Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Singulární integrální rovnice

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 111–133.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402772

přechod ve (14) a položíme-li $\frac{1}{\mu} = \lambda_1$, dostaneme

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 K\varphi_1 = 0. \tag{15}$$

Funkce $\varphi_1(x)$ není identicky rovna nule, neboť její norma je rovna jedné. Avšak potom z (15) plyne, že λ_1 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Tím je věta 3, § 12, a tedy také věta 1, § 12 dokázána.

KAPITOLA 3

SINGULÁRNÍ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

§ 21. Hlavní hodnota integrálu. Obvyklá definice, jež definuje integrál jako limitu integrálních součtů, je vhodná pouze pro omezené funkce. Jestliže integrovaná funkce je neomezená, zavádíme pojem „nevlastního integrálu". Připomeňme ho.

Nechť funkce $f(x)$ definovaná v intervalu $a \leqq x \leqq b$ není omezená v okolí bodu c tohoto intervalu, avšak je integrovatelná na každém z intervalů $a \leqq x \leqq c - \varepsilon'$ i $c + \varepsilon'' \leqq x \leqq b$ pro libovolně malá kladná čísla ε' a ε''. Utvořme součet

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Jestliže má tento součet limitu, když ε' a ε'' konvergují k nule nezávisle na sobě, nazýváme uvedenou limitu nevlastním integrálem funkce $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ \varepsilon'' \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx\right]. \tag{2}$$

Může se stát, že součet (1) nemá limitu, když ε' a ε'' konvergují k nule nezávisle na sobě, avšak limita existuje, jestliže ε' a ε'' jsou při svém přibližování k nule vázány nějakým vztahem. Uvažujme na př. funkci $f(x) = \frac{1}{x - c}$, $a < c < b$. Máme:

$$\int_a^{c-\varepsilon'} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon''}^{b} \frac{dx}{x-c} = \lg\frac{b-c}{c-a} + \lg\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\right|. \tag{3}$$

Když ε' a ε'' konvergují k nule, veličina (3) nekonverguje k limitě, neboť podíl $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ se při tom může libovolně měnit. Avšak, jestliže podrobíme ε' a ε'' na př. podmínce $\varepsilon' = k\varepsilon''$, kde k je kladná konstanta, bude mít součet (3) limitu rovnou

$$\lg\frac{b-c}{c-a} + \lg k.$$

Speciálně, jestliže položíme $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$, dostaneme

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right] = \lg\frac{b-c}{c-a}. \tag{4}$$

Zaveďme nyní následující definici.

Nechť je funkce $f(x)$ definována v intervalu $a \leqq x \leqq b$ a nechť je integrovatelná na každém z intervalů $a \leqq x \leqq c - \varepsilon$ a $c + \varepsilon \leqq x \leqq b$ pro libovolně malé kladné číslo ε. *Hlavní hodnotou integrálu* funkce $f(x)$ v intervalu $a \leqq x \leqq b$ nazveme limitu (jestliže existuje)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]. \tag{5}$$

Pojem hlavní hodnoty i samotný název byly zavedeny Cauchym. Místo „hlavní hodnota integrálu" budeme často říkat „singulární integrál".[1]

Hlavní hodnotu integrálu budeme značit obvyklým symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Také se užívá symbolů

$$\text{V. P.} \int_a^b f(x)\,dx; \quad \int_a^{'b} f(x)\,dx; \quad \int_a^{*b} f(x)\,dx;$$

nejsou však obzvlášť nutné.

[1] Rusky buď „сингулярный интеграл" nebo „особый интеграл" (u Privalova). Pozn. překladatele.

Poznamenejme, že hlavní hodnota integrálu splývá s obvyklým (vlastním nebo nevlastním) integrálem, jestliže tento existuje.

Uveďme nyní širokou a pro aplikace velmi důležitou třídu integrálů, pro něž hlavní hodnota existuje.

Především z relace (4) plyne, že existuje singulární integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t-x} = \lg\frac{b-x}{x-a}, \quad a < x < b. \tag{6}$$

Nechť funkce $f(x)$ splňuje tak zvanou podmínku Lipschitzovu s exponentem α. Tato podmínka zní takto: existují konstanty K a α, $0 < \alpha \leqq 1$ takové, že pro všechny dvojice bodů x', x'', ležící v intervalu $a \leqq x \leqq b$, je splněna nerovnost

$$|f(x') - f(x'')| < K|x' - x''|^\alpha. \tag{7}$$

Třídu funkcí, splňující Lipschitzovu podmínku s exponentem α, budeme značit symbolem Lipα; okolnost, že funkce $f(x)$ přísluší třídě Lipα, označíme takto:

$$f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha.$$

Jestliže $f(x)$ má v intervalu $a \leqq x \leqq b$ omezenou derivaci, pak $f(x) \in \mathrm{Lip}1$. To plyne bezprostředně z věty o střední hodnotě.

Věta 1. *Jestliže* $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$, *pak singulární integrál*

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

existuje pro všechna x *v intervalu* $a < x < b$.

Důkaz je velmi jednoduchý. Napišme integrál (8) ve tvaru

$$\int_a^b \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\,\mathrm{d}t + f(x)\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t-x}.$$

V prvém integrálu platí pro integrand odhad

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| < K|t-x|^{\alpha-1}.$$

Tento integrál existuje jako nevlastní pro $\alpha < 1$ a jako vlastní pro $\alpha = 1$. Druhý integrál existuje v důsledku vzorce (6).

Pojem hlavní hodnoty se dá lehce rozšířit i na křivkové integrály. V důsledku častého užití v aplikacích budeme formulovat tento pojem pro integrály funkcí komplexní proměnné. Nechť L je hladká křivka (uzavřená nebo neuzavřená) se spojitou křivostí a c je komplexní souřadnice nějakého bodu na L. Oddělme bod c kruhem s poloměrem ε a se středem v tomto bodě. Zbývající část křivky označme L_ε. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je integrovatelná na L_ε pro libovolně malé kladné číslo ε. Hlavní hodnotou integrálu nebo singulárním integrálem funkce $f(z)$ na křivce L nazveme limitu (jestliže existuje)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L_\varepsilon} f(z)\, \mathrm{d}z$$

a označíme ji symbolem

$$\int_L f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Budeme říkat, že funkce $f(z)$ splňuje na křivce L Lipschitzovu podmínku s exponentem α a budeme to značit $f(z) \in \mathrm{Lip}\alpha$, jestliže pro libovolné body z', z'' křivky L bude splněna nerovnost

$$|f(z') - f(z'')| < K|z' - z''|^\alpha, \tag{9}$$

kde K a α jsou nějaké kladné konstanty a $0 < \alpha \leqq 1$. Platí věta obdobná větě 1:

Věta 2. *Jestliže $f(z) \in \mathrm{Lip}\alpha$, pak singulární integrál*

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \tag{10}$$

existuje pro všechny body z na křivce L, až snad na její body koncové.

Probíhá-li x interval $a < x < b$, je integrál (8) funkcí proměnné x. Označme

$$f_1(x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t - x}\, \mathrm{d}t.$$

O funkci $f_1(x)$ platí následující věta.[1]

[1] Viz na př. I. I. Privalov, Vvěděnije v těoriju funkcij kompleksnogo pěremennogo, izd. 8, Gostěchizdat, 1948.

Věta 3 (I. I. Privalova). *Jestliže* $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$, $\alpha < 1$, *pak v každém uzavřeném intervalu* $a_1 \leqq x \leqq b_1$, *kde* $a_1 > a$ *a* $b_1 < b$, *platí* $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$; *jestliže* $f(x) \in \mathrm{Lip}1$, *pak v témže intervalu* $a_1 \leqq x \leqq b_1$ *platí* $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\beta$, *kde* β *je libovolné kladné číslo menší než jedna.*

Obdobná věta platí i pro integrály (10). Při tom, jestliže je křivka uzavřena,

$$f_1(z) = \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

přísluší třídě Lip α resp. Lipβ na celé křivce L.

Jako důsledek shora uvedených vět dostaneme větu, kterou budeme formulovat, abychom se neopakovali, pouze pro integrál (8), i když platí i pro integrál (10).

Věta 4. *Nechť* $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$ *v intervalu* $a \leqq x \leqq b$. *Nechť*

$$f_1(x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

$$f_2(x) = \int_a^b \frac{f_1(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

. . . .

$$f_n(x) = \int_a^b \frac{f_{n-1}(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

. . . .

Singulární integrály $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, *existují pro* $a < x < b$; *v každém uzavřeném intervalu* $a_1 \leqq x \leqq b_1$, *kde* $a_1 > a$ *a* $b_1 < b$, *máme* $f_n(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$ *pro* $\alpha < 1$ *a* $f_n(x) \in \mathrm{Lip}\beta$, *kde* β *je libovolné číslo menší než jedna, jestliže* $\alpha = 1$.

§ 22. Jádro Cauchyho a Hilbertovo. Důležitá úloha, kterou v řadě aplikací hraje pojem singulárního integrálu, je důsledkem následující věty theorie funkcí komplexní proměnné.

Věta. *Nechť* L *je hladká křivka a nechť* $\varphi(\zeta)$ *je funkce bodu na této křivce, jež vyhovuje Lipschitzově podmínce s exponentem* α, $0 < \alpha \leqq 1$.

Jestliže bod z konverguje z vnitřku resp. z vnějšku křivky L k bodu t této křivky, pak integrál Cauchyho typu

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \tag{1}$$

konverguje k limitě

$$F_i(t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta, \tag{2}$$

resp.

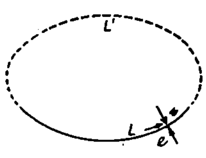
$$F_e(t) = -\tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta, \tag{3}$$

kde integrály ve vzorcích (2) *a* (3) *jsou singulární.*

Tato věta dává podnět k několika poznámkám.

Především se předpokládá, že křivka L probíhá v kladném směru, takže jí omezená oblast leží po její levé straně. Index i (vzorec (2)) značí, že $z \to t$ z vnitřku oblasti, a index e (vzorec (3)) značí, že $z \to t$ z vnějšku. Dále, když hovoříme o konvergenci bodu z k t, budeme předpokládat, že se křivka, kterou probíhá bod z, nedotýká křivky L; v opačném případě může být tvrzení věty nesprávné. Konečně může křivka L sestávat z několika oddělených křivek.

Důkaz této věty neprovedeme, protože jej lze najít v kterékoli učebnici theorie funkcí komplexní proměnné.



Obr. 3.

Zvláště je třeba se zmínit o případu neuzavřené křivky.

Jestliže L je jednoduchý oblouk (obr. 3), ztrácí pojem „z vnitřku oblasti" a „z vnějšku oblasti" smysl, avšak vzorce (2) a (3) zůstávají v platnosti. Směry i a e jsou definovány takto: Doplňme L obloukem L' na uzavřenou křivku, jež je orientována proti směru hodinových ručiček, a nechť D je oblast jí omezená. Pod i a e ve vzorcích (2) a (3) je potom třeba chápat směry z vnitřku resp. z vnějšku oblasti D.

Výraz

$$\frac{d\zeta}{\zeta - t}, \tag{4}$$

kde ζ a t jsou body křivky L, budeme nazývat *Cauchyho jádrem.*

Důležitou úlohu hraje také t. zv. *Hilbertovo jádro*:

$$\operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

kde s a σ jsou reálné proměnné, jež probíhají interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Hilbertovo jádro také souvisí s theorií analytických funkcí. Objasněme tuto souvislost.

Vyjděme z Poissonova integrálu

$$U(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\sigma - s)} \, \mathrm{d}\sigma,$$

jenž vyjadřuje hodnoty harmonické funkce $U(r, s)$ uvnitř kruhu $r < 1$ pomocí jejích hodnot $u(\sigma) = U(1, \sigma)$ na obvodu tohoto kruhu. Položme $re^{is} = z$, $e^{i\sigma} = \zeta$. Potom, jak se lehce přesvědčíme (γ je kružnice $|\sigma| = 1$),

$$U(r, s) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u(\sigma) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \right\}.$$

Označme $V(r, s)$ harmonickou funkci, konjugovanou s $U(r, s)$. Funkce $V(r, s)$ je až na aditivní konstantu určena. Tuto konstantu zvolme tak, aby se $V(r, s)$ rovnala nule ve středu kruhu. Potom

$$U(r, s) + i\,V(r, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u(\sigma) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Nechť nyní $r \to 1$, takže z konverguje k bodu kružnice γ, zůstávajíc uvnitř kruhu. Užijeme-li vzorce (2), dostaneme po několika elementárních úpravách

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{6}$$

kde $v(s) = V(1, s)$ je limitní hodnota harmonické funkce $V(r, s)$ na kružnici γ.

Vzorec (6) tedy váže limitní hodnoty konjugovaných funkcí, harmonických uvnitř kruhu, při čemž konjugovaná funkce $V(r, s)$ je podrobena podmínce

$$V(r, s)|_{r=0} = 0. \tag{7}$$

Jádro Hilbertovo a Cauchyho jsou v dosti jednoduchém vztahu. Nechť L je jednoduchá uzavřená hladká křivka se spojitou křivostí. Nechť její parametrické rovnice jsou

$$x = x(s),\ y = y(s).$$

O parametru s budeme předpokládat, že probíhá interval $\langle 0{,}2\pi\rangle$. Označme $t = x + iy$ a $t(s) = x(s) + i\,y(s)$. Rovnici křivky L lze napsat ve tvaru $t = t(s)$. Nechť ζ je bod na L příslušející hodnotě parametru σ, takže $\zeta = t(\sigma)$. Potom není obtížné dokázat vzorec

$$\frac{d\zeta}{\zeta - t} = \tfrac{1}{2}\cot\!g\,\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + P(s, \sigma)\,d\sigma, \tag{8}$$

kde $P(s, \sigma)$ je spojitá funkce obou argumentů, splňující Lipschitzovu podmínku s nějakým kladným exponentem.

§ 23. Vzorce pro skládání singulárních integrálů. Nechť

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta,\\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta, \end{aligned} \tag{1}$$

kde L je uzavřená křivka, ať už jednoduše nebo mnohonásobně souvislá. Určeme, jak lze přímo vyjádřit $\varphi_2(t)$ pomocí $\varphi(t)$. Uvažujme integrály Cauchyho typu:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Podle vzorce (2), § 22

$$f_i(t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta,\quad f_{1i}(t) = \tfrac{1}{2}\varphi_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta.$$

Odtud, užijeme-li definice $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$, dostaneme:

$$\varphi_1(t) = f_i(t) - \tfrac{1}{2}\varphi(t),\quad \varphi_2(t) = f_{1i}(t) - \tfrac{1}{2}\varphi_1(t). \tag{2}$$

Dosaďme hodnotu $\varphi_1(t)$ z (2) do $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_i(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{3}$$

Prvý integrál ve (3) je Cauchyho integrál, neboť jeho hustota[1]) $f_i(\zeta)$ je limitní hodnota funkce $f(z)$ regulární uvnitř L. Uvedený integrál se tedy rovná $f(z)$. Druhý integrál ve (3) se zřejmě rovná $\frac{1}{2}f(z)$. Tudíž $f_1(z) = \frac{1}{2}f(z)$ a $f_{1i}(t) = \frac{1}{2}f_i(t)$. Nyní ze (2) plyne

$$\varphi_2(t) = \tfrac{1}{2}f_i(t) - \tfrac{1}{2}[f_i(t) - \tfrac{1}{2}\varphi(t)] = \tfrac{1}{4}\varphi(t).$$

Tím jsme dostali Poincaré-Bertrandův vzorec pro skládání singulárních integrálů:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \tau}\,\mathrm{d}\zeta = \tfrac{1}{4}\varphi(t). \tag{4}$$

Poznamenejme, že v dvojnásobném singulárním integrálu nelze zaměnit pořádek integrování; jestliže zaměníme pořádek integrování ve (4), dostaneme integrál

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)},$$

jenž se rovná nule.

Jestliže $\zeta \neq t$, pak opravdu

$$\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)} = \frac{1}{\zeta - t}\left\{\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta}\right\}.$$

Ve vzorci (1), § 22 položme $\varphi(\zeta) \equiv 1$. Potom $F(z) = 1$, jestliže z leží uvnitř L; vzorec (2), § 22, v němž nahradíme τ za ζ, nyní dá

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2}.$$

Úplně obdobně

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2},$$

a tedy

$$\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)} = 0, \quad \zeta \neq t.$$

---

[1] Hustotou integrálu typu Cauchyho $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$ se nazývá funkce $\mu(\zeta)$.

Odvoďme vzorec pro skládání integrálů s Hilbertovým jádrem. Nechť

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s - \sigma) \, d\sigma,$$
$$\varphi_2(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s - \sigma) \, d\sigma. \tag{5}$$

Označme $U(r, s)$, $U_1(r, s)$, $U_2(r, s)$ funkce harmonické uvnitř kruhu $r < 1$, jejichž hodnoty na kružnici $r = 1$ jsou resp. $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$. Potom $U_1(r, s)$ je funkce konjugovaná s $U(r, s)$ a $U_2(r, s)$ je konjugovaná s $U_1(r, s)$.

Z rovnic Cauchy-Riemannových není obtížné nahlédnout, že

$$U_2(r, s) = -U(r, s) + C, \quad C = \text{konst.}$$

V souhlase s tím, co bylo řečeno v § 22, je konstanta C určena podmínkou $U_2(r, s)|_{r=0} = 0$. Odtud

$$C = U(r, s)|_{r=0}.$$

Avšak hodnota harmonické funkce ve středu kruhu se rovná aritmetickému průměru jejích hodnot na kružnici. Odtud

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(1, \sigma) \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \, d\sigma.$$

Nyní

$$U_2(r, s) = -U(r, s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \, d\sigma.$$

Položme v této rovnici $r = 1$. Protože $U(1, s) = \varphi(s)$, $U_2(1, s) = \varphi_2(s)$, dostaneme konečně

$$\varphi_2(s) = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \, d\sigma.$$

Nahradíme-li $\varphi_2(s)$ a potom $\varphi_1(s)$ jejich výrazy ve tvaru singulárních integrálů, dostaneme Hilbertův vzorec:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - s)\,d\vartheta\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - \vartheta)\,d\sigma =$$

$$= -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma. \qquad (6)$$

Jednoduše se skládají dva integrály, z nichž jeden je singulární a druhý obyčejný. Nechť $H(s, \sigma)$ je funkce, vyhovující Lipschitzově podmínce. Potom ve dvojnásobném integrálu

$$F(s) = \int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - s)\,d\vartheta\int_0^{2\pi}H(\vartheta, \sigma)\,d\sigma$$

lze zaměnit pořádek integrování a $F(s)$ splňuje Lipschitzovu podmínku. Obdobná věta platí i pro integrály s Cauchyho jádrem. Podrobnější důkaz tohoto tvrzení lze najít v [28f].

§ 24. Singulární integrální rovnice s Hilbertovým jádrem.

Budeme uvažovat rovnici tvaru

$$a\,\varphi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma + \int_0^{2\pi}K(s, \sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = f(s), \quad (1)$$

kde a a b jsou obecně komplexní konstanty.

O jádru $K(s, \sigma)$ budeme předpokládat, že splňuje Lipschitzovu podmínku. Totéž budeme předpokládat o pravé straně.

Předpokládejme nejdříve, že $K(s, \sigma) \equiv 0$, takže uvažujeme rovnici

$$L\varphi = a\,\varphi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma = f(s). \qquad (2)$$

Řeší se takto:

Položme

$$M\omega = a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma, \qquad (3)$$

kde $\omega(\sigma)$ je libovolná funkce. Na obě strany naší rovnice aplikujme operátor (3). Dostaneme novou rovnici

$$ML\varphi = F(s),\ F(s) = Mf,$$

kterou, užijeme-li Hilbertova vzorce, lehce uvedeme na tvar

$$(a^2 + b^2)\,\varphi(s) - \frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma = F(s). \tag{4}$$

Jestliže $a^2 + b^2 \neq 0$, pak je to Fredholmova rovnice s velmi jednoduchým degenerovaným jádrem.

Dokažme, že je ekvivalentní rovnici (2), jestliže jen $a \neq 0$. Napišme proto rovnici (4) ve tvaru $ML\varphi - Mf = 0$ čili $M(L\varphi - f) = 0$. Označíme-li $L\varphi - f = \omega$, dojdeme k rovnici $M\omega = 0$ čili podrobněji

$$a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma = 0.$$

Aplikujme na obě strany této rovnice operátor

$$a\,\psi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(s)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,ds.$$

Potom dostaneme rovnici, jíž nutně vyhovuje $\omega(s)$:

$$a\left[a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma\right] +$$
$$+ \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma\left[a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\vartheta)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - \sigma)\,d\vartheta\right] = 0.$$

Odstraňme závorky a dvojnásobný integrál nahraďme podle Hilbertova vzorce. Potom dostaneme

$$(a^2 + b^2)\,\omega(s) - \frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\,d\sigma = 0. \tag{*}$$

Odtud plyne, že $\omega(s) = \text{konst.}$ Dosadíme-li do (*) $\omega(s) = \omega(\sigma) = C$, najdeme, že $a^2C = 0$ čili $C = 0$. Nyní $\omega(s) = 0$ čili $L\varphi - f = 0$, t. j. z rovnice (4) jako důsledek plyne rovnice (2). Na druhé straně je zřejmé, že rovnice (4) je důsledkem rovnice (2); tím je jejich ekvivalence dokázána. Řešíme-li rovnici (4) methodou § 4, dostaneme hledané řešení

$$\varphi(s) = \frac{a}{a^2 + b^2} f(s) - \frac{b}{2\pi(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s) \, d\sigma + \\ + \frac{b^2}{2\pi a(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \, d\sigma. \tag{5}$$

Jestliže $a^2 + b^2 = 0$, lze dokázat, že rovnice (2) je v obecném případě neřešitelná.

Zvlášť je třeba pojednat o případu $a = 0$. Položíme-li $b = 1$, což není zřejmě na újmu obecnosti, dostaneme rovnici prvého druhu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s) \, d\sigma = f(s). \tag{6}$$

Vzorce (5) se v tomto případě nedá užít, avšak rovnice (6) se lehce řeší přímo. Proveďme záměnu písmen σ a s na ϑ a σ, násobme obě strany rovnice výrazem

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s) \, d\sigma$$

a integrujme v mezích $\langle 0, 2\pi \rangle$. Užijeme-li Hilbertova vzorce, dostaneme

$$\varphi(s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \, ds = F(s), \quad F(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s) \, d\sigma. \tag{7}$$

Tato rovnice se lehce řeší. Položme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \, ds = C.$$

Potom

$$\varphi(s) - C = F(s).$$

Integrujeme-li tuto rovnici v mezích $\langle 0, 2\pi \rangle$, dojdeme k rovnici

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Není obtížné se přesvědčit, že je splněna vždy, ať je funkce $f(s)$ jakákoliv. Konstanta C zůstává libovolnou a tak dostaneme

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma + C. \tag{9}$$

Dosadíme-li toto do (6), přesvědčíme se, že výraz (9) vyhovuje rovnici tehdy a jen tehdy, když

$$\int_0^{2\pi} f(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{10}$$

Podmínka (10) je tedy nutná a postačující k tomu, aby rovnice (6) měla řešení.

V případě obecnější rovnice (1) dostaneme, jestliže aplikujeme na obě její strany operátor (3), integrální Fredholmovu rovnici obecného tvaru. Úloha se tím převádí na její řešení. Lze dokázat, že uvedená Fredholmova rovnice a rovnice (1) jsou ekvivalentní.

Na závěr řekněme několik slov o singulární rovnici obecnějšího tvaru:

$$a(s)\,\varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^{2\pi} K(s,\sigma)\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = f(s) \tag{11}$$

s proměnnými koeficienty a a b. Jestliže $a(s)$ a $b(s)$ vyhovují Lipschitzově podmínce, potom, aplikujeme-li na obě strany rovnice (11) operátor

$$M\omega = a(s)\,\omega(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma,$$

dostaneme integrální rovnici Fredholmova typu. Tato však nemusí být ekvivalentní rovnici (11).

§ 25. Singulární integrální rovnice s jádrem Cauchyho.

Singulární rovnice

$$a\,\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = f(t), \tag{1}$$

kde a a b jsou konstanty a L je uzavřená křivka,[1] se také řeší velmi jednoduše. Na obě strany rovnice (1) aplikujme operátor

$$M\omega = a\,\omega(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \tag{2}$$

Užijeme-li Poincaré-Bertrandova vzorce, lehce najdeme

$$(a^2 - b^2)\,\varphi(t) = a\,f(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta.$$

Jestliže $a^2 - b^2 \neq 0$, dostaneme:

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \tag{3}$$

Dosazením do (1) se přesvědčíme, že funkce (3) skutečně vyhovuje naší rovnici. Případ $a = 0$ není tentokráte výjimečný.

V případě rovnice obecnějšího tvaru,

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta + \int_L K(t, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = f(t),\quad a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \tag{4}$$

vede užití téhož operátoru

$$M\omega = a(t)\,\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta$$

na rovnici Fredholmovu. Jestliže a a b jsou konstanty, je získaná Fredholmova rovnice ekvivalentní rovnici (4). V obecném případě tato otázka vyžaduje dodatečného vyšetřování.

[1] Nezáleží na tom, zda je jednoduše nebo mnohonásobně souvislá.

§ 26. Případ neuzavřené souvislé křivky. Jestliže křivka L není uzavřená, vzorec Poincaré-Bertrandův neplatí a methody řešení singulárních rovnic vyložené v § 25 nelze užít. Užijeme zde jiné methody, založené na převedení singulární rovnice na tak zvanou úlohu Riemannovu.[1] Poznamenejme, že této methody lze také užít, jestliže křivka L je uzavřená.

Nechť L je jednoduchý hladký oblouk se spojitou křivostí. Uvažujme rovnici

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = f(t). \tag{1}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že a a b jsou konstanty a $a^2 - b^2 \neq 0$.

Jako novou proměnnou zavedeme integrál Cauchyho typu s hustotou $\varphi(\zeta)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{2}$$

Ze vzorců (2) a (3), § 22 plyne:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= F_i(t) - F_e(t),\\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta &= F_i(t) + F_e(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Dosadíme-li toto do (1), dostaneme rovnici:

$$(a + b)\,F_i(t) - (a - b)\,F_e(t) = f(t). \tag{4}$$

Tak jsme došli k Riemannově úloze: určit funkci $F(z)$, jestliže je dána lineární relace mezi jejími limitními hodnotami z vnitřku a z vnějšku křivky.

Položme

$$F(z) = \Phi(z)\,\omega(z) \tag{5}$$

a zvolme $\omega(z)$ tak, aby

$$(a + b)\,\omega_i(z) = (a - b)\,\omega_e(z). \tag{6}$$

Funkce $\omega(z)$ je tedy řešením homogenní Riemannovy úlohy.

[1] Podle terminologie N. I. Muschvelišviliho [28f] na úlohu Hilbertovu.

Uvažujme funkci
$$\omega(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m, \tag{7}$$
kde α a β jsou počátek a konec oblouku L, m je libovolná konstanta. Každá větev této funkce je regulární v rovině, rozdělené řezem podél L. Zvolme její libovolnou větev, na př. tu, jež se rovná jedné pro $z = \infty$. Při oběhu proti ručičkám hodinovým okolo bodu α se funkce $\omega(z)$ násobí činitelem $e^{2\pi i m}$. Tudíž
$$\omega_e(z) = e^{2\pi i m}\,\omega_i(z).$$
Určeme nyní číslo m z podmínky
$$e^{2\pi i m} = \frac{a+b}{a-b}. \tag{8}$$
Potom funkce (7) vyhovuje rovnici (6). Rovnice (8) určuje číslo
$$m = \frac{1}{2\pi i}\lg\frac{a+b}{a-b} \tag{9}$$
až na libovolnou celistvou aditivní konstantu. Zvolme tuto konstantu tak, aby platilo
$$0 \leqq \mathrm{Re}(m) < 1.$$
K tomu stačí vzít hodnotu $\arg\dfrac{a+b}{a-b}$ mezi 0 a 2π. Při této volbě čísla m jsou obě funkce $\omega(z)$ a $\dfrac{1}{\omega(z)}$ absolutně integrovatelné podél L.

Dosadíme-li nyní nalezenou hodnotu $\omega(z)$ do (5) a dále do (4), dostaneme:
$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = \frac{f(t)}{a+b}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^m. \tag{10}$$
Tato jednodušší Riemannova úloha se řeší velmi lehce. Vzorce (3) právě ukazují, že jako $\Phi(z)$ lze zvolit integrál Cauchyho typu
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(a+b)}\int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{11}$$
Nyní
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i(a+b)}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{12}$$

Řešení integrální rovnice (1) lze najít pomocí prvého ze vzorců (3):

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i} \left(\frac{t - \alpha}{t - \beta}\right)^m \int\limits_L \left(\frac{\zeta - \beta}{\zeta - \alpha}\right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - t}. \quad (13)$$

Řešení (13) není obecně jediné. Abychom se o tomto přesvědčili, uvažujme homogenní rovnici

$$a\,\varphi_0(t) + \frac{b}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 0. \quad (14)$$

Užijme téhož postupu a položme

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (15)$$

$$F_0(z) = \left(\frac{z - \alpha}{z - \beta}\right)^m \Phi_0(z). \quad (16)$$

Všimněme si, že se $F_0(z)$ a tedy i $\Phi_0(z)$ rovná nule pro $z = \infty$. Místo k (10) dojdeme nyní k rovnici

$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = 0. \quad (17)$$

Funkce $\Phi_0(z)$ nabývá tedy na oblouku L stejné limitní hodnoty z různých jeho stran. Z toho lehce usoudíme, že $\Phi_0(z)$ je regulární v celé rovině, až snad na body α a β. Požadujme, aby součin

$$\varphi_0(t) \lg \frac{t - \alpha}{t - \beta}$$

byl absolutně integrovatelný podél L.

Nechť z_1 a z_2 jsou dva libovolné body roviny z, ležící vně L. Integrujeme-li (15) po cestě, která spojuje z_1 a z_2 a která nemá společné body s L, budeme mít

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} F_0(z)\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi_0(\zeta) \lg \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} d\zeta.$$

Necháme-li $z_1 \to \alpha$, $z_2 \to \beta$, najdeme, že $F_0(z)$ je integrovatelná po libovolné cestě, která spojuje α a β a nemá jiné společné body s křivkou L. Odtud plyne, že neurčitý integrál

$$\int F_0(z)\, dz$$

je omezený v bodech α a β. To by nebylo možné, kdyby α a β byly podstatně singulárními body funkce $\Phi_0(z)$. Avšak potom mohou být pouze jejími póly. Předpokládejme, že reálná část m je různá od nuly; potom $0 < \mathrm{Re}(m) < 1$. Poněvadž integrál $\int\limits_\alpha^\beta F_0(z)\,\mathrm{d}z$ má konečnou hodnotu, snadno najdeme podle vzorce (16), že β je regulární bod a α je pól prvého řádu nebo regulární bod funkce $\Phi_0(z)$. Konečně $\Phi_0(\infty) = 0$. Z toho všeho plyne, že

$$\Phi_0(z) = \frac{c'}{z - \alpha}, \quad c' = \text{konst.} \tag{18}$$

Nyní

$$F_0(z) = \frac{c'}{(z - \alpha)^{1-m}(z - \beta)^m}$$

a podle prvého ze vzorců (3) nalezneme řešení homogenní singulární rovnice (14):

$$\varphi_0(t) = \frac{c}{(t - \alpha)^{1-m}(t - \beta)^m}, \quad c = c'(1 - \mathrm{e}^{2\pi i m}). \tag{19}$$

Obecné řešení rovnice (1) je dáno vzorcem

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i}\left(\frac{t - \alpha}{t - \beta}\right)^m \int\limits_L \left(\frac{\zeta - \beta}{\zeta - \alpha}\right)^m f(\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} +$$

$$+ \frac{c}{(t - \alpha)^{1-m}(t - \beta)^m}, \tag{20}$$

kde c je libovolná konstanta. Tuto konstantu lze zvolit tak, aby $\varphi(t)$ byla omezená na jednom či druhém konci oblouku L.

Místo (13) lze najít druhý výraz, v němž α a β vystupují souměrněji. Položme

$$\Psi(z) = (z - \alpha)^{1-m}(z - \beta)^m F(z). \tag{21}$$

Dosadíme-li toto do (4), dostaneme:

$$\Psi_i(t) - \Psi_e(t) = \frac{1}{a + b} f(t)(t - \alpha)^{1-m}(t - \beta)^m.$$

Odtud

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i(a + b)} \int\limits_L \frac{(\zeta - \alpha)^{1-m}(\zeta - \beta)^m f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Nyní již není obtížné určit $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m} \cdot$$
$$\cdot \int_L \frac{(\zeta-\alpha)^{1-m} (\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta. \tag{22}$$

Toto je partikulární řešení. Obecné řešení pak lze napsat ve tvaru

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m} \cdot$$
$$\cdot \int_L \frac{(\zeta-\alpha)^{1-m} (\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{c}{(t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m}. \tag{23}$$

Hodnoty konstanty c v (20) a (23) jsou různé.

Uvažujme speciálně rovnici prvého druhu:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta = f(t). \tag{24}$$

Zde $a = 0$, $b = 1$. Dále

$$m = \frac{1}{2\pi i} \lg(-1) = \tfrac{1}{2}$$

a vzorec (20) v tomto případě dává

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} \int_L \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}. \tag{25}$$

Položíme-li $a = 0$ ve (23), dostaneme řešení v druhém tvaru:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}} \int_L \frac{\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\, f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}. \tag{26}$$

Jestliže $\mathrm{Re}(m) = 0$, pak ze vzorce (16) a z toho, že integrál $\int_\alpha^\beta F_0(z)\,\mathrm{d}z$ je konečný, plyne, že α a β jsou regulární body funkce $\Phi_0(z)$. Avšak potom podle Liouvillovy věty $\Phi_0(z) = \text{konst.}$, a protože $\Phi_0(\infty) = 0$, $\Phi_0(z) \equiv 0$. Rovnice (1) má v tom případě jediné řešení, určené vzorcem (13); vzorec (22) nedává řešení pro $\mathrm{Re}(m) = 0$.

§ 27. Případ neuzavřené nesouvislé křivky. Nechť se nyní křivka L skládá z n jednoduchých oblouků $L_1, L_2, \ldots, L_n$, jež nemají po dvou společné body. Rovnice

$$a\,\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = f(t) \tag{1}$$

s konstantními koeficienty a a b se řeší týmž způsobem jako v § 26. Položíme-li

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

dostaneme jako dříve

$$(a + b)\,F_i(t) - (a - b)\,F_e(t) = f(t). \tag{2}$$

Označme α_k a β_k počáteční a koncový bod oblouku L_k. Položme

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k}\right)^m \Phi(z), \tag{3}$$

kde exponent m je definován vzorcem (9), § 26. Dosadíme-li toto do (2), dostaneme

$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = \frac{1}{a + b}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \beta_k}{t - \alpha_k}\right)^m f(t),$$

odkud plyne, že lze zvolit

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(a + b)}\int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m f(\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

a tím dostaneme partikulární řešení rovnice (1):

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2}f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{5}$$

Z těchže úvah jako v předcházejícím paragrafu najdeme, že v případě homogenní rovnice je příslušná funkce $\Phi_0(z)$ rovna

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z - \alpha_k}$$

čili, jestliže tyto zlomky převedeme na společného jmenovatele,

$$\Phi_0(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z - \alpha_k)}, \tag{6}$$

kde $P_{n-1}(z)$ je libovolný polynom stupně n — 1. Nyní lehce najdeme, že řešení homogenní integrální rovnice

$$a\,\varphi_0(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = 0 \tag{7}$$

se rovná

$$\varphi_0(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^{n}[(t - \alpha_k)^{1-m}\,(t - \beta_k)^m]}, \tag{7}$$

kde $Q_{n-1}(t)$ je libovolný polynom stupně n — 1. Obecné řešení rovnice (1) má tvar

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \cdot$$

$$\cdot\int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m f(\zeta)\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} + \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^{n}[(t - \alpha_k)^{1-m}(t - \beta_k)^m]}. \tag{8}$$

Polynom $Q_{n-1}(t)$ lze zvolit tak, aby $\varphi(t)$ byla omezená v daných n koncových bodech oblouků $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

§ 28. Soustavy singulárních integrálních rovnic. Soustava singulárních rovnic s Hilbertovým jádrem má tvar

$$L_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \sum_{j=1}^{n}\left\{a_{kj}\,\varphi_j(s) + \frac{b_{kj}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_j(\sigma)\cot\mathrm{g}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} K_{kj}(s, \sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right\} = f_k(s),\ \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kde jádra $K_{kj}(s, \sigma)$ splňují Lipschitzovu podmínku vzhledem k oběma proměnným.

Tuto soustavu lze lehce převést na Fredholmovu. Stačí ji nahradit soustavou

$$M_k(L_1, L_2, \ldots, L_n) = M_k(f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{2}$$

kde

$$M_k(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{j=1}^{n} \left\{a_{kj}\, \omega_j(s) - \frac{b_{kj}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_j(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, d\sigma.\right\} \tag{3}$$

Není obtížné se přesvědčit o tom, že soustava (2) má tvar

$$\sum_{m=1}^{n} \{A_{km}\, \varphi_m(s) + \int_0^{2\pi} K^*_{km}(s, \sigma)\, \varphi_m(\sigma)\, d\sigma\} = M_k(f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{4}$$

kde

$$A_{km} = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} a_{jm} + b_{kj} b_{jm}) \tag{5}$$

a $K^*_{km}(s, \sigma)$ jsou nějaká nová jádra, jež také splňují Lipschitzovu podmínku. Otázka, jsou-li soustavy (1) a (4) ekvivalentní, je dosti obtížná. Některé návody na její řešení lze najít ve článku N. I. Muschelišviliho [28e].

To, co bylo řečeno, se beze změny přenáší na soustavu singulárních rovnic s jádry Cauchyho, jestliže se integrály vyskytující se v soustavě berou podél uzavřené křivky.