Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Souměrné rovnice (Hilbert-Schmidtova theorie)

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 66–111.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402771

pouze triviální (nulové) řešení; podmínka 4. Fredholmovy věty je automaticky splněna pro libovolnou funkci $f(M)$, což zabezpečuje řešitelnost rovnice (7). Jednoznačnost řešení plyne z toho, že rovnice (15) nemá netriviální řešení.

KAPITOLA 2

SOUMĚRNÉ ROVNICE (HILBERT-SCHMIDTOVA THEORIE)

§ 11. Souměrná jádra. Jádro nazýváme *souměrným*, jestliže je identické s jádrem k němu konjugovaným. Takové jádro je charakterisováno identitou

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}. \tag{1}$$

Jestliže jádro je reálné, potom jeho souměrnost je definována vztahem

$$K(x, s) = K(s, x). \tag{2}$$

Integrální rovnici se souměrným jádrem nazýváme *souměrnou*.

Jestliže jádro je souměrné, můžeme se lehce přesvědčit o tom, že všechna jeho iterovaná jádra jsou také souměrná. Tak na příklad

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{K(s, t)}\; \overline{K(t, x)}\, \mathrm{d}t = \overline{K_2(s, x)},$$

$$K_3(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{K(s, t)}\; \overline{K_2(t, x)}\, \mathrm{d}t = \overline{K_3(s, x)}$$

atd.

Příklady. Jádra $x + s$, $\lg|x - s|$, $i(x - s)$ jsou souměrná. Jádro $i(x + s)$ je nesouměrné, neboť v tomto případě

$$\overline{K(s, x)} = -K(x, s).$$

Základní vlastnost souměrných jader, která v podstatě určuje celou theorii souměrných integrálních rovnic, spočívá ve vztahu

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi), \tag{3}$$

v nějž přejde identita (6), § 8 v případě souměrného jádra.

Posloupnost funkcí

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{4}$$

se nazývá *orthogonální*, jestliže jsou tyto funkce navzájem po dvou orthogonální. Budeme nazývat posloupnost *orthonormovanou soustavou*, jestliže je orthogonální a norma každé funkce je rovna jedné. Jestliže posloupnost (4) je orthonormovaná, pak

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Každou orthogonální soustavu lze lehce převést na orthonormovanou; stačí každou funkci dělit její normou.

Vyjdeme-li z libovolné orthonormované soustavy, lze vybudovat theorii „Fourierových řad", analogickou theorii trigonometrických řad. Naznačíme stručně tuto theorii.

Pro každou funkci $f(x)$ [1] si můžeme položit tuto úlohu: Jest určit koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tak, aby kvadratická chyba přibližné relace

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

byla co nejmenší. Kvadratická chyba je podle definice rovna

$$\delta_n = \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)|^2 \, dx.$$

Označme

$$a_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} \, dx.$$

Čísla a_k se nazývají *Fourierovými koeficienty* funkce $f(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě (4). Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\delta_n = \int_a^b |f^2(x)| \, dx + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

[1] O $f(x)$ pouze předpokládáme, že ona sama i její čtverec jsou absolutně integrovatelné.

Odtud je patrno, že δ_k bude nejmenší, když $\alpha_k = a_k$, t. j. když za koeficienty α_n zvolíme Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$. Nejmenší hodnota δ_n je rovna

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2. \tag{5}$$

Poněvadž tato hodnota je nezáporná, platí

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqq \|f\|^2.$$

Levá strana poslední nerovnosti je n-tý částečný součet řady s kladnými členy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

a naše nerovnost ukazuje, že částečné součty této řady jsou omezené. Odtud plyne, že uvedená řada konverguje, při čemž platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqq \|f\|^2, \tag{6}$$

jež se nazývá *Besselovou nerovností*.

Necháme-li v přibližné rovnosti (3) n růst nade všechny meze, dojdeme k Fourierově řadě funkce $f(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x). \tag{7}$$

Pravíme, že funkce $f(x)$ se dá rozvinout ve Fourierovu řadu podle funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, jestliže řada (7) příslušející této funkci konverguje a její součet je roven $f(x)$. Jestliže $f(x)$ se dá rozvinout ve stejnoměrně konvergentní řadu Fourierovu (7), potom platí t. zv. *Parsevalova identita*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2. \tag{8}$$

Pro dostatečně velké n skutečně

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) - f(x)\right|^2 < \varepsilon,$$

kde ε je libovolná kladná konstanta. Avšak potom

$$\delta_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 < \varepsilon(b - a).$$

Necháme-li $\varepsilon \to 0$ a tudíž $n \to \infty$, dostaneme Parsevalovu identitu.

Pokud se týče řady (7), vznikají dvě základní otázky: Za jakých podmínek tato řada konverguje, a jestliže konverguje, zda její součet je roven $f(x)$? Prvá otázka klade v obecném případě značné potíže při řešení, avšak v prakticky důležitých případech se často podaří nalézt jednoduché dostatečné podmínky stejnoměrné konvergence Fourierovy řady.

Přejděme ke druhé otázce. Orthogonální soustavu budeme nazývat *neúplnou*, jestliže existuje funkce, jež se nerovná identicky nule a jež je orthogonální ke všem funkcím soustavy. V opačném případě se soustava nazývá *úplnou*. Tak na př. soustava

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$$

jež je orthogonální v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, je neúplná, neboť funkce $\varphi(x) \equiv 1$ je orthogonální ke všem funkcím uvedené soustavy. V theorii trigonometrických řad se dokazuje, že soustava funkcí

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$$

orthogonálních v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, je úplná.

Jestliže soustava (1) *je úplná a řada* (7) *konverguje stejnoměrně, pak její součet je roven* $f(x)$. Proveďme důkaz této jednoduché a důležité věty. Položme

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) - f(x).$$

Funkce $\omega(x)$ je orthogonální ke všem funkcím $\varphi_k(x)$. Víme, že řada (7) konverguje stejnoměrně a je tedy možno ji integrovat člen po členu. Odtud také plyne, že skalární součiny (ω, φ_k) jsou rovny nule:

$$(\omega, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k) = a_k - a_k = 0.$$

Poněvadž však soustava (1) je úplná, je $\omega(x) \equiv 0$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x).$$

Je možno dokázat, že když je soustava (1) úplná, přejde Besselova nerovnost pro libovolnou funkci $f(x)$ v Parsevalovu identitu.

V aplikacích se setkáváme také s Fourierovými řadami poněkud obecnějšího charakteru. Nechť $r(x)$ je nějaká nezáporná funkce. Pravíme, že funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou orthogonální s vahou $r(x)$, když

$$\int_a^b r(x)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{9}$$

Soustavu (1) budeme nazývat *orthonormovanou s vahou* $r(x)$, jestliže platí vztahy

$$\int_a^b r(x)\,\varphi_i(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \tag{10}$$

Úplně tak jako shora dojdeme k pojmu Fourierovy řady funkce $f(x)$ podle soustavy funkcí orthonormovaných s nějakou vahou. Fourierovy koeficienty jsou definovány vzorcem

$$a_k = \int_a^b r(x)\,f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x; \tag{11}$$

Besselova nerovnost a Parsevalova identita se napíší ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqq \int_a^b r(x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

resp.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_a^b r(x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Pojem úplnosti a z něho vyplývající důsledky se přenášejí beze změny i na tento případ.

Uveďme několik příkladů orthogonálních soustav.

a) Soustava $\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$, kde k probíhá všechna celá čísla z intervalu $(-\infty, \infty)$, je orthogonální v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Není normovaná, neboť

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi.$$

Zřejmě soustava funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ikx}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

je orthonormovaná v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

b) Funkce

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots$$

tvoří orthogonální soustavu v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. V tomtéž intervalu tvoří orthogonální soustavu i funkce $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$

c) Legendrovy polynomy

$$P_0(x) = 1, \; P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (x^2 - 1)^n}{\mathrm{d}x^n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

jsou orthogonální v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Splňují relace

$$\int_{-1}^{+1} P_i(x)\, P_k(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \dfrac{2}{2k+1}, & i = k. \end{cases}$$

d) Čebyševovy polynomy

$$T_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}} \cos(k \arccos x), \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

jsou orthogonální s vahou

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Je možno je normovat vynásobením $T_k(x)$ veličinou $\sqrt{\dfrac{2^{2k-1}}{\pi}}$.

e) Nechť $J_n(x)$ značí Besselovu funkci prvého druhu n-tého řádu a nechť $\alpha_{k,n}$ jsou její kladné nulové body. Budeme předpokládat, že $n > -1$. Soustava funkcí

$$J_n(\alpha_{k,n} x), \; k = 1, 2, \ldots$$

je orthogonální s vahou $r(x) = x$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tyto funkce vyhovují relacím

$$\int_0^1 x\, J_n(\alpha_{i,n} x)\, J_n(\alpha_{k,n} x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ J_{n+1}^2(\alpha_{k,n}), & i = k. \end{cases}$$

Soustavy a) až e) jsou úplné.

Uvedené soustavy hrají důležitou úlohu v mnohých praktických otázkách. Počet příkladů takových soustav je možno značně rozšířit.

V theorii řad rozvinutých podle orthogonálních funkcí má velký význam t. zv. orthogonalisace, jež umožňuje libovolnou posloupnost lineárně nezávislých funkcí převést na orthonormovanou. Nechť $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ je posloupnost (konečná nebo spočetná) takových funkcí, že $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, kde m je libovolný index, jsou navzájem lineárně nezávislé. Utvořme takovou orthonormovanou posloupnost $\omega_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, aby $\omega_m(x)$ byla lineárně vyjádřena pomocí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ a naopak, aby $\varphi_m(x)$ byla lineárně vyjádřena pomocí $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_m(x)$.

Funkce $\varphi_1(x)$ není identicky rovna nule, protože nula je lineárně závislá na každé soustavě funkcí. V tom případě je její norma kladná. Položme

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x);\ \omega_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|};$$

potom je funkce $\omega_1(x)$ normovaná. Předpokládejme nyní, že hledané orthonormované funkce $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$ jsou už sestrojeny. Položme

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, \omega_k(x)$$

a zvolme koeficienty a_k tak, aby $\psi_n(x)$ byla orthogonální k $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$:

$$(\varphi_n, \omega_j) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\omega_k, \omega_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Avšak

$$(\omega_k, \omega_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j, \end{cases}$$

a z poslední rovnice nalezneme $a_j = (\varphi_n, \omega_j)$.

Funkce $\psi_n(x)$ není identicky rovna nule, neboť by se funkce $\varphi_n(x)$ dala v opačném případě vyjádřit lineárně pomocí $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$, a tudíž i pomocí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$. Nyní stačí položit

$$\omega_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}.$$

Jak vyplývá z konstrukce, je posloupnost $\omega_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ orthonormovaná a $\omega_n(x)$ je lineárně vyjádřena pomocí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Opačně $\varphi_n(x)$ je lineárně vyjádřena pomocí $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = \|\psi_n\|\, \omega_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k)\, \omega_k(x).$$

§ 12. Základní věty o souměrných rovnicích. Věta 1. *Jestliže jádro $K(x, s)$ je souměrné a není identicky rovno nule, pak má alespoň jedno charakteristické číslo.*

Existuje několik důkazů této velmi důležité věty; každý z nich je podkladem pro nějaký způsob přibližného výpočtu charakteristických čísel. Tyto způsoby jsou podrobně probírány v následujících odstavcích. Je třeba poznamenat, že pro nesouměrná jádra není první věta správná: existují nesouměrné rovnice, jež nemají charakteristická čísla. Takové jsou na př. rovnice Volterrovy.

Věta 1 je důsledkem věty 3, níže uvedené v tomto paragrafu, jejíž důkaz bude proveden na konci kapitoly v § 20.

Věta 2. *Všechna charakteristická čísla souměrného jádra jsou reálná.*

Nechť λ_0 je charakteristické číslo a $\varphi_0(x)$ jemu příslušející charakteristická funkce jádra $K(x, s)$. Podle definice vyhovují rovnici

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) \, ds = 0 \tag{1}$$

čili, jestliže užijeme označení, které jsme zavedli v § 8,

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 K\varphi_0 = 0.$$

Násobme tuto identitu výrazem $\overline{\varphi_0(x)}$ a integrujme vzhledem k x v mezích od a do b. Potom dostaneme

$$\|\varphi_0(x)\|^2 - \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_0) = 0,$$

odkud

$$\lambda_0 = \frac{\|\varphi_0(x)\|^2}{(K\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{2}$$

Čitatel ve (2) je kladný; dále podle základní vlastnosti souměrného jádra (vzorec (3), § 11)

$$(K\varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, K\varphi_0).$$

Avšak výměna činitelů ve skalárním součinu je ekvivalentní s jeho nahrazením komplexně konjugovanou hodnotou:

$$(\varphi_0, K\varphi_0) = \overline{(K\varphi_0, \varphi_0)}.$$

Tudíž

$$(K\varphi_0, \varphi_0) = \overline{(K\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{3}$$

Číslo $(K\varphi_0, \varphi_0)$, jež se rovná číslu k němu konjugovanému, je reálné. Nyní ze (2) plyne, že hodnota λ_0 je také reálná.

Věta 3. *Převrácená absolutní hodnota nejmenšího charakteristického čísla souměrného jádra se rovná maximu veličiny*

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(s)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s| \tag{4}$$

s vedlejší podmínkou

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)|\, \mathrm{d}x = 1. \tag{5}$$

Uvedeného maxima nabude, je-li $\varphi(x)$ charakteristická funkce jádra, jež přísluší nejmenšímu charakteristickému číslu.

Důkaz této věty není elementární a je třeba zavést k němu několik nových pojmů; tomuto důkazu bude věnován § 20 této kapitoly.

Věta 4. *Charakteristické funkce souměrného jádra, jež příslušejí různým charakteristickým číslům, jsou navzájem orthogonální.*

Nechť λ_1 a λ_2 jsou různá charakteristická čísla souměrného jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ jsou jim příslušející charakteristické funkce. Potom

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 K\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2(x) - \lambda_2 K\varphi_2 = 0.$$

Vynásobme skalárně první rovnici výrazem $\lambda_2 \varphi_2(x)$ a druhou $\lambda_1 \varphi_1(x)$. Číselné koeficienty vytkneme před skalární součin a přihlédneme k tomu, že podle věty 2 jsou reálné:

$$\lambda_2(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_1, \varphi_2) = 0; \tag{6}$$

$$\lambda_1(\varphi_2, \varphi_1) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_2, \varphi_1) = 0. \tag{7}$$

V (7) vyměníme činitele ve skalárním součinu a nahradíme všechny členy sdruženými. Potom dostaneme

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(\varphi_1, K\varphi_2) = 0$$

čili, podle vzorce (3), § 11,

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_1, \varphi_2) = 0. \tag{8}$$

Odečtěme (6) od (8):

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Avšak $\lambda_2 \neq \lambda_1$, tudíž je nutně $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, čímž je věta dokázána.

V souvislosti s větou 4 učiňme tuto poznámku. Nechť některému charakteristickému číslu odpovídá n lineárně nezávislých charakteristických funkcí. Jejich libovolná lineární kombinace je také charakteristickou funkcí. Pomocí orthogonalisace je možno z daných n lineárně nezávislých funkcí sestrojit n lineárních kombinací, jež budou normované a po dvou orthogonální, při čemž dané funkce budou opět lineárními kombinacemi sestrojených. Avšak v takovém případě je možno učinit všechny charakteristické funkce souměrného jádra po dvou orthogonálními. Opravdu, jestliže charakteristické funkce příslušejí témuž charakteristickému číslu, budou orthogonálními v důsledku orthogonalisace; jestliže příslušejí různým charakteristickým číslům, pak jsou orthogonální v důsledku věty 4. Tak dojdeme k větě:

Věta 5. *Posloupnost charakteristických funkcí souměrného jádra je možno učinit orthonormovanou.*

V dalším budeme vždy předpokládat v souhlase s větou 5, že posloupnost charakteristických funkcí souměrného jádra je orthonormovaná. Umluvíme se ještě, že při psaní posloupnosti charakteristických čísel budeme opakovat každé z nich tolikrát, kolik mu přísluší charakteristických, lineárně nezávislých funkcí. Potom můžeme předpokládat, že každému charakteristickému číslu odpovídá pouze jedna charakteristická funkce; přitom se mezi charakteristickými čísly mohou vyskytovat čísla stejná. Umluvíme se také, že budeme číslovat charakteristická čísla podle vzrůstajících absolutních hodnot. Tudíž, jestliže λ_m a λ_n jsou dvě charakteristická čísla a $m < n$, pak $|\lambda_m| \leqq |\lambda_n|$.

§ 13. Věta Hilbert-Schmidtova. Lemma 1. *Množina charakteristických čísel druhého iterovaného jádra je totožná s množinou čtverců charakteristických čísel daného jádra.*

Nepředpokládáme zde, že jádro je souměrné.

a) Nechť λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$ a $\varphi_0(x)$ je příslušná charakteristická funkce. Potom $(E - \lambda_0 K)\,\varphi_0 = 0$. Aplikujeme-li na obě strany poslední relace operátor $E + \lambda_0 K$, dostaneme

$$(E - \lambda_0^2 K^2)\,\varphi_0 = 0$$

čili podrobněji

$$\varphi_0(x) - \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds = 0,$$

odkud plyne, že λ_0^2 je charakteristické číslo jádra $K_2(x, s)$.

b) Nechť μ_0 je charakteristické číslo jádra $K_2(x, s)$ a $\varphi_0(x)$ je příslušná charakteristická funkce, takže $(E - \mu_0 K_2)\,\varphi_0 = 0$ čili, když položíme $\mu_0 = \lambda_0^2$,

$$(E - \lambda_0 K)(E + \lambda_0 K)\,\varphi_0 = 0. \tag{1}$$

Může se stát, že λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$; potom lemma 1 je správné. Předpokládejme nyní, že tomu tak není. Označme $(E + \lambda_0 K)\,\varphi_0 = \varphi_1(x)$. V důsledku rovnice (1) $(E - \lambda_0 K)\,\varphi_1 = 0$; protože λ_0 není charakteristické číslo jádra $K(x, s)$, pak $\varphi_1(x) = 0$ čili $(E + \lambda_0 K)\,\varphi_0 = 0$. Poslední relace ukazuje, že $-\lambda_0$ je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Tím je lemma dokázáno.

Poznámka. Lze dokázat i obecnější tvrzení: Množina charakteristických čísel jádra $K_n(x, s)$ je identická s množinou n-tých mocnin charakteristických čísel jádra $K(x, s)$.

Lemma 2. *Nechť jádro $K(x, s)$ je souměrné a vyhovuje nerovnosti* (1), § 2,

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, ds < C_1, \quad C_1 = \text{konst.}$$

Dále nechť $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ je posloupnost všech charakteristických funkcí jádra $K(x, s)$ a λ_n jsou jim příslušející charakteristická čísla. Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2} \tag{2}$$

konverguje a její součet není větší než konstanta C_1.

Zvolme pevně hodnotu proměnné x a uvažujme jádro $K(x, s)$ jako funkci proměnné s. Najděme Fourierovy koeficienty této funkce vzhledem k orthonormované posloupnosti $\overline{\varphi_n(s)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Označme tyto koeficienty a_n; potom

$$a_n = \int_a^b K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds = \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

Podle Besselovy nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2} \leqq \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \leqq C_1,$$

čímž je lemma dokázáno.

Lemma 3. *Jestliže $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ je množina všech charakteristických čísel jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots$ jsou jim příslušející charakteristické funkce, pak souměrné jádro*

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)\,\overline{\varphi_m(s)}}{\lambda_m} \tag{3}$$

má charakteristická čísla $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$, jimž příslušejí charakteristické funkce $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots$ Jiná charakteristická čísla a charakteristické funkce jádro $K^{(n)}(x, s)$ nemá.

Rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0$$

je možno napsat ve tvaru

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + \lambda \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} (\varphi, \varphi_m) = 0. \tag{4}$$

Dosaďme do levé strany rovnice (4) $\lambda = \lambda_j$ a $\varphi(x) = \varphi_j(x)$, kde $j > n$. Poněvadž funkce $\varphi_k(x)$ jsou orthogonální, je pro $j > m$ $(\varphi_j, \varphi_m) = 0$; po dosazení dostaneme

$$\varphi_j(x) - \lambda_j \int_a^b K(x, s)\, \varphi_j(s)\, ds,$$

což je očividně rovné nule. Tudíž λ_j a $\varphi_j(x)$, $j > n$, jsou charakteristická čísla a charakteristické funkce jádra $K(x, s)$.

Nechť nyní λ_0 je charakteristické číslo a $\varphi_0(x)$ charakteristická funkce jádra $K^{(n)}(x, s)$, takže

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 K\varphi_0 + \lambda_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} (\varphi_0, \varphi_m) = 0. \tag{5}$$

Vynásobme tuto rovnici skalárně $\varphi_j(x)$, avšak tentokrát pro $j \leqq n$. Vzhledem k orthogonálnosti a normovanosti funkcí $\varphi_m(x)$ dostaneme

$$(\varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_j) + \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j) = 0. \tag{6}$$

Podle vzorce (3), § 11 $(K\varphi_0, \varphi_j) = (\varphi_0, K\varphi_j)$. Dosaďme toto do (6) a slučme poslední dva členy. Potom

$$(\varphi_0, \varphi_j) + \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j - \lambda_j K\varphi_j) = (\varphi_0, \varphi_j) = 0.$$

Avšak pak v rovnici (5) vymizí součet a dostaneme

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds = 0.$$

Z toho plyne, že λ_0 je charakteristické číslo a $\varphi_0(x)$ charakteristická funkce jádra $K(x, s)$. Přitom $\varphi_0(x) \neq \varphi_j(x)$, $j \leq n$, neboť tyto funkce jsou orthogonální. Avšak potom $\varphi_0(x)$ a λ_0 jsou nutně obsaženy v posloupnostech $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots$ a $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$

Poznámka. Předpokládejme, že $K(x, s)$ má pouze konečný počet charakteristických čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potom jádro $K^{(n)}(x, s)$ nemá charakteristická čísla. Podle věty (1), § 12 $K^{(n)}(x, s) \equiv 0$. Odtud plyne, že

$$K(x, s) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)\, \overline{\varphi_m(s)}}{\lambda_m},$$

a tudíž jádro $K(x, s)$ je degenerované.

V § 4 jsme dokázali, že každé degenerované jádro má pouze konečný počet charakteristických čísel. Srovnáme-li tyto dva výsledky, dojdeme k závěru, že *souměrné jádro má konečný počet charakteristických čísel tehdy a jen tehdy, když je toto jádro degenerované.*

Věta Hilbert-Schmidtova. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ jsou charakteristická čísla souměrného jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ jsou příslušející charakteristické funkce. Nechť $h(x)$ je funkce, jejíž čtverec je absolutně integrovatelný v intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže integrál*

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, ds$$

je omezený, potom funkci

$$f(x) = Kh = \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds \tag{7}$$

lze rozvinout v absolutně a stejnoměrně konvergentní Fourierovu řadu podle orthonormované soustavy funkcí $\varphi_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, \varphi_n(x), \quad f_n = (f, \varphi_n).$$

Fourierovy koeficienty f_n funkce $f(x)$ jsou vázány s Fourierovými koeficienty h_n funkce $h(x)$ relacemi

$$f_n = \frac{h_n}{\lambda_n}, \quad h_n = (h, \varphi_n),$$

takže

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \tag{8}$$

Všimněme si toho podstatného faktu, že nepředpokládáme ani konvergenci Fourierovy řady funkce $h(x)$, ani úplnost orthonormované soustavy charakteristických funkcí.

1°. Najděme Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n = (f, \varphi_n) = (Kh, \varphi_n) = (h, K\varphi_n).$$

Avšak $\varphi_n - \lambda_n K\varphi_n = 0$. Odtud $K\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)$ a

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} (h, \varphi_n) = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Uvažujme Fourierovu řadu funkce $f(x)$. Tato řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \tag{9}$$

Odhadněme její zbytek. Podle Cauchyho nerovnosti

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|^2 \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}.$$

Podle lemmatu 2 je druhý součet omezený a prvý součet může být v důsledku konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ učiněn libovolně malým. Odtud plyne, že řada (9) konverguje absolutně a stejnoměrně. Součet této řady označme $\omega(x)$ a její n-tý částečný součet $\omega_n(x)$.

2°. Odhadněme veličinu $\|f(x) - \omega_n(x)\|^2$. Máme

$$f(x) - \omega_n(x) = Kh - \sum_{m=1}^{n} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x) = Kh - \sum_{m=1}^{n} \frac{(h, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x) = K^{(n)}h,$$

kde v souhlase s naším označením

$$K^{(n)}h = \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, h(s)\, ds.$$

Dále
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = \|K^{(n)}h\|^2 = (K^{(n)}h, K^{(n)}h).$$
Aplikujeme-li na skalární součin vzorec (3), § 11, dostaneme
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = (h, (K^{(n)})^2 h).$$
$(K^{(n)})^2$ je Fredholmův operátor, jehož jádro je druhým iterovaným jádrem vzhledem k $K^{(n)}(x, s)$. Označme toto iterované jádro $K_2^{(n)}(x, s)$, jak je zvykem a pišme $K_2^{(n)}h$ místo $(K^{(n)})^2 h$. Potom
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = (h, K_2^{(n)}h).$$
Podle lemmat 3 a 1 je nejmenší charakteristické číslo jádra $K_2^{(n)}(x, s)$ rovno λ_{n+1}^2 a podle věty 3, § 12
$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^2} = \max \frac{(\varphi, K_2^{(n)}\varphi)}{(\varphi, \varphi)}^{1}.$$
Potom pro libovolnou funkci $h(x)$
$$\frac{(h, K_2^{(n)}h)}{(h, h)} \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2},$$
čili $(h, K_2^{(n)}h) \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} (h, h)$. Avšak $\lambda_{n+1} \to \infty$. Odtud
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = (h, K_2^{(n)}h) \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$
3°. Dokažme nyní, že $f(x) \equiv \omega(x)$. Odhadněme proto nejdříve veličinu $\|f - \omega\|$. Podle trojúhelníkové nerovnosti
$$\|f - \omega\| \leqq \|f - \omega_n\| + \|\omega_n - \omega\|.$$
Podle dokázaného, konverguje prvý sčítanec napravo k nule pro $n \to \infty$. Stejně tak konverguje k nule i druhý sčítanec. Skutečně řada (8) konverguje stejnoměrně; proto pro dostatečně velká n bude $\|\omega_n(x) - \omega(x)\| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo.

Odtud
$$\|\omega_n - \omega\|^2 = \int_a^b |\omega_n(x) - \omega(x)|^2 \, dx < \varepsilon^2(b - a),$$
což může být učiněno libovolně malým. Tudíž $\|f - \omega\| \to 0$ pro $n \to \infty$, avšak $\|f - \omega\|$ nezávisí na n, tedy $\|f - \omega\| = 0$ a tedy také $f(x) \equiv \omega(x)$.

---

[1] Vynecháváme zde znak absolutní hodnoty, neboť
$$(\varphi, K_2^{(n)}\varphi) = (\varphi, (K^{(n)})^2 \varphi) = (K^{(n)}\varphi, K^{(n)}\varphi) = \|K^{(n)}\varphi\|^2 \geqq 0.$$

§ 14. Určení prvého charakteristického čísla Ritzovou methodou.

Věta 3, § 12 převádí úlohu určit nejmenší charakteristické číslo souměrného jádra na úlohu určit maximum veličiny

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(s)}\, dx\, ds| \qquad (1)$$

s vedlejší podmínkou

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)|\, dx = 1. \qquad (2)$$

Tato věta nám umožňuje užít přímých method variačního počtu k nalezení nejmenšího charakteristického čísla. Speciálně je možno užít methody Ritzovy. Zvolme libovolnou posloupnost funkcí

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots, \qquad (3)$$

kterou budeme považovat za úplnou, při čemž pojmu „úplná posloupnost" dáváme takový význam: pro libovolnou funkci $f(x)$ je vždy možno zvolit číslo n a koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tak, aby

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x)\| < \varepsilon,$$

kde ε je libovolné kladné číslo. Jinými slovy, posloupnost (3) nazýváme úplnou, jestliže je možno zvolit koeficienty α_k a číslo n tak, aby střední kvadratická chyba relace

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x)$$

byla libovolně malá. Zejména jako posloupnost (3) můžeme zvolit libovolnou úplnou orthonormovanou posloupnost. Položme v (1)

$$\varphi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) + \ldots + a_n \psi_n(x),$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou libovolné koeficienty vyhovující podmínce, že $(\varphi, \varphi) = 1$. Tato podmínka nabývá tvaru

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_i \bar{a}_k (\psi_i, \psi_k) = 1 \qquad (4)$$

a výraz (1) přejde v

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i \bar{a}_k|, \qquad (5)$$

kde

$$A_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \psi_i(x)\, \overline{\psi_k(s)}\, dx\, ds.$$

V důsledku souměrnosti jádra $A_{ik} = \bar{A}_{ki}$.

Budeme hledat maximum výrazu (5) při podmínce (4). Máme tedy nalézt maximum funkce několika proměnných. Jestliže tuto úlohu rozřešíme a vypočteme maximum veličiny (5), najdeme tím současně přibližnou absolutní hodnotu nejmenšího charakteristického čísla. Dokažme, že tímto způsobem dostaneme přibližnou hodnotu, která je větší než hodnota přesná a která k přesné hodnotě konverguje pro $n \to \infty$.

Označme $\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}$ maximum veličiny (5) a $\varphi^{(n)}(x)$ funkci, jež toto maximum realisuje. Potom

$$\frac{1}{\lambda_1^{(n)}} = |(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}| \leqq \max|(K\varphi, \varphi)| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

kde λ_1 je co do absolutní hodnoty nejmenší charakteristické číslo daného jádra. Odtud $\lambda_1^{(n)} \geqq |\lambda_1|$.

Zbývá dokázat, že $\lambda_1^{(n)} \to |\lambda_1|$. Protože soustava (3) je úplná, můžeme najít funkci tvaru

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x), \quad \alpha_k = \text{konst.}$$

takovou, že $\|\varphi_1 - \omega\| < \frac{1}{4}\varepsilon$, kde $\varphi_1(x)$ je charakteristická funkce jádra $K(x, s)$ příslušející charakteristickému číslu λ_1 a ε je libovolné kladné číslo. Položme dále

$$\omega_1(x) = \frac{\omega(x)}{\|\omega\|}.$$

Potom $\omega_1(x)$ vyhovuje podmínce (2). Odhadněme veličinu $\|\varphi_1 - \omega_1\|$. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme $\|\varphi_1\| - \|\omega\| \leqq \|\varphi_1 - \omega\| \leqq \frac{1}{4}\varepsilon$, odkud $\|\omega\| > 1 - \frac{1}{4}\varepsilon$. Označme ještě $\|\omega\| = \sigma$. Nyní

$$\|\varphi_1 - \omega_1\| = \frac{\|\sigma\varphi_1 - \omega\|}{\sigma} < \frac{\|\sigma\varphi_1 - \omega\|}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon}.$$

Při dostatečně malém ε, $1 - \frac{1}{4}\varepsilon > \frac{1}{2}$ a tudíž

$$\|\varphi_1 - \omega_1\| < 2\|\sigma\varphi_1 - \omega\| = 2\|\varphi_1 - \omega - (1 - \sigma)\,\varphi_1\| \leqq$$
$$\leqq 2\|\varphi_1 - \omega\| + 2|1 - \sigma| < \varepsilon.$$

Nyní odhadněme rozdíl

$$A = |(K\varphi_1, \varphi_1)| - |(K\omega_1, \omega_1)|.$$

Funkce $\omega_1(x)$ vyhovuje podmínce (2). Odtud a z věty 3, § 12 vyplývá, že $A > 0$. Dále je zřejmě

$$A \leqq |(K\varphi_1, \varphi_1) - (K\omega_1, \omega_1)|.$$

Uvažujme veličinu

$$(K(\varphi_1 + \omega_1), \varphi_1 - \omega_1) = (K\varphi_1 + K\omega_1, \varphi_1 - \omega_1) =$$
$$(K\varphi_1, \varphi_1) + (K\omega_1, \varphi_1) - (K\varphi_1, \omega_1) - (K\omega_1, \omega_1).$$

Podle vzorce (3), § 11 se druhý a třetí člen na pravé straně vzájemně ruší, takže dostaneme

$$A \leqq |(K(\varphi_1 + \omega_1), \varphi_1 - \omega_1)|.$$

Užijme nerovnosti Buňakovského:

$$A^2 \leqq \|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2 \cdot \|\varphi_1 - \omega_1\|^2 < \varepsilon^2 \|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2.$$

Dále

$$\|\varphi_1 + \omega_1\| \leqq \|\varphi_1\| + \|\omega_1\| = 2$$

a

$$\|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(x, s)[\varphi_1(s) + \omega_1(s)]\, ds \right|^2 dx.$$

Opět podle nerovnosti Buňakovského

$$\left| \int_a^b K(x, s)[\varphi_1(s) + \omega_1(s)]\, ds \right|^2 \leqq \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \int_a^b |\varphi_1(s) + \omega_1(s)|^2\, ds \leqq$$
$$\leqq 4 \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds.$$

Integrujeme-li tuto nerovnost, dostaneme

$$\|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2 \leqq 4B^2$$

a konečně

$$A < 2B\varepsilon.$$

Podle definice funkce $\varphi^{(n)}$

$$|(K\varphi_1, \varphi_1)| \geqq |(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})| \geqq |(K\omega_1, \omega_1)|.$$

Odtud

$$\frac{1}{|\lambda_1|} - \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} = |(K\varphi_1, \varphi_1)| - |(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})| \leqq A.$$

Avšak A může být učiněno libovolně malým. Odtud plyne, že $\frac{1}{\lambda_1^{(n)}} \to \to \frac{1}{|\lambda_1|}$ a tedy $\lambda_1^{(n)} \to |\lambda_1|$.

Připomeňme několik případů, kdy může být úloha zjednodušena.

a) Jestliže je jádro $K(x, s)$ reálné a funkce $\psi_i(x)$ jsou zvoleny také reálně, potom se můžeme omezit na uvažování pouze reálných koeficientů a_k. Místo (4) a (5) dostaneme výrazy

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_i a_k (\psi_i, \psi_k) = 1, \tag{4_1}$$

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left|\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k\right|, \tag{5_1}$$

při čemž

$$A_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \psi_i(x)\, \psi_k(s)\, dx\, ds.$$

Případ reálného jádra je nejdůležitější pro aplikace, jež nás zajímají. Na tento případ se zde omezíme.

b) Jestliže posloupnost (3) je orthonormovaná, nabývá vztah (4_1) jednoduššího tvaru:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

c) Úloha se obzvláště zjednoduší, jestliže je známo, že výraz $(K\varphi, \varphi)$ nabývá pouze kladných hodnot.[1] V tomto případě je třeba určit maximum kvadratické formy

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k \tag{5_2}$$

při podmínce (4_1). Vzorec (2), § 12 ukazuje, že v uvažovaném případě jsou charakteristická čísla kladná, a maximum formy (5_2) ihned dává hledanou přibližnou hodnotu charakteristického čísla.

Pomocí Lagrangeovy methody neurčitých koeficientů se maximum formy (5_2) nalezne takto: Označme

$$F = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k, \quad \Phi = F - \sigma \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \tag{6}$$

---

[1] Jádra, jež mají tuto vlastnost, se nazývají *kladně definitní.*

kde σ je neurčitý koeficient. Extrémní hodnoty proměnných a_i jsou určeny rovnicemi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i} - 2\sigma a_i = 0$$

nebo v explicitním tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k - \sigma a_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Soustava (7) je lineární, homogenní. Koeficienty a_i nejsou současně rovny nule, neboť $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, a proto se determinant soustavy (7) musí rovnat nule; tím dostaneme pro neznámou σ rovnici

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \sigma, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - \sigma, & \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Násobíme-li (7) výrazem a_i, sečteme-li pro všechna i a užijeme-li toho, že $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, najdeme, že $\sigma = F$. Přitom F zde zřejmě označuje extrémní hodnotu kvadratické formy F. Je také zřejmé, že se maximální hodnota F rovná největšímu z kořenů rovnice (8).

Řešení rovnice (8) se značně zjednoduší, jestliže užijeme methody akademika A. N. Krylova k výpočtu determinantu na levé straně.[1]

Současně s charakteristickým číslem bývá důležité určit i příslušnou charakteristickou funkci. Tato úloha je podstatně složitější než úloha určit charakteristická čísla. Jednoduše se však řeší, jestliže už předem víme, že nalezenému charakteristickému číslu přísluší pouze jedna charakteristická funkce. V tomto případě stačí nalézt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ze soustavy (7); výraz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x)$$

se přibližně rovná hledané charakteristické funkci.

---

[1] Podrobněji o této methodě viz v článku A. N. Krylova „O čislennom rešenii uravněnija, kotorym opreděljajutsja častoty malych kolebanij matěrialnoj sistěmy". Izvěstija AN SSSR, Otděl matěmatičeskich i jestěstvěnnych nauk, 1931, No. 4.

Uvažujme jako příklad rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0,$$

kde

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{\varkappa} x(\varkappa - s), & x \leqq s \\ \frac{1}{\varkappa} s(\varkappa - x), & x \geqq s \end{cases} \quad (\varkappa > 1). \tag{9}$$

K této rovnici dospějeme při řešení jedné z úloh theorie vedení tepla. Lze dokázat, že jádro (9) je kladné. Za posloupnost (3) vezmeme posloupnost orthonormovanou v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

$$\psi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Nalezněme přibližné hodnoty nejmenšího charakteristického čísla; při tom budeme klást $n = 2, 3, 4$. Zvolme pro určitost $\varkappa = 2$. Pro koeficienty A_{ik} lehce dostaneme:

$$A_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{ik\pi^2}, \quad i \neq k; \quad A_{ii} = \frac{2}{i^2\pi^2}.$$

Vezmeme-li $n = 2$, budeme řešit úlohu nalézt maximum kvadratické formy

$$F = \frac{1}{\pi^2}(2a_1^2 - a_1 a_2 + \tfrac{1}{2}a_2^2)$$

při podmínce $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Rovnice (8) nabývá v našem případě tvaru $(\tau = \sigma\pi^2)$

$$\begin{vmatrix} 2 - \tau, & -1 \\ -1, & 2 - 4\tau \end{vmatrix} = 0$$

čili $4\tau^2 - 10\tau + 3 = 0$. Větší kořen této rovnice je $\tau \approx 2{,}15$. Odtud

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{2{,}15} \approx 4{,}59.$$

Vezmeme-li $n = 3$, dostaneme pro $\tau = \sigma\pi^2$ rovnici

$$\begin{vmatrix} 2 - \tau, & -1, & 1 \\ -1, & 2 - 4\tau, & -1 \\ 1, & -1, & 2 - 9\tau \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$18\tau^3 - 49\tau^2 + 21\tau - 2 = 0;$$

její největší kořen se rovná 2,22. To dává pro λ_1 hodnotu $\lambda_1 \approx 4{,}47$.

Vezmeme-li $n = 4$, přijdeme k rovnici

$$\begin{vmatrix} 2-\tau, & -1, & 1, & -1 \\ -1, & 2-4\tau, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 2-9\tau, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 2-16\tau \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$576\tau^4 - 1640\tau^3 + 819\tau^2 - 120\tau + 5 = 0.$$

Její největší kořen se rovná 2,258, což dává $\lambda_1 \approx 4{,}371$. Přesnější hodnota λ_1, kterou dostaneme jiným způsobem, se rovná 4,115.

Objasněme stručně, jak jsme dostali tuto hodnotu λ_1. Homogenní rovnice s jádrem (9) má tvar

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\varkappa}\int_0^x s(\varkappa - x)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\lambda}{\varkappa}\int_x^1 x(\varkappa - s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{10}$$

Derivujeme-li ji, dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(x) + \frac{\lambda}{\varkappa}\int_0^x s\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\lambda}{\varkappa}\int_x^1 (\varkappa - s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = 0, \\ \varphi''(x) + \lambda\,\varphi(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Odtud $\varphi(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, $\mu = \sqrt{\lambda}$. Z (10) a (11) plyne, že $\varphi(0) = 0$, $(\varkappa - 1)\,\varphi'(1) + \varphi(1) = 0$. První z těchto relací dává $A = 0$; druhá, jež má pro $\varkappa = 2$ poněkud jednodušší tvar $\varphi'(1) + \varphi(1) = 0$, dává rovnici pro určení μ:

$$\mu + \operatorname{tg}\mu = 0.$$

Kořeny této rovnice dostaneme, sestrojíme-li v rovině (μ, y) průsečíky křivek $y = -\mu$, $y = \operatorname{tg}\mu$. Není obtížné nahlédnout, že nejmenší kladný kořen leží v mezích $\frac{1}{2}\pi < \mu < \pi$. Položme $\mu = \pi - \nu$ a takto nalezenou rovnici

$$\operatorname{tg}\nu = \pi - \nu$$

budeme řešit iterační methodou, kladouce $\nu_0 = 1$. Opakujeme-li proces tak dlouho, dokud nedostaneme řešení na 4 desetinná místa přesně, nalezneme $\nu = 1{,}1128$, odkud $\mu = 2{,}0288$ a $\lambda = \mu^2 = 4{,}115$.

§ 15. Určení prvého charakteristického čísla pomocí stop jádra. Ve vzorci Hilbert-Schmidtově (8), § 13 položme $h(s) = K(s, t)$. Dostaneme

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(t)}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

kde $\omega_n(t)$ jsou Fourierovy koeficienty jádra $K(x, t)$ vzhledem k soustavě jeho charakteristických funkcí $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ Není obtížné vypočítat tyto koeficienty. Podle vzorců pro Fourierovy koeficienty

$$\omega_n(t) = \int_a^b K(x, t)\, \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x$$

čili, jelikož jádro je souměrné,

$$\omega_n(t) = \int_a^b \overline{K(t, x)}\, \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Avšak $\varphi_n(x)$ vyhovuje rovnici

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, \mathrm{d}t.$$

Změníme-li označení t za x a naopak, najdeme

$$\int_a^b K(t, x)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(t)$$

a konečně

$$\omega_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \overline{\varphi(t)}.$$

Nyní

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^2}. \tag{1}$$

Podobně najdeme

$$K_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^3}$$

a obecně

$$K_m(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^m}. \tag{2}$$

Abychom dostali na př. vzorec pro $K_3(x, t)$, můžeme opět užít vzorce Hilbert-Schmidtova, položíme-li v něm $h(s) = K_2(s, t)$. Při tom je třeba si uvědomit, že podle vzorce (1) je n-tý Fourierův koeficient jádra $K_2(x, t)$ roven $\frac{1}{\lambda_n^2} \overline{\varphi_n(t)}$.

Řada (2) konverguje stejnoměrně vzhledem k oběma proměnným x, t současně, jestliže $m \geqq 3$ a je splněna podmínka, kterou obyčejně předpokládáme:

$$\int_a^b |K^2(x, t)|\, \mathrm{d}t < C_1, \; C_1 = \text{konst.}$$

Abychom to dokázali, uvažujme zbytek řady (2)

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k^m}\right| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|} \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| \left|\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| \left|\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right|.$$

Užijeme-li Cauchyho nerovnosti a lemmatu 2, § 13, dostaneme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k^m}\right| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(s)|}{\lambda_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{C_1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}.$$

Poslední zlomek konverguje k nule, neboť $\lambda_n \to \infty$; odtud plyne stejnoměrná a absolutní konvergence řady (2). Řada (1) konverguje stejnoměrně vzhledem ke každé z proměnných x a t, zvolíme-li pevně hodnotu druhé proměnné. To plyne z věty Hilbert-Schmidtovy.

Řada (2) se nazývá *bilineární řada* jádra $K_m(x, t)$.[1] Připomeňme, že integrál

$$A_m = \int_a^b K_m(x, x)\, \mathrm{d}x$$

jsme nazvali m-tou stopou jádra $K(x, s)$. Jestliže je jádro souměrné, jsou jeho stopy v jednoduchém vztahu k charakteristickým číslům, totiž

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}, \; m \geqq 2. \tag{3}$$

---

[1] Můžeme sestrojit bilineární řadu i pro jádro $K(x, s)$. Má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n}. \tag{*}$$

Řada (*), obecně řečeno, diverguje. Můžeme však dokázat, že konverguje v průměru ke $K(x, s)$. Jestliže řada (*) konverguje stejnoměrně vzhledem k x i s, pak její součet je roven jádru $K(x, s)$.

Vzorec (3) lehce dostaneme, položíme-li ve vzorci (2) $t = x$ a zintegrujeme-li jej v mezích od a do b. Při tom je nutno si uvědomit, že charakteristické funkce jsou normovány, takže

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx = 1.$$

Při odvození vztahu (3) je třeba integrovat člen po členu řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^m}$$

Pro $m > 2$ je tento postup oprávněný vzhledem k stejnoměrné konvergenci řady (2) a pro $m = 2$ vzhledem k Lebesgueově větě o integrování řad s kladnými členy člen po členu.

Stopy se sudými indexy jsou všechny kladné, protože

$$A_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2m}}, \tag{4}$$

a charakteristická čísla λ_n jsou reálná.

Poznamenejme ještě, že

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b |K_m(x, t)|^2 \, dx \, dt. \tag{5}$$

Skutečně podle vzorce (8), § 2

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) \, K_m(t, s) \, dt$$

čili v důsledku souměrnosti jádra

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) \, \overline{K_m(s, t)} \, dt.$$

Odtud

$$K_{2m}(x, x) = \int_a^b |K_m(x, t)|^2 \, dt.$$

Integrujeme-li poslední rovnici vzhledem k proměnné x, dostaneme vzorec (5).

Ukažme, jak lze určit nejmenší charakteristické číslo, jestliže známe stopy jádra. Nechť číslu λ_1 přísluší p lineárně nezávislých charakteristických funkcí a číslu $-\lambda_1$, jestliže je také charakteristické, přísluší q lineárně nezávislých charakteristických funkcí, takže se člen, v němž se vyskytuje λ_1^{2m}, objevuje v řadě (4) $r = (p + q)$-krát. Přepišme (4) ve tvaru

$$A_{2m} = \frac{r}{\lambda_1^{2m}}(1 + \varepsilon_m), \tag{6}$$

kde jsme jako ε_m označili veličinu

$$\varepsilon_m = \frac{1}{r} \sum_{n=r+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2m}.$$

Užijeme-li toho, že $|\lambda_n| > |\lambda_1|$ pro $n > r$, můžeme lehce dokázat, že $\varepsilon_m \to 0$ pro $m \to \infty$.

Skutečně nechť se sčítanec $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}$ vyskytuje v ε_m r'-krát. Potom

$$\varepsilon_m = \frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r' + \sum_{k=r+r'+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_n}\right)^{2m}\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r' + \sum_{k=r+r'+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_n}\right)^{2}\right]$$

a je zřejmo, že poslední výraz konverguje k nule pro $m \to \infty$. Nyní ze (6) plyne

$$\lambda_1^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}; \quad \lambda_1^2 = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{1}{A_{2m}}}. \tag{7}$$

Z (6) dostaneme také přibližné vzorce, jež jsou vhodné při dostatečně velkém m:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}; \quad |\lambda_1| \approx \sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}}. \tag{7_1}$$

Z (3) můžeme dostat vzorec, jenž dává λ_1 i se znaménkem

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2m+1]{A_{2m+1}}}, \tag{8}$$

a příslušný přibližný vzorec

$$\lambda_1 \approx \sqrt[2m+1]{\frac{p}{A_{2m+1}}}. \tag{8_1}$$

Oba jsou správné vždy, když $q = 0$.

Užití vzorce (8_1) je možno doporučit pouze tenkrát, když se nepodaří určit znaménko λ_1 jiným způsobem.

Ze vzorce (6) plyne

$$|\lambda_1| = \sqrt[2m]{\frac{r(1+\varepsilon_m)}{A_{2m}}} > \sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}}.$$

Tudíž druhý ze vzorců (7_1) dává hodnotu $|\lambda_1|$ menší než je hodnota přesná. Prvý vzorec (7_1) dává hodnotu $|\lambda_1|$ větší, než je hodnota přesná. Skutečně je zřejmé, že $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$, a proto

$$\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}} = \lambda_1^2 \frac{1+\varepsilon_m}{1+\varepsilon_{m+1}} > \lambda_1^2.$$

Jako příklad vezměme jádro uvažované již v předcházejícím paragrafu,

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-s), & x \leqq s, \\ \frac{1}{2}s(2-x), & x \geqq s. \end{cases}$$

Vypočtěme jeho druhé iterované jádro. To nám dovolí určit stopy A_2 a A_4. Protože $K(x, s)$ je souměrné, stačí nalézt $K_2(x, s)$ pouze pro $s < x$. Máme

$$K_2(x, s) = \int_0^1 K(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{4} \int_0^s (2-x)(2-s)\, t^2\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_s^x t(2-t)\, s(2-x)\, \mathrm{d}t + \tfrac{1}{4} \int_x^1 xs(2-t)^2\, \mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{12}[-s^3(2-x) + s(x^3 - 6x^2 + 7x)] \quad (s < x).$$

Hodnoty $K_2(x, s)$ pro $x < s$ dostaneme, zaměníme-li v posledním výraze proměnné x a s:

$$K_2(x, s) = \tfrac{1}{12}[-x^3(2-s) + x(s^3 - 6s^2 + 7s)] \quad (x < s).$$

To plyne ze souměrnosti jádra $K_2(x, s)$.

Vypočtěme stopy A_2 a A_4. Podle vzorce (5)

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s.$$

Absolutní hodnotu zde nemusíme psát, neboť jádro $K(x, s)$ je reálné. Poslední vzorec poněkud upravíme. Je možno jej napsat ve tvaru

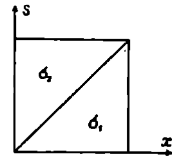
$$A_2 = \iint_\sigma K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s,$$

kde σ je čtverec $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ (obr. 2). Vedeme-li úhlopříčku $x = s$, rozdělíme σ na dva trojúhelníky σ_1 a σ_2, takže

$$A_2 = \iint\limits_{\sigma_1} K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s + \iint\limits_{\sigma_2} K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s.$$

V důsledku souměrnosti $K(x, s)$ jsou integrály nad σ_1 a σ_2 shodné; proto

$$A_2 = 2 \iint\limits_{\sigma_1} K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x K^2(x, s)\, \mathrm{d}s.$$



Obr. 2.

Obecně

$$A_{2m} = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x K_m^2(x, s)\, \mathrm{d}s.$$

V našem příkladě

$$A_2 = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x s^2(2 - x)^2\, \mathrm{d}s = \tfrac{11}{180}.$$

Úplně obdobně

$$A_4 = \tfrac{1}{72} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x [- s^3(2 - x) + s(x^3 - 6x^2 + 7x)]^2\, \mathrm{d}s = \tfrac{113}{32400}.$$

Ve druhém ze vzorců (7_1) položme $m = 2$. Potom[1]

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}$$

čili, neboť $\lambda_1 > 0$ (viz § 14),

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 4{,}115.$$

To nám dává přibližnou hodnotu λ_1 menší, než je hodnota přesná, avšak velmi blízkou k přesné hodnotě. Vidíme, že vzorec (7_1) dává přesnější výsledek než methoda Ritzova. Dobrý výsledek také dostaneme, jestliže užijeme prvý ze vzorců (7_1). Speciálně položíme-li v něm $m = 1$, dostaneme hodnotu λ_1 větší než je hodnota přesná,

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} = 4{,}186.$$

---

[1] Můžeme dokázat, že v našem příkladě $r = 1$.

§ 16. Kelloggova methoda. Způsob určení charakteristického čísla souměrného jádra navržený Kelloggem je elegantní a výhodný, i když nevede vždy k cíli. Kelloggova methoda spočívá v tom, že vezmeme libovolnou funkci $\omega(x)$ a vycházejíce z ní sestrojíme posloupnost

$$
\begin{aligned}
\omega_1(x) &= \int_a^b K(x, s)\, \omega(s)\, \mathrm{d}s, \\
\omega_2(x) &= \int_a^b K(x, s)\, \omega_1(s)\, \mathrm{d}s, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1)\\
\omega_n(x) &= \int_a^b K(x, s)\, \omega_{n-1}(s)\, \mathrm{d}s, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}} = \mu \tag{2}$$

obecně existuje a rovná se absolutní hodnotě jednoho z charakteristických čísel jádra $K(x, s)$. Dále existuje limitní funkce

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|}, \tag{3}$$

která je za určitých podmínek charakteristickou funkcí jádra $K(x, s)$, příslušnou charakteristickému číslu $+\mu$ nebo $-\mu$. Připomeňme, že normou libovolné funkce $f(x)$ nazýváme veličinu

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f^2(x)|\, \mathrm{d}x}.$$

Objasněme, za jakých podmínek dává Kelloggova methoda kladný výsledek. Nechť $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ jsou charakteristické funkce jádra $K(x, s)$ a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ jsou jim příslušející charakteristická čísla. Může se stát, že $\omega(x)$ je orthogonální ke všem funkcím $\varphi_i(x)$. V tom případě, jak ukazuje Hilbert-Schmidtův vzorec

$$\omega_1(x) = \int_a^b K(x, s)\, \omega(s)\, \mathrm{d}s = 0$$

a všechny členy posloupnosti (1) jsou rovny nule. V tomto případě nevede Kelloggova methoda k cíli. Nechť nyní není $\omega(x)$ orthogonální ke všem funkcím $\varphi_i(x)$. Označme $\varphi_r(x)$ prvou z charakteristických funkcí, ke které $\omega(x)$ není orthogonální. Hilbert-Schmidtův vzorec nyní dává

$$\omega_1(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x), \quad a_r \neq 0,$$

kde $a_k = (\omega, \varphi_k)$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $\omega(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ Užijeme-li znovu téhož Hilbert-Schmidtova vzorce, dostaneme:

$$\omega_n(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^n} \varphi_k(x). \tag{4}$$

Z (4) plyne, že

$$\|\omega_n\| = \sqrt{\sum_{k=r}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k^{2n}}}. \tag{5}$$

Dokažme to. Vzorec (4) ukazuje, že Fourierovy koeficienty funkce $\omega_n(x)$ vzhledem k funkcím $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ jsou rovny $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$. Vynásobme nyní (4) výrazem $\overline{\omega_n(x)}$ a zintegrujme. Uvědomíme-li si definici normy, dostaneme:

$$\|\omega_n\|^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^n} (\varphi_k, \omega_n).$$

Avšak $(\varphi_k, \omega_n) = \overline{(\omega_n, \varphi_k)}$ a skalární součin (ω_n, φ_k) je k-tý Fourierův koeficient $\omega_n(x)$, jenž je roven $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$. Dosadíme-li toto do poslední rovnice, dostaneme vzorec (5).

Může se stát, že číslu λ_r nepřísluší jedna, nýbrž několik charakteristických funkcí. Dále se může ukázat, že $-\lambda_r$ je taktéž charakteristické číslo. V takovém případě bude v řadě (5) několik členů se jmenovatelem λ_r^{2n}. Nechť jsou to členy s indexy $r, r+1, \ldots, r'$. Označme

$$A^2 = |a_r|^2 + |a_{r+1}|^2 + \ldots + |a_{r'}|^2.$$

Veličina A je různá od nuly, protože $a_r \neq 0$. Přepišme nyní vzorec (5) ve tvaru

$$\|\omega_n\| = \frac{A}{|\lambda_r|^n} \sqrt{1 + \alpha_n},$$

kde

$$\alpha_n = \frac{1}{A} \sum_{k=r'+1}^{\infty} |a_k|^2 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n}.$$

Není obtížné dokázat, že $\alpha_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Najdeme-li n-tou odmocninu $\|\omega_n\|$ a přejdeme-li k limitě, dostaneme po jednoduché úpravě

$$\frac{1}{|\lambda_r|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\omega_n\|}.$$

Zkoumejme nyní podíl

$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \frac{\lambda_r^{2n}}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k\,\varphi_k(x)}{\lambda_k^{2n}}.$$

Osamostatníme-li v součtu členy, obsahující λ_r^{2n} ve jmenovateli, dostaneme

$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \sum_{k=r}^{r'} \frac{a_k\,\varphi_k(x)}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} + \frac{1}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} \sum_{k=r'+1}^{\infty} a_k \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n} \varphi_k(x).$$

Lehce se ukáže, že pro $n \to \infty$ konverguje druhý součet k nule. Přejdeme-li k limitě, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \sum_{k=r}^{r'} \frac{a_k}{A}\,\varphi_k(x). \tag{6}$$

Předpokládejme nyní, že ze dvou čísel λ_r a $-\lambda_r$ je pouze jedno charakteristické. Potom je součet v (6) lineární kombinace charakteristických funkcí, příslušejících k číslu λ_r (nebo $-\lambda_r$), a tudíž je sama charakteristickou funkcí příslušející k témuž číslu. Při tom se uvedený součet nerovná identicky nule, protože funkce $\varphi_r(x), \varphi_{r+1}(x), \ldots, \varphi_{r'}(x)$ jsou lineárně nezávislé a $a_r \neq 0$.

Jestliže $\omega(x)$ není orthogonální k $\varphi_1(x)$, určíme podle Kelloggovy methody nejmenší charakteristické číslo i jemu příslušející charakteristickou funkci.

Jestliže dobře zvolíme výchozí funkci $\omega(x)$, můžeme dosáhnout poměrné jednoduchosti výpočtu. V tom je největší výhoda Kelloggovy methody. Její podstatný nedostatek spočívá v tom, že nám není předem známo, zda nebude $\omega(x)$ orthogonální k některým charakteristickým funkcím, a zůstane nerozhodnuto, které z charakteristických funkcí se nám podařilo určit.

Poznamenejme, že absolutní hodnotu charakteristického čísla můžeme také určit ze vzorce

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}. \tag{2_1}$$

Jestliže místo (2) a (2_1) vezmeme příslušné přibližné vzorce

$$\mu \approx \sqrt[n]{\frac{1}{\|\omega_n\|}}, \tag{7}$$

$$\mu \approx \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}, \tag{7_1}$$

pak vzorec (7_1) dává hodnotu μ větší, než je hodnota přesná. O vzorci (7) nemůžeme v tomto smyslu nic říci.

Abychom ozřejmili Kelloggovu methodu, vezměme totéž jádro, které jsme už uvažovali v předešlých paragrafech:

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2 - s) & (x \leqq s), \\ \frac{1}{2}s(2 - x) & (s \leqq x). \end{cases} \tag{8}$$

Už jsme ukázali, že charakteristická čísla tohoto jádra jsou kladná. Dále je možno dokázat, že každému charakteristickému číslu přísluší pouze jedna charakteristická funkce. Kelloggova methoda nám umožňuje tuto funkci určit.

Položme $\omega(x) = x$. Abychom vypočetli $\omega_n(x)$, budeme muset znát hodnoty integrálů

$$\int_0^1 K(x, s)\, s^n \, ds.$$

Jednoduchý výpočet dává

$$\int_0^1 K(x, s)\, s^n \, ds = \frac{(n + 3)x}{2(n + 1)(n + 2)} - \frac{x^{n+2}}{(n + 1)(n + 2)}. \tag{9}$$

Nyní

$$\omega_1(x) = \int_0^1 K(x, s)\, s \, ds = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6}x^3; \quad \|\omega_1\| = 0{,}1371;$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 K(x, s)\, \omega_1(s) \, ds = \frac{31x}{360} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{120}; \quad \|\omega_2\| = 0{,}03328;$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 K(x, s)\, \omega_2(s) \, ds = \frac{1}{360}\left(\frac{160x}{21} - \frac{31x^3}{6} + x^5 - \frac{x^7}{14}\right);$$

$$\|\omega_3\| = 0{,}0080083.$$

Ve vzorci (7) položme $n = 3$. Potom dostaneme $\mu \approx 4{,}998$. Protože charakteristická čísla jádra $K(x, s)$ jsou kladná, je $\lambda_1 = \mu \approx 4{,}998$. Vzorec (7_1) dává $\lambda_1 \approx 4{,}156$.

Už jsme uvedli, že každému charakteristickému číslu jádra (8) přísluší pouze jedna charakteristická funkce. V takovém případě můžeme v souhlase se vzorcem (6) položit

$$\varphi_1(x) \approx M\frac{\omega_3(x)}{\|\omega_3(x)\|},\quad M = \frac{A}{a_1}.$$

Veličina M je určena požadavkem, aby $\varphi_1(x)$ byla normovaná. Potom můžeme zřejmě položit $M = 1$ a

$$\varphi_1(x) = 2{,}643x - 1{,}724x^3 + 0{,}347x^5 - 0{,}025x^7. \qquad (10)$$

§ 17. Určení dalších charakteristických čísel. Jestliže charakteristická čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a jim příslušející charakteristické funkce $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ jsou známy, můžeme určit další charakteristické číslo λ_{n+1} a jemu příslušející charakteristickou funkci $\varphi_{n+1}(x)$. Způsoby, jak určit λ_{n+1} a $\varphi_{n+1}(x)$, mohou být založeny na dvou větách:

Věta 1. *Absolutní hodnota charakteristického čísla λ_{n+1} jádra $K(x, s)$ je převrácená hodnota maxima integrálu*

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left|\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi(s)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| \qquad (1)$$

s vedlejšími podmínkami

$$(\varphi, \varphi) = 1,\ (\varphi, \varphi_1) = 0,\ (\varphi, \varphi_2) = 0,\ \ldots,\ (\varphi, \varphi_n) = 0. \qquad (2)$$

Věta 2. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ je posloupnost všech charakteristických čísel jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ jsou jim příslušející orthonormované charakteristické funkce. Potom je λ_{n+1} co do absolutní hodnoty nejmenší charakteristické číslo jádra*

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k} \qquad (3)$$

a $\varphi_{n+1}(x)$ je charakteristická funkce jádra $K^{(n)}(x, s)$, příslušející charakteristickému číslu λ_{n+1}.

Věta 2 plyne z lemmatu 3, § 13. Větu 1 můžeme odvodit ze vzorce Hilbert-Schmidtova. Dokažme ji.

Jestliže $\varphi(x)$ je orthogonální k $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, pak podle vzorce Hilbert-Schmidtova ((8), § 13),

$$K\varphi = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x).$$

Vynásobme skalárně obě strany této rovnice funkcí $\varphi(x)$. Dokažme, že řadu na pravé straně můžeme integrovat člen po členu. Skutečně, položme

$$R_p(x) = \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x).$$

Potom

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{m=n+1}^{p} \frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m} + (R_p, \varphi). \qquad (*)$$

Dále podle nerovnosti Buňakovského

$$|(R_p, \varphi)| \leqq \|R_p\| \cdot \|\varphi\|.$$

Funkce $\varphi_m(x)$ jsou orthonormovány; proto v důsledku Parsevalovy rovnice

$$\|R_p(x)\|^2 = \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m^2} \leqq \frac{1}{\lambda_{p+1}^2} \sum_{m=p+1}^{\infty} |\varphi, \varphi_m)|^2 \leqq \frac{\|\varphi\|^2}{\lambda_{p+1}^2} \to 0 \text{ pro } p \to \infty.$$

Avšak potom také $(R_p, \varphi) \to 0$; necháme-li p v (*) růst nade všechny meze, dostaneme

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}.$$

Nahraďme všechna λ_m nejmenším. Potom

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} \sum_{m=n+1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_m)|^2$$

čili, jestliže užijeme Besselovy nerovnosti,

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqq \frac{\|\varphi\|^2}{|\lambda_{n+1}|}.$$

Konečně podle podmínky věty 2 $\|\varphi\| = 1$ a

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}.$$

K dokončení důkazu věty 1 zbývá si pouze všimnout, že v poslední relaci skutečně platí vztah rovnosti: k tomu stačí položit $\varphi(x) = \varphi_{n+1}(x)$.

Užití těchto vět v praxi je obtížné, protože se vždy nepodaří určit charakteristické funkce dostatečně přesně. Ukažme postup, jehož pomocí můžeme určit charakteristická čísla počínaje druhým, aniž užijeme charakteristických funkcí. Pro určitost předpokládejme, že známe λ_1 a chceme najít λ_2. Utvořme rozdíl

$$B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m}}\right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4m}} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1 \leq k < n} \frac{1}{\lambda_k^{2m} \lambda_n^{2m}}. \tag{4}$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že charakteristická čísla λ_1 a λ_2 jsou jednoduchá a že $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ nejsou charakteristickými čísly. Pro dostatečně velká m bude mít v součtu (4) rozhodující význam sčítanec $\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}$; ostatní sčítanci budou vzhledem k němu mizivě malí. Potom ze (4) dostaneme přibližný vztah

$$\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}} \approx \frac{B_{2m}}{2} \tag{5}$$

a odtud

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}. \tag{6}$$

Jestliže známe λ_1 přesně, dává vzorec (6) přibližnou hodnotu λ_2, jež je menší než hodnota přesná.

Vyjdeme-li ze vzorce (4), dostaneme snadno také vzorec, který dává hodnotu $|\lambda_2|$ větší, než je hodnota přesná:

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \tag{7}$$

Přibližným vzorcům (6) a (7) odpovídají přesné limitní vzorce

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{B_{2m}}} = \frac{1}{|\lambda_1|} \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \tag{8}$$

Jako příklad vypočítáme druhé charakteristické číslo jádra, jež jsme již několikráte uvažovali:

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2 - s) & (x \leqq s), \\ \frac{1}{2}s(2 - x) & (s \leqq x). \end{cases}$$

V tomto případě

$$B_2 = A_2^2 - A_4 = \tfrac{1}{450}.$$

Vezměme $\lambda_1 = 4{,}115$ (viz § 14). Potom, položíme-li ve vzorci (6) $m = 1$, dostaneme

$$\lambda_2 = \frac{1}{4{,}115}\sqrt{8100} = 21{,}87.$$

Přesnější hodnota je $\lambda_2 = 24{,}14$.

Jako druhý příklad vypočítáme prvé dva kořeny Besselovy funkce nultého řádu $J_0(x)$. Čtverce těchto kořenů jsou charakteristickými čísly souměrného jádra

$$L(x, s) = \begin{cases} -\sqrt{xs}\,\lg s & (x \leqq s), \\ -\sqrt{xs}\,\lg x & (x \geqq s) \end{cases}$$

(integrační meze jsou $a = 0$, $b = 1$).

Vypočtěme nejdříve druhé itegrované jádro $L_2(x, s)$. Nechť $x < s$. Potom

$$L_2(x, s) = \int_0^s L(x, t)\,L(t, s)\,\mathrm{d}t + \int_s^x L(x, t)\,L(t, s)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 L(x, t)\,L(t, s)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{xs}\{\int_0^s t\lg x \lg s\,\mathrm{d}t + \int_s^x t \lg x \lg t\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\lg^2 t\,\mathrm{d}t\} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{xs}[(x^2 + s^2)\lg x + 1 - x^2].$$

Jednoduché výpočty nyní dají:

$$A_2 = \tfrac{1}{32},\ A_4 = \tfrac{11}{12288},\ B_2 = \tfrac{1}{12288}.$$

Položíme-li přibližně

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}},\quad \lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{2}{B_2}},$$

budeme mít:

$$\lambda_1 = 5{,}7813,\ \lambda_2 = 27{,}117.$$

Odmocněním najdeme prvé dva kořeny Besselovy funkce, a to menší než hodnoty přesné:

$$\alpha_1 \approx 2{,}4044,\ \alpha_2 \approx 5{,}2702.$$

Přesnější hodnoty těchto kořenů, jež nalezneme v tabulkách, jsou:[1]

$$\alpha_1 = 2{,}4048,\ \alpha_2 = 5{,}5200.$$

---

[1] P. O. Kuzmin: Besselevy funkcii. GTTI, 1933.

Vzorce analogické (8) můžeme dostat, vyjdeme-li z těchže úvah i pro charakteristická čísla s vyššími indexy. Tak na př. pro λ_3 nalezneme bez obtíží přibližný vzorec

$$|\lambda_3| \approx \frac{1}{|\lambda_1^2\lambda_2|} \sqrt[2m]{\frac{8}{B_{2m}^2 - 2B_{4m}}}. \tag{9}$$

Tento vzorec je správný za těchže předpokladů jako vzorec (8).

§ 18. Jádra, která lze převést na souměrná. Jestliže má jádro $K(x, s)$ tvar

$$K(x, s) = r(s)\, L(x, s), \tag{1}$$

kde $r(s) \geqq 0$ a $L(x, s)$ je souměrné, takže $L(x, s) = \overline{L(s, x)}$, pak se rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2}$$

lehce převede na rovnici se souměrným jádrem. Vynásobme obě strany rovnice výrazem $\sqrt{r(x)}$ a zaveďme novou neznámou funkci $\psi(x) = \sqrt{r(x)}\, \varphi(x)$. Pro tuto funkci dostaneme integrální rovnici

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sqrt{r(x)\, r(s)}\, L(x, s)\, \psi(s)\, ds = \sqrt{r(x)}\, f(x), \tag{3}$$

jejíž jádro je souměrné.

Jádra typu (1) se často vyskytují v aplikacích.

§ 19. Řešení souměrných integrálních rovnic. Souměrná integrální rovnice je zvláštní případ rovnice Fredholmovy. Řešení souměrných rovnic může být založeno na obecné theorii. Zde však je otázka položena jinak: Jestliže si klademe úlohu řešit souměrnou integrální rovnici, předpokládáme, že známe všechna charakteristická čísla i charakteristické funkce jádra. Za těchto předpokladů se rovnice řeší neobyčejně jednoduše.

Uvažujme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{1}$$

jejíž jádro je souměrné. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ jsou její charakteristická čísla a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ příslušející charakteristické funkce.

Označme a_n Fourierovy koeficienty neznámé funkce $\varphi(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě $\varphi_n(x)$:

$$a_n = (\varphi, \varphi_n) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Podle věty Hilbert-Schmidtovy

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Z rovnice (1) nyní plyne, že

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x); \tag{3}$$

zbývá pouze určit koeficienty a_n. Proto vynásobme obě strany rovnice (3) výrazem $\overline{\varphi_m(x)}$ a integrujme v mezích od a do b. Poněvadž posloupnost $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ je orthonormovaná, zbude po integraci v řadě (3) jediný člen, jehož index $n = m$. Podle definice koeficientů a_n dostaneme:

$$a_m = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m} a_m; \quad f_m = (f, \overline{\varphi}_m). \tag{4}$$

Jestliže λ není charakteristické číslo, potom ze (4) okamžitě nalezneme hodnotu a_m:

$$a_m = \frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m - \lambda}. \tag{5}$$

Jestliže ji dosadíme do (3), dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x). \tag{6}$$

Lze dokázat, že řada v (6) konverguje absolutně a stejnoměrně.

Nechť je nyní λ charakteristické číslo. Potom se vyskytuje v posloupnosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, a to třeba i několikrát. Nechť $\lambda = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r'}$. Pro indexy m, různé od $r, r+1, \ldots, r'$, jsou koeficienty a_m definovány touž formulí (5). Jestliže se m rovná jednomu z těchto čísel, potom rovnice (4) nabývá tvaru $f_m = 0$, $m = r, r+1, \ldots, r'$. Tudíž, jestliže λ je charakteristické číslo, je rovnice řešitelná tehdy a jen tehdy, když je pravá strana orthogonální k charakteristickým funkcím příslušejícím tomuto číslu. Jestliže je tato podmínka splněna, je řešení dáno týmž vzorcem (6); koeficienty, jež mají neurčitý tvar $\frac{0}{0}$, lze nahradit libovolnými čísly.

§ 20. Věta o existenci charakteristického čísla. Cílem tohoto paragrafu je důkaz věty (3), § 12. Odložili jsme jej až na konec kapitoly, neboť není vůbec elementární a vyžaduje zavedení řady nových pojmů. Poznamenejme, že samotný fakt existence charakteristického čísla pro spojité souměrné jádro může být dokázán pomocí dosti elementárních prostředků. Příslušné důkazy lze najít v kursech integrálních rovnic, jež jsou uvedeny v seznamu literatury na konci knihy.

Podstatnou úlohu ve všech úvahách tohoto paragrafu hraje pojem *konvergence v průměru.* Říkáme, že posloupnost $\varphi_n(x)$ *konverguje v průměru* k $\varphi(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže

$$\|\varphi_n - \varphi\| = \{\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 \, dx\}^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Posloupnost nemůže konvergovat v průměru ke dvěma různým funkcím: jestliže $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ a $\|\varphi_n - \psi\| \to 0$, potom podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\|\varphi - \psi\| = \|\varphi - \varphi_n - (\psi - \varphi_n)\| \leqq \|\varphi - \varphi_n\| + \|\psi - \varphi_n\| \to 0.$$

Odtud $$\|\varphi - \psi\| = 0 \text{ a } \varphi \equiv \psi.$$

Platí věta, jež je analogická Cauchy-Bolzanovu konvergenčnímu kriteriu:

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby posloupnost funkcí $\varphi_n(x)$ s integrovatelnými čtverci konvergovala v průměru k nějaké funkci $\varphi(x)$ s integrovatelným čtvercem, je

$$\lim_{m, n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0.$$

Tato věta je známa pod názvem *věta Fischer-Rieszova.* Její důkaz je možno najít na př. v [7].

Kdykoliv budeme v tomto paragrafu mluvit o konvergenci posloupnosti funkcí, budeme mít na mysli konvergenci v průměru.

Budeme říkat, že řada

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

konverguje v průměru v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet rovný $v(x)$, jestliže posloupnost částečných součtů této řady konverguje v průměru k $v(x)$ v témže intervalu.

Věta 1. *Nechť řada (1) konverguje v průměru a nechť $f(x)$ je libovolná funkce s integrovatelným čtvercem. Potom řada (1), jestliže vynásobíme její členy funkcí $f(x)$, může být integrována člen po členu.*

Máme dokázat rovnici

$$\int_a^b v(x)\, f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\, f(x)\, dx. \tag{2}$$

Označme n-tý částečný součet řady (1) $v_n(x)$. Potom $\|v - v_n\| \to 0$, když $n \to \infty$. Odtud plyne, že

$$|(v - v_n, \bar{f})| \leqq \|v - v_n\| \cdot \|f\| \to 0$$

pro $n \to \infty$, a tedy

$$(v, \bar{f}) = \lim_{n\to\infty}(v_n, \bar{f}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(u_n, \bar{f}) = \sum_{k=1}^{\infty}(u_n, \bar{f}),$$

což je identické se vztahem (2), neboť

$$(v, \bar{f}) = \int_a^b v(x)\, f(x)\, dx,\quad (u_n, \bar{f}) = \int_a^b u_n(x)\, f(x)\, dx$$

podle definice skalárního součinu.

Množinu funkcí budeme nazývat *omezenou*, jestliže normy těchto funkcí tvoří omezenou množinu; množinu funkcí nazýváme *kompaktní*, jestliže z její libovolné nekonečné podmnožiny můžeme vybrat konvergentní posloupnost. Libovolná orthonormovaná posloupnost je příkladem množiny omezené, nikoliv však kompaktní. Poslední tvrzení plyne z toho, že když jsou $\varphi_n(x)$ a $\varphi_m(x)$ orthogonální a normované, pak

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = (\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_n) + (\varphi_m, \varphi_m) - \\ - (\varphi_n, \varphi_m) - (\varphi_m, \varphi_n) = 2$$

a podmínka Riesz-Fischerovy věty není splněna.

Věta 2. *Fredholmův operátor*

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

jehož jádro vyhovuje podmínce

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds = B^2 < \infty,$$

převádí libovolnou omezenou množinu funkcí v kompaktní množinu.

Jinak řečeno, jestliže je dána libovolná omezená množina funkcí Φ ($\|\varphi\| < M$, $M =$ konst., jestliže $\varphi \in \Phi$), pak je z ní možno vybrat takovou posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$, že

$$\|K\varphi_n - K\varphi_m\| = \|K(\varphi_n - \varphi_m)\| \to 0, \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Napišme Fourierovu řadu odpovídající jádru $K(x, s)$:

$$K(x, s) \sim \sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a},$$

a položme

$$\sum_{i,k=0}^{j} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} = P_j(x, s),$$

$$K(x, s) - P_j(x, s) = K'_j(x, s).$$

V důsledku Parsevalovy identity

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^b \int_a^b |K'_j(x, s)|^2 \, dx \, ds = 0. \tag{3}$$

Položme dále

$$K\varphi = P_j\varphi + K'_j\varphi,$$

kde $P_j\varphi$ a $K'_j\varphi$ jsou Fredholmovy operátory, jejichž jádra jsou $P_j(x, s)$ a $K'(x, s)$. Nechť $\varphi(x)$ je funkce z dané množiny. Utvořme její Fourierovu řadu:

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)} \cos \frac{k\pi x}{b-a}.$$

Potom podle věty (1)

$$P_j\varphi = \sum_{i=0}^{j} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{ik}a^{(k)}(b-a)}{2}. \tag{4}$$

Množina všech koeficientů a_k je omezená, neboť

$$|a_k| = \frac{2}{b-a} \left[\int_a^b \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{b-a} \, dx \right] \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{2}{b-a}} \left[\int_a^b |\varphi^2(x)| \, dx \right]^{\frac{1}{2}} < M \sqrt{\frac{2}{b-a}}.$$

Podle známé Weierstrassovy věty o existenci hromadného bodu omezené množiny čísel je možno z dané množiny Φ vybrat takovou posloupnost $\{\varphi_n\}$, že existují limity

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, j,$$

kde $a_n^{(k)}$ je k-tý Fourierův koeficient funkce $\varphi_n(x)$. Vzorec (4) potom ukazuje, že $P_j\varphi_n$ konverguje pro $n \to \infty$ k nějaké limitě.

Vyberme z množiny Φ posloupnost $\{\varphi_{1n}\}$ tak, aby existovala limita (ve smyslu konvergence v průměru) $\lim\limits_{n\to\infty} P_1\varphi_{1n}$. Dále vyberme z posloupnosti $\{\varphi_{1n}\}$ částečnou posloupnost $\{\varphi_{2n}\}$ tak, aby existovala limita $\lim\limits_{n\to\infty} P_2\varphi_{2n}$. Poznamenejme, že posloupnost $\{P_1\varphi_{2n}\}$, jež tvoří část posloupnosti $\{P_1\varphi_{1n}\}$, také konverguje. Z posloupnosti $\{\varphi_{2n}\}$ vyberme částečnou posloupnost $\{\varphi_{3n}\}$ tak, aby existovala limita $\lim\limits_{n\to\infty} P_3\varphi_{3n}$ atd. Pokračujeme-li v tomto postupu neomezeně dále, dostaneme nekonečnou množinu posloupností

$$\begin{array}{l} \varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1n}, \ldots \\ \varphi_{21}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{2n}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots, \varphi_{nn}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{5}$$

Každá z nich je obsažena v předcházející, při čemž posloupnost $P_j\varphi_{kn}$, $n = 1, 2, \ldots$ konverguje pro $j \leqq k$. Uvažujme diagonální posloupnost

$$\varphi_{11}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{nn}, \ldots$$

Všechny její prvky až na konečný počet příslušejí libovolné z posloupností (5). Odtud plyne existence limity

$$\lim_{n\to\infty} P_j\varphi_{nn} \tag{6}$$

pro libovolné j. Dokažme nyní, že posloupnost $\{K\varphi_{nn}\}$ konverguje. Podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\|K\varphi_{nn} - K\varphi_{mm}\| \leqq \|K\varphi_{nn} - P_j\varphi_{nn}\| + \|P_j\varphi_{nn} - P_j\varphi_{mm}\| + \\ + \|K\varphi_{mm} - P_j\varphi_{mm}\|. \tag{7}$$

Máme

$$K\varphi_{nn} - P_j\varphi_{nn} = K_j'\varphi_{nn} = \int_a^b K_j'(x, s)\, \varphi_{nn}(s)\, ds.$$

Odtud, v důsledku nerovnosti Buňakovského

$$\|K\varphi_{nn} - P_j\varphi_{nn}\|^2 \leqq \|\varphi_{nn}\|^2 \int_a^b\int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \,dx\,ds <$$

$$< M^2 \int_a^b\int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \,dx\,ds$$

a úplně obdobně

$$\|K\varphi_{mm} - P_j\varphi_{mm}\|^2 < M^2 \int_a^b\int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \,dx\,ds.$$

V důsledku relace (3) můžeme zvolit j tak velké, aby jak první, tak třetí sčítanec v (7) byl menší než $\frac{1}{3}\varepsilon$, kde ε je libovolné kladné číslo. Zvolíme-li pevně takové j a užijeme-li existence limity (6), můžeme zvolit n_0 tak velké, aby pro $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ bylo $\|P_j\varphi_{nn} - P_j\varphi_{mm}\| < < \frac{1}{3}\varepsilon$. Nyní $\|K\varphi_{nn} - K\varphi_{mm}\| < \varepsilon$, jestliže $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$, a z věty Riesz-Fischerovy plyne existence limity

$$\lim_{n\to\infty} K\varphi_{nn}.$$

Zabývejme se nyní důkazem věty 3, § 12. Uvažujme množinu funkcí $\varphi(x)$ s normou rovnou jedné. Označme μ supremum veličiny $|(K\varphi, \varphi)|$. Podle definice suprema existuje posloupnost funkcí $\psi_n(x)$, jejichž normy jsou rovny jedné a jež vyhovují relaci

$$\lim_{n\to\infty} |(K\psi_n, \psi_n)| = \mu. \tag{8}$$

Předpokládáme, že jádro $K(x, s)$ je souměrné. V takovém případě je skalární součin $(K\psi_n, \psi_n)$ reálný a mohou nastat pouze tři případy:

a) $\lim(K\psi_n, \psi_n) = \mu$,

b) $\lim(K\psi_n, \psi_n) = -\mu$,

c) posloupnost $\psi_n(x)$ je možno rozdělit na dvě — nazveme je $\psi_n'(x)$ a $\psi_n''(x)$ — tak, že

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n', \psi_n') = \mu, \quad \lim_{n\to\infty}(K\psi_n'', \psi_n'') = -\mu.$$

Budeme uvažovat pouze případ a). Případ b) se převede na případ a) záměnou λ na $-\lambda$ a $K(x, s)$ na $-K(x, s)$ v integrální rovnici; v případě c) stačí uvažovat posloupnost $\psi_n'(x)$.

Podle věty 2 je možno z posloupnosti $\{\psi_n(x)\}$ vybrat takovou částečnou posloupnost, kterou podle předcházejícího označíme $\{\psi_n(x)\}$ tak, aby existovala limita

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} K\psi_n.$$

Dále nechť je $\eta_n(x)$ libovolná funkce, jejíž čtverec je integrovatelný v intervalu $\langle a, b\rangle$, a t je libovolné reálné číslo. Norma funkce

$$\frac{\psi_n(x) + t\,\eta_n(x)}{\|\psi_n + t\eta_n\|}$$

je zřejmě rovna jedné. Podle definice čísla μ

$$\left(K\frac{\psi_n + t\eta_n}{\|\psi_n + t\eta_n\|}, \frac{\psi_n + t\eta_n}{\|\psi_n + t\eta_n\|}\right) \leqq \mu.$$

Odtud lehce dostaneme

$$(K(\psi_n + t\eta_n), \psi_n + t\eta_n) \leqq \mu(\psi_n + t\eta_n, \psi_n + t\eta_n).$$

Odstraníme-li závorky a uvědomíme-li si, že $(\psi_n, \psi_n) = \|\psi_n\|^2 = 1$, dostaneme

$$(K\psi_n, \psi_n) - \mu + 2t\,\mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n) + t^2[(K\eta_n, \eta_n) - \mu\|\eta_n\|^2] \leqq 0.$$

Levá strana poslední nerovnosti je kvadratický trojčlen vzhledem k t, jenž nemění znaménka. V takovém případě je jeho diskriminant nekladný

$$|\mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n), \eta_n)| \leqq \sqrt{\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n)}\,\sqrt{\mu - (K\psi_n, \psi_n)}. \tag{9}$$

Nechť je nyní η_n taková, že

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) < C, \tag{10}$$

kde C je konstanta nezávisející na n. Potom z (8) a (9) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n) = 0. \tag{11}$$

Položme nyní

$$\eta_n(x) = K\psi_n - \mu\psi_n = -\mu\,\psi_n(x) + \int_a^b K(x, s)\,\psi_n(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dokažme, že nerovnost (10) je při tom splněna. Protože $\|\psi_n\| = 1$, podle trojúhelníkové nerovnosti skutečně platí

$$\|\eta_n\| \leqq \mu + \left\|\int_a^b K(x, s)\,\psi_n(s)\,\mathrm{d}s\right\|.$$

Dále

$$|\int_a^b K(x, s)\, \psi_n(s)\, ds|^2 \leqq \int_a^b |\psi_n^2(s)|\, ds \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds = \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds.$$

Integrujeme-li vzhledem k proměnné x a odmocníme-li, dostaneme

$$\|\int_a^b K(x, s)\, \psi_n(s)\, ds\| \leqq B. \tag{12}$$

Tudíž $\|\eta_n\| \leqq \mu + B$. Nyní

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) \leqq \mu(\mu + B)^2 + (\mu + B)\, \|K\eta_n\|.$$

Dále

$$|K\eta_n|^2 = |\int_a^b K(x, s)\, \eta_n(s)\, ds|^2 \leqq \int_a^b |\eta_n(s)|^2 ds \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \leqq$$

$$\leqq (\mu + B)^2 \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds;$$

odtud tak jako shora najdeme

$$\|K\eta_n\| \leqq B(\mu + B) \tag{13}$$

a konečně

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) \leqq (\mu + B)^3.$$

Nyní vztah (11) nabývá tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, K\psi_n - \mu\psi_n) = 0.$$

Avšak poslední skalární součin je kladný a rovný $\|K\psi_n - \mu\psi_n\|^2$. Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \|K\psi_n - \mu\psi_n\| = 0$$

čili

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n - \mu\psi_n) = 0, \tag{14}$$

odkud

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu} K\psi_n = \frac{1}{\mu}\, \omega(x).$$

Označme $\frac{1}{\mu}\, \omega(x) = \varphi_1(x)$. Potom $\psi_n(x) \to \varphi_1(x)$. Zřejmě $\|\varphi_1\| = 1$.

Opakujeme-li ty úvahy, jichž jsme užili při odvozování nerovností (12) a (13), lehce nalezneme, že $K\psi_n \to K\varphi_1$. Provedeme-li limitní přechod ve (14) a položíme-li $\frac{1}{\mu} = \lambda_1$, dostaneme

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 K\varphi_1 = 0. \tag{15}$$

Funkce $\varphi_1(x)$ není identicky rovna nule, neboť její norma je rovna jedné. Avšak potom z (15) plyne, že λ_1 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Tím je věta 3, § 12, a tedy také věta 1, § 12 dokázána.

KAPITOLA 3

SINGULÁRNÍ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

§ 21. Hlavní hodnota integrálu. Obvyklá definice, jež definuje integrál jako limitu integrálních součtů, je vhodná pouze pro omezené funkce. Jestliže integrovaná funkce je neomezená, zavádíme pojem „nevlastního integrálu". Připomeňme ho.

Nechť funkce $f(x)$ definovaná v intervalu $a \leqq x \leqq b$ není omezená v okolí bodu c tohoto intervalu, avšak je integrovatelná na každém z intervalů $a \leqq x \leqq c - \varepsilon'$ i $c + \varepsilon'' \leqq x \leqq b$ pro libovolně malá kladná čísla ε' a ε''. Utvořme součet

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Jestliže má tento součet limitu, když ε' a ε'' konvergují k nule nezávisle na sobě, nazýváme uvedenou limitu nevlastním integrálem funkce $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon''\to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{2}$$

Může se stát, že součet (1) nemá limitu, když ε' a ε'' konvergují k nule nezávisle na sobě, avšak limita existuje, jestliže ε' a ε'' jsou při svém přibližování k nule vázány nějakým vztahem. Uvažujme na př. funkci $f(x) = \frac{1}{x - c}$, $a < c < b$. Máme: