Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

---

Některá užití integrálů obdobných potenciálům

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 241–270.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402776

KAPITOLA 4

NĚKTERÁ UŽITÍ INTEGRÁLŮ OBDOBNÝCH POTENCIÁLŮM

§ 54. Užití Cauchyho integrálů v rovinné theorii pružnosti (rovnice N. I. Muschelišviliho). Omezme se pro jednoduchost na případ, kdy pružné prostředí vyplňuje omezenou, jednoduše souvislou oblast. Označme tuto oblast D a její hranici L. Jak už víme, úloha spočívá v určení analytických funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, regulárních v oblasti D a vyhovujících na hranici L podmínce

$$\varphi(z) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \tag{1}$$

kde $f(\zeta)$ je známá spojitá funkce bodu na hranici L. Budeme předpokládat, že je dostatečně hladká.

Je pohodlnější vyjádřit podmínku (1) v poněkud jiném tvaru, totiž zaměnit v ní všechny veličiny konjugovanými:

$$\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = \overline{f(\zeta)}. \tag{2}$$

Při řešení úlohy budeme postupovat takto: Budeme uvažovat oblast D' ležící vně L. Nechť z' je libovolný bod této oblasti. Násobme obě strany rovnice (2) výrazem

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z'}$$

a integrujme podél L. Protože $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ a $\psi(z)$ jsou regulární v D a bod z' leží vně D, platí v důsledku známých vlastností Cauchyho integrálu identity

$$\text{a)}\ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \equiv 0,\quad \text{b)}\ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \equiv 0,$$
$$\text{c)}\ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \equiv 0. \tag{3}$$

Užijeme-li identity (3, c), dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z'}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta = A(z'), \tag{4}$$

kde
$$A(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{5}$$

Upravme rovnici (4). V identitě (3, a) nahraďme všechny veličiny konjugovanými, identitu (3, b) násobme $-\bar{z}'$; obě takto nalezené rovnice přičtěme k (4). Dostaneme rovnici
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z'} - \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'}\varphi'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = A(z').$$

Poslední integrál lze integrovat per partes, a tak dostaneme rovnici neobsahující $\varphi'(\zeta)$:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z'} - \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'}\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'} = A(z'). \tag{6}$$

Nechť nyní $z' \to t$, kde t je bod na hranici L. Podle vzorce (3), § 22 lehce dostaneme:
$$\lim_{z'\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2}\overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta,$$
$$\lim_{z'\to t}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = -\frac{1}{2}\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{t}}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

Připomeňme, že integrály napravo v těchto vzorcích jsou singulární.

Pokud se týče třetího členu ve vzorci (6), lze v něm provést limitní přechod za integračním znakem. Položme $\zeta - z' = r'\mathrm{e}^{i\vartheta}$. Potom
$$\mathrm{d}\,\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'} = -2i\mathrm{e}^{-2i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta,$$
což je veličina spojitá při libovolné poloze bodů z' a ζ, za toho jediného předpokladu, že hranice L je hladká. Poněvadž však integrand je spojitý, lze přejít k limitě za integračním znakem. Provedeme-li limitní přechod, dostaneme integrální rovnici:
$$\overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\,\mathrm{d}\lg\frac{\bar{\zeta} - \bar{t}}{\zeta - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\frac{\bar{\zeta} - \bar{t}}{\zeta - t} = -A(t).$$

Položíme-li $\zeta - t = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, převedeme tuto rovnici na tvar

$$\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi(\zeta)}\, d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(\zeta)\, e^{-2i\vartheta}\, d\vartheta = -A(t). \tag{7}$$

Jestliže hranice L je hladká, bude $d\vartheta$ spojitou funkcí bodů t a ζ. Položíme-li $\varphi(t) = p(t) + i\,q(t)$ a oddělíme-li v (7) reálnou a imaginární část, dostaneme soustavu dvou integrálních rovnic Fredholmova typu. Odtud plyne, že pro rovnici (7) platí Fredholmova alternativa.

Rovnici (7) odvodil N. I. Muschelišvili [28b, c], jehož úvahy jsme zde reprodukovali.

Obraťme se k vyšetřování rovnice (7). Dokažme především, že její libovolné řešení lze analyticky pokračovat z hranice L na celou oblast D. Připomeneme-li si odvození rovnice (7), lehce se přesvědčíme, že ji lze vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{z' \to t} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{\zeta} - \overline{z'}}\, d\overline{\zeta} - \frac{\overline{z'}}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'}\, d\zeta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta}\,\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\, d\zeta \right\} = 0. \tag{8}$$

Přitom je třeba v druhém integrálu chápat $\varphi'(z)$ jako derivaci $\varphi(\zeta)$ podél křivky L. Položme nyní

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'}\, d\zeta = i\,\Phi(z'),$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta}\,\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\, d\zeta = -i\,\Psi(z'). \tag{9}$$

Rovnice (8) přejde v rovnici:

$$\overline{\Phi(t)} + \overline{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t) = 0. \tag{10}$$

Funkce $\Phi(z')$ a $\Psi(z')$ jsou regulární v D' a rovnice (10) ukazuje, že dávají řešení rovinného problému theorie pružnosti pro oblast D' za předpokladu, že na hranici oblasti nepůsobí vnější síly. Avšak potom, podle věty o jednoznačnosti řešení rovinné úlohy,[1]

$$\Phi(z') = i\alpha z' + \beta,\ \Psi(z') = -\overline{\beta},$$

[1] Viz [28a], str. 111.

kde α je reálná a β komplexní konstanta. Ze vzorců (9) plyne, že $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$. Avšak potom $\alpha = \beta = 0$ a

$$\Phi(z') \equiv 0, \quad \Psi(z') \equiv 0.$$

Prvá identita ukazuje, že funkci $\varphi(\zeta)$, jež vyhovuje rovnici (7), lze analyticky pokračovat do vnitřku celé oblasti D; z druhé identity plyne, že do téže oblasti lze analyticky pokračovat i funkci

$$\psi(\zeta) = -\overline{\varphi(\zeta)} - \bar{\zeta}\, \varphi'(\zeta) + \overline{f(\zeta)}.$$

Řešíme-li rovnici (7), najdeme krajové hodnoty obou hledaných Goursatových funkcí. Hodnoty uvnitř oblasti lze nyní určit třeba z Cauchyho vzorce. Řešíme-li tedy rovnici (7), řešíme tím současně i problém theorie pružnosti.

Není však obtížné dokázat, že rovnice (7) je v obecném případě neřešitelná. Vskutku, jestliže se hlavní moment vnějších sil nerovná nule, jinak řečeno, jestliže

$$\operatorname{Re} \int_L \overline{f(\zeta)}\, \mathrm{d}\zeta \neq 0,$$

nemá problém theorie pružnosti řešení. Avšak potom nemá řešení ani rovnice (7). Příslušná homogenní rovnice

$$\overline{\varphi_0(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi_0(\zeta)}\, \mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(\zeta)\, \mathrm{e}^{-2i\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta = 0 \qquad (11)$$

má netriviální řešení. Tímto řešením, a při tom jediným, je funkce

$$\varphi_0(t) = \alpha t + \beta \qquad (12)$$

(α je reálná a β je komplexní konstanta), příslušející rovinnému problému theorie pružnosti, jestliže nepůsobí vnější síly.

To, že řešení (12) je jediné, plyne přímo z věty o jednoznačnosti řešení rovinného problému theorie pružnosti.

Uvedeme takovou změnu tvaru rovnice (7), při níž se tato stane řešitelnou a dá řešení problému theorie pružnosti za toho jediného předpokladu, že se hlavní moment vnějších sil působících na hranici L rovná nule.[1]

Položme počátek souřadnic do vnitřku oblasti D. K levé straně rovnice (7) připočtěme výraz

[1] Viz [37d].

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i t}\int\limits_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}\,d\bar\zeta\right). \tag{13}$$

Uvedená rovnice bude nahrazena rovnicí

$$\overline{\varphi(t)}-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \overline{\varphi(\zeta)}\,d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \varphi(\zeta)\,e^{-2i\vartheta}\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i t}\int\limits_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}\,d\bar\zeta\right)=-A(t). \tag{14}$$

Vyšetřme rovnici (14). Především dokažme, že každé její řešení lze analyticky pokračovat do celé oblasti D. Stačí tentokrát položit

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z'}\,d\zeta=i\,\Phi(z'),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}+\bar\zeta\,\varphi'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i z'}\int\limits_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}\,d\bar\zeta\right)=-i\,\Psi(z').$$

Uvažujeme-li analogicky jako v předcházejícím, nalezneme, že

$$\Phi(z')\equiv 0,\quad \Psi(z')\equiv 0.$$

První rovnice ukazuje, že $\varphi(\zeta)$ lze analyticky pokračovat do oblasti D.

Předpokládejme nyní, že se hlavní moment vnějších sil působících na hranici L rovná nule. V takovém případě (viz § 43, vzorec (3))

$$\operatorname{Re}\int\limits_L\overline{f(\zeta)}\,d\zeta=0. \tag{15}$$

Dokažme, že při této podmínce libovolné řešení rovnice (14) anuluje každý z integrálů v (13).

Napišme explicitně rovnici $\Psi(z')=0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}+\bar\zeta\,\varphi'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i z'}\int\limits_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}\,d\bar\zeta\right)=0. \tag{16}$$

Rozviňme levou stranu v (16) v Laurentovu řadu v okolí bodu v nekonečnu a položme rovný nule [v důsledku identity (16)] absolutní člen této řady a koeficient u $\frac{1}{z'}$. Potom dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 0, \tag{17_1}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L [\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta)]\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = 0. \tag{17_2}$$

Rovnice (17_1) ukazuje, že se prvý z integrálů v (13) rovná nule. Obraťme se k rovnici (17_2). Integrujeme-li per partes, máme

$$\int_L \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\int_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

Dosaďme toto do (17_2):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L (\overline{\varphi(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta - \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\bar{\zeta}) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = 0.$$

Prvý sčítanec je zřejmě reálný; druhý je v důsledku rovnice (15) také reálný a třetí ryze imaginární. Avšak potom se třetí sčítanec rovná nule, t. j. rovná se nule druhý integrál v (13):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = 0. \tag{17_3}$$

Dokažme nyní, že rovnice (14) je řešitelná, ať je její pravá strana jakákoliv. Ve shodě s Fredholmovou alternativou stačí dokázat, že homogenní rovnice

$$\overline{\varphi_0(t)} - \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi_0(\zeta)}\,\mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi}\int_L \varphi_0(\zeta)\,\mathrm{e}^{-2i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta +$$
$$+\frac{1}{2\pi i t}\int_L \left(\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{\overline{\varphi_0(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = 0 \tag{18}$$

má pouze triviální řešení $\varphi_0(t) \equiv 0$.

Rovnici (18) dostaneme ze (14) pro $f(\zeta) \equiv 0$. Podmínka (15) je zde zřejmě splněna, a proto pro libovolné řešení rovnice (18) platí rovnice (17_1) a (17_2). Poslední dva členy v (18) vymizí a tato rovnice se shoduje s (11). Její řešení je potom dáno vzorcem (12). Dosadíme-li nyní výraz (12) do (17_1) a (17_3) a vzpomeneme-li si, že α je reálné číslo, najdeme, že $\alpha = \beta = 0$ a tedy $\varphi_0(t) \equiv 0$. Tím je řešitelnost rovnice (14) dokázána.

Nechť je nyní splněna podmínka (15), která je nutná k tomu, aby měl problém theorie pružnosti řešení. Lze bez obtíží dokázat, že potom vede řešení rovnice (14) k řešení našeho problému. Vskutku funkce $\varphi(t)$ vyhovující rovnici (14) anuluje výraz (13). Potom rovnice (14) přejde v (7), o níž jsme už dokázali, že její řešení vede k řešení problému theorie pružnosti.

K methodě vyložené v tomto paragrafu připojme několik poznámek:

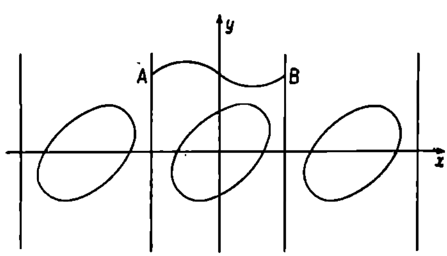
1. Tvar integrálních rovnic (7) a (14) se nemění, přejdeme-li k mnohonásobně souvislým oblastem. Avšak vyšetřování této rovnice je tím neobyčejně ztíženo. Podrobný rozbor pro případ mnohonásobně souvislých oblastí je obsažen v citovaném článku D. I. Šermana [37d].

2. Jestliže jsou na hranici L body, v nichž má prvá derivace nespojitosti 1. druhu, nevedou rovnice (7) a (14) na rovnice Fredholmovy. Přesto však zůstávají Fredholmovy věty v platnosti i pro tyto rovnice. Podrobně o tom viz článek L. G. Magnaradze [26a].

Ve svých článcích [37f, g] užil D. I. Šerman methody integrálů typu Cauchyho také na případ nehomogenních a neisotropních pružných prostředí.

§ 55. Pružná rovina s nekonečnou řadou výřezů.

Užití integrálu typu Cauchyho umožňuje také řešit následující důležitou úlohu. Nechť pružné prostředí vyplňuje celou rovinu s výjimkou nekonečné řady stejných a periodicky rozložených výřezů (obr. 14). Předpokládejme dále, že všechny tyto výřezy jsou podrobeny působení stejných vnějších sil. Naší úlohou je určit napětí v pružném prostředí při uvedených podmínkách.



Obr. 14.

Předpokládejme, že se hlavní vektor vnějších sil, působících na každý výřez odděleně, rovná nule. Jako obvykle lze problém převést na určení analytických funkcí $\varphi(\zeta)$ a $\psi(\zeta)$, splňujících na každém výřezu podmínku

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + C, \tag{1}$$

kde $f(\zeta)$ je daná funkce. Je zřejmé, že na všech hranicích výřezů nabývá $f(\zeta)$ v odpovídajících bodech stejné hodnoty. Konstanta C, jak uvidíme níže, má jednu a touž hodnotu na všech hranicích.

V našem problému jsou napětí a posunutí periodické funkce x s periodou a. Vyšetřme, jak se mění $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, dosadíme-li $x + a$ za x čili, což je totéž, položíme-li $z + a$ za z.

Užijeme vzorců (5), (6) a (7), § 40

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}, \tag{5,40}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)], \tag{6,40}$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{7,40}$$

Prvý ze vzorců ukazuje, že se $\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}$ nemění, nahradíme-li $z + a$ za z. Odtud plyne, že $\varphi''(z)$ má periodu a. Vskutku, nechť $\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = p(x, y)$. Potom $p(x + a, y) \equiv p(x, y)$. Derivujeme-li tuto identitu, máme

$$\frac{\partial p(x+a, y)}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial p(x+a, y)}{\partial y} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}.$$

Dále

$$\varphi''(z) = \frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial p}{\partial y}$$

a periodicita $\varphi''(z)$ přímo plyne z právě napsaných rovnic.

Integrujeme-li identitu

$$\varphi''(z + a) \equiv \varphi''(z),$$

dostaneme

$$\varphi'(z + a) = \varphi'(z) + i\alpha,$$

$$\varphi(z + a) = \varphi(z) + i\alpha z + a\beta, \tag{2}$$

kde α a β jsou jisté konstanty. Konstanta α je nutně reálná, neboť reálná část $\varphi'(z)$ se nemění při záměně z v $z + a$.

Obraťme se ke vzorci (6,40). Při záměně z v $z + a$ se její levá strana nemění. Odtud

$$(\bar{z} + a)\,\varphi''(z + a) + \psi'(z + a) = \bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)$$

a v důsledku periodicity funkce $\varphi''(z)$

$$\psi'(z + a) = \psi'(z) - a\cdot\varphi''(z).$$

Integrujeme-li poslední rovnici, najdeme:

$$\psi(z + a) = \psi(z) - a\,\varphi'(z) + \gamma, \tag{3}$$

kde γ je nějaká konstanta.

Dosaďme nyní $z + a$ za z ve vzorci (7,40) a dosaďme místo $\varphi(z + a)$, $\varphi'(z + a)$ a $\psi(z + a)$ jejich hodnoty z (2) a (3). Užijeme-li periodicity posunutí, lehce najdeme, že $\alpha = 0$ a $\gamma = a\bar{\beta}\varkappa$. Tudíž $\varphi'(z)$ má periodu a a $\varphi(z)$ vzroste o konstantu $a\beta$. Funkce $\psi(z)$ se mění podle vzorce (3).

Položme

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) - \beta z, \tag{4}$$

$$\psi_0(z) = \psi(z) + z\,\varphi'(z) - \bar{\beta}\varkappa z. \tag{5}$$

Funkce $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ jsou zřejmě periodické s periodou a a vzorce (4) a (5) dávají výrazy pro $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ pomocí dvou periodických funkcí.

Objasněme fysikální význam veličiny β. Na přímkách omezujících libovolný pás periodicity vezměme dva body A a B se stejnými pořadnicemi (obr. 14) a spojme tyto body spojitou křivkou ležící úplně v páse periodicity a neprotínající hranici pružné oblasti. Najděme hlavní vektor napětí působících na oblouk AB. Označme složky uvedeného vektoru ve směru souřadnicových os X a Y; podle známého vzorce N. I. Muschelišviliho ([28a], str. 109) máme

$$i(X + iY) = [\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B.$$

Nahraďme zde $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ podle vzorců (4) a (5) a užijme periodicity funkcí $\varphi_0(z)$, $\varphi'(z)$ a $\psi_0(z)$; pak dostaneme

$$\begin{aligned} i(X + iY) = [\varphi_0(z) + 2iy\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi_0(z)} + (1 + \varvarkappa)\,\beta z]_A^B = \\ = (1 + \varkappa)\,\beta a, \end{aligned}$$

odkud

$$\beta = \frac{i(X + iY)}{(1 + \varkappa)\,a}. \tag{*}$$

Tím je konstanta β určena pomocí složek hlavního vektoru napětí působících na oblouk AB. Ze vzorce (*) plyne také, že uvedený vektor nezávisí na volbě bodu A a B.

Předpokládejme nyní, že napětí konvergují k nule pro $y \to \infty$. Potom zřejmě $X = Y = 0$, a tedy $\beta = 0$. Místo (4) a (5) dostaneme jednodušší vzorce,

$$\varphi(z) = \varphi_0(z),\ \psi(z) = \psi_0(z) - z\,\varphi_0'(z), \tag{6}$$

kde $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ jsou periodické funkce s periodou a. Budeme předpokládat, že jsou omezené pro $y \to \pm\infty$; potom pro $y \to \pm\infty$ budou napětí konvergovat k nule.

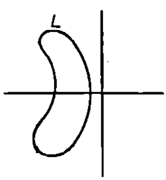
Nahradíme-li v (1) funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ podle vzorců (6), dostaneme krajovou podmínku pro nové funkce $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$:

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \overline{\zeta})\,\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta) + C.$$

Poněvadž všechny sčítance vyskytující se v poslední rovnici jsou periodické, má C jednu a touž hodnotu na všech hranicích. Můžeme nyní, užívajíce libovolnosti v určení C, položit $C = 0$. Nakonec se tedy problém převádí na určení periodických funkcí $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ vyhovujících krajové podmínce:

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \overline{\zeta})\,\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta). \tag{7}$$

Obvyklým způsobem lze dokázat, že $\varphi_0(\zeta)$ a $\psi_0(\zeta)$ jsou až na aditivní konstanty určeny jednoznačně.



Obr. 15.

Položme nyní

$$e^{\frac{2\pi i z}{a}} = t,\ z = \frac{a}{2\pi i}\lg t. \tag{8}$$

Zobrazením (8) se pás $0 \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq a$ převede v rovinu t rozdělenou řezem podél reálné kladné poloosy a výřez ležící v uvedeném pásu přejde v nějakou omezenou oblast neobsahující počátek souřadnic (obr. 15). Hranici této oblasti označme L. Funkce $\Phi(t) = \varphi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\lg t\right)$ je regulární v rozdělené t-rovině vně hranice L. Tato funkce, která je periodickou vzhledem k z, nabývá stejné hodnoty v geometricky splývajících bodech řezu a lze ji tedy spojitě pokračovat přes řez. Avšak potom, jak je známo[1], lze tuto funkci analyticky pokračovat přes řez; je potom regulární v celé oblasti roviny t, ležící vně L. Totéž ovšem platí o funkci $\Psi(t) = \psi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\lg t\right)$. Problém se tím převádí na určení dvou funkcí $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$, regulárních vně L. Krajové podmínky pro tyto funkce dostaneme, položíme-li v (7) $\zeta = \frac{a}{2\pi i}\lg\tau$:

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau}\lg|\tau|\,\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau), \quad F(\tau) = f\left(\frac{a}{2\pi i}\lg\tau\right). \tag{9}$$

Už jsme poznamenali, že $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ jsou určeny až na aditivní konstantu. Zvolme tuto aditivní konstantu tak, aby $\Psi(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.

Při řešení úlohy užijeme téhož postupu jako v předcházejícím paragrafu. V rovnici (9) nahradíme všechny členy konjugovanými; dále ji násobme výrazem $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\tau}{\tau - t'}$, kde t' je bod uvnitř L, a integrujme podél L proti hodinovým ručičkám. Potom dostaneme:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\tau - t'}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\tau\lg|\tau|\,\Phi'(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau = A(t'),\\ A(t') = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F(\tau)}}{\tau - t'}\,d\tau.\end{gathered} \tag{10}$$

Protože funkce $\Phi(t)$ je regulární vně L, je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau = \Phi(\infty).$$

Nechť c je pevně zvolený bod uvnitř L. Položme v poslední rovnici $t' = c$. Odečteme-li tyto dva výrazy, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - c}\,d\tau = 0. \tag{11}$$

---

[1] Viz na př. I. I. Privalov, Vvěděnije v těoriju funkcij kompleksnogo peremennogo.

Derivujeme-li a potom integrujeme per partes, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi'(\tau)}{\tau - t'}\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{12}$$

V identitě (11) nahraďme všechny členy konjugovanými, identitu (12) násobme výrazem $2t'\lg|t'|$ a oba výsledky přičtěme k (10). Integrál obsahující $\Phi'(\tau)$ integrujme per partes. Nakonec připočtěme k levé straně rovnice veličinu $\frac{i}{2\pi}\,\overline{\lg t'}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2}\mathrm{d}\tau\right\}$. Necháme-li dále $t' \to \tau_0$, kde τ_0 je bod na hranici L, dostaneme integrální rovnici

$$\overline{\Phi(\tau_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\Phi(\tau)}\,\mathrm{d}\lg\frac{\tau - \tau_0}{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \Phi(\tau)\,\mathrm{d}\frac{\tau\lg|\tau| - \tau_0\lg|\tau_0|}{\tau - \tau_0} +$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\,\overline{\lg\tau_0}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2}\mathrm{d}\tau\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{c}}\,\mathrm{d}\bar{\tau} = A(\tau_0), \tag{13}$$

jež je ekvivalentní soustavě dvou Fredholmových rovnic.[1]

Nebudeme zde analysovat rovnici (13) — dělalo by se to téměř úplně tak, jako v předcházejícím paragrafu — a vyslovíme pouze výsledek:

1. Funkci $\Phi(\tau_0)$ vyhovující rovnici (13) lze analyticky pokračovat na celý vnějšek křivky L; při tom je v nekonečnu omezená.

2. Jestliže $\Phi(\tau_0)$ vyhovuje rovnici (13), pak funkci

$$\Psi(\tau_0) = \overline{F(\tau_0)} - \overline{\Phi(\tau_0)} + 2\tau_0\lg|\tau_0|\,\Phi'(\tau_0) \tag{14}$$

lze analyticky pokračovat na celý vnějšek křivky L; tato funkce je v nekonečnu rovna nule.

3. Rovnice (13) je řešitelná, ať je funkce $F(t)$ jakákoliv.

Ze shora řečeného je jasno, že funkce $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ určené rovnicemi (13) a (14) a následujícím analytickým pokračováním řeší naši úlohu.

---

[1] Tuto soustavu dostaneme, jestliže v (13) oddělíme reálnou a imaginární část a za neznámé považujeme

$$\mathrm{Re}\{\Phi(\tau_0)\} \text{ a } \mathrm{Im}\{\Phi(\tau_0)\}.$$

§ 56. Rovnice Lauricelliho. Methody integrálních rovnic při rovinném problému theorie pružnosti po prvé použil r. 1908 G. Lauricella [23]. Avšak jeho rovnice a zvláště jejich odvození byly dosti neobratné a nepohodlné. D. I. Šerman [37j] vyjádřil Lauricelliho rovnici v komplexním tvaru a udal nové, mnohem jednodušší odvození. V novém tvaru se tyto rovnice ukázaly poměrně jednoduchými — jsou jednodušší než rovnice N. I. Muschelišviliho (§ 54), které jsou jim velmi blízké.

V tomto paragrafu uvedeme odvození D. I. Šermana, omezujíce se na případ jednoduše souvislé, omezené oblasti.

Jak už víme, problém v tomto případě pozůstává v určení dvou funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ regulárních v oblasti D, vyplněné pružným prostředím, a vyhovujících na hranici L této oblasti podmínce

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \tag{1}$$

kde $f(\zeta)$ je daná spojitá funkce, o níž budeme předpokládat, že je dostatečně hladká. Připomeňme, že $f(\zeta)$ nutně vyhovuje podmínce

$$\mathrm{Re}\{\int_L \overline{f(\zeta)}\, \mathrm{d}\zeta\} = 0, \tag{2}$$

která vyjadřuje, že hlavní moment vnějších sil působících na L je roven nule.

Budeme hledat $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ ve tvaru těchto integrálů Cauchyho typu:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{3}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)\,\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{4}$$

kde $\omega(\zeta)$ je neznámá funkce, jež má být určena na hranici L.

Sestrojme z (3) a (4) výraz $\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ a nechme blížit z k nějakému bodu t na hranici L. Užijeme-li vzorců pro limitní hodnoty integrálů typu Cauchyho, dostaneme okamžitě integrální rovnici pro neznámou $\omega(t)$:[1]

[1]) Vynecháváme zde detaily transformací, neboť se téměř doslova shodují s transformacemi § 54.

$$\omega(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\zeta)\,\mathrm{d}\lg \frac{\zeta - t}{\bar\zeta - \bar t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\zeta)}\,\mathrm{d}\,\frac{\zeta - t}{\bar\zeta - \bar t} = f(t). \tag{5}$$

To je Lauricelliho rovnice v komplexním tvaru.

Lze dokázat, že rovnice (5) je v obecném případě neřešitelná. Abychom ji učinili řešitelnou, připočtěme k její levé straně veličinu

$$b\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar t - \bar a} + \frac{t-a}{(\bar t - \bar a)^2}\right),$$

kde a je vnitřní bod oblasti D a

$$b = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - a)^2}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{6}$$

Položme ještě $\zeta - t = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$. Rovnice (6) je nahrazena rovnicí:

$$\omega(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \omega(\zeta)\,\mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega(\zeta)}\,\mathrm{e}^{2i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta + \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar t - \bar a} + \right.$$

$$\left. + \frac{t-a}{(\bar t - \bar a)^2}\right) \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - a)^2}\,\mathrm{d}\zeta = f(t). \tag{7}$$

Vyšetřme rovnici (7). Dokažme především, že každé její řešení anuluje veličinu b. Vraťme se proto k funkcím $\varphi(z)$ a $\psi(z)$.

Provedeme-li v opačném pořádku úvahy, jež nás vedly k rovnici (5), vyjádříme (7) ve tvaru

$$\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + b\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar t - \bar a} + \frac{t-a}{(\bar t - \bar a)^2}\right) = f(t).$$

Násobme tuto rovnici $\mathrm{d}\bar t$ a integrujme podél L. Po nepříliš složitých úpravách dostaneme

$$\int_L (\varphi(t)\,\mathrm{d}\bar t - \overline{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t) + b \int_L \left(\frac{\mathrm{d}\bar t}{t-a} + \frac{\mathrm{d}t}{\bar t - \bar a}\right) + 2\pi i b = \int_L f(t)\,\mathrm{d}\bar t.$$

Z (6) je patrno, že veličina b je ryze imaginární. Reálná část nalevo v poslední rovnici je potom zřejmě $2\pi i b$ a napravo se rovná nule podle podmínky (2). Tudíž $b = 0$.

Z dokázaného plyne, že každé řešení rovnice (7) vyhovuje současně také rovnici (5). Dosadíme-li uvedené řešení do (3) a (4), dojdeme k řešení problému theorie pružnosti.

Dokažme nyní, že rovnice (7) je řešitelná. Podle Fredholmovy alternativy stačí dokázat, že homogenní rovnice má pouze triviální řešení.

Položme $f(t) \equiv 0$. Tím dostaneme homogenní rovnici

$$\omega_0(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \omega_0(\zeta)\, \mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega_0(\zeta)}\, \mathrm{e}^{2i\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} b_0 \left(\frac{1}{t - a} - \frac{1}{\bar{t} - \bar{a}} + \frac{t - a}{(\bar{t} - \bar{a})^2} \right) = 0. \tag{8}$$

Zde je

$$b_0 = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{(\zeta - a)^2} \mathrm{d}\zeta. \tag{9}$$

Podle dokázaného $b_0 = 0$. Položme nyní ve shodě se vzorci (3) a (4)

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \tag{10}$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)}}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\zeta}\, \omega_0(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\zeta)\, \mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{11}$$

Přihlédneme-li k tomu, že $b_0 = 0$, dostaneme z rovnice (8):

$$\varphi_0(t) + t\, \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0.$$

Poslední rovnice ukazuje, že $\varphi_0(t)$ a $\psi_0(t)$ řeší rovinný problém theorie pružnosti za předpokladu, že na hranici L nejsou žádná napětí. Podle věty o jednoznačnosti

$$\varphi_0(z) = i\alpha z + \beta,\ \psi_0(z) = -\bar{\beta},$$

kde α je reálná a β je komplexní konstanta.

Není obtížné nahlédnout, že $\alpha = 0$. Skutečně, $b_0 = 0$. Avšak z (9) a (10) plyne, že

$$0 = b_0 = 2i \operatorname{Im}\{\varphi_0'(a)\} = 2i\alpha.$$

Tudíž

$$\varphi_0(z) = \beta,\ \psi_0(z) = -\bar{\beta}.$$

Ve výrazu (11) integrujme druhý integrál per partes:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\omega_0(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d(\bar{\zeta}\,\omega_0(\zeta))}{\zeta-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\bar{\zeta}.$$

Dosaďme toto do (11):

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{11$_1$}$$

Přihlédneme-li k hodnotám $\varphi_0(z) = \beta$ a $\psi_0(z) = -\bar{\beta}$, dostaneme z (10) a (11_1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)-\beta}{\zeta-z}\,d\zeta \equiv 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta) + \bar{\beta}}{\zeta-z}\,d\zeta \equiv 0.$$

Z toho je patrno, že $\omega_0(\zeta) - \beta$ a $\overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta) + \bar{\beta}$ jsou hodnoty na hranici analytických funkcí, regulárních vně L a rovných nule v nekonečnu. Označme je $i\delta(z)$ a $i\varepsilon(z)$, takže

$$\begin{aligned} i\delta(\zeta) &= \omega_0(\zeta) - \beta, \\ i\varepsilon(\zeta) &= \overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta) + \bar{\beta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Vylučme z těchto rovnic $\omega_0(\zeta)$:

$$\overline{\delta(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\delta'(\zeta) + \varepsilon(\zeta) + 2i\bar{\beta} = 0.$$

Funkce $\delta(z)$ a $\varepsilon(z) + 2i\bar{\beta}$ jsou řešení homogenní (t. j. nepůsobí vnější síly) úlohy theorie pružnosti pro oblast, ležící vně L. Podle věty o jednoznačnosti $\delta(z) = i\alpha' z + \beta'$, $\varepsilon(z) + 2i\bar{\beta} = -\bar{\beta}'$. Avšak $\delta(z)$ je regulární vně L a rovna nule v nekonečnu. Odtud $\alpha' = \beta' = 0$, $\delta(z) \equiv 0$. Protože $\varepsilon(\infty) = 0$, je také $\beta = 0$. Nyní z (12) plyne, že $\omega_0(\zeta) = i\delta(\zeta) + \beta \equiv 0$, což jsme měli dokázat.

Ještě řekneme několik slov o Lauricelliho rovnici (5). Už jsme poznamenali, že je v obecném případě neřešitelná. Není však obtížné dokázat (nebudeme se však u toho zdržovat), že podmínka (2) je nutná a postačující k tomu, aby měla řešení.

Užijme rovnice (5) na případ, kdy oblast D je omezena elipsou [371]. Nechť parametrické rovnice této elipsy jsou

$$\xi = a \cos\vartheta, \ \eta = b \sin\vartheta, \ \zeta = \xi + i\eta.$$

Položme

$$\zeta = \frac{c}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \tag{13}$$

kde $\sigma = \varrho e^{i\varphi}$ a konstanty ϱ ($\varrho > 1$) a c jsou určeny rovnicemi

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \ \varrho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Transformace (13) převádí elipsu v kružnici $|\sigma| = \varrho$. Označme tuto kružnici písmenem γ. Položme

$$t = \frac{c}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right). \tag{14}$$

Dosaďme (13) a (14) do (5). Označme ještě

$$\omega(\zeta) = \omega^*(\sigma), \ f(t) = f^*(\tau).$$

Dojdeme potom k rovnici

$$\omega^*(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega^*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \frac{1}{\tau}} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega^*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \frac{\varrho^4}{\tau}} -$$

$$- \frac{\varrho^4(\varrho^4 - 1)}{2\pi i\tau}\int_\gamma \frac{\overline{\omega^{*\prime}(\sigma)}}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma - \frac{\varrho^4}{\tau}} = f^*(\tau). \tag{15}$$

Rozviňme $\omega^*(\tau)$ a $f^*(\tau)$ ve Fourierovy řady čili, což je totéž, v mocninné řady pro τ a nechť

$$\omega^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\tau^k, \ f^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\tau^k.$$

Dosaďme toto do (15) a porovnejme koeficienty při stejných mocninách τ. Potom dostaneme soustavu rovnic s neznámými a_k:

$$2a_0 = A_0,$$
$$a_k + a_{-k}\varrho^{-4k} + (\varrho^4 - 1)\,k\bar{a}_k\varrho^{-2(k+1)} = A_k,$$
$$a_k + a_{-k} = A_{-k}; \ k = 1, 2, \ldots$$

Prvou rovnicí je určeno a_0. Ze dvou dalších vylučme a_{-k}. Tak dostaneme rovnici pro jedinou neznámou a_k:

$$(1 - \varrho^{-4k})\, a_k + \varrho^{-2(k+1)}(\varrho^4 - 1)\, k\bar{a}_k = A_k - \varrho^{-4k} A_{-k}.$$

Odtud lze určit a_k pro všechny hodnoty k mimo $k = 1$. Pro $k = 1$ dává poslední rovnice

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{A_1 - \varrho^{-4} A_{-1}}{1 - \varrho^{-4}}.$$

Pravá strana poslední rovnice musí býti reálná. Můžeme se lehce přesvědčit, že tato poslední podmínka je identická s podmínkou (2). Předpokládáme-li, že je splněna, najdeme:

$$\mathrm{Re}(a_1) = \frac{1}{2} \frac{A_1 - \varrho^{-4} A_{-1}}{1 - \varrho^{-4}}.$$

Imaginární část a_1 lze zvolit libovolně.

Znajíce a_k pro $k > 1$, určíme a_{-k} ze vzorce

$$a_{-k} = A_{-k} - a_k.$$

Nyní $\omega^*(\sigma) = \omega(\zeta)$ je známá. Zabývejme se výpočtem $\varphi(z)$. Ve vzorci (3) položme

$$z = \frac{c}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad \zeta = \frac{c}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right).$$

Protože z leží uvnitř L, lze se lehce přesvědčit, že $1 \leqq |\lambda| \leqq \varrho$. Vzorec (3) potom dává

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega^*(\sigma)(\sigma^2 - 1)}{\sigma(\sigma - \lambda)\left(\sigma - \frac{1}{\lambda}\right)} \mathrm{d}\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sigma^{k-1}(\sigma^2 - 1)}{(\sigma - \lambda)\left(\sigma - \frac{1}{\lambda}\right)} \mathrm{d}\sigma.$$

Pro $k < 0$ je integrand regulární vně γ a rovná se nule v nekonečnu, a to řádově jako σ^{k-1}. Podle známé Cauchyho věty jsou příslušné integrály rovny nule. Pro $k = 0$ je integrand také regulární vně γ, avšak v nekonečnu se jeho residuum rovná jedné. Příslušný integrál se rovná jedné. Konečně pro $k > 0$ má integrand uvnitř γ jednoduché póly $\sigma = \lambda$ a $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ s residui λ^k resp. λ^{-k}. To dává

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda^k + \lambda^{-k}).$$

Vyjádříme-li λ pomocí z, dostaneme pro $\varphi(z)$ rozvoj podle mnohočlenů:

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{c^k} [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k]. \tag{16}$$

§ 57. Dirichletův problém pro vlnovou rovnici. Vlnová rovnice

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{1}$$

(Δ je Laplaceův operátor) hraje význačnou úlohu v mnohých otázkách matematické fysiky. Speciálně se vyskytuje v problému ustálených elektromagnetických kmitů. Budeme zde vyšetřovat Dirichletův problém pro rovnici (1), při čemž se omezíme na rovinnou, jednoduše souvislou, omezenou oblast. Obecnější formulaci problému, vztahující se k vlnové rovnici, najde čtenář v pracích V. D. Kupradzeho [20] a V. Sternberga [38].

Není obtížné nahlédnout, že pro některá k je Dirichletův problém pro rovnici (1) neřešitelný. Abychom to dokázali, všimněme si tohoto: Nechť $f(\sigma)$ (σ je délka oblouku) je hodnota funkce $U(x, y)$ na hranici L oblasti D. Dirichletův problém spočívá v určení funkce $U(x, y)$, vyhovující dané rovnici (1), je-li dána $f(\sigma)$. Nechť $G(x, y; \xi, \eta)$ je Greenova funkce oblasti D. Podle Greenova vzorce

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta U(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_L f(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

čili v důsledku rovnice (1)

$$U(x, y) - \frac{k^2}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_L f(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{2}$$

Rovnice (2) je integrální rovnice Fredholmova typu pro neznámou $U(x, y)$ s parametrem $\dfrac{k^2}{2\pi}$ a s jádrem $G(x, y; \xi, \eta)$. Toto jádro je souměrné a nedegenerované a existuje proto nekonečně mnoho charakteristických čísel λ čili, což je totéž, hodnot k^2, pro něž rovnice (2) nemá řešení. Tyto hodnoty k^2 jsou reálné. Dokážeme, že jsou kladné (a tedy hodnoty k jsou reálné). Nechť $\lambda_n = \dfrac{k_n^2}{2\pi}$ je charakteristické číslo a $U_n(x, y)$ příslušná charakteristická funkce. Podle definice je splněna identita

$$U_n(x, y) - \frac{k_n^2}{2\pi} \iint_D \dot{G}(x, y; \xi, \eta)\, U_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0. \tag{3}$$

Porovnáme-li to s rovnicí (2), vidíme, že se $U_n(x, y)$ rovná nule na hranici L a uvnitř oblasti vyhovuje rovnici

$$\Delta U_n + k_n^2 U_n = 0. \tag{4}$$

Podle Greenova vzorce

$$\iint_D U_n\, \Delta U_n\, dx\, dy = -\iint_D \left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \int_L U \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Avšak křivkový integrál se rovná nule, neboť $U = 0$ na L. Dále $\Delta U_n = -k_n^2 U_n$. Nyní z poslední rovnice plyne

$$k_n^2 = \frac{\displaystyle\iint_D \left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy}{\displaystyle\iint_D U_n^2(x, y)\, dx\, dy} > 0.$$

Ta okolnost, že čísla k_n jsou reálná, dá se lehce interpretovat fysikálně: k_n je veličina úměrná frekvenci vlastních kmitů prostředí vyplňujícího oblast D.

Budeme zde uvažovat Dirichletův problém za předpokladu, že $k \neq k_n$.

Jeden ze způsobů řešení Dirichletova problému jsme už v podstatě ukázali. Převedli jsme jej totiž na integrální rovnici (2). Této rovnice lze s výhodou užít, jestliže je známa Greenova funkce a její charakteristické funkce $U_n(x, y)$; v tom případě se řeší rovnice (2) methodou § 19. Avšak oblastí, pro něž jsou charakteristické funkce sestrojeny, není mnoho a v obecném případě je výhodné mít integrální rovnici s jednodušším jádrem.

Takovou rovnici lze sestavit pomocí t. zv. zobecněného potenciálu dvojvrstvy

$$U(x, y) = \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma, \tag{5}$$

kde $H_0^{(2)}$ je Hankelova funkce druhého druhu,[1] r je vzdálenost bodu (x, y) od bodu σ na hranici a ν je vnější normála k hranici. Označme, jak je zvykem, indexy i a e limity při přibližování k hranici z vnitřku resp. z vnějšku oblasti D. Potom lze dokázat, že platí vzorce, známé pro logaritmický potenciál:

$$
\begin{gathered}
U_i(x, y) = -\mu(s) + \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma, \\
U_e(x, y) = \mu(s) + \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma, \qquad (6) \\
\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e.
\end{gathered}
$$

Zde s značí bod na hranici, k němuž konverguje bod (x, y), a n značí vnější normálu k hranici v bodě s. Dále jak uvnitř, tak vně L vyhovuje $U(x, y)$ rovnici (1).

Jestliže budeme hledat řešení Dirichletova problému ve tvaru potenciálu (5), povede vzorec (6) na integrální rovnici Fredholmova typu pro $\mu(s)$:

$$
\mu(s) - \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma = -f(s). \qquad (7)
$$

Podrobnější vyšetřování, jež zde nebudeme provádět, ukazuje, že kromě hodnot k_n, pro něž Dirichletův problém nemá řešení, existují ještě výjimečné hodnoty $k = k_n'$, pro něž je rovnice (7) neřešitelná. Řešení Dirichletova problému pro hodnoty k_n' může být také určeno pomocí potenciálů. Výklad o těchto otázkách najde čtenář v již citovaných článcích V. D. Kupradzeho. Poznamenáme zde pouze, že čísla k_n' jsou reálná. Odtud speciálně plyne, že integrální rovnice (7) má řešení pro všechny komplexní hodnoty k.

Pro reálné k lze sestrojit integrální rovnici, která řeší Dirichletův problém pro rovnici (1) a má řešení pro všechna $k \neq k_n$, t. j. pro všechna k, pro něž je sám Dirichletův problém řešitelný. Odvození

---

[1] Viz na př. R. O. Kuzmin, Besselevy funkcii.

těchto rovnic se zakládá na vzorci, jenž dává obecný tvar integrálu rovnice (1).[1] Tento vzorec má pro reálné k tvar

$$U(x, y) = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} + \int_0^z H(z, \bar{z}, \lambda, k)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda + \\ + \int_0^{\bar{z}} H(\bar{z}, z, \lambda, k)\, \overline{\varphi(\lambda)}\, d\lambda. \qquad (8)$$

Zde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ je analytická funkce; konečně

$$H(z, \bar{z}, \lambda, k) = -\frac{k}{2} \sqrt{\frac{\bar{z}}{z - \lambda}}\, J_1(k\sqrt{\bar{z}(z - \lambda)}); \qquad (9)$$

J_1 je Besselova funkce prvého druhu prvého řádu.

Dirichletův problém zřejmě rozřešíme, jestliže určíme funkci $\varphi(z)$, jež se vyskytuje ve vzorci (8). Budeme ji hledat ve tvaru integrálu typu Cauchyho

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad (10)$$

jehož hustotu budeme považovat za reálnou. Opakujeme-li úvahy § 29, dojdeme k integrální rovnici

$$\mu(t) + \int_L K(t, \zeta)\, \mu(\zeta)\, d\sigma = f(s). \qquad (11)$$

Zde

$$K(t, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(\nu, r)}{r} + \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i} \int_0^t \frac{H(t, \bar{t}, \lambda, k)}{\zeta - \lambda} d\lambda\right\}. \qquad (12)$$

Dále, t je bod na hranici L, příslušející hodnotě parametru s, $r = |t - \zeta|$ a ν je směr vnější normály k L v bodě ζ. Opakujeme-li úvahy § 29, lehce dokážeme, že rovnice (11) je pro $k \neq k_n$ řešitelná. Najdeme-li z této rovnice $\mu(t)$, dostaneme pomocí vzorců (10) a (9) řešení našeho problému.

Jiný postup, jak převést základní úlohy pro vlnovou rovnici na integrální rovnici, je uveden v článku D. I. Šermana [37o].

[1] Odvození tohoto vzorce viz v [10]. Poněkud jsme pozměnili označení uvedeného článku.

§ 58. Tepelné potenciály a jejich užití. Omezíme-li se na případ, že teplota závisí kromě času pouze na dvou souřadnicích, můžeme rovnici pro vedení tepla napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1}$$

Nejjednodušším krajovým problémem, spojeným s touto rovnicí, je určit integrál rovnice (1), spojitý i s jeho prvými a druhými derivacemi ve všech bodech (x, y) nějaké oblasti D a pro všechny okamžiky času následující za počátečním. Hledaný integrál musí vyhovovat podmínkám:

a) počáteční

pro $t = 0$
$$U = F(x, y); \tag{2}$$

b) krajové

na hranici L oblasti D
$$U = f(s, t). \tag{3}$$

Tento problém budeme nazývat Dirichletovým problémem pro rovnici (1).

Dané funkce $F(x, y)$ a $f(s, t)$ budeme považovat za dostatečně hladké.

Na právě formulovaný problém se převede na př. vyšetřování pohybu viskosní kapaliny v dlouhé rouře konstantního průřezu.

Budeme předpokládat, že rychlosti částic kapaliny mají směr povrchových přímek roury. Tudíž, jestliže orientujeme osu z rovnoběžně s rourou, je od nuly různá pouze složka rychlosti ve směru z. Dále předpokládáme, že uvedená rychlost nezávisí na z. Potom, jak je známo,[1] uvedená rychlost vyhovuje rovnici (1). Je zřejmé, že stačí určit ji v libovolném průřezu roury. Tento průřez bude oblastí D. Abychom určili rychlosti v libovolný okamžik času, je nutné udat rozdělení rychlostí v počátečním okamžiku. Označíme-li $F(x, y)$ rychlost v bodě (x, y) pro $t = 0$, dojdeme k podmínce (2). Viskosní kapalina lne na stěny roury. Z toho plyne, že na hranici průřezu je rychlost rovna nule; krajová podmínka (3) v našem případě nabývá tvaru:

na L
$$U(s, t) = 0.$$

---

[1] Viz N. E. Kočin, I. A. Kibel' a N. V. Roze, Těoretičeskaja gydromechanika, č. II.

Shora formulovanou krajovou úlohu lze převést na integrální rovnici, jesilíže užijeme t. zv. tepelných potenciálů. Uveďme krátce jejich definici a základní vlastnosti; podrobný výklad theorie tepelných potenciálů lze najít na př. v [6].

Označme σ hodnotu parametru, určujícího polohu bodu na L i sám bod; ν značí vnější normálu k L v bodě σ. Dále označme r vzdálenost bodu σ od bodu (x, y); úsečku, jež je spojuje, budeme považovat za orientovanou od bodu σ k bodu (x, y).

Nechť $\mu(\sigma, t)$ je funkce definovaná pro $t \geqq 0$ a σ ležící na L. Budeme předpokládat, že $\mu(\sigma, t) = 0$ pro $t = 0$ a že je dostatečně hladká. Tepelným potenciálem dvojvrstvy budeme nazývat integrál

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t - \tau} \frac{\partial}{\partial \nu} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\sigma, \tag{4}$$

definovaný pro body ležící jak uvnitř, tak i vně hranice L. Potenciál (4) lze také napsat ve tvaru

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

K tomu stačí provést derivování za integračním znaménkem.

Funkce $\mu(\sigma, \tau)$ se nazývá hustotou potenciálu. Uveďme vlastnosti potenciálu (4).

1. Jak uvnitř, tak i vně L je $U(x, y)$ spojitá i se svými derivacemi libovolného řádu a vyhovuje diferenciální rovnici pro vedení tepla (rovnici (1)).

2. Pro $t = 0$ se potenciál (4) rovná nule.

3. Jestliže bod (x, y) konverguje k bodu s na hranici, pak potenciál (4) konverguje k limitním hodnotám, jež jsou dány vzorci

$$U_i = -\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{6}$$

$$U_e = \mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

4. Normální derivace potenciálu (4) je spojitá při překročení hranice.

Zabývejme se řešením Dirichletova problému pro rovnici pro vedení tepla. Není obtížné určit integrál této rovnice, vyhovující počáteční podmínce (2). K tomu stačí určit $F(x, y)$ v celé rovině (x, y), a to tak, že položíme na př. $F(x, y) = 0$ vně L, a potom je uvedené partikulární řešení dáno známým vzorcem

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta,$$

čili, máme-li na zřeteli, že $F(x, y) = 0$ vně L,

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_D F(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta. \tag{8}$$

Řešení Dirichletova problému budeme hledat ve tvaru

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r \cos(\nu, r)\, d\sigma. \tag{9}$$

Z vlastností (1) a (2) tepelného potenciálu dvojvrstvy plyne, že funkce (9) vyhovuje diferenciální rovnici (1) a počáteční podmínce (2). Zbývá určit hustotu $\mu(\sigma, \tau)$ tak, aby se vyhověla krajové podmínce (3).

Nechť bod (x, y) konverguje k bodu s na hranici. Užijeme-li krajové podmínky (3) a vzorce (6), dostaneme integrální rovnici s neznámou $\mu(\sigma, \tau)$:

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r \cos(\nu, r)\, d\sigma = -g(s, t), \tag{10}$$

kde

$$g(s, t) = f(s, t) - \lim_{(x, y) \to s} U_0(x, y, t).$$

V příštím paragrafu podáme důkaz řešitelnosti získané integrální rovnice. Zde učiníme jen některé poznámky.

1. Pomocí téhož tepelného potenciálu lze řešit Dirichletův problém v tom případě, kdy oblast leží vně hranice L. Řešení se jako v předchá-

zejícím předpokládá ve tvaru (9). Necháme-li (x, y) konvergovat k bodu s, musíme užít vzorce (7) a to nás vede k integrální rovnici t. zv. vnějšího Dirichletova problému:

$$\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) \, d\sigma = g(s, t). \quad (11)$$

2. V theorii šíření tepla hraje důležitou úlohu krajový problém, v němž je podmínka (3) nahrazena podmínkou:

$$\text{na } L \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} + h(\sigma) \, U = f(\sigma, \tau), \quad (12)$$

kde $h(\sigma)$ je nějaká spojitá kladná funkce. Na tento problém se převádí vyšetřování teploty v dlouhém válci, který ztrácí (nebo získává) teplo do okolního prostředí, při čemž teplota tohoto prostředí v blízkosti válce je známa v libovolný okamžik. Tato úloha může být řešena pomocí tepelného potenciálu jednoduché vrstvy, který má tvar

$$V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t - \tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma. \quad (13)$$

Jako v případě potenciálu dvojvrstvy budeme o hustotě $\varrho(\sigma, \tau)$ předpokládat, že je dostatečně hladká a rovna nule pro $\tau = 0$. Potenciál (13) vyhovuje rovnici pro vedení tepla; rovná se nule pro $t = 0$ a je spojitý při přechodu hranice. Jeho normální derivace má skok při přechodu hranice; označíme-li n vnější normálu k L v bodě s, máme:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n) \, d\sigma, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e = -\varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n) \, d\sigma. \quad (15)$$

Řešíce krajový problém s podmínkou (12), budeme hledat U ve tvaru

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t - \tau)} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma, \quad (16)$$

kde U_0 je dáno vzorcem (8). Užijeme-li vzorců (14) a (15), dostaneme integrální rovnici pro neznámou $\varrho(\sigma, \tau)$:

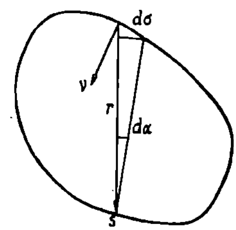
$$\pm\, \varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r \cos(r, n)\, \mathrm{d}\sigma + \tag{17}$$
$$+ \frac{h(s)}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\sigma = f(s, t) - \frac{\partial U_0}{\partial n} - h(s)\, U_0.$$

Znaménko plus odpovídá vnitřní oblasti, znaménko minus vnější oblasti.

3. Integrální rovnice (10), (11) a (17) podržují svůj tvar i tehdy, když je oblast D mnohonásobně souvislá.

4. Položme

$$\frac{\cos(r, \nu)}{r}\, \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\alpha. \tag{18}$$



Obr. 16.

Není obtížné nahlédnout, že $\mathrm{d}\alpha$ je úhel sevřený dvěma nekonečně blízkými radius-vektory, vedenými z bodu s ke koncovým bodům oblouku $\mathrm{d}\sigma$ (obr. 16). Rovnici (10) lze napsat ve tvaru

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r^2\, \mathrm{d}\alpha = -\, g(s, t). \tag{19}$$

V takovém tvaru naše integrální rovnice neztrácí smysl ani tehdy, když není hranice L hladká. Stačí pouze předpokládat, že integrál

$$\int_L |\mathrm{d}\alpha| = \int_L \frac{|\cos(\nu, r)|}{r}\, \mathrm{d}\sigma$$

má konečnou hodnotu.

5. Tepelné potenciály v trojdimensionálním prostoru jsou dány následujícími vzorci:[1]

[1] Viz [8].

potenciál jednoduché vrstvy

$$V(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \iint_S \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma; \tag{20}$$

potenciál dvojvrstvy

$$U(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \iint_S \frac{\mu(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-x)]^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma. \tag{21}$$

Pomocí těchto potenciálů lze základní krajové problémy převést na integrální rovnice právě tak, jak jsme to již učinili při rovinném problému.

§ 59. Konvergence postupných aproximací. V monografii G. M. Mjuntce [6] je dokázáno, že rovnice (10) a (11), § 58, lze řešit methodou postupných aproximací. Přitom se předpokládá, že hranice L je hladká a má spojitou křivost.

V tomto paragrafu podáme důkaz konvergence postupných aproximací za předpokladu, že hranice L je konvexní, není však nutně hladká. Získaný odhad rychlosti konvergence bude horší než u Mjuntce. Uvedeme však tyto horší odhady, neboť nehladké hranice, speciálně mnohoúhelníkové, se často vyskytují v praxi.

Rovnice (10), § 58, a také rovnice konjugovaná s rovnicí (11), § 58, jsou zvláštní případy obecnější rovnice

$$\mu(s, t) - \frac{\lambda}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t)}} r^2 \, d\alpha = g(s, t) \tag{1}$$

pro $\lambda = \pm 1$. Dokažme, že postupné aproximace pro rovnici (1) konvergují, jestliže hranice L je konvexní a $|\lambda| \leq 1$.

Ve shodě s methodou postupných aproximací položme

$$\mu(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mu_n(s, t). \tag{2}$$

Dosadíme-li toto do (1) a porovnáme-li koeficienty při stejných mocninách λ, dostaneme rekurentní vzorce, jež nám dovolují určit funkce $\mu_n(s, t)$:

$$\mu_0(s, t) = g(s, t),$$

$$\mu_n(s, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu_{n-1}(s,t)}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t)}} r^2\, d\alpha. \tag{3}$$

Nechť $|g(s, t)| = |\mu_0(s, t)| \leqq A_0$, kde A_0 je jistá konstanta. Předpokládejme dále, že $|\mu_{n-1}(s, t)| \leqq A_{n-1}$, A_{n-1} je také konstanta, a určeme odhad pro $|\mu_n(s, t)|$.

Zřejmě máme

$$|\mu_n(s, t)| \leqq \frac{A_{n-1}}{4\pi a^2}\int_L d\alpha \int_0^t \frac{r^2}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Provedeme-li transformaci

$$\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} = z,$$

lehce najdeme:

$$\frac{1}{4a^2}\int_0^t \frac{r^2}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}.$$

A tedy

$$|\mu_n(s, t)| \leqq \frac{A_{n-1}}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha.$$

Dále

$$\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha < \frac{1}{\pi}\int_L d\alpha = \frac{\Omega(s)}{\pi}. \tag{4}$$

Zde jsme $\Omega(s)$ označili úhel, pod nímž vidíme hranici z bodu s. Zřejmě $\Omega(s) = \pi$ v bodech, v nichž existuje tečna, a (neboť hranice je konvexní) $\Omega(s) < \pi$ v bodech s nespojitou tečnou. V každém případě

$$\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha < 1.$$

Položme

$$q(t_0) = \max_{0 \leqq t \leqq t_0} \frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha. \tag{5}$$

Zřejmě $q(t_0) < 1$ pro libovolné t_0 a

$$|\mu_n(s, t)| < q(t_0)\, A_{n-1}, \quad t \leqq t_0. \tag{6}$$

Chceme-li vyšetřovat postupné aproximace pro nějaké t, pevně zvolíme libovolné t_0, $t_0 \geqq t$. Užijeme-li nerovnosti (6), najdeme:

$$|\mu_n(s, t)| < A_0\, q^n(t_0). \tag{7}$$

Z posledního odhadu plyne konvergence postupných aproximací, stejnoměrná pro $0 \leqq t \leqq t_0$.

Jestliže hranice L je hladká a se spojitou křivostí, pak odhad pro $|\mu_n(s, t)|$ je:[1]

$$|\mu_n(s, t)| < \frac{A_0 (pt)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \tag{8}$$

Zde Γ je Eulerova funkce gamma a konstanta p závisí na tvaru hranice.

KAPITOLA 5

UŽITÍ THEORIE SOUMĚRNÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 60. Vlastní kmity struny. Uvažujme nehomogenní strunu délky l, jež v rovnovážné poloze zaujímá úsečku $\langle 0, l \rangle$ na ose abscis a je podrobena napětí T. Koncové body struny budeme považovat za pevné. Nechť na strunu působí spojitě rozložená síla $F(x, t)$. Tím myslíme, že v okamžiku t působí na element struny $\langle x, x + \mathrm{d}x \rangle$ síla rovnající se $F(x, t)\,\mathrm{d}x$. Budeme dále předpokládat, že tato síla působí kolmo na strunu. Rovnice pro příčné kmity struny, jak je známo, má tvar

$$\varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \tag{1}$$

kde $\varrho(x)$ je hustota struny v bodě s úsečkou x.

---

[1] Viz [6].