Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Užití teorie souměrných integrálních rovnic

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 270–293.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402777

Zřejmě $q(t_0) < 1$ pro libovolné t_0 a

$$|\mu_n(s, t)| < q(t_0)\, A_{n-1}, \quad t \leqq t_0. \tag{6}$$

Chceme-li vyšetřovat postupné aproximace pro nějaké t, pevně zvolíme libovolné t_0, $t_0 \geqq t$. Užijeme-li nerovnosti (6), najdeme:

$$|\mu_n(s, t)| < A_0\, q^n(t_0). \tag{7}$$

Z posledního odhadu plyne konvergence postupných aproximací, stejnoměrná pro $0 \leqq t \leqq t_0$.

Jestliže hranice L je hladká a se spojitou křivostí, pak odhad pro $|\mu_n(s, t)|$ je:[1]

$$|\mu_n(s, t)| < \frac{A_0 (pt)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \tag{8}$$

Zde Γ je Eulerova funkce gamma a konstanta p závisí na tvaru hranice.

KAPITOLA 5

UŽITÍ THEORIE SOUMĚRNÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 60. Vlastní kmity struny. Uvažujme nehomogenní strunu délky l, jež v rovnovážné poloze zaujímá úsečku $\langle 0, l\rangle$ na ose abscis a je podrobena napětí T. Koncové body struny budeme považovat za pevné. Nechť na strunu působí spojitě rozložená síla $F(x, t)$. Tím myslíme, že v okamžiku t působí na element struny $\langle x, x + \mathrm{d}x\rangle$ síla rovnající se $F(x, t)\,\mathrm{d}x$. Budeme dále předpokládat, že tato síla působí kolmo na strunu. Rovnice pro příčné kmity struny, jak je známo, má tvar

$$\varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \tag{1}$$

kde $\varrho(x)$ je hustota struny v bodě s úsečkou x.

[1] Viz [6].

Mimo rovnici (1) musí výchylka struny $u(x, t)$ od rovnovážné polohy vyhovovat ještě podmínkám:

a) krajovým

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{2}$$

jež vyjadřují, že konce struny jsou upevněny;

b) počátečním

$$u(x, 0) = f(x), \; u_t(x, 0) = \varphi(x), \tag{3}$$

kde $\varphi(x)$ a $f(x)$ je počáteční rychlost resp. počáteční výchylka struny.

Abychom určili vlastní kmity struny, řešme nejprve pomocnou úlohu. Najděme tvar struny, jejíž konce jsou upevněny a jež je v rovnováze vlivem spojitě rozložené síly $F(x)$. Rovnice (1) přejde v tom případě na rovnici rovnováhy struny

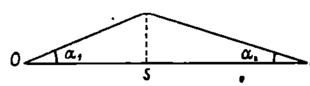
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{T} F(x) = 0. \tag{4}$$

Uvažujme speciální případ, kdy na celou strunu, s výjimkou jednoho bodu $x = s$, nepůsobí zatížení a v bodě s působí bodová síla, jež se číselně rovná jednotce. V našem případě $F(x) = 0$ pro $x \neq s$; na každém z intervalů $0 \leqq x < s$ a $s < x \leqq l$ má rovnice (4) tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

odkud

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 \text{ pro } 0 \leqq x < s,$$
$$u = \alpha_2 x + \beta_2 \text{ pro } s < x \leqq l.$$



Obr. 17.

Poslední rovnice ukazují, že na každém z intervalů $\langle 0, s)$ a $(s, l\rangle$ má struna tvar přímky (obr. 17).

Poněvadž koncové body struny jsou upevněny, platí rovnice (2). Užijeme-li jich, nalezneme, že $\beta_1 = 0$ a $\beta_2 = -\alpha_2 l$, a tedy

$$u = \begin{cases} \alpha_1 x & (0 \leqq x < s), \\ \alpha_2(x - l) & (s < x \leqq l). \end{cases}$$

Zbývá určit koeficienty α_1 a α_2. Všimněme si především toho, že pro $x = s$ je struna spojitá a oba výrazy pro u musí v tomto bodě souhlasit. To dává

$$\alpha_1 s = -\alpha_2(l - s). \tag{5}$$

Součet vertikálních průmětů napětí na obou částech struny se musí rovnat jedné — velikosti síly působící v bodě s:

$$T(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2) = 1$$

čili, poněvadž úhly γ_1 a γ_2 jsou malé,

$$T(\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2) = 1.$$

Avšak $\operatorname{tg}\gamma_1 = \alpha_1$, $\operatorname{tg}\gamma_2 = -\alpha_2$. Odtud

$$T(\alpha_1 - \alpha_2) = 1. \tag{6}$$

Určíme-li α_1 a α_2 z rovnic (5) a (6) a dosadíme-li je do (4), dostaneme

$$u = \begin{cases} \dfrac{x(l-s)}{lT} & (0 \leqq x \leqq s), \\ \dfrac{s(l-x)}{lT} & (s \leqq x \leqq l). \end{cases}$$

Zaveďme označení

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{x(l-s)}{l} & (0 \leqq x \leqq s), \\ \dfrac{s(l-x)}{l} & (s \leqq x \leqq l). \end{cases} \tag{7}$$

Potom

$$u = \frac{1}{T} G(x, s). \tag{8}$$

Pro další výklad je důležité si všimnout toho, že funkce $G(x, s)$ je souměrná:

$$G(x, s) \equiv (Gs, x). \tag{9}$$

Nyní už není obtížné určit rovnovážný tvar struny při působení libovolné, spojitě rozložené síly $F(x)$. Vskutku, jestliže v bodě s působí síla, rovná nikoliv jednotce, nýbrž nějaké veličině F, bude příslušná výchylka rovna

$$u = \frac{F}{T} G(x, s).$$

Nechť nyní v bodech $s_1, s_2, \ldots, s_n$ struny působí síly $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Potom

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{T} G(x, s_k).$$

Přejdeme-li v této rovnici k limitě, nalezneme, že v případě spojitě rozložené síly s hustotou $F(s)$

$$u = \frac{1}{T} \int_0^l G(x, s) F(s) \, ds. \tag{10}$$

Ze vzorce (10) lehce získáme rovnici pro kmity struny. Podle d'Alembertova principu stačí připojit k síle $F(s) \, ds$, působící na element struny ds, „inerciální sílu" $- \varrho(s) \, ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Potom dostaneme

$$u(x, t) = \frac{1}{T} \int_0^l G(x, s) F(s) \, ds - \frac{1}{T} \int_0^l \varrho(s) G(x, s) \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} \, ds \tag{11}$$

— integro-diferenciální rovnici pro kmity upevněné struny, jež je ekvivalentní diferenciální rovnici (1) s krajovými podmínkami (2). Síla F může záviset na čase — potom v rovnici (11) je třeba psát $F(s, t)$ místo $F(s)$. Jestliže $F(s, t) \equiv 0$, dostaneme integro-diferenciální rovnici vlastních kmitů upevněné struny

$$u(x, t) = - \frac{1}{T} \int_0^l \varrho(s) G(x, s) \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} \, ds. \tag{12}$$

Budeme hledat periodická řešení této rovnice; položme

$$u(x, t) = v(x) \sin(\nu t + \varepsilon).$$

Dosadíme-li toto do (12), zjistíme, že $v(x)$ vyhovují integrální rovnici

$$v(x) - \frac{\nu^2}{T} \int_0^l \varrho(s) G(x, s) v(s) \, ds = 0. \tag{14}$$

Jestliže je struna homogenní, pak $\varrho(x) = \varrho =$ konst. V tom případě $v(x)$ vyhovuje souměrné integrální rovnici

$$v(x) - \mu \int_0^l G(x, s) v(s) \, ds = 0; \ \mu = \frac{\nu^2 \varrho}{T}. \tag{15}$$

V obecném případě není rovnice (14) souměrná. Lze ji však lehce učinit souměrnou (viz § 18), jestliže ji násobíme výrazem $\sqrt{\varrho(x)}$ a položíme

$$v(x) \sqrt{\varrho(x)} = \varphi(x), \quad G(x, s) \sqrt{\varrho(x)\, \varrho(s)} = K(x, s).$$

Potom dostaneme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0; \quad \lambda = \frac{\nu^2}{T}, \tag{16}$$

jejíž jádro je souměrné.

Dokažme, že charakteristická čísla rovnice (16) jsou kladná. Nechť $\varphi(x)$ a λ vyhovují rovnici (16). Klademe-li $\varphi(x) = v(x) \sqrt{\varrho(x)}$, najdeme, že $v(x)$ vyhovuje rovnici (14), v které je $\frac{\nu^2}{T}$ nahrazeno λ:

$$v(x) - \lambda \int_0^l \varrho(s)\, G(x, s)\, v(s)\, ds = 0. \tag{14_1}$$

Ze (7) je patrno, že pro $x = 0$ a pro $x = l$ se $G(x, s)$ rovná nule. Avšak potom ze (14_1) plyne, že

$$v(0) = v(l) = 0. \tag{17}$$

Derivováním rovnice (14) dojdeme k diferenciální rovnici

$$v''(x) + \lambda\, \varrho(x)\, v(x) = 0. \tag{18}$$

Připouštějíce, že $v(x)$ může být komplexní, násobme (18) výrazem $\overline{v(x)}$ a zintegrujme:

$$\int_0^l v''(x)\, \overline{v(x)}\, dx + \lambda \int_0^l \varrho(x)\, |v(x)|^2\, dx = 0. \tag{19}$$

Prvý integrál integrujme per partes. V důsledku rovnic (17)

$$\int_0^l v''(x)\, \overline{v(x)}\, dx = -\int_0^l |v'(x)|^2\, dx.$$

Rovnice (19) nyní dává

$$\lambda = \frac{\int_0^l |v'(x)|^2\, dx}{\int_0^l \varrho(x) |v^2(x)|\, dx} > 0.$$

Jestliže určíme charakteristická čísla λ_n rovnice (16), určíme tím také frekvence charakteristických kmitů struny, jež se rovnají

$$\frac{\nu_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_n T}.$$

Příslušné charakteristické funkce určují tvar struny kmitající s frekvencí $\frac{\nu_n}{2\pi}$:

$$v_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\varrho(x)}}.$$

Charakteristické funkce a charakteristická čísla souměrné rovnice (16) mohou být určeny methodami, vyloženými v kap. 1 části I.

§ 61. Kmity struny, jejíž hustota se mění lineárně. Pro určitost výpočtů budeme předpokládat, že $l = 1$ a hustota $\varrho(x)$ je dána rovnicí

$$\varrho(x) = \varrho_0(1 + x). \tag{1}$$

Potom rovnice (14), § 60 nabude tvaru

$$v(x) - \frac{\nu^2\varrho_0}{T}\int_0^1 (1 + s)\, G(x, s)\, v(s)\, ds = 0.$$

Násobme tuto rovnici $\sqrt{1 + x}$ a položme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{1 + x}\, v(x), \\ K(x, s) &= \sqrt{(1 + x)(1 + s)}\, G(x, s); \\ \lambda &= \frac{\nu^2\varrho_0}{T}. \end{aligned} \tag{2}$$

Funkce $\varphi(x)$ vyhovuje integrální rovnici

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0. \tag{3}$$

Všimněme si, že v našem případě

$$G(x, s) = \begin{cases} x(1 - s) & (0 \leqq x \leqq s), \\ s(1 - x) & (s \leqq x \leqq 1). \end{cases}$$

Určeme frekvenci základního tónu. K tomu stačí určit prvé charakteristické číslo rovnice (3). Užijme methody § 15, jež dává λ_1 pomocí stop jádra. Podle vzorce (5), § 15

$$A_2 = \int_0^1\int_0^1 K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_0^1\int_0^1 (1 + x)(1 + s)\,G^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s =$$

$$= 2\int_0^1 (1 + x)(1 - x)^2\,\mathrm{d}x \int_0^x (1 + s)\,s^2\,\mathrm{d}s = \tfrac{127}{5040}.$$

Ve druhém přibližném vzorci (7_1), § 15

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[2m]{A_{2m}}}$$

položme $m = 1$.

V § 60 jsme dokázali, že charakteristická čísla rovnice (3) jsou kladná. V takovém případě

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} = 6{,}300$$

a tedy

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{T\lambda_1}{\varrho_0}} = 2{,}510\sqrt{\frac{T}{\varrho_0}}.$$

Abychom dostali přesnější hodnotu λ_1, vypočtěme druhé iterované jádro

$$K_2(x, s) = \int_0^1 K(x, t)\,K(t, s)\,\mathrm{d}t = \sqrt{(1 + x)(1 + s)}\int_0^1 (1 + t)\,G(x, t)\,G(t, s)\,\mathrm{d}t.$$

Vypočtěme jádro $K_2(x, s)$ za předpokladu, že $x > s$. Pro $x < s$ se jádro $K_2(x, s)$ určí z podmínky, že je souměrné. Integrační obor $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na tři: Od nuly do s, od s do x a od x do 1. Užijeme-li definice $G(x, s)$, dostaneme:

$$\int_0^1 (1 + t)\,G(x, t)\,G(t, s)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^s (1 + t)\,t^2(1 - x)(1 - s)\,\mathrm{d}t + \int_s^x t(1 - t^2)\,s(1 - x)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_x^1 (1 + t)(1 - t)^2\,xs\,\mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{5}{12}xs - \tfrac{1}{2}x^2s - \tfrac{1}{6}s^3 + \tfrac{1}{6}xs^3 - \tfrac{1}{12}s^4 + \tfrac{1}{12}x^4s + \tfrac{1}{12}xs^4.$$

Odtud pro $x > s$,

$$K_2(x, s) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12}(5xs - 6x^2s - 2s^3 + 2xs^3 - s^4 + x^4s + xs^4).$$

Hodnotu $K_2(x, s)$ pro $x < s$ dostaneme jednoduchou výměnou argumentů x a s: pro $x < s$

$$K_2(x, s) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12}(5xs - 6xs^2 - 2x^3 + 2x^3s - x^4 + xs^4 + x^4s).$$

Nyní

$$A_4 = \int_0^1\int_0^1 K_2^2(x, s)\,dx\,ds = 2\int_0^1 dx\int_0^x K_2^2(x, s)\,ds = 0{,}0006154.$$

Ve druhém vzorci (7_1), § 15 položme nyní $m = 2$. Potom

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 6{,}349.$$

Tato hodnota λ_1 je menší než hodnota přesná. Přibližnou hodnotu, jež je větší než hodnota přesná, dostaneme, vezmeme-li prvý ze vzorců (7_1), § 15, který pro $\lambda_1 > 0$ má tvar

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}.$$

Položme v tomto vzorci $m = 1$. Potom

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} = 6{,}398.$$

Přesná hodnota λ_1 leží mezi čísly 6,349 a 6,398. Je zajímavé si všimnout, že poměrně nepřesný vzorec

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}$$

dal hodnotu λ_1 s chybou menší než 2%.

Známe-li hodnoty A_2 a A_4, můžeme vypočítat i druhé charakteristické číslo λ_2, užívajíce přibližného vzorce (6), § 17:

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|}\sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}},\quad B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m}.$$

Klademe-li $m = 1$ a všimneme-li si, že $\lambda_2 > 0$, máme:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{A_2^2 - A_4}} = 49{,}9.$$

§ 62. Greenova funkce. Podrobný výklad otázek, spojených s pojmem Greenovy funkce, najde čtenář v mnoha dobře známých učebnicích. Poukažme na př. na knihy Couranta-Hilberta [4], V. I. Smirnova [8] a I. I. Privalova [7]. Omezíme se zde proto pouze na definici Greenovy funkce a na uvedení jejích základních vlastností.

Začněme nejjednodušším případem. Nechť je dán obyčejný lineární diferenciální operátor druhého řádu

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\,y, \tag{1}$$

kde $p(x) \geqq 0$. Budeme uvažovat funkce $y(x)$, které v koncových bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ splňují podmínky

$$\alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) = 0, \quad \gamma\, y(b) + \delta\, y'(b) = 0 \tag{2}$$

a uvnitř intervalu jsou spojité i se svou první derivací. Druhou derivaci $y''(x)$ podrobíme jediné podmínce – aby $L(y)$ měl smysl. Předpokládejme, že ani jedna z těchto funkcí, kromě funkce $y(x) \equiv 0$, neanuluje operátor $L(y)$. Jinak řečeno, předpokládáme, že jediným řešením rovnice

$$L(y) = 0, \tag{3}$$

jež vyhovuje podmínkám (2) a je spojité i se svou první derivací, je $y \equiv 0$. Greenovou funkcí operátoru $L(y)$ pro krajové podmínky (2) se nazývá funkce dvou proměnných $G(x, y)$, která má tyto vlastnosti:

1. $G(x, s)$ je spojitá pro $a \leqq x \leqq b$ a $a \leqq s \leqq b$.

2. V každém z intervalů $a \leqq x < s$ a $s < x \leqq b$ jsou derivace $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial s}$ spojité.

3. V bodě $x = s$ má derivace $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial s}$ skok určený vzorcem

$$\left.\frac{\partial G(x, s)}{\partial s}\right|_{x = s + 0} - \left.\frac{\partial G(x, s)}{\partial s}\right|_{x = s - 0} = \frac{1}{p(s)}. \tag{4}$$

4. Pro pevně zvolené s vyhovuje $G(x, s)$ rovnici (3)

$$L(G) = 0$$

v každém z intervalů $a \leqq x < s$ a $s < x \leqq b$.

5. Jako funkce proměnné x vyhovuje $G(x, s)$ krajovým podmínkám (2).

Greenovu funkci lze sestrojit takto:

Určíme integrály $u(x)$ a $v(x)$ rovnice (3), vyhovující Cauchyho podmínkám

$$u(a) = \beta,\ u'(a) = -\alpha,$$
$$v(b) = \delta,\ v'(b) = -\gamma.$$

Je zřejmé, že $u(x)$ vyhovuje také prvé z krajových podmínek (2) a $v(x)$ druhé. Integrály $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně nezávislé, neboť v opačném případě by existoval integrál rovnice (3), vyhovující oběma krajovým podmínkám (2), a to je ve sporu s naším předpokladem.

Z theorie lineárních diferenciálních rovnic je známa identita

$$p(x)[u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)] = -c. \tag{5}$$

Konstanta c je různá od nuly, neboť v opačném případě by $u(x)$ a $v(x)$ byly lineárně závislé.

Jestliže jsme určili integrály $u(x)$ a $v(x)$, můžeme okamžitě napsat výraz pro Greenovu funkci, totiž

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{u(x)\, v(s)}{c} & (a \leqq x \leqq s), \\[2ex] \dfrac{u(s)\, v(x)}{c} & (s \leqq x \leqq b). \end{cases} \tag{6}$$

Není obtížné se přesvědčit o tom, že funkce (6) má vlastnosti 1 až 5, vytčené v definici Greenovy funkce.

Ze vzorce (6) přímo plyne, že $G(x, s)$ je souměrná funkce, t. j.

$$G(x, s) \equiv G(s, x). \tag{7}$$

Skutečně, nechť na př. $x < s$. Potom $G(x, s) = \dfrac{u(x)\, v(s)}{c}$. Počítáme-li $G(s, x)$, musíme vzít dolní řádku v (6), neboť prvý argument, s, je větší než druhý. Avšak potom

$$G(s, x) = \frac{1}{c} u(x)\, v(s) = G(x, s).$$

Druhá vlastnost Greenovy funkce, velmi důležitá pro aplikace, je vyjádřena následující větou:

Integrál nehomogenní rovnice

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\,y = -f(x), \tag{8}$$

vyhovující krajovým podmínkám (2), *je dán vzorcem*

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)\,f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Řešení (9) *je jediné.*

Důkaz této věty najde čtenář v učebnicích citovaných na začátku tohoto paragrafu.

Není obtížné se přesvědčit o tom, že funkce $G(x, s)$ sestrojená v § 60 je Greenovou funkcí operátoru $L(y) \equiv y''$ při krajových podmínkách $y(0) = y(l) = 0$.

Vzorec (9) nám dovoluje podat jednoduchou a užitečnou interpretaci Greenovy funkce. V rovnici (8) budeme $f(x)$ považovat za spojitě rozloženou sílu a $y(x)$ za posunutí bodu x vzhledem k rovnovážné poloze vyvolané touto silou. V takovém případě je $G(x, s)$ posunutí bodu x, vyvolané jednotkovou bodovou silou, působící v bodě s. Předpokládejme, že v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ působí taková spojitě rozložená síla $f(x)$, jejíž hlavní vektor se rovná jednotce:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{10}$$

Nechť intervaly $\langle a, s - \varepsilon\rangle$ a $\langle s + \varepsilon, b\rangle$ nejsou podrobeny působení sil, takže v těchto intervalech $f(x) = 0$. Ve vzorci (9) integrály v intervalech $\langle a, s - \varepsilon\rangle$ a $\langle s + \varepsilon, b\rangle$ vymizejí, a tak dostaneme

$$y(x) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} G(x, t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Předpokládáme-li, že $f(x) > 0$, můžeme užít věty o střední hodnotě integrálu:

$$y(x) = G(x, s')\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x, s'), \quad s - \varepsilon < s' < s + \varepsilon.$$

Necháme-li $\varepsilon \to 0$, přejdeme k bodové síle působící v bodě s a rovné jedné v důsledku rovnice (10). Přitom $s' \to s$, a poněvadž $G(x, s)$ je spojitá, je v limitě

$$y(x) = G(x, s),$$

což jsme měli dokázat.

Při úlohách z theorie kmitů a theorie stability je třeba často řešit následující problém. Je dána diferenciální rovnice

$$L(y) + \lambda\, r(x)\, y = 0 \tag{11}$$

čili podrobněji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + [q(x) + \lambda\, r(x)]\, y = 0,$$

kde $r(x)$ je spojitá kladná funkce a λ je číselný parametr, jenž není předem dán. Chceme určit ty hodnoty λ, pro něž existuje integrál rovnice (11), který je spojitý a má spojitou derivaci, jež se nerovná identicky nule a vyhovuje krajovým podmínkám (2). Známe-li Greenovu funkci, můžeme pomocí vzorce (9) převést uvedený problém na určení charakteristických čísel integrální rovnice se souměrným jádrem. Všimněme si, že rovnice (11) přejde v (8), jestliže položíme $f(x) = \lambda\, r(x)\, y(x)$. Protože hledaný integrál vyhovuje podmínkám (2), lze užít vzorce (9):

$$y(x) = \lambda \int_a^b r(s)\, G(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}s. \tag{12}$$

Rovnice (12) je homogenní integrální rovnice s neznámou $y(x)$ a parametrem λ; vyloučíme-li případ, že $r(x) =$ konst., je nesouměrná. Abychom ji převedli na souměrnou, násobme obě strany $\sqrt{r(x)}$ a položme

$$\sqrt{r(x)}\, y(x) = \varphi(x), \quad \sqrt{r(x)\, r(s)}\, G(x, s) = K(x, s).$$

Tak dostaneme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = 0, \tag{13}$$

jejíž jádro je již souměrné. Charakteristická čísla této rovnice jsou zřejmě hledané hodnoty λ.

Je užitečné si všimnout, že všechna charakteristická čísla rovnice (13) jsou jednoduchá, t. j. každému z nich přísluší pouze jedna charakteristická funkce. Abychom se o tom přesvědčili, předpokládejme, že charakteristickému číslu λ' příslušejí lineárně nezávislé charakteristické funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$. Sestrojme funkce

$$y_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{r(x)}}, \quad y_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{r(x)}}.$$

Tyto funkce vyhovují integrální rovnici (12) pro $\lambda = \lambda'$. Odtud plyne, že vyhovují téže diferenciální rovnici

$$L(y) + \lambda' r(x) y = 0.$$

s krajovými podmínkami (2). Všimněme si prvé z těchto podmínek:

$$\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) = 0, \quad \alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) = 0.$$

Protože se čísla α a β nerovnají nule současně, je

$$\begin{vmatrix} y_1(a), & y_1'(a) \\ y_2(a), & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Napsaný determinant je hodnota Wronského determinantu integrálů $y_1(x)$ a $y_2(x)$ pro $x = a$. Protože se rovná nule v jednom bodě, rovná se nule identicky. Odtud plyne, že $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně závislé. Avšak potom $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou také lineárně závislé, což je ve sporu s předpokladem.

Pojem Greenovy funkce lze rozšířit na rovnice vyššího řádu a s větším počtem nezávisle proměnných. Tak na př. Greenova funkce Laplaceovy rovnice je definována jako funkce dvou bodů oblasti, M a M_1, mající logaritmickou singularitu[1] pro $M = M_1$, harmonická pro $M \neq M_1$ a rovná nule na hranici oblasti.

§ 63. Torsní kmity tyčí (také v přítomnosti osamělých hmot). Diferenciální rovnice torsních kmitů tyčí má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GI_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right] - I_m \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Zde je ϑ úhel zkroucení, I_m je moment setrvačnosti délkové jednotky tyče vzhledem k rotační ose, G je modul torse, I_p je moment tuhosti v kroucení. Budeme uvažovat periodické kmity tyče, jejíž jeden konec,

[1] Uvažujeme případ dvou nezávisle proměnných.

$x = 0$, je pevně vetknut a druhý konec, $x = l$, je volný. Podmínky pro konce tyče budou

$$\vartheta = 0 \text{ pro } x = 0,$$
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \text{ pro } x = l. \tag{2}$$

Hledajíce periodická řešení, položíme

$$\vartheta(x, t) = \mathrm{e}^{i\nu t}\,\Theta(x).$$

Dosadíme-li toto do (1), zjistíme, že $\Theta(x)$ vyhovuje obyčejné diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[GI_p\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda I_m\Theta = 0;\ \lambda = \nu^2. \tag{3}$$

Z (2) plynou krajové podmínky, jimž vyhovuje $\Theta(x)$:

$$\Theta(0) = 0;\ \Theta'(l) = 0. \tag{4}$$

Je zřejmé, že význam mají pouze ty funkce $\Theta(x)$, jež se nerovnají identicky nule: jestliže $\Theta(x) \equiv 0$, pak i $\vartheta(x, t) \equiv 0$ a kmitů vůbec není. Tak docházíme ke speciálnímu případu problému, formulovaného v předcházejícím paragrafu: Jest určit hodnoty λ, pro něž se $\Theta(x)$, vyhovující rovnici (3) a podmínkám (4), nerovná identicky nule. Jak už víme, tato úloha se převádí na integrální rovnici.

Sestrojme příslušnou Greenovu funkci. Označme ji $H(x, s)$. Funkce $H(x, s)$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[GI_p\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = 0.$$

Tato rovnice má lineárně nezávislé integrály

$$u(x) = \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{GI_p},\ v(x) = 1,$$

vyhovující podmínkám $u(0) = 0$, $v'(l) = 0$. Při tom v našem případě $p(x) = GI_p$ a

$$p(x)[uv' - vu'] = -1.$$

Odtud $c = 1$ [vzorec (5), § 62], a tedy

$$H(x, s) = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{dx}{GI_p} & (0 \leqq x \leqq s), \\ \int\limits_0^s \frac{dx}{GI_p} & (s \leqq x \leqq l). \end{cases} \tag{5}$$

Integrální rovnice pro $\Theta(x)$ má tvar

$$\Theta(x) - \lambda \int\limits_0^l H(x, s)\, I_m(s)\, \Theta(s)\, ds = 0. \tag{6}$$

Vynásobíme-li ji $\sqrt{I_m(x)}$ a zavedeme-li odpovídající označení, převedeme ji na rovnici se souměrným jádrem.

Rovnice (6) byla odvozena za předpokladu, že se moment setrvačnosti $I_m(x)$ mění podél tyče spojitě. Může se však stát, že na tyči jsou osamělé hmoty. Potom se tvar rovnice (6) mění. Speciálně, jestliže je n osamělých hmot s momenty setrvačnosti $I_1, I_2, \ldots, I_n$ rozložených v bodech $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tyče, máme místo (6):

$$\Theta(x) - \lambda \int\limits_0^l H(x, s)\, I_m(s)\, \Theta(s)\, ds - \lambda \sum_{k=1}^{n} H(x, s_k)\, I_k\, \Theta(s_k) = 0. \tag{7}$$

Lze dokázat, že Hilbert-Schmidtovu theorii lze úplně přenést na rovnice typu (7). V pracích I. V. Anaňjeva [9] a A. I. Komaje [16] je uvedeno užití rovnice typu (7) na problém kmitů křídla s osamělými břemeny. K výpočtu frekvencí užívají tito autoři hlavně Kellogovy methody.

§ 64. Stabilita tlačené tyče. (Vzpěr tyče.) Rovnice ohybové křivky pružné tyče, má, jak známo, tvar

$$\frac{d}{dx}\left[EI \frac{dy}{dx}\right] = M,$$

kde M a I je působící moment a moment setrvačnosti v průřezu s úsečkou x, E je Youngův modul. Uvažujme případ, kdy tyč je stlačována silami působícími na jejích koncích. Označme velikost každé z těchto sil P. Potom $M = -Py$ a rovnice ohnuté osy bude

$$\frac{d}{dx}\left[EI\frac{dy}{dx}\right] + Py = 0. \tag{1}$$

Konce tyče se neposunují ve směru kolmém na tyč, a proto, označíme-li délku tyče l, máme

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{2}$$

Rovnici (1) dělme E a položme $\frac{P}{E} = \lambda$. Potom

$$\frac{d}{dx}\left[I\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0. \tag{3}$$

Označme $G(x, s)$ Greenovu funkci operátoru

$$\frac{d}{dx}\left[I\frac{dy}{dx}\right]$$

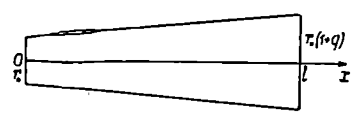
příslušející krajovým podmínkám (2). Potom (viz § 62)

$$y(x) - \lambda\int_0^l G(x, s)\, y(s)\, ds = 0. \tag{4}$$

Ohyb $y(x)$ zatížené tyče vyhovuje tedy homogenní integrální rovnici se souměrným jádrem. Pro libovolně zvolenou sílu P nebude číslo $\lambda = \frac{P}{E}$ charakteristické a $y(x) \equiv 0$. Jinak řečeno, libovolně zvolená stlačující síla ponechá přímkový tvar tyče. Pouze v tom případě, kdy $P = \lambda_n E$, kde λ_n je charakteristické číslo rovnice (4), může být $y(x)$ různá od nuly a tyč se zkřiví — ztrácí stabilitu.

Při úloze o vzpěru tyče je důležité určit nejmenší sílu, pro kterou tyč ztrácí stabilitu. To je tak zvaná kritická síla rovnající se součinu Youngova modulu s nejmenším charakteristickým číslem rovnice (4). V praxi postačuje přibližný vzorec, dávající λ_1 menší, než je hodnota přesná:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}; \quad A_2 = \int_0^l\int_0^l G^2(x, s)\, dx\, ds. \tag{5}$$



Obr. 18.

Určeme na příklad kritickou sílu pro tyč, která má tvar komolého kužele. Označme poloměry r_0 a $r_0(1 + q)$ (obr. 18). Poloměr průřezu s úsečkou x bude potom $r_0\left(1 + \frac{qx}{l}\right)$ a moment setrvačnosti tohoto průřezu

$$I = \frac{\gamma r_0^4}{2} (1 + \alpha x)^4, \tag{6}$$

kde γ je hustota tyče a $\alpha = \frac{q}{l}$. Rovnici (4) přepišme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 + \alpha x)^4 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \mu y = 0; \; \mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}. \tag{7}$$

Jestliže $G(x, y)$ je Greenova funkce operátoru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 + \alpha x)^4 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$$

při krajových podmínkách (2), vyhovuje $y(x)$ integrální rovnici

$$y(x) - \mu \int_0^l G(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}s = 0. \tag{8}$$

Máme určit její nejmenší charakteristické číslo.

Určeme Greenovu funkci $G(x, s)$. Rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 + \alpha x)^4 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = 0$$

má obecný integrál

$$y = C_1 + \frac{C_2}{(1 + \alpha x)^3}.$$

Podmínce $y(0) = 0$ vyhovuje integrál

$$u(x) = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha x)^3}$$

a podmínce $y(l) = 0$ integrál

$$v(x) = \frac{1}{(1 + \alpha x)^3} - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3}.$$

Dále

$$c = -p(x)[u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)] = 3\alpha\left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3}\right),$$

a tak dostaneme výraz pro Greenovu funkci:

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha s)^3} - \dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right] & (0 \leqq x \leqq s), \\ \dfrac{1}{c}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha s)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3} - \dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right] & (s \leqq x \leqq l). \end{cases}$$

Nejmenší charakteristické číslo μ_1 rovnice (8) je určeno přibližným vzorcem

$$\frac{1}{\mu_1^2} \approx \int_0^l \int_0^l G^2(x, s)\, dx\, ds = 2\int_0^l dx \int_0^x G^2(x, s)\, ds.$$

Uvedený integrál se vypočte úplně elementárně. Vzorec je však dosti těžkopádný. Chceme-li jej zjednodušit, omezíme se na případ, kdy veličina q je malá, a lze zanedbat členy, jež obsahují q ve vyšší mocnině než prvé. Provedeme-li výpočty za tohoto zjednodušujícího předpokladu, dostaneme:

$$\frac{1}{\mu_1^2} \approx l^4\left(\frac{1}{90} - \frac{2}{45}q\right). \tag{9}$$

Odtud lehce určíme kritickou sílu P. Všimneme-li si, že $\lambda = I_0\mu$, kde I_0 je moment setrvačnosti v průřezu $x = 0$, najdeme výraz pro kritickou sílu ve tvaru

$$P = E\lambda_1 = \frac{\sqrt{90}EI_0}{l^2}(1 + 2q) = \frac{9{,}487EI_0}{l^2}(1 + 2q). \tag{10}$$

Jestliže položíme $q = 0$, dostaneme tyč stálého průřezu. Vzorec (10) v tom případě dává velikost kritické síly

$$P = \frac{9{,}487EI_0}{l^2}.$$

Přesná hodnota kritické síly, jak je známo, se v tomto případě rovná

$$\frac{\pi^2 EI_0}{l^2} = \frac{9{,}897EI_0}{l^2}.$$

Přibližná hodnota se od přesné liší o méně než 5%.

Tentýž postup převedení na integrální rovnici umožňuje určit kritickou sílu i ve složitějších případech. Speciálně, na integrální rovnice lze převést problém stability pružné destičky, na kterou působí síly v rovině destičky [18]. N. V. Zvolinskij řeší ve svém článku [14] pomocí integrálních rovnic problém stability válcovité skořepiny. Ve dvou posledních případech jsou jádra nesouměrná, avšak patří do třídy t. zv. symetrisovatelných, pro něž platí věta o existenci reálného charakteristického čísla.

§ 65. Tlak tuhého razníku na pružný poloprostor. Uvažujme poloprostor $z < 0$. Předpokládejme, že na část S roviny $z = 0$, která jej omezuje, tlačí absolutně tuhé těleso (budeme je nazývat razníkem), přitisknuté k polorovině silou Q rovnoběžnou s osou z. Předpokládáme, že mezi poloprostorem a razníkem není tření. Zbývající část S' hranice není namáhána vnějšími silami. Chceme určit pole napětí a posunutí v poloprostoru a také určit závislost mezi silou působící na razník a jeho posunutím.

O problému, který jsme formulovali a který je znám pod názvem „problém tlaku razníku", pojednává obsáhlá literatura. Obdobný rovinný problém budeme analysovat v kap. 6. Zde vyložíme řešení problému o tlaku razníku na poloprostor, založené na jeho převedení na integrální rovnici prvého druhu. Toto řešení odvodil V. I. Dovnorovič ve své disertaci [39].

Formulujme rovnice a krajové podmínky našeho problému.

Označme u, v, w složky vektoru elastických posunutí. Zanedbáme-li objemové síly, můžeme předpokládat, že u, v, w vyhovují známým rovnicím theorie pružnosti:

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} &= 0, \\ \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

kde σ je Poissonova konstanta. Krajové podmínky příslušející těmto rovnicím jsou tyto:

Na S' nejsou vnější síly a na S není tření; v celé rovině xy tedy máme

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \; z = 0. \tag{2}$$

Dále zřejmě

na S' $$\sigma_z = 0. \tag{3}$$

Nechť $z = \varphi(x, y)$ je rovnice té části plochy razníku, kterou se dotýká poloprostoru. Potom

na S $$w = ax + by + c - \varphi(x, y) = \Phi(x, y), \tag{4}$$

kde veličina $ax + by + c$ charakterisuje posunutí razníku jako tuhého tělesa. Poznamenejme, že v souhlase s předpokladem, že deformace jsou malé, považujeme konstanty a, b, c a funkci $\varphi(x, y)$ za malé. Na konec předpokládejme, že v nekonečnu jsou posunutí omezená a napětí neexistuje. Problém o tlaku razníku se tedy převádí na integrování rovnice (1) při krajových podmínkách (2) až (4). Konstanty a, b, c při řešení problému zůstávají neurčeny; po rozřešení problému lze je určit z podmínek rovnováhy razníku takto: Nechť síla Q, působící na razník, působí ve směru osy z. Potom

$$\iint_S \sigma_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = Q,$$

$$\iint_S x\sigma_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_S y\sigma_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0. \tag{5}$$

Přistupme k řešení našeho problému. Jak je známo,[1] funkce u, v, w vyhovující soustavě (1) mohou být vyjádřeny ve tvaru

$$u = \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

kde φ_1, φ_2, φ_3, ψ jsou harmonické funkce spjaté relací

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{3 - 4\sigma} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right).$$

Krajové podmínky našeho problému dovolují převést[2] úlohu na určení pouze jedné funkce φ_3, vyhovující těmto krajovým podmínkám:

na S $$\varphi_3 = \Phi(x, y), \tag{6}$$

---

[1] E. Treftc, Matěmatičeskaja těorija uprugosti, GTTI, 1932.

[2] Viz F. Frank a R. Mises, Diferencialnyje i intěgralnyje uravněnija matěmatičeskoj fyziki, GTTI, 1937, str. 290—292.

na S' $$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Budeme předpokládat, že povrch razníku je dostatečně hladký, takže má spojité derivace druhého řádu. Speciálně tedy předpokládáme, že na povrchu razníku nejsou hrany. Dále se budeme podstatně opírat o výsledky S. Zaremby [40], z nichž speciálně plyne, že existuje funkce $\varphi_3(x, y, z)$ harmonická v poloprostoru $z < 0$, kterou lze vyjádřit ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy se spojitě diferencovatelnou hustotou; funkce $\varphi_3(x, y, z)$ vyhovuje krajovým podmínkám (6) a (7) za jediného předpokladu, že funkce $\Phi(x, y)$ je dostatečně hladká. Poznamenejme, že z toho faktu, že funkci $\varphi_3(x, y, z)$ lze vyjádřit jako potenciál jednoduché vrstvy, plyne, že tato funkce je spojitá v celé rovině xy, počítaje v to hranici oblastí S a S'.

Majíce toto na paměti, budeme hledat φ_3 ve tvaru

$$\varphi_3(x, y, z) = \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{d\xi \, d\eta}{r}, \tag{8}$$

kde $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$. Vně oblasti S, speciálně na S', lze potenciál (8) derivovat za integračním znaménkem. Při tom

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -2z \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{d\xi \, d\eta}{r},$$

což se anuluje na S'. Potenciál (8) tedy automaticky vyhovuje podmínce (7).

Krajová podmínka (6) dále dává

na S $$\iint_S \frac{\mu(\xi, \eta)}{r} \, d\xi \, d\eta = \Phi(x, y). \tag{9}$$

To je integrální rovnice prvého druhu s neznámou $\mu(\xi, \eta)$. Protože na S $z = 0$, je její jádro

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$$

souměrné. V důsledku shora uvedených výsledků S. Zaremby je rovnice (9) řešitelná. Řešení je jediné, neboť v opačném případě by existovalo několik spojitých, pro $z < 0$ harmonických funkcí, vyhovujících krajovým podmínkám (6) a (7), což, jak je známo, je nemožné.

Jádro $\frac{1}{r}$ má slabou singularitu. Dokážeme však, že věta Hilbert-Schmidtova zůstane v platnosti pro toto jádro s tou jedinou výhradou, že řada (8), § 13 nebude obecně konvergovat stejnoměrně, nýbrž jen v průměru.[1]

Označme jako obvykle

$$\iint_S \frac{\mu(\xi, \eta)}{r} \, d\xi \, d\eta = K\mu.$$

Z věty (1), § 10 plyne, že jádro, druhé iterované vzhledem k jádru $\frac{1}{r}$, bude pouze logaritmicky nekonečné, a proto bude pro něj platit věta Hilbert-Schmidtova. Označme λ_i a $\varphi_i(\xi, \eta)$ charakteristická čísla a charakteristické funkce souměrného jádra $\frac{1}{r}$; potom λ_i^2 a $\varphi_i(\xi, \eta)$ budou charakteristická čísla a charakteristické funkce druhého iterovaného jádra. Podle Hilbert-Schmidtovy věty

$$\begin{gathered} K^2\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k^2} \varphi_k(x, y); \\ a_k = (\mu, \varphi_k) = \iint_S \mu(\xi, \eta) \, \varphi_k(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \end{gathered} \tag{10}$$

při čemž řada na pravé straně konverguje stejnoměrně, za toho jediného předpokladu, že integrál

$$\iint_s |\mu^2(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta = \|\mu\|^2$$

existuje.

Označme

$$\mu_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \varphi_l(x, y)$$

a vyšetřujme skalární součin

$$(K^2(\mu - \mu_n), \mu - \mu_n).^{1} \tag{11}$$

Podle Buňakovského nerovnosti platí

$$\begin{gathered} |(K^2(\mu - \mu_n), \mu - \mu_n)| \leqq \|K^2(\mu - \mu_n)\| \, . \, \|\mu - \mu_n\| = \\ = \|K^2\mu - K^2\mu_n\| \, . \, \|\mu - \mu_n\|. \end{gathered}$$

---

[1] O konvergenci v průměru viz § 20.

Dále,
$$K^2\mu_n = K^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k K^2\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k^2}\,\varphi_k.$$

Řada (10) konverguje stejnoměrně, a tedy $K^2\mu_n$ konverguje stejnoměrně ke $K^2\mu$; tím spíše
$$\|K^2\mu - K^2\mu_n\| \to 0.$$

Veličina $\|\mu - \mu_n\|$ je omezená. Podle trojúhelníkové nerovnosti totiž platí
$$\|\mu - \mu_n\| \leqq \|\mu\| + \|\mu_n\| = \|\mu\| + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$$
a v důsledku Besselovy nerovnosti
$$\|\mu - \mu_n\| \leqq 2\|\mu\|.$$

Odtud plyne, že veličina (11) konverguje k nule. Na druhé straně, protože jádro $\frac{1}{r}$ je souměrné, podle vzorce (3), § 11
$$(K^2(\mu - \mu_n), \mu - \mu_n) = (K(\mu - \mu_n), K(\mu - \mu_n)) = \|K(\mu - \mu_n)\|^2 = \\ = \|K\mu - K\mu_n\|^2.$$

Odtud plyne, že $K\mu_n$ konverguje v průměru ke $K\mu$. Avšak
$$K\mu_n = K\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k K\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\,\varphi_k.$$

Tedy
$$K\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k}\,\varphi_k; \tag{12}$$

součet nekonečné řady je třeba považovat za limitu jejích částečných součtů ve smyslu konvergence v průměru. Rovnice (12) vyjadřuje Hilbert-Schmidtovu větu pro jádro $\frac{1}{r}$.[1]

Obraťme se k rovnici (9). Jak už jsme poznamenali, má jediné řešení. Odtud plyne, že soustava charakteristických funkcí jádra je úplná. Vskutku, nechť funkce $\omega(x, y)$ je orthogonální ke všem funkcím $\varphi_k(x, y)$. Potom podle vzorce (12) $K\omega \equiv 0$. Protože řešení nehomogenní rovnice (9) je jediné, má příslušející homogenní rovnice pouze nulové řešení, a proto nutně $\omega(x, y) \equiv 0$. Je-li soustava $\varphi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$

---

[1] Malou změnou úvah lze dokázat, že Hilbert-Schmidtova věta platí pro libovolné souměrné jádro se slabou singularitou.

úplná, lze hledanou funkci $\mu(\xi, \eta)$ a pravou stranu $\Phi(x, y)$ rozvinout v řady

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \varphi_k(\xi, \eta), \quad a_k = (\mu, \varphi_k),$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \, \varphi_k(x, y), \quad \Phi_k = (\Phi, \varphi_k).$$

Dosadíme-li toto do (9) a užijeme-li vzorce (12), dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \, \varphi_k(x, y),$$

odkud $a_k = \lambda_k \Phi_k$. Řešení dostaneme ve tvaru

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, \Phi_k \varphi_k(\xi, \eta). \tag{13}$$

Úloha se tedy převádí na výpočet charakteristických čísel a charakteristických funkcí souměrného jádra $\frac{1}{r}$. Ten lze provést způsoby vyloženými v kap. 2, části I. V. I. Dovnorovič, aby si ověřil praktickou vhodnost řady (13), vypočetl prvých šest členů této řady pro razník tvaru rotačního paraboloidu. Porovnání s přesným řešením ukázalo, že chyba v určení působící síly Q byla okolo 2,25%.

KAPITOLA 6

NĚKOLIK APLIKACÍ THEORIE SINGULÁRNÍCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 66. Hilbertův problém. Rozebereme problém určit funkci harmonickou v nějaké rovinné oblasti D za předpokladu, že na některých částech hranice jsou dány hodnoty hledané funkce a na jiných jsou dány hodnoty její normální derivace.[1]

[1] Tento problém je speciálním případem obecného Hilbertova problému, při němž se hledá harmonická funkce za podmínky, že na hranici je známa lineární kombinace samotné funkce a její normální derivace.