříve rozbíraných analogických nutných podmínek v jiných problémech variačního počtu.

Systém (1) je systémem n diferenciálních rovnic o n neznámých funkcích: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Každá rovnice je v obecném případě rovnicí druhého řádu. Bude tedy obecný integrál tohoto systému obsahovat $2n$ libovolných konstant:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ y_2 &= y_2(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Každá křivka soustavy (2) se nazývá extremálou dané úlohy variačního počtu. Podle této věty je tedy každá křivka, která činí integrál J extremálním a která patří do třídy přípustných čar, extremálou.

Úloha skutečně určit hledanou křivku se tudíž převede na úlohu určit obecný integrál systému (2) a stanovit konstanty α_i. Podle shora uvedené formulace úlohy určí se tyto konstanty z $2n$ podmínek, které obdržíme z toho, že hledaná křivka jde body A a B.

Přejdeme k důkazu věty. Zavedeného pojmu variace křivky $y = y(x)$ lze přímo použít i v této úloze. Předpokládejme, že křivka

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dává minimum; v takovém případě pro všechny možné (dostatečně malé) variace přípustných křivek $y_i = y_i(x)$ musí se integrál J zvětšit. Tudíž se musí zvětšit, zůstanou-li všechny funkce y_i pro $i \neq k$ beze

[1]) **Nezáleží na tom, zda extrém — slabý, silný, absolutní.**

změny a funkci $y_k = y_k(x)$ variujeme. V souhlase s tím budeme předpokládat, že všechna $y_i = y_i(x)$ $(i \neq k)$ jsou pevná, a potom je J funkce čáry $y_k = y_k(x)$. Podle základní nutné podmínky takové nejjednodušší úlohy musí se variace tohoto funkcionálu rovnat nule v každém bodě. Je tedy

$$F_{y_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, .., n).$$

O existenci y_k''. Při důkazu rovnic (1) jsme předpokládali, že všechny funkce $y_i'(x)$ mají spojité derivace. Zapíšeme-li rovnice (1) ve tvaru Du Bois-Reymondově, můžeme dokázat, že za jistých podmínek bude mít hledaná křivka také spojitou druhou derivaci. Máme

$$\int_{a_0}^{x} F_{y_k}\,\mathrm{d}x - F_{y_k'} = C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

kde C_k je konstanta. Podél extremály je výraz

$$Q_k(x) = \int_{a_0}^{x} F_{y_k}\,\mathrm{d}x$$

spojitou funkcí, která má spojitou derivaci. Zapíšeme-li soustavu (3) ve tvaru

$$F_{y_k'} = Q_k(x) - C_k \tag{4}$$

a předpokládáme-li, že je funkcionální determinant $\Delta = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \right|$ podél některé extremály $y_k = y_k(x)$ různý od nuly a že C_k v soustavě (4) jsou konstanty, které odpovídají extremále $y_k = y_k(x)$, pak ať je hodnota $x(a_0 \leqq x \leqq a_1)$ jakákoli, existuje řešení soustavy (4) vzhledem k y_k', které je identicky rovné $y_k'(x)$ a diferencovatelné spolu s $Q_k(x)$. Z toho soudíme, je-li podél extremály $\Delta \neq 0$, že tato extremála náleží do třídy C_2.[2])

Variace v bodě. V případě prostorových úloh nelze definici variace přímo zobecnit proto, že místní změny křivky je možno dělat v kterémkoli směru. Budiž dán funkcionál

$$J(\gamma) = \int_a^b F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_1', y_2', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x,$$

[2]) Viz G. M. Fichtengol'c, Kurs differencial'nogo a integral'nogo isčislenija, sv. 1, kap. VI, § 2.

definovaný na čáře γ, dané v $(n + 1)$-rozměrném prostoru $(x, y_1, \ldots, y_n)$ rovnicemi

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ a \leqq x \leqq b).$$

Budiž kromě toho γ křivka ze třídy přípustných čar a γ_1 křivka blízká ke křivce γ téže třídy, daná rovnicemi

$$y_i^{(1)} = y_i(x) + \delta y_i(x).$$

Předpokládáme, že funkce δy_i jsou rovny nule všude až na interval $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, kde x_0 $(a < x_0 < b)$ je úsečka některého bodu na γ. Vektory o složkách

$$\delta x = 0,\ \delta y_1, \ldots, \delta y_n$$

spojující body křivky γ s body (které mají tytéž úsečky) křivky γ_1, budeme považovat za rovnoběžné v celém našem intervalu $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Označíme-li δn délku odpovídajícího vektoru a p_i jeho směrový kosinus vzhledem k ose Oy_i, pak $\delta y_i = p_i \delta n$, při čemž p_i jsou konstantní pro všechny naše vektory. Potom je

$$J(\gamma_1) - J(\gamma) \approx \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta y_i \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} p_i \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta n \,\mathrm{d}x.$$

Pro dostatečně malé ε máme

$$\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta n \,\mathrm{d}x \approx \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta n \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0} \delta N,$$

kde δN je obsah válcové plochy, ležící mezi γ a γ_1 a vytvořené vektory δn. Tak je

$$J(\gamma_1) - J(\gamma) \approx \delta N \sum_{i=1}^{n} p_i \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0}. \tag{5}$$

Z toho plyne, že

$$\lim_{\delta N \to 0} \frac{J(\gamma_1) - J(\gamma)}{\delta N} = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0}. \tag{5'}$$

Konvergenci δN k nule bereme v tom smyslu, že δn, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta n$ a ε konvergují k nule.

Výraz (5′) budeme nazývat funkcionální derivací funkcionálu J v daném bodě $M(x_0, y_i)$ a v daném směru $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, kdežto pravou část výrazu (5) variací v bodě M v daném směru $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tohoto funkcionálu.

Eulerova rovnice znamená, že funkcionální derivace integrálu J v libovolném bodě extremály (nebo jeho variace v bodě) je v libovolném směru rovna nule.

Obráceně, jestliže je v každém bodě vyšetřované křivky variace podle libovolného směru rovna nule, pak je křivka extremálou a variace funkcionálu je pro ni rovna nule.

V § 10 jsme dokázali invarianci Eulerovy rovnice v případě jedné neznámé funkce. Zcela analogické úvahy ukazují, že soustava Eulerových rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zachová svůj tvar, přejdeme-li od souřadnic $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ k libovolným $n + 1$ křivočarým souřadnicím.

Princip Hamilton-Ostrogradského. Vyšetřujme mechanický systém bez vazeb, skládající se z n bodů, které mají hmoty: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Označíme-li (x_i, y_i, z_i) souřadnice i-tého bodu, dostaneme pro kinetickou energii systému:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}\right)^2\right].$$

Budiž G potenciál systému závislý na $3n$ souřadnicích všech bodů. Z jeho definice plyne, že síla, která působí na i-tý bod, má komponenty

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}, \frac{\partial G}{\partial y_i}, \frac{\partial G}{\partial z_i}.$$

Silami setrvačnosti se nazývají síly o komponentách

$$-m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad -m_i \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad -m_i \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2}.$$

Kdybychom jimi působili v bodech soustavy, anulovali bychom jejich zrychlení.

Nechť se soustava pohybuje, při čemž pohyb je určen $3n$ funkcemi:

$$x_i = x_i(t), \; y_i = y_i(t), \; z_i = z_i(t),$$

a nechť má v určitém okamžiku t soustava polohu určenou $3n$ souřadnicemi jejích bodů. Nechť se dále každý z těchto bodů posune o δx_i, δy_i, δz_i. D'Alembertův princip o dynamickém systému bez vazeb říká:

Jestliže k silám působícím na body našeho systému přidáme síly setrvačnosti, pak je jejich celková elementární práce při libovolném posuvu rovna nule:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}\right) \delta x_i + \left(\frac{\partial G}{\partial y_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2}\right) \delta y_i + \left(\frac{\partial G}{\partial z_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2}\right) \delta z_i\right] = 0.$$

Označíme-li

$$\delta n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\delta x_i^2 + \delta y_i^2 + \delta z_i^2)},$$

$$p_i = \frac{\delta x_i}{\delta n}, \; q_i = \frac{\delta y_i}{\delta n}, \; r_i = \frac{\delta z_i}{\delta n},$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)p_i+\left(\frac{\partial G}{\partial y_i}-m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)q_i+\left(\frac{\partial G}{\partial z_i}-m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)r_i\right]=0.$$

Výraz

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}p_i+\frac{\partial G}{\partial y_i}q_i+\frac{\partial G}{\partial z_i}r_i\right)$$

není ničím jiným, než funkcionální derivací v uvedeném bodě integrálu $\int G\,dt$ (připomeňme, že G závisí jenom na souřadnicích), kdežto výraz

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x}{dt^2}p_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}q_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}r_i\right)$$

je derivace v bodě funkcionálu $\int T\,dt$; obě derivace jsou vzaty ve směru (p_i, q_i, r_i). Znamená tudíž d'Alembertův princip, že se funkcionální derivace (nebo variace) podle libovolného směru integrálu $\int(G+T)\,dt$ po trajektorii $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$ rovnají nule. A to znamená (viz výše), že podél trajektorie

$$x_i = x_i(t),\ y_i = y_i(t),\ z_i = z_i(t)$$

$(3n + 1)$-rozměrného prostoru je

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(G+T)\,dt = 0. \tag{6}$$

Rovnost (6) vyjadřuje Hamilton-Ostrogradského princip. Integrál (6) má rozměr $\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$, t. j. rozměr účinku.

Komparativní křivky

$$x_i = \bar{x}_i(t),\ y_i = \bar{y}_i(t),\ z_i = \bar{z}_i(t)$$

v $(3n + 1)$-rozměrném prostoru (t, x_i, y_i, z_i) spojují tytéž body

$$[t_0, x_i(t_0), y_i(t_0), z_i(t_0)],\ [t_1, x_i(t_1), y_i(t_1), z_i(t_1)],$$

jako křivka $x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t)$. Přejdeme nyní od soustavy $3n$ souřadnic (x_i, y_i, z_i) určujících pohyb k libovolné soustavě souřadnic $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$ transformací

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}),\\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}),\\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n})\end{aligned}\right\}\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Kinetická energie bude pak mít tvar kvadratické formy

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_j}{dt}\ (a_{ij} = a_{ji})$$

v derivacích nových souřadnic podle času; a_{ij} závisí na souřadnicích q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Potenciál G přejde ve funkci nových souřadnic q_i. Zřejmě zachová podmínka (6) při přechodu k novým souřadnicím svoji platnost. Eulerovy rovnice podle (6) nám dají

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{7}$$

kde znakem $\dot{q}_i$ označujeme derivaci $\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$.

Rovnice (7) mají v mechanice název Lagrangeových rovnic.

Přijali jsme za východisko d'Alembertův princip, odvolili jsme z něho princip Hamilton-Ostrogradského a jako důsledek posledního principu Lagrangeovy rovnice. Tyto tři formy obecných rovnic mechaniky jsou ekvivalentní a mohli bychom za východisko vzít kteroukoli z nich. Hamilton-Ostrogradského princip má řadu výhod před jinými formami. Rovnice (6) nezávisí na soustavě souřadnic a je často vhodné použít této vlastnosti invariance; již jsme jí použili při odvození Lagrangeových rovnic.

Protože T je kvadratická forma vzhledem k $\dot{q}_i$, je

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \tag{8}$$

Výraz $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ se nazývá obecným impulsem.

Nechť potenciál G a kinetická energie T nezávisí v explicitním tvaru na čase t. V tomto případě máme [3])

$$(G + T) - \sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = -C. \tag{7'}$$

---

[3]) Skutečně, násobíme-li rovnice (7) výrazem $\dot{q}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}q_i$ a sečteme-li je, pak nalezneme

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial G}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \mathrm{d}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i - \mathrm{d}\sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

t. j.

$$\mathrm{d}G + \mathrm{d}T - \mathrm{d}\sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

z čehož dostaneme (7').

Odtud podle (8) dostaneme

$$H = -G + T = C, \tag{9}$$

kde C je konstantní veličina. Výraz H není ničím jiným než celkovou energií soustavy a vztah (9) vyjadřuje známý zákon o zachování mechanické energie.

§ 13. Legendreova podmínka pro prostorovou úlohu.

Nechť jsou v třídě C_1 přípustných čar, ležících v prostoru o $n + 1$ rozměrech $(x, y_1, \ldots, y_n)$ a definovaných rovnicemi $y_i = y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), zvoleny dvě blízké křivky γ a $\bar{\gamma}$. Buďte

$$\left.\begin{aligned} y_i &= y_i(x) \\ y_i &= \bar{y}_i(x) \end{aligned}\right\} \quad [i = 1, 2, \ldots, n;\ \bar{y}_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x)]$$

rovnice těchto křivek. Na třídě C_1 budiž definován funkcionál

$$J(\gamma) = \int_a^b F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx. \tag{10}$$

V tom případě je

$$\begin{aligned} J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) &= \int_a^b \{F(x, \bar{y}_i, \bar{y}_i') - F(x, y_i, y_i')\}\, dx = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i')\, dx + \end{aligned}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^b (\sum_{i,j} F_{y_iy_j}\, \delta y_i \delta y_j + 2\sum_{i,j} F_{y_iy_j'}\delta y_i \delta y_j' + \sum_{i,j} F_{y_i'y_j'}\delta y_i' \delta y_j')\, dx + \varepsilon,$$

kde ε je veličina řádu vyššího než $r^2(\gamma, \gamma_1)$ (viz § 11). Výraz

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i')\, dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'}\right) \delta y_i\, dx$$

je hlavní lineární část přírůstku (variace). Je-li γ extremálou, pak je $\delta J \equiv 0$ a hlavní lineární částí přírůstku se stane kvadratický funkcionál (forma) v δy_i, t. j. druhá variace

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \int_a^b (\sum_{i,j} F_{y_iy_j}\delta y_i \delta y_j &+ 2\sum_{i,j} F_{y_iy_j'}\delta y_i \delta y_j' + \\ &+ \sum_{i,j} F_{y_i'y_j'}\delta y_i' \delta y_j')\, dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Nutná podmínka pro to, aby γ minimalisovala J, spočívá podle obecných úvah vyložených na konci předcházející kapitoly v tom, aby bylo $\delta^2 J$ nezáporné.

Věta 2 (Legendreova podmínka). *Nutnou podmínkou nezápornosti druhé variace je nezápornost formy*

$$A_M = \sum_{i,j} F_{y_i' y_j'} \eta_i \eta_j \tag{12}$$

v každém bodě M extremály neboli, což je totéž, splnění nerovností

$$F_{y_1' y_1'} \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1' y_1'} & F_{y_1' y_2'} \\ F_{y_2' y_1'} & F_{y_2' y_2'} \end{vmatrix} \geqq 0, \ldots, \begin{vmatrix} F_{y_1' y_1'} & F_{y_1' y_2'} & \ldots & F_{y_1' y_n'} \\ F_{y_2' y_1'} & F_{y_2' y_2'} & \ldots & F_{y_2' y_n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{y_n' y_1'} & F_{y_n' y_2'} & \ldots & F_{y_n' y_n'} \end{vmatrix} \geqq 0$$

v každém bodě extremály.

Uvedeme formu A_M v některém bodě

$$M(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0))$$

extremály na kanonický tvar lineární transformací:

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k.$$

Po provedení nabude forma A_M tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(M)} \xi_i^2. \tag{13}$$

Forma A_M je nezáporná, jsou-li všechna odpovídající čísla $\lambda_i^{(M)}$ nezáporná.

Zavedeme funkce $\delta z_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí:

$$\delta y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \delta z_k(x),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ (α_{ik} jsou konstanty).

V tom případě je

$$\delta y_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \delta z_k'.$$

Výraz za integračním znamením v $\delta^2 J$ přejde ve výraz

$$\Sigma a_{ij} \delta z_i \delta z_j + 2 \Sigma b_{ij} \delta z_i \delta z_j' + \Sigma c_{ij} \delta z_i' \delta z_j',$$

kde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} jsou nějaké funkce proměnné x. V bodě M máme

$$c_{ij}(x_0) = \lambda_{ij}^{(M)} = 0 \quad (i \neq j).$$

Budiž nyní všude v intervalu $[a, b]$ $\delta z_2 = \delta z_3 = \ldots = \delta z_n = 0$. Potom je

$$\delta J = \int (a_{11}\delta z_1^2 + 2b_{11}\delta z_1 \delta z_1' + c_{11}\delta z_1'^2)\, \mathrm{d}x.$$

Podle Legendreovy věty (viz kap. II) je nutnou podmínkou nezápornosti $\delta^2 J$ vyplnění nerovnosti $c_{11} \geqq 0$ všude v $[a, b]$. Speciálně tedy $c_{11}(x_0) = \lambda_1^{(M)} \geqq 0$. Analogicky se dokazuje nutnost nerovností $\lambda_2^{(M)} \geqq 0$, $\lambda_3^{(M)} \geqq 0, \ldots, \lambda_n^{(M)} \geqq 0$. Z toho tedy plyne nezápornost formy A_M.

Příklad. V Hamiltonově principu

$$\delta \int (G + T)\, \mathrm{d}t = 0$$

neobsahuje G derivace q_i', kdežto T je positivně definitní forma těchto derivací:

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma a_{ij} q_i' q_j'.$$

Forma A_M bude v tomto případě mít tvar

$$A_M = \Sigma T_{q_i' q_j'} \eta_i \eta_j = \tfrac{1}{2} \Sigma a_{ij} \eta_i \eta_j.$$

Z kladnosti formy T plyne kladnost formy A_M. Zde je tedy Legendreova podmínka pro minimum splněna.

§ 14. Případ derivací vyššího řádu.

Formulace úlohy. Shora rozvinutá methoda variací umožňuje skoro beze změny řešit také ty úlohy variačního počtu, kdy integrovaná funkce závisí nejenom na první derivaci, nýbrž také na derivacích vyšších řádů.

Jako příklady takových úloh mohou sloužit úlohy theorie pružnosti: určit tvar prohnuté osy nosníku při různých podmínkách na konce. Jak je známo, vede tato úloha na vyhledání extrému potenciální energie systému. Na druhé straně závisí potenciální energie prohnutého nosníku na křivosti. Zabývá se tedy tato skupina úloh hledáním extremálních křivek, když integrovaná funkce závisí na derivacích prvního a druhého řádu neznámé funkce.

Problém položíme obecně:

Mezi všemi křivkami $y = y(x)$ třídy C_n v intervalu $[x_0, x_1]$, vyhovujícími v koncových bodech podmínkám

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

určit tu, podél níž integrál

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, \mathrm{d}x$$

(F je daná funkce $n + 2$ proměnných $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$) *nabývá extrémní hodnoty.*

Především se podrobněji zmíníme o funkci F. O funkci F budeme jako obvykle předpokládat, že je spojitá spolu se všemi svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu podle všech argumentů pro $x_0 \leqq x \leqq x_1$ a pro všechny možné hodnoty druhých argumentů.

Odvození Euler-Poissonovy rovnice. První základní výsledek v tomto problému je uveden v této větě.

Věta 3. *Jestliže křivka $\gamma : y = y(x)$, která patří do třídy přípustných čar C_n, vede k extrému integrálu J, pak vyhovuje rovnici*

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F_{y^{(n)}} = 0. \qquad (14)$$

Objasníme si význam tohoto výsledku. Rovnice (14), jak je patrno, bude v obecném případě (pro $F_{y^{(n)}y^{(n)}} \neq 0$) řádu $2n$ a tudíž její obecný integrál bude obsahovat $2n$ libovolných konstant a bude mít tvar

$$y = f(x, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n). \qquad (15)$$

Jestliže tedy hledaná křivka existuje, je obsažena v soustavě křivek (15) závislé na $2n$ parametrech. Konstanty můžeme za předpokladu existence hledané křivky určit z $2n$ podmínek na koncové body.

Omezíme se na důkaz věty pro případ $n = 2$:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, \mathrm{d}x.$$

Mějme dány dvě křivky γ a $\bar{\gamma}$ třídy C_2

$$y = y(x),\ y = \bar{y}(x) = y(x) + \delta y,$$

které mají v koncových bodech společné tečny a spojují body $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$:

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = \delta y'(x_0) = \delta y'(x_1) = 0.$$

Vzdáleností $r(\gamma, \bar{\gamma})$ mezi těmito křivkami nazveme největší z následujících tří čísel:

$$\max|\delta y|, \ \max|\delta y'| \ \text{a} \ \max|\delta y''|.$$

Nyní najdeme hlavní lineární část přírůstku J při přechodu od křivky γ k nekonečně blízké křivce $\bar{\gamma}$. Máme

$$\begin{aligned} \Delta J = J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'')\,\mathrm{d}x - \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'')\,\mathrm{d}x + \varepsilon r(\gamma, \bar{\gamma}), \end{aligned} \tag{16}$$

kde jsou argumenty funkcí F_y, $F_{y'}$, $F_{y''}$ argumenty $x, y(x), y'(x), y''(x)$ a kde ε konverguje k nule spolu s $r(\gamma, \bar{\gamma})$. První člen ve výrazu ΔJ je lineární funkcionál lišící se od ΔJ o hodnotu nekonečně malou řádu vyššího než $r(\gamma, \bar{\gamma})$. To je variace našeho funkcionálu

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'')\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže nyní činí γ funkcionál J extremálním, je

$$\delta J \equiv 0. \tag{17}$$

Použijeme totiž formule (16) na křivku γ, definovanou rovnicí $\bar{y} = y(x) + t\delta y$, kde t je libovolný parametr, y a δy jsou křivky třídy C_2. Potom dostaneme

$$\Delta J = J(y + t\delta y) - J(y) = t\delta J + \varepsilon|t|\, r(y, y + \delta y).$$

Nyní zbývá jenom nechat konvergovat t libovolným způsobem k nule a použít pomocné věty § 8 (str. 51).

Snažme se nyní transformovat δJ. Integrujeme-li druhý a třetí člen za integračním znamením per partes, dostaneme

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\,\mathrm{d}x = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \delta y\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\delta y''\,\mathrm{d}x = [F_{y''}\delta y']_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\,\delta y'\,\mathrm{d}x =$$

$$= [F_{y''}\delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''}\delta y\,\mathrm{d}x;$$

podle podmínek na koncové body všechny zintegrované členy odpadnou a nakonec obdržíme

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''}\right) \delta y\,\mathrm{d}x.$$

Je-li $\delta J \equiv 0$, pak podle základní pomocné věty (a poznámky na str. 55) máme

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0. \tag{18}$$

Je tedy nakonec, jestliže pro γ nabývá integrál J extrému, křivka γ integrálem rovnice (18). Tím je věta úplně dokázána.

Poznámka. Při integraci per partes jsme u vyšetřované funkce použili existence derivací třetího a čtvrtého řádu. Od této hypothesy můžeme upustit, zaměníme-li vyšetřovanou transformaci Lagrangeovu transformací Du Bois-Reymondovou.

Případ snížení řádu Poissonovy rovnice. V některých případech můžeme řád $2n$ Euler-Poissonovy rovnice snížit o jednu.

1. Předpokládejme, že integrovaná funkce nezávisí explicitně na y; potom nabude rovnice Euler-Poissonova tvaru

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

neboli po integrování

$$F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''} + \ldots \mp \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} F_{y^{(n)}} = C.$$

To je právě hledaný první integrál.

2. Předpokládejme, že integrovaná funkce nezávisí explicitně na nezávisle proměnné x:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', \ldots, y^{(n)})\, \mathrm{d}x.$$

Provedeme záměnu proměnných. Za nezávisle proměnnou budeme považovat y a x vezmeme za neznámou funkci proměnné y. Označíme-li pro stručnost znakem x' derivaci $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ a obecně $x'' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}, \ldots, x^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}y^n}$, dostaneme

$$\mathrm{d}x = x'\,\mathrm{d}y,\ y' = \frac{1}{x'};\ y'' = -\frac{x''}{x'^3},\ y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots$$

Z toho plyne, že integrál J nabude v nových proměnných tvaru

$$J = \int_{y_0}^{y_1} F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots\right) x'\,\mathrm{d}y.$$

Touto transformací převedeme původní úlohu variačního počtu na novou, při čemž nyní není ve výrazu za integračním znamením neznámá funkce $x = x(y)$ explicitně obsažena. Tudíž, položíme-li

$$F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \ldots\right) = \Phi(y, x', x'', \ldots, x^{(n)}),$$

bude mít hledaný první integrál tvar

$$\Phi_{x'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Phi_{x''} + \ldots \mp \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\Phi_{x^{(n)}} = C.$$

3. Nakonec ukážeme jeden případ, kdy je možno ihned napsat obecný integrál rovnice Euler-Poissonovy. Nechť integrovaná funkce F závisí jenom na $y^{(n)}$. V tomto případě rovnice nabude tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

neboli

$$F_{y^{(n)}} = P_{n-1}(x),$$

kde $P_{n-1}(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Označíme-li znakem f funkci inversní k funkci $F_{y^{(n)}}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = f(P_{n-1}(x)),$$

z čehož y najdeme integrováním:

$$y = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{n} f[P_{n-1}(x)] \, dx^n + Q_{n-1}(x),$$

kde Q_{n-1} je libovolný mnohočlen stupně $n - 1$.

Příklad. Do válcových otvorů A a B jsou vetknuty konce válcového homogenního pružného hmotného nosníku. Považujeme-li otvory A a B za části jednoho horizontálně položeného válce, chceme určit tvar prohnuté osy nosníku.

Všechny rozměry, hustotu a koeficienty pružnosti nosníku považujeme za známé. K řešení použijeme principu: je-li systém ve stabilní rovnováze, pak se pro všechny možné posuvy systému potenciální energie systému zvětší.

Označíme $2l$ vzdálenost mezi podpěrami, ϱ hmotu délkové jednotky nosníku a $\mathrm{d}s$ element oblouku prohnuté osy nosníku. Zavedeme soustavu souřadnic. Nechť Ox spojuje opěrné body, počátek souřadnic rozděluje úsečku AB na polovinu a osa Oy směřuje vertikálně nahoru. Vypočteme nyní potenciální energii nosníku za předpokladu, že rovnice její pružné osy je $y = y(x)$. Potenciální energie, která je způsobena silami pružnosti při ohybu, bude rovna

$$\tfrac{1}{2}\mu \int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 \mathrm{d}s,$$

kde L je délka části nosníku mezi podpěrami, φ je úhel, který svírá tečna s osou Ox a μ je konstantní koeficient, závislý na modulu pružnosti a na momentu setrvačnosti příčného průřezu nosníku. Nyní vyšetříme potenciální energii vytvořenou gravitačním polem. Element nosníku $\mathrm{d}s$ bude mít potenciální energii rovnu $\varrho y \, \mathrm{d}s$. Z toho dostaneme potenciální energii všech elementů nosníku rovnou

$$\int_0^L \varrho y \, \mathrm{d}s.$$

Sečteme-li nalezené veličiny, obdržíme celkovou potenciální energii nosníku

$$E = \int_0^L \left[\tfrac{1}{2}\mu \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \varrho y \right] \mathrm{d}s.$$

Dosadíme-li $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x$ a $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (křivost), dostaneme

$$E = \int_{-l}^{+l} \left\{ \tfrac{1}{2}\mu \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} + \varrho y \sqrt{1 + y'^2} \right\} \mathrm{d}x.$$

Podle shora připomenutého principu vede naše úloha na hledání minima výrazu E. Výraz za integračním znamením na x explicitně nezávisí; můžeme tudíž použít shora vyloženého postupu k tomu, abychom ihned snížili řád rovnice. Avšak přitom obdržíme rovnici třetího řádu dosti složitého tvaru, kterou nelze v obecném případě elementárně integrovat. Z toho důvodu se nebudeme zabývat jejím vyšetřováním v tomto tvaru a omezíme se na přibližné řešení v této úloze obvyklé.

Považujeme-li ohyb nosníku za neveliký, zanedbáme druhé mocniny y'; pak výraz E nabude tvaru

$$E = \int_{-l}^{l} \{\tfrac{1}{2}\mu y''^2 + \varrho y\}\,\mathrm{d}x.$$

Eulerova rovnice vypadá nyní takto:

$$\varrho + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mu y'' = 0,$$

neboli

$$y^{(\mathrm{IV})} = -\frac{\varrho}{\mu};$$

její obecný integrál bude

$$y = -\frac{\varrho}{24\mu}x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Čtyři neurčené konstanty α, β, γ, δ je možno stanovit z počátečních podmínek. Z podmínek symetrie máme ihned $\alpha = \gamma = 0$; kromě toho v koncových bodech je

$$y(-l) = y(l) = -\frac{\varrho l^4}{24\mu} + \beta l^2 + \delta = 0,$$

$$y'(-l) = y'(l) = -\frac{\varrho}{6\mu}l^3 + 2\beta l = 0.$$

Odtud nakonec nalezneme

$$y = \frac{\varrho}{24\mu}[-x^4 + 2l^2x^2 - l^4].$$

§ 15. Případ funkce více proměnných.

Ve všech předcházejících úlohách jsme se zabývali funkcionály závislými na funkcích jedné proměnné. Přejdeme nyní k úloze najít extrém funkcionálu závislého na funkci n proměnných.

V rozvoji tohoto oddílu variačního počtu patří velká zásluha vynikajícímu ruskému matematikovi M. V. Ostrogradskému, který publikoval v r. 1834 svoji práci o variačním počtu pro množné integrály. V tomto díle M. V. Ostrogradskij uvádí nejobecnější vyjádření variace množného integrálu, když výraz za integračním znamením je funkcí několika proměnných a parciálních derivací libovolného řádu.

Formule Ostrogradského, která vešla do všech učebnic analysy, týkající se transformace množných integrálů, je uvedena v této práci spolu s definicí variace množného integrálu.

Formulace úlohy. Mějme v n-rozměrném prostoru oblast Q, kterou budeme pro jednoduchost považovat za omezenou. Vezmeme třídu C_1 funkcí $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definovaných a spojitých v oblasti Q a na její hranici, které mají spojité parciální derivace $\varphi_i = \varphi_{x_i}$. Nazveme vzdáleností mezi funkcemi φ a ψ třídy C_1:

$$r(\varphi, \psi) = \max\{|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|, \\ |\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\} \\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soustava těch funkcí ψ, pro něž $r(\varphi, \psi) < \varepsilon$, tvoří ε-okolí funkce φ. Definujme na C_1 funkcionál

$$J(\varphi) = \int_Q \ldots \int F(x_i, \varphi, \varphi_i)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

kde F je daná spojitá funkce $2n + 1$ proměnných argumentů x_i, φ, $\varphi_{x_i} = \varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, mající parciální derivace podle všech argumentů do třetího řádu včetně.

Označme $\overline{C}_1$ soustavu těch funkcí φ ze třídy C_1, které nabývají na hranici Q předepsaných hodnot. Na hranici Q je definována funkce $f(A)$ a funkce φ v každém bodě A hranice Q je rovna

$$\varphi(A) = f(A).$$

Mezi všemi funkcemi třídy $\overline{C}_1$ hledáme tu, která činí funkcionál $J(\varphi)$ extrémním.

Nechť funkce φ z $\overline{C}_1$ činí $J(\varphi)$ extrémním a funkce $\varphi + \delta\varphi$ je některá jiná funkce téže třídy, ležící v jistém ε-okolí funkce φ. Zřejmě je ve všech bodech hranice

$$\delta\varphi(A) = 0.$$

Klademe-li

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\varphi = \delta\varphi_{xi} = \delta\varphi_i,$$

najdeme, že

$$J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi) =$$

$$= \int\int_Q \dots \int [F(x_i, \varphi + \delta\varphi, \varphi_i + \delta\varphi_i) - F(x_i, \varphi, \varphi_i)]\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\int_Q \dots \int [F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^n F_{\varphi_i}\delta\varphi_i]\, dx_1 \dots dx_n + \eta, \tag{19}$$

kde η je veličina vyššího řádu ve srovnání s $r(\varphi, \varphi + d\varphi)$.

Výraz

$$\delta J = \int\int_Q \dots \int [F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^n F_{\varphi_i}\delta\varphi_i]\, dx_1 \dots dx_n$$

je hlavní lineární částí přírůstku $J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi)$[4]) a nazývá se variací J.

Nutnou podmínkou pro to, aby pro φ nabýval funkcionál $J(\varphi)$ extrému, je, aby jeho variace byla identicky rovna nule:

$$\delta J = \int\int_Q \dots \int [F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^n F_{\varphi_i}\delta\varphi_i]\, dx_1 \dots dx_n \equiv 0 \tag{20}$$

(to se dokazuje stejně jako analogická tvrzení v § 8 a 14 na základě pomocné věty na str. 51); identita (20) musí platit pro všechna $\delta\varphi$ ze třídy C_1, které jsou rovny nule na hranici Q.

Transformace variace. Je možno, jak jsme to učinili v § 8, převést integrací per partes výraz δJ na jednodušší tvar.

Vedeme všechny možné přímky rovnoběžné s osou Ox_i; vyšetřujeme interval AB, ležící na jedné takové přímce uvnitř Q, jehož koncové body leží na hranici Q. Máme

$$\int_A^B F_{\varphi_i}\delta\varphi_i\, dx_i = [F_{\varphi_i}\delta\varphi]_A^B - \int_A^B \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\delta y\, dx_i =$$

$$= -\int_A^B \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\,\delta\varphi\, dx_i. \tag{21}$$

[4]) T. j. liší se od přírůstku o veličinu nekonečně malou řádu vyššího než $r(\varphi, \varphi + \delta\varphi)$.

Zde je $\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})$ úplná derivace funkce

$F_{\varphi_i}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$

podle x_i:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) = F_{x_i\varphi_i} + F_{\varphi\varphi_i}\varphi_i + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_j\varphi_i}\varphi_{ji}.$$

Na základě (20) a (21) dojdeme k rovnostem

$$\iint_Q \ldots \int F_{\varphi_i}\delta\varphi_i \, dx_1 \ldots dx_n = -\iint_Q \ldots \int \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\delta\varphi \, dx_1 \ldots dx_n$$

a

$$\delta J = \iint_Q \ldots \int [F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i}\delta\varphi_i] \, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \iint_Q \ldots \int \left[F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\right] \delta\varphi \, dx_1 \ldots dx_n \equiv 0. \qquad (22)$$

Pomocná věta. *Je-li*

$$\iint_Q \ldots \int M\eta \, dx_1 \ldots dx_n \equiv 0,$$

kde M je spojitá funkce na Q a η libovolná funkce třídy C_1, jež je na hranici Q rovna nule, pak je

$$M \equiv 0$$

všude v oblasti Q.

Nechť je totiž v bodě A oblasti Q

$$M(A) = c \neq 0;$$

vezměme pro určitost $c > 0$. Sestrojme kolem bodu A pravoúhelník R:

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i,$$

který leží celý v Q a je takový, že $M(A') > \frac{c}{2}$ pro každý bod A' z R. Definujme funkci η na Q tímto způsobem:

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i},$$

je-li bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v obdélníku R, a

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

leží-li bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vně R.

Lehko se přesvědčíme, že funkce η je funkcí třídy C_1, která je rovna nule na hranici Q, a proto musí pro ni platit

$$\iint_Q \dots \int M\eta \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = 0.$$

Na druhé straně je

$$\iint_Q \dots \int M\eta \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \iint_R \dots \int M\eta \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n >$$

$$> \frac{c}{2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi (x_i - a_i)}{b_i - a_i} \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n > 0.$$

Tím jsme dospěli ke sporu.

Z pomocné věty a z rovnosti (22) dostaneme: jestliže funkcionál $J(\varphi)$ nabývá extrému pro funkci $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pak funkce $\varphi(x_1, x_2, \dots \dots, x_n)$ na oblasti Q musí vyhovovat parciální diferenciální rovnici

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{\varphi_i} = 0 \tag{23}$$

(rovnici Euler-Ostrogradského).

V rozvedené formě nabude rovnice (23) tvaru

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} (F_{x_i \varphi_i} + F_{\varphi \varphi_i} \varphi_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_i \varphi_j} \varphi_{x_i x_j}) = 0. \tag{24}$$

Kromě toho vyhovuje funkce φ podmínkám na hranici:

$$\varphi(A) = f(A).$$

Příklad 1. Najít plochu o nejmenším povrchu, jdoucí danou čarou

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t). \tag{25}$$

Budiž rovnice plochy

$$z = \varphi(x, y).$$

Podmínkou pro to, aby plocha procházela čarou (25), je:

$$\varphi(x(t), y(t)) = z(t).$$

Povrch je vyjádřen integrálem

$$J(\varphi) = \iint_Q \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Eulerova rovnice pro tento integrál má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\varphi_y}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}\right]=0. \tag{26}$$

Podmínka (26) ukazuje, že hledaná plocha o minimálním povrchu (t. zv. minimální plocha) má všude střední křivost rovnou nule.

Příklad 2. Dirichletovým integrálem funkce φ po oblasti Q n-rozměrného prostoru se nazývá integrál

$$\mathrm{D}(\varphi)=\int\int_Q\ldots\int\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}^2\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Určit podmínky, za nichž funkce φ, nabývající na hranici Q daných hodnot, minimalisuje Dirichletův integrál.

Eulerova rovnice (24) vypadá takto:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_ix_i}=0. \tag{27}$$

Vskutku, v případě $F=\Sigma\varphi_{x_i}^2$ je

$$F_\varphi=F_{\varphi\varphi_i}=F_{x_i\varphi_i}=0,\ F_{\varphi_i\varphi_j}=\begin{cases}2 \text{ pro } i=j,\\ 0 \text{ pro } i\neq j.\end{cases}$$

Použijeme-li Laplaceova operátoru, můžeme zapsat rovnici (27) ve tvaru

$$\Delta\varphi=0.$$

Je tedy Laplaceova rovnice rovnicí Euler-Ostrogradského pro Dirichletův integrál.

Invariance Eulerovy rovnice. Tak jako v případě funkce jedné proměnné, tak i o Eulerově rovnici (23) nebo (24) se můžeme přesvědčit, že je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Vezmeme jako příklad Laplaceovu rovnici, t. j. rovnici Euler-Ostrogradského pro Dirichletův integrál.

Vyšetřme rovinný případ:

$$\mathrm{D}(\varphi)=\int\int_Q(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Přejdeme od kartézských souřadnic (x, y) k polárním souřadnicím (ϱ, Θ). Máme:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\cos\Theta,\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial y}=\sin\Theta,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=-\frac{1}{\varrho}\sin\Theta,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\cos\Theta.$$

Z toho dostaneme

$$\mathrm{D}(\varphi) = \iint\limits_Q (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_Q \left[\left(\varphi_\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varphi_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\varphi_\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varphi_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2\right] \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\Theta =$$

$$= \iint\limits_Q \left[\varrho \varphi_\rho^2 + \frac{1}{\varrho}\, \varphi_\Theta^2\right] \mathrm{d}\Theta\, \mathrm{d}\varrho. \tag{28}$$

Sestavíme-li pro poslední integrál z rovnosti (28) Euler-Ostrogradského rovnici, dostaneme Laplaceovu rovnici v polárních souřadnicích

$$\varphi_\varrho + \varrho \varphi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho}\, \varphi_{\Theta\Theta} = 0.$$

Analogicky je možno sestrojit pro trojrozměrný případ Laplaceovu rovnici v polárních souřadnicích (nebo v jakékoli jiné soustavě souřadnic, na příklad v eliptických souřadnicích, viz o tom příklad na konci § 30).