Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Rovnice Fredholmova typu

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 5–66.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402770

ČÁST I

METHODY ŘEŠENÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

KAPITOLA 1

ROVNICE FREDHOLMOVA TYPU

§ 1. Klasifikace integrálních rovnic. Mnohé úlohy mechaniky, matematické fysiky a techniky vedou k rovnicím typu

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{1}$$

kde $\varphi(x)$ je neznámá funkce. Tyto rovnice se nazývají *integrální*, protože neznámá funkce se v nich vyskytuje v integrandu.

Tyto úlohy zde nebudeme uvádět, neboť velký počet jich bude vyšetřován v druhé části. Přistoupíme ihned ke zkoumání vlastních rovnic.

Známé prvky, jež se vyskytují v integrální rovnici (1), se nazývají takto: $f(x)$ — pravá strana, funkce $K(x, s)$ — jádro a číselný koeficient λ — parametr rovnice. Parametr není nutno zavádět. Je možno jej vždy učinit rovným jednotce tím, že označíme součin $\lambda\, K(x, s)$ jako $K_1(x, s)$ a uvažujeme $K_1(x, s)$ jako nové jádro. Uvidíme však, že se zavedení tohoto parametru při vyšetřování integrálních rovnic ukazuje užitečným.

Budeme předpokládat, že meze a a b jsou konečné konstanty.

Poznamenejme, že parametr λ i funkce $\varphi(x)$, $K(x, s)$ a $f(x)$ mohou nabývat jak reálných, tak komplexních hodnot.

Charakter integrální rovnice je v podstatě určen vlastnostmi jejího jádra. V aplikacích se často setkáme se spojitým jádrem, avšak vyskytují se i nespojitá jádra. Budeme uvažovat tři typy rovnic:

1. Když jádro $K(x, s)$ je spojité pro $a \leqq x \leqq b$ a $a \leqq s \leqq b$ nebo když nespojitosti jsou takové, že alespoň dvojný integrál

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| \, dx \, ds$$

je konečný, budeme rovnici (1) nazývat *rovnicí Fredholmova typu.*

2. Když jádro má tvar

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha},$$

kde $H(x, s)$ je omezená a α je konstanta vyhovující nerovnosti

$$0 < \alpha < 1,$$

budeme rovnici (1) nazývat *rovnicí se slabou singularitou.*

3. K třetímu typu integrálních rovnic přijdeme, jestliže uvažujeme jádra typu

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{x - s},$$

kde čitatel $A(x, s)$ je diferencovatelná funkce x a s.[1] V tomto případě integrál

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = \int_a^b \frac{A(x, s)}{x - s} \varphi(s) \, ds,$$

vyskytující se v rovnici (1), je obecně divergentní. Avšak při velmi obecných předpokladech ohledně funkce $\varphi(x)$ existuje hlavní hodnota tohoto integrálu, t. j. limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} K(x, s) \, \varphi(s) \, ds + \int_{x+\varepsilon}^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds\right].$$

Jestliže nyní v rovnici (1) chápeme divergentní integrál ve smyslu této hlavní hodnoty,[2] přicházíme k třetímu typu integrálních rovnic, jež budeme nazývat *singulárními.*

---

[1] Tento předpoklad je možno nahradit slabším.

[2] Podrobněji o pojmu hlavní hodnoty integrálu viz kap. III, §§ 21 a 22.

Uveďme několik příkladů.

a) Rovnice

$$\varphi(x) - \int_0^1 (x^2 + s^2)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = x^2$$

je Fredholmova typu, neboť její jádro $K(x, s) = x^2 + s^2$ je spojité pro $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$. V této rovnici $\lambda = 1$, $f(x) = x^2$.

b) Rovnice

$$\varphi(x) - \int_0^l \lg|x - s|\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x)$$

je také Fredholmova, neboť i když jádro je nespojité pro $x = s$, dvojný integrál

$$\int_0^l \int_0^l \lg^2|x - s|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s$$

je konečný.

c) Vyšetřujme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x - s)^\alpha}\, \mathrm{d}s = f(x); \quad 0 < \alpha < 1. \tag{*}$$

Nechť je $f(x)$ definována a řekněme spojitá v intervalu $0 \leqq x \leqq a$. Potom má smysl uvažovat tuto rovnici v tomto intervalu. Spadá pod obecný typ (1), i když to není tak očividné jako v prvých dvou případech. Abychom se přesvědčili, že rovnice (*) je typu (1), položme

$$K(x, s) = \begin{cases} (x - s)^{-\alpha}, & s < x \\ 0, & s \geqq x. \end{cases}$$

Nyní se rovnice (*) napíše ve tvaru (1):

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^a K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x).$$

Rovnice (*) má slabou singularitu; bude současně i Fredholmova, jestliže $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, protože potom dvojný integrál

$$\int_0^a \int_0^a K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{(x - s)^{2\alpha}} = \frac{a^{2-2\alpha}}{(1 - 2\alpha)(2 - 2\alpha)}$$

je konečný.

d) Rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{s - x}{2} \varphi(s) \, ds = f(x),$$

v které se integrál chápe ve smyslu jeho hlavní hodnoty, je singulární, poněvadž její jádro je možno vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1}{x - s} (x - s) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s - x),$$

a funkce

$$(x - s) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s - x)$$

je spojitá a diferencovatelná v intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

K naší klasifikaci je nutno poznamenat, že je především neúplná; je možno uvést mnohé typy integrálních rovnic, jež nelze zahrnout pod tři uvedené. Omezíme se však na tyto tři jako na rovnice zvláště důležité pro aplikace. Dále musíme říci, že rozdíl mezi rovnicemi Fredholmova typu a rovnicemi se slabou singularitou není příliš podstatný. Až na několik výjimek jsou nejdůležitější výsledky theorie společné pro rovnice obou typů.

V řadě případů je třeba uvažovat integrální rovnice, v kterých je neznámá funkce definována nikoliv na úsečce osy x, nýbrž na nějaké rovinné či prostorové křivce nebo na oblasti dvoj- či trojrozměrné. Prvý případ nepředstavuje nic nového: stačí jako nezávisle proměnnou zavést délku oblouku křivky nebo jiný parametr, jenž určuje polohu bodu na křivce, a dostaneme se již k uvažovanému typu rovnic.

Jestliže je neznámá funkce definována v n-rozměrné oblasti Ω (v příkladech důležitých pro aplikace se n obyčejně rovná dvěma nebo třem, obecně však může být libovolné), budeme se místo (1) zabývat rovnicí

$$\varphi(M) - \lambda \int_\Omega K(M, M_1) \varphi(M_1) \, dM_1 = f(M), \tag{2}$$

kde M a M_1 jsou body oblasti Ω a dM je element oblasti. Podle předešlého budeme λ nazývat parametrem, funkci $K(M, M_1)$ jádrem a $f(M)$ pravou stranou integrální rovnice (2). Rovnice typu (2) budeme klasifikovat takto:

Jestliže má integrál

$$\int_\Omega \int_\Omega |K^2(M, M_1)| \, dM \, dM_1$$

konečnou hodnotu, pak zahrneme rovnici (2) k typu Fredholmovu. Speciálně, rovnice (2) bude Fredholmova, když bude jádro spojité nebo alespoň omezené.

Vzdálenost mezi M a M_1 označme r. Rovnici (2) zahrneme k typu rovnic se slabou singularitou, jestliže její jádro má tvar

$$K(M, M_1) = \frac{H(M, M_1)}{r^\alpha},$$

kde $H(M, M_1)$ je omezená funkce a α leží v mezích $0 < \alpha < n$.

Je možno definovat i singulární integrální rovnici s několika nezávisle proměnnými. Neuděláme to však, protože takové rovnice jsou pro aplikace méně důležité.

Integrální rovnice se nazývá *homogenní*, jestliže její pravá strana je identicky rovna nule. Homogenní rovnice má tedy tvar

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = 0 \tag{3}$$

resp.

$$\varphi(M) - \lambda \int_\Omega K(M, M_1) \, \varphi(M_1) \, dM_1 = 0. \tag{4}$$

Jestliže pravá strana není identicky rovna nule, rovnice se nazývá *nehomogenní*.

Theorie a také praktické methody řešení Fredholmových rovnic jsou úplně stejné pro případ jak jedné, tak několika nezávisle proměnných. Budeme proto uvažovat v nejbližších paragrafech pouze rovnice s jednou nezávisle proměnnou. Je velmi lehké vyslovit nalezené výsledky pro případ několika nezávisle proměnných.

Rovnice tvaru (1) a (2) se nazývají *integrálními rovnicemi druhého druhu* na rozdíl od *rovnic prvého druhu*, které mají tvar

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = f(x), \tag{5}$$

nebo pro případ několika proměnných

$$\int_\Omega K(M, M_1) \, \varphi(M_1) \, dM_1 = f(M). \tag{6}$$

§ 2. Methoda postupných aproximací. Pojem resolventy. Přistupme k řešení integrálních rovnic. V §§ 2 až 9 této kapitoly budeme uvažovat pouze rovnice typu Fredholmova.

Jádra těchto rovnic podrobíme dalšímu doplňujícímu omezení: budeme předpokládat, že jednoduchý integrál ze čtverce absolutní hodnoty jádra je omezený:

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, ds < C_1;\ C_1 = \text{konst.} \tag{1}$$

O pravé straně budeme předpokládat, že integrál ze čtverce její absolutní hodnoty je konečný:

$$\int_a^b |f^2(x)|\, dx < \infty. \tag{1_1}$$

Budeme hledat řešení integrální rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2}$$

methodou postupných aproximací. Za tím účelem napíšeme rovnici (2) ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{3}$$

Jako nultou aproximaci vezmeme pravou stranu rovnice (2):

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

Nultou aproximaci dosadíme do pravé strany rovnice (3) a nalezený výsledek vezmeme za prvou aproximaci:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds.$$

Prvé přiblížení opět dosadíme do pravé strany rovnice (3) atd. Obecně řečeno, jestliže byla nalezena n-tá aproximace $\varphi_n(x)$, pak za $(n + 1)$-vou aproximaci vezmeme výsledek dosazení $\varphi_n(x)$ do pravé strany rovnice (3). Postupné aproximace jsou tedy určeny rekurentním vztahem

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds. \tag{4}$$

Jestliže postupné aproximace stejnoměrně konvergují k nějaké limitě, je tato limita řešení rovnice (3); jestliže tato limita neexistuje, pak použití methody postupných aproximací nemá zřejmě smysl.

Vyšetřeme podrobněji strukturu postupných aproximací. Zřejmě

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) \, ds.$$

Dále

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_1(s) \, ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) \, ds + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) \, dt \int_a^b K(t, s) f(s) \, ds.$$

V dvojnásobném integrálu provedeme záměnu pořádku integrování. Označíme-li pro stručnost

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) \, dt, \tag{5}$$

dostaneme:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) \, ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s) f(s) \, ds.$$

Právě tak najdeme:

$$\varphi_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) \, ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s) f(s) \, ds +$$

$$+ \lambda^3 \int_a^b K_3(x, s) f(s) \, ds,$$

kde

$$K_3(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_2(t, s) \, dt, \tag{6}$$

a obecně

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) f(s) \, ds; \tag{7}$$

$K_m(x, s)$ je určeno rekurentní formulí

$$K_1(x, s) = K(x, s); \quad K_m(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{m-1}(t, s) \, dt. \tag{8}$$

Funkce $K_m(x, s)$ se nazývá *m-tým iterovaným jádrem* vzhledem k danému jádru. Dá se lehko dokázat, že iterovaná jádra vyhovují obecnější formuli než (8):

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_r(x, t)\, K_{m-r}(t, s)\, \mathrm{d}t, \tag{9}$$

kde r je libovolné přirozené číslo menší než m.

Vyjádříme-li v (8) jádro $K_{m-1}(t, s)$ pomocí K_{m-2} podle téže formule (8), dostaneme

$$K_m(x, s) = \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2)\, K_{m-2}(t_2, s)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2.$$

Jádro $K_{m-2}(t_2, s)$ je možno vyjádřit pomocí K_{m-3} atd. Pokračujeme-li v tomto postupu, dostaneme po konečném počtu kroků vzorec

$$K_m(x, s) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) \ldots K(t_{m-1}, s)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_{m-1}. \tag{*}$$

Oddělíme-li integrování podle t_r, můžeme transformovat poslední vzorec na tvar

$$K_m(x, s) = \int_a^b \mathrm{d}t_r \left\{ \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) \ldots K(t_{r-1}, t_r)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{r-1} \,. \right.$$
$$\left. . \int_a^b \ldots \int_a^b K(t_r, t_{r+1}) \ldots K(t_{m-1}, s)\, \mathrm{d}t_{r+1} \ldots \mathrm{d}t_{m-1} \right\}.$$

Podle vzorce (*) je prvý z integrálů ve složené závorce roven $K_r(x, t_r)$ a druhý $K_{m-r}(t_r, s)$. Tedy

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_r(x, t_r)\, K_{m-r}(t_r, s)\, \mathrm{d}t_r.$$

Zaměníme-li zde označení t_r na t, dostaneme vzorec (9).

Předpokládáme-li, že postupné aproximace konvergují, a provedeme-li v (7) limitní přechod, dostaneme řešení integrální rovnice (2) ve tvaru nekonečné řady

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s, \tag{10}$$

jejímž n-tým částečným součtem je $\varphi_n(x)$.

Vyjasněme rychlost konvergence postupných aproximací. Označme C_m supremum integrálu

$$\int_a^b |K_m(x, s)|^2 \, ds$$

a najděmė odhad veličiny C_m. Ve vzorci (9) položme $r = m - 1$; potom

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_{m-1}(x, t) \, K(t, s) \, dt. \tag{8$_1$}$$

Použijme na daný integrál Buňakovského[1] nerovnosti

$$|K_m(x, s)|^2 \leqq \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 \, dt \int_a^b |K(t, s)|^2 \, dt.$$

Integrujíce tuto nerovnost podle s, dostaneme:

$$\int_a^b |K_m(x, s)|^2 \, ds \leqq B^2 \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 \, dt \leqq B^2 C_{m-1}.$$

Pro supremum integrálu na levé straně tedy najdeme:

$$C_m \leqq B^2 C_{m-1}.$$

Z této rekurentní nerovnosti plyne přímo hledaný odhad:

$$C_m \leqq B^{2m-2} C_1. \tag{11}$$

Zaveďme do úvah veličinu

$$D = \sqrt{\int_a^b |f^2(s)| \, ds}.$$

Na obecný člen řady (10) užijme Buňakovského nerovnosti:

$$\left|\int_a^b K_m(x, s) \, f(s) \, ds\right|^2 \leqq \int_a^b |K_m^2(x, s)| \, ds \int_a^b |f(s)|^2 \, ds \leqq C_1 D^2 B^{2m-2}.$$

Odtud plyne, že obecný člen řady (10) je absolutně menší než veličina

$$D \sqrt{C_1} |\lambda|^m B^{m-1},$$

takže řada (10) konverguje rychlejší než geometrická řada s kvocientem $|\lambda| B$.

---

[1] Tato nerovnost je často nazývána nerovností Schwarzovou, ačkoliv ji po prvé odvodil Buňakovskij. Pozn. překladatele.

Z toho plyne řešitelnost rovnice (2), jestliže $|\lambda| < B^{-1}$. Dokážeme nyní, že pro tato λ má pouze jedno řešení. Předpokládejme opak a nechť $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou dvě řešení rovnice (2). Potom

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds = f(x),$$

$$\varphi_2(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_2(s)\, ds = f(x).$$

Odečteme-li obě rovnice a položíme-li $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \omega(x)$, dostaneme

$$\omega(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \omega(s)\, ds.$$

Užijeme Buňakovského nerovnosti:

$$|\omega^2(x)| \leqq |\lambda|^2 \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \int_a^b |\omega^2(s)|\, ds; \tag{12}$$

nalezenou nerovnost integrujeme podle x. Potom dostaneme

$$\int_a^b |\omega^2(x)|\, dx \leqq |\lambda^2| \int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds \int_a^b |\omega^2(s)|\, ds$$

neboli

$$(1 - |\lambda^2| B^2) \int_a^b \omega^2(s)\, ds \leqq 0.$$

Prvý součinitel nalevo je kladný a druhý je nezáporný, tudíž je nutně

$$\int_a^b |\omega^2(s)|\, ds = 0.$$

Nyní z (12) plyne, že $|\omega^2(x)| \leqq 0$ a odtud $\omega(x) = 0$ čili $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Rovnice (2) má tedy jediné řešení.

Z našich úvah plyne tato věta.

Věta. *Jestliže*

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \leqq C_1, \quad C_1 = \text{konst.},$$

pak postupné aproximace stejnoměrně konvergují pro všechny hodnoty λ, *jež leží uvnitř kruhu*

$$|\lambda| \leqq \frac{1}{B}; \quad B^2 = \int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s.$$

Limita postupných aproximací je řešení rovnice (2), a to řešení jediné.

Jestliže se v řadě (10) omezíme na členy, jež obsahují λ až do n-té mocniny, je zřejmé, že chyba nebude větší než

$$D\sqrt{C_1}\frac{|\lambda|^{n+1}B^n}{1 - |\lambda|B}. \tag{13}$$

Jako příklad uvažujme rovnici

$$\varphi(x) - 0{,}1\int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = 1; \qquad K(x, s) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq s), \\ s & (s \leqq x \leqq 1). \end{cases}$$

Zde je $\lambda = 0{,}1$, $B = 1 : \sqrt{6}$, $C_1 = 1 : 3$ a postupné aproximace konvergují. Dále je zřejmě $D = 1$. Najdeme přibližné řešení, při čemž se omezíme na dvě aproximace. Pak v řadě (10) zůstanou tři členy a chyba nepřevýší

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{0{,}1^3 \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{0{,}1}{\sqrt{6}}} \approx 0{,}0001.$$

Máme

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_1(x) &= 1 + \tfrac{1}{10}x - \tfrac{1}{20}x^2, \\ \varphi_2(x) &= 1 + \tfrac{31}{300}x - \tfrac{1}{20}x^2 - \tfrac{1}{600}x^3 + \tfrac{1}{2400}x^4. \end{aligned}$$

Jestliže položíme přibližně $\varphi(x) = \varphi_2(x)$, pak s chybou menší než 0,0001 budeme mít:

$$\varphi(x) = 1 + \tfrac{31}{300}x - \tfrac{1}{20}x^2 - \tfrac{1}{600}x^3 + \tfrac{1}{2400}x^4.$$

Předpokládejme, že jádro je omezené, t. j. existuje taková konstanta A, že

$$|K(x, s)| < A$$

pro všechny hodnoty x a s. Snadno vidíme, že postupné aproximace stejnoměrně konvergují pro všechny komplexní hodnoty λ, jež leží uvnitř kruhu

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b - a)}$$

v komplexní rovině λ.

Jestliže integrál (1) není omezený, avšak dvojný integrál

$$\int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds$$

má konečnou hodnotu, pak i když postupné aproximace mohou divergovat v obyčejném smyslu, konvergují v jistém zobecněném smyslu (t. zv. konvergence v průměru, viz § 20) a jejich zobecněná limita dává řešení rovnice (2) a to jediné. Rámec naší knihy nám však nedovoluje, abychom se u toho zdržovali déle.

Zaměňme v řadě (10) pořádek sčítání a integrování.[1] Potom

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b f(s) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K_m(x, s)\, ds.$$

Zaveďme označení

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s). \tag{14}$$

Funkce $\Gamma(x, s; \lambda)$ se nazývá *resolventou* rovnice (2). Její pomocí lze napsat řešení v obzvlášť kompaktním tvaru:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(s)\, \Gamma(x, s; \lambda)\, ds. \tag{15}$$

Tento vzorec dovoluje okamžitě napsat řešení integrální rovnice (2), jestliže byla napřed vypočtena její resolventa.

Vzorec (14) definuje resolventu pouze pro $|\lambda| < 1 : B$. Zaveďme nyní obecnou definici. Řekneme, že pro dané λ má integrální rovnice (2) resolventu $\Gamma(x, s; \lambda)$, jestliže tato rovnice má řešení, a to jediné, při libovolné pravé straně a je-li toto řešení určeno vzorcem (15).

Jestliže resolventa existuje, pak je jediná. Nechť má rovnice (2) pro $\lambda = \lambda_0$ dvě resolventy $\Gamma(x, s; \lambda_0)$ a $\Gamma_1(x, s; \lambda_0)$. Libovolná funkce $f(x)$ splňuje identitu:

$$f(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0)\, f(s)\, ds = f(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda_0)\, f(s)\, ds,$$

která vyjadřuje tu skutečnost, že pro $\lambda = \lambda_0$ má rovnice (2) jediné řešení. Odtud

$$\int_a^b u(x, s)\, f(s)\, ds \equiv 0; \quad u(x, s) = \Gamma(x, s; \lambda_0) - \Gamma_1(x, s; \lambda_0).$$

---

[1] Lehce se dokáže, že tato záměna je dovolena.

Poněvadž $f(s)$ je libovolná funkce, zvolme x pevně a položme $f(s) = \overline{u(x, s)}$. Potom

$$\int_a^b |u(x, s)|^2 \, ds = 0$$

a $u(x, s) \equiv 0$, což dokazuje, že resolventa je jediná.

V § 9 uvedeme takové vyjádření resolventy, jež platí pro všechny hodnoty λ, pro které resolventa existuje.

Na závěr ještě uvedeme poznámku, která má praktický význam: Methoda postupných aproximací vede k řadám, jež se obyčejně nedají sečíst v uzavřeném tvaru. V praxi může dát methoda postupných aproximací pouze přibližné řešení integrální rovnice; v těch případech, kdy se podaří sečíst řadu (10) v uzavřeném tvaru, ukáže se zpravidla možným řešit integrální rovnici speciálním postupem, aniž použijeme obecné theorie.

§ 3. Rovnice Volterrova typu.

Některé úlohy matematické fysiky vedou k Fredholmovým rovnicím speciálního tvaru, nazývaným *rovnice Volterrovy*. Budeme tak nazývat rovnice, jejichž jádra jsou omezená a pro $s > x$ identicky rovna nule. Za těchto předpokladů je v integrálu

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds$$

intergrand roven nule pro $x < s \leq b$ a uvedený integrál je roven

$$\int_a^x K(x, s) \, \varphi(s) \, ds.$$

Integrální rovnice typu Volterrova má tedy tvar:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = f(x). \qquad (1)$$

Pro rovnici Volterrova typu platí následující věta.

Věta. *Jestliže pravá strana rovnice Volterrova typu je absolutně integrovatelná, pak postupné aproximace řešení této rovnice konvergují pro všechny hodnoty λ.*

Dokážeme především, že se iterovaná jádra Volterrovy rovnice rovnají nule pro $x < s$ a pro $x > s$ jsou dána vzorcem

$$K_m(x, s) = \int_s^x K(x, t)\, K_{m-1}(t, s)\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Máme

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Pro $t > x$ je roven nule prvý činitel za integračním znamením a pro $t < s$ činitel druhý. Jestliže $x < s$, je vždy buď $t > x$, nebo $t < s$ a integrál je roven nule. Jestliže $x > s$, je integrand různý od nuly pouze pro $s < t < x$, a tak dostaneme formuli (2) pro případ $m = 2$. Úplnou indukcí je možno dokázat (2) pro libovolné m.

Podle definice je jádro $K(x, s)$ omezené; nechť $|K(x, s)| < M$. Předpokládejme, že pro nějaké m je správný odhad

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m (x - s)^{m-1}}{(m - 1)!}. \tag{3}$$

Dosadíme-li ve (2) $m + 1$ místo m, dostaneme

$$|K_{m+1}(x, s)| = \left|\int_s^x K(x, t)\, K_m(t, s)\, \mathrm{d}t\right| < \frac{M^{m+1}}{(m - 1)!} \int_s^x (t - s)^{m-1}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{M^{m+1}(x - s)^m}{m!},$$

t. j. odhad (3) je správný i pro index $m + 1$. Poněvadž je triviální pro $m = 1$, je správný pro libovolné m. Nahradíme-li ve (3) rozdíl $(x - s)$ jeho největší hodnotou $b - a$, dostaneme

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m (b - a)^{m-1}}{(m - 1)!}.$$

Obecný člen řady (10), § 2 je tedy absolutně menší než

$$\frac{|\lambda|^m M^m (b - a)^{m-1}}{(m - 1)!} \int_a^b |f(s)|\, \mathrm{d}s$$

a odtud plyne absolutní a stejnoměrná konvergence uvedené řady pro libovolné λ.

Je možné uvažovat Volterrovy rovnice, jejichž jádra nejsou omezená, mají však slabou singularitu. Tyto rovnice mají tvar

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x \frac{H(x, s)}{(x - s)^\alpha} \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x);\ 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Postupné aproximace pro tyto rovnice také konvergují, i když poněkud pomaleji. Dokážeme to.

Nechť $|H(x, s)| < M$, kde M je konstanta, takže

$$|K(x, s)| < \frac{M}{(x - s)^\alpha}.$$

Najdeme odhad pro iterovaná jádra.

Předpokládejme, že pro nějaké m platí odhad

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m (x - s)^{m-1-m\alpha} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)}, \tag{5}$$

kde Γ je známá Eulerova funkce gamma.

Dosadíme-li ve (2) $m + 1$ místo m a odhadneme-li pravou stranu pomocí nerovnosti (5), dostaneme

$$|K_{m+1}(x, s)| < \frac{M^{m+1} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)} \int_s^x (x - t)^{-\alpha} (t - s)^{m-1-m\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

V posledním integrálu proveďme substituci $t = s + (x - s)\, v$. Potom

$$|K_{m+1}(x, s)| < \frac{M^{m+1} (x - s)^{m-(m+1)\alpha} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)} \int_0^1 v^{m-1-m\alpha} (1 - v)^{-\alpha}\, \mathrm{d}v =$$

$$= \frac{M^{m+1} (x - s)^{m-(m+1)\alpha} \Gamma^{m+1}(1 - \alpha)}{\Gamma(m + 1 - (m + 1)\, \alpha)}.$$

Odhad (5) je tedy správný i pro $m + 1$. Poněvadž zřejmě platí i pro $m = 1$, platí pro všechna m. Pro dostatečně velká m bude exponent u $(x - s)$ kladný. V tom případě můžeme nahradit $(x - s)$ větší hodnotou $b - a$. Potom pro abs. hodnotu obecného členu řady (10), § 2 platí odhad

$$\frac{|\lambda|^m M^m (b - a)^{m-1-m\alpha} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)} \int_a^b |f(s)|\, \mathrm{d}s. \tag{6}$$

Dokážeme, že řada s obecným členem (6) konverguje. Použijeme k tomu Stirlingovy formule

$$\Gamma(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\, p^p e^{-p+\frac{\vartheta}{12p}}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Označíme-li pro stručnost veličinu (6) a_m, máme

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{|\lambda|\, M(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{m}}\, \Gamma(1-\alpha)[m(1-\alpha)]^{\frac{1}{2m}+\alpha}\, e^{1-\alpha-\frac{\vartheta}{12m^2(1-\alpha)}}}{m(1-\alpha)(2\pi)^{\frac{1}{2m}}} .$$

$$\cdot \left[\int_a^b |f(s)|\, ds\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Tento výraz konverguje k nule pro $m \to \infty$; podle Cauchyova kriteria řada (10), § 2 konverguje absolutně a stejnoměrně pro libovolné λ.

Jako příklad budeme uvažovat rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-s} \varphi(s)\, ds = f(x). \tag{7}$$

Vypočteme iterovaná jádra a resolventu. Dostaneme

$$K_2(x, s) = \int_s^x e^{x-t} e^{t-s}\, dt = (x-s)\, e^{x-s}.$$

Obdobně najdeme

$$K_3(x, s) = \frac{(x-s)^2}{2!}\, e^{x-s}$$

a obecně

$$K_m(x, s) = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{x-s}.$$

Nyní

$$\Gamma(s, x; \lambda) = e^{x-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = e^{(\lambda+1)(x-s)}.$$

Tento vzorec platí pro $s \leqq x$; pro $s > x$ je zřejmě $\Gamma(x, s; \lambda) \equiv 0$. Podle vzorce (15), § 2 dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)} f(s)\, ds. \tag{8}$$

Řadu postupných aproximací se podařilo sečíst v uzavřeném tvaru.

Poznamenejme, že se integrální rovnice (7) dá převést na velmi jednoduchou diferenciální rovnici. Derivujeme-li (7), dostaneme:

$$\varphi'(x) - \lambda\, \varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-s}\, \varphi(s)\, ds = f'(x). \tag{9}$$

Vyloučíme-li integrál z (9) pomocí (7), dostaneme lineární diferenciální rovnici 1. řádu s neznámou $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) - (\lambda + 1)\, \varphi(x) = f'(x) - f(x).$$

Integrujeme-li ji při počáteční podmínce $\varphi(0) = f(0)$,[1] dostaneme řešení (8).

§ 4. Integrální rovnice s degenerovaným jádrem. Existuje důležitá třída integrálních rovnic, jež se jednoduše řeší převedením na soustavu algebraických rovnic. Budeme nazývat jádro *degenerovaným*, jestliže je součtem konečného počtu sčítanců, z nichž každý je opět součinem dvou činitelů, ze kterých jeden je funkcí pouze x a druhý pouze s. Degenerované jádro má tedy tvar

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s); \tag{1}$$

integrální rovnice s degenerovaným jádrem se dá napsat ve tvaru

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(s)\, \varphi(s)\, ds = f(x). \tag{2}$$

Funkce $a_i(x)$ lze považovat za lineárně nezávislé; v opačném případě lze počet sčítanců v (1) snížit. Stejně lze považovat funkce $b_i(s)$ za nezávislé.

Integrální rovnice s degenerovaným jádrem se řeší takto: Označíme

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{3}$$

Veličiny c_i jsou neznámé konstanty, neboť neznáme funkci $\varphi(x)$. Z rovnice (2) nyní dostaneme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x) \tag{4}$$

---

[1] Tuto počáteční podmínku dostaneme, položíme-li v (7) $x = 0$.

a zbývá ještě určit konstanty c_i. Dosadíme proto výraz (4) do integrální rovnice (2). Po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\{c_i - \int_a^b b_i(s)[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k(s)]\, ds\} = 0.$$

Poněvadž funkce $a_i(x)$ jsou lineárně nezávislé, plyne z poslední rovnice:

$$c_i - \int_a^b b_i(s)[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k(s)]\, ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označme ještě pro stručnost

$$\int_a^b b_i(s)\, f(s)\, ds = f_i, \quad \int_a^b b_i(s)\, a_k(s)\, ds = a_{ik}.$$

Potom je

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = f_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Konstanty c_i jsou tedy řešením soustavy lineárních algebraických rovnic. Jejím řešením najdeme i řešení rovnice (2); její řešení je dáno vzorcem (4). Naopak není-li soustava (5) řešitelná, nemá řešení ani integrální rovnice.

Determinant soustavy (5) se rovná

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11}, & -\lambda a_{12}, & \ldots, & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21}, & 1 - \lambda a_{22}, & \ldots, & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ -\lambda a_{n1}, & -\lambda a_{n2}, & \ldots, & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

To je polynom nejvýše n-tého stupně pro λ; není roven identicky nule, neboť pro $\lambda = 0$ má hodnotu 1. Z toho plyne, že existuje nejvýše n různých hodnot, pro něž $D(\lambda) = 0$. Pro tyto hodnoty λ je soustava (5) a s ní i integrální rovnice (2) buď neřešitelná, nebo má nekonečně mnoho řešení. Pro ostatní hodnoty λ má integrální rovnice řešení, a to jediné.

Poznamenejme, že soustavu (5) je možno napsat, aniž dosadíme výraz (4) do rovnice. Stačí vynásobit rovnici (4) $b_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) a zintegrovat v mezích od a do b. Zaměníme-li označení i za k a naopak, dostaneme soustavu (5).

Příklad. Budiž dána rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x + s)\, \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Její řešení má tvar

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(c_1 x + c_2).$$

Podle výše vyložené methody dostaneme pro určení konstant c_1 a c_2 soustavu:

$$(1 - \tfrac{1}{2}\lambda)\, c_1 - \lambda c_2 = f_1,$$
$$- \tfrac{1}{3}\lambda c_1 + (1 - \tfrac{1}{2}\lambda)\, c_2 = f_2,$$

kde

$$f_1 = \int_0^1 f(s)\, ds, \quad f_2 = \int_0^1 s\, f(s)\, ds.$$

Determinant této soustavy, rovný $- \frac{1}{12}\lambda^2 - \lambda + 1$, rovná se nule pro dvě hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}.$$

Pro λ různé od λ_1 a λ_2 má naše rovnice jediné řešení:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{6(\lambda - 2)(x + s) - 12xs - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12} f(s)\, ds.$$

Pro $\lambda = \lambda_1$ nebo $\lambda = \lambda_2$ je naše rovnice obecně neřešitelná. Čtenář snadno najde podmínky, jež musí splňovat funkce $f(x)$, aby řešení existovalo i při těchto výjimečných hodnotách λ, a také najde tvar obecného řešení.

Uvažme ještě rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s\, \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Položíme-li

$$\int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos s\, ds = c,$$

máme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda c \sin x.$$

Vynásobme poslední rovnici $\cos x$ a zintegrujme v mezích od 0 do 2π. Pak dostaneme

$$c = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx,$$

a tedy

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s\, f(s)\, ds.$$

§ 5. Obecný případ Fredholmovy rovnice. Řešení Fredholmovy rovnice v obecném případě je možno převést na řešení rovnice s degenerovaným jádrem. To je možno učinit mnoha způsoby. Napišme na příklad Fourierův rozvoj jádra $K(x, s)$ v dvojnou kosinovou řadu

$$K(x, s) \sim \sum_{i, k=0}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a}. \tag{1}$$

Přitom nepředpokládáme, že Fourierova řada konverguje. Označme nyní

$$\sum_{i, k=0}^{n} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} = P(x, s),$$

$$K(x, s) - P(x, s) = K'(x, s).$$

Danou integrální rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2}$$

přepíšeme ve tvaru

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{3}$$

Výraz na pravé straně v (3) budeme dočasně považovat za známý. Potom je možno uvažovat rovnici (3) jako integrální rovnici s jádrem $K'(x, s)$, parametrem λ a pravou stranou

$$f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Dokážeme, že rovnice (3) je řešitelná methodou postupných aproximací, a to za toho jediného předpokladu, že n je dostatečně velké.

Jádru $K'(x, s)$ přísluší Fourierův rozvoj

$$K'(x, s) \sim \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} + \\ + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a}.$$

Zaveďme označení

$$\int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2\, dx\, ds = B'^2.$$

V důsledku Parsevalovy rovnice

$$B'^2 = \frac{(b-a)^2}{4}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}|A_{ik}|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2\right\}. \tag{4}$$

Řada (4) je zbytek konvergentní řady

$$\frac{(b-a)^2}{4}\sum_{i,\,k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2$$

a pro dostatečně velká n lze její součet učinit libovolně malým. Zvolíme n tak, aby byla splněna nerovnost

$$B' < 1 : |\lambda|.$$

Podle věty § 2 lze rovnici (3) řešit methodou postupných aproximací; existuje resolventa

$$\Gamma'(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1} K'_m(x, s)^1$$

a řešení rovnice (2) lze napsat podle vzorce (15), § 2:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b P(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)[f(t) +$$
$$+ \lambda\int_a^b P(t, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}t.$$

Zaveďme označení

$$f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\,f(t)\,\mathrm{d}t = F(x),$$

$$P(x, s) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\,P(t, s)\,\mathrm{d}t = K''(x, s). \tag{5}$$

Potom poslední rovnice nabývá tvaru

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K''(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = F(x). \tag{6}$$

To je integrální rovnice s neznámou $\varphi(s)$, jež je ekvivalentní rovnici (3). Dokážeme, že její jádro $K''(x, s)$ je degenerované. Skutečně, $P(x, s)$ je trigonometrický polynom. Vyjádříme jej ve tvaru

$$P(x, s) = \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\,b_i(s),$$

[1] $K'_m(x, s)$ jsou iterovaná jádra, získaná z jádra $K'(x, s)$.

kde

$$b_i(s) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cos \frac{k\pi s}{b-a}.$$

Dále

$$\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\, P(t, s)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} b_i(s) \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a}\, \mathrm{d}t.$$

Zavedeme-li nyní označení

$$a_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{b-a} + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a}\, \mathrm{d}t,$$

můžeme napsat

$$K''(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s);$$

jádro $K''(x, s)$ je skutečně degenerované. Způsobem uvedeným v § 4 převedeme integrální rovnici na soustavu lineárních algebraických rovnic.

Uvedený způsob není ovšem jediný možný; obecnou Fredholmovu rovnici převedeme na rovnici s degenerovaným jádrem, jestliže jakýmkoliv způsobem rozložíme jádro na dva sčítance:

$$K(x, s) = P(x, s) + K'(x, s), \tag{*}$$

z nichž prvý má charakter degenerovaného jádra a druhý splňuje nerovnost

$$B'^2 = \int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s < \frac{1}{|\lambda|^2}.$$

Vyloženého způsobu se v praxi užívá v tomto zjednodušeném tvaru.

Nechť rozklad (*) je takový, že

$$\int_a^b |K'(x, s)|^2\, \mathrm{d}s \leqq C',$$

kde C' je dostatečně malá konstanta. Připustíme-li, že daná integrální rovnice má řešení, vidíme, že integrál

$$\int_a^b K'(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s$$

je také malý. V důsledku Buňakovského nerovnosti skutečně máme

$$\left|\int_a^b K'(x, s)\, \varphi(s)\, ds\right|^2 \leq \int_a^b |K'(x, s)|^2\, ds \int_a^b |\varphi^2(s)|\, ds \leq C' \int_a^b |\varphi^2(s)|\, ds.$$

Zanedbáme-li tuto malou veličinu, dostaneme místo rovnice (3) hned rovnici s degenerovaným jádrem:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b P(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Postup tedy spočívá v tom, že nahradíme jádro blízkým jádrem degenerovaným, aniž měníme pravou stranu rovnice, při čemž stupeň blízkosti jader je určen veličinou C'.

Uvažujme další příklad. Řešení Dirichletova problému pro konečnou rovinnou oblast ohraničenou křivkou L může být převedeno na řešení integrální rovnice[1]

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r}\, \mu(\tau)\, d\sigma = f(t). \tag{7}$$

Zde jsou t a τ hodnoty parametru, jenž určuje polohu bodu na křivce L; r je vzdálenost mezi body, jež odpovídají těmto hodnotám parametru; ν je vnější normála k L v bodě τ; $d\sigma$ je element oblouku L; konečně $\mu(t)$ je neznámá a $f(t)$ daná funkce.

Ve druhé části bude dokázáno, že rovnice (7) má řešení pro libovolnou funkci $f(t)$.

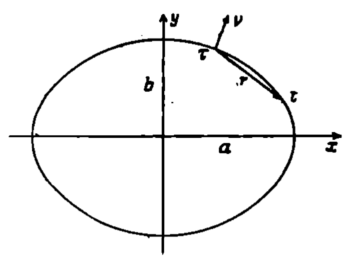
Řešme přibližně rovnici (7) za předpokladu, že hranice oblasti je elipsa s poloosami a a b (obr. 1). Její parametrické rovnice jsou

$$x = a \cos\tau, \quad y = b \sin\tau;$$

parametr τ se mění od 0 do 2π. Určeme jádro rovnice. Především

$$r^2 = a^2(\cos t - \cos\tau)^2 + b^2(\sin t - \sin\tau)^2 =$$
$$= 4a^2 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2}\right),$$

kde $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ je číselná excentricita elipsy. Dále



Obr. 1.

[1] Viz část II, kap. I, § 29.

$$\cos(\nu, r)\, d\sigma = [\cos(\nu, x)\cos(r, x) + \cos(\nu, y)\cos(r, y)]\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{r}[a(\cos t - \cos\tau)\, dy - b(\sin t - \sin\tau)\, dx] =$$
$$= \frac{ab}{r}[\cos\tau(\cos t - \cos\tau) + \sin\tau(\sin t - \sin\tau)]\, d\tau =$$
$$= -\frac{2ab}{r}\sin^2\frac{t - \tau}{2}\, d\tau.$$

Nyní

$$\frac{1}{r}\cos(\nu, r)\, d\sigma = -\frac{b}{2a}\frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t + \tau}{2}} =$$
$$= -\frac{b}{2a}\left(1 + \varepsilon^2\cos^2\frac{t + \tau}{2} + \varepsilon^4\cos^4\frac{t + \tau}{2} + \dots\right) d\tau. \tag{8}$$

Tím, že se v napsané řadě omezíme na konečný počet členů, nahradíme jádro naší rovnice jádrem degenerovaným. Řešit rovnici je už potom lehké. Provedeme další výpočty za předpokladu, že excentricita je malá, takže je možno se omezit na členy s ε^2.

Máme tedy řešit rovnici

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\left(1 + \varepsilon^2\cos^2\frac{t + \tau}{2}\right)\mu(\tau)\, d\tau = f(t).$$

Dosadíme-li $\frac{1}{2}[1 + \cos(t + \tau)]$ za $\cos^2\frac{1}{2}(t + \tau)$, dostaneme:

$$\mu(t) + \int_0^{2\pi}(\alpha + \beta\cos t\cos\tau - \beta\sin t\sin\tau)\,\mu(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{9}$$

Zde jsme označili

$$\alpha = \frac{b}{2\pi a}(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2),\ \beta = \frac{b\varepsilon^2}{4\pi a}.$$

Z (9) plyne, že

$$\mu(t) = f(t) - c_1 - c_2\cos t - c_3\sin t, \tag{10}$$

kde

$$c_1 = \alpha\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\, d\tau,\ c_2 = \beta\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos\tau\, d\tau,$$
$$c_3 = -\beta\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin\tau\, d\tau.$$

Vynásobíme-li (10) výrazy α, $\beta\cos\tau$ a $-\beta\sin\tau$ a zintegrujeme-li ji v mezích od 0 do 2π, dostaneme následující rovnice pro neznámé c_1, c_2, c_3:

$$c_1 = f_1 - 2\pi\alpha c_1,$$
$$c_2 = f_2 - \pi\beta c_2,$$
$$c_3 = f_3 + \pi\beta c_3,$$

kde

$$f_1 = \alpha \int_0^{2\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad f_2 = \beta \int_0^{2\pi} f(\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau,\quad f_3 = -\beta \int_0^{2\pi} f(\tau)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

Odtud najdeme

$$c_1 = \frac{f_1}{1 + 2\pi\alpha},\quad c_2 = \frac{f_2}{1 + \pi\beta},\quad c_3 = \frac{f_3}{1 - \pi\beta}. \tag{11}$$

Užijeme-li téhož postupu, není obtížné nalézt i přesnější řešení. Stačí ponechat v rozvoji jádra vyšší mocniny ε. Můžeme získat i přesné řešení, avšak ve tvaru nekonečné řady. Abychom toto řešení dostali, užijeme tohoto postupu: Rozvineme funkci

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta}$$

ve Fourierovu řadu. Tato funkce je sudá; mimo to se nemění, položíme-li $\vartheta + \pi$ za ϑ. Z toho lze lehko usoudit, že její Fourierova řada má tvar

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2k\vartheta$$

neboli

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \mathrm{e}^{2ik\vartheta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \mathrm{e}^{-2ik\vartheta}.$$

Odtud, podle známých vzorců,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

$$\tfrac{1}{2}a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2ik\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta}{1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta},\quad k \geqq 1.$$

Abychom vypočetli poslední integrál, položíme $e^{i\vartheta} = z$. Po elementárních úpravách dostaneme

$$\tfrac{1}{2}a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{4z^{2k+1}\,dz}{4z^2 - \varepsilon^2(z^2+1)^2},$$

kde γ je kružnice $|z| = 1$. Uvnitř γ leží póly integrované funkce

$$z_1 = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad z_2 = -z_1 = -\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Residua mají v pólech z_1 a z_2 stejnou hodnotu, a to

$$\frac{\varepsilon^{2k}}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2k}}.$$

Odtud najdeme

$$a_k = \frac{2\varepsilon^{2k}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2k}},\quad k \geqq 1.$$

Hledaný rozvoj má tvar

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{2k}\cos 2k\vartheta\right].$$

Nyní

$$\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)^{-1} = \frac{a}{b}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,(\cos kt\cos k\tau - \sin kt\sin k\tau)\right],$$

kde c je výstřednost elipsy; naše integrální rovnice nabude tvaru

$$\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cos kt\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos k\tau\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\sin kt\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin k\tau\,d\tau = f(t). \tag{12}$$

Označme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\,d\tau = A_0,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos k\tau\,d\tau = A_k,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin k\tau\,d\tau = B_k.$$

Potom, jak plyne z (12),

$$\mu(t) = f(t) - A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k} (A_k \cos kt - B_k \sin kt). \tag{13}$$

Znásobíme-li (13) postupně výrazy $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{\cos kt}{\pi}$ a $\frac{\sin kt}{\pi}$ a zintegrujeme-li ji, najdeme

$$A_0 = \tfrac{1}{2}F_0, \quad A_k = \frac{(a+b)^k F_k}{(a+b)^k + (a-b)^k}, \quad B_k = \frac{(a+b)^k F'_k}{(a+b)^k - (a-b)^k}, \tag{14}$$

kde F_0, F_k a F'_k jsou Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau, \quad F_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos k\tau\,d\tau, \tag{15}$$

$$F'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin k\tau\,d\tau.$$

Pro kružnici $c = 0$ a řešení má tvar

$$\mu(t) = f(t) - A_0 = f(t) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Toto poslední řešení však dostaneme jednodušeji přímo. Skutečně, pro kružnici $a = b$, $\varepsilon = 0$ a rovnice (7) nabývá tvaru

$$\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau)\,d\tau = f(t).$$

Odtud

$$\mu(t) = f(t) - c, \quad c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau)\,d\tau.$$

Integrujeme-li poslední rovnici v mezích $\langle 0, 2\pi \rangle$, najdeme

$$c = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau,$$

což znovu dává vzorec (16).

§ 6. Soustavy integrálních rovnic. V aplikacích se často setkáváme se soustavami integrálních rovnic. Taková soustava má tvar

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K_{ik}(x, s)\, \varphi_k(s)\, ds = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Theorie a také methody řešení soustav integrálních rovnic jsou tytéž jako pro jednu rovnici. Tak postupné aproximace konvergují pro malá λ, speciálně jestliže λ vyhovuje nerovnosti

$$|\lambda| < \left\{ \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2\, dx\, ds} \right\}^{-1} \tag{2}$$

a integrály

$$\int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2\, ds$$

jsou omezené. Jestliže jádra $K(x, s)$ jsou degenerovaná, převede se soustava (1) na soustavu lineárních algebraických rovnic. V obecném případě se soustava (1) převede na soustavu s degenerovanými jádry methodami vyloženými v § 5.

Soustavu integrálních rovnic lze nahradit jedinou rovnicí takto: Uvažujme proměnné x a s, probíhající interval $\langle a, nb - (n - 1)\, a \rangle$, jehož délka je n-krát větší než délka počátečního intervalu $\langle a, b \rangle$. Definujme funkce $\Phi(x)$, $F(x)$, $K(x, s)$ ve zmíněném intervalu vzorci:

$$\Phi(x) = \varphi_i(x - (i - 1)(b - a)),$$

když

$$(i - 1)\, b - (i - 2)\, a \leqq x < ib - (i - 1)\, a;$$
$$F(x) = f_i(x - (i - 1)(b - a)),$$

když

$$(i - 1)\, b - (i - 2)\, a \leqq x < ib - (i - 1)\, a;$$
$$K(x, s) = K_{ik}(x - (i - 1)(b - a), s - (k - 1)(b - a)),$$

když

$$\left\{ \begin{array}{l} (i - 1)\, b - (i - 2)\, a \leqq x < ib - (i - 1)\, a, \\ (k - 1)\, b - (k - 2)\, a \leqq s < kb - (k - 1)\, a. \end{array} \right.$$

Při takové definici se soustava (1) převede na jedinou rovnici

$$\Phi(x) - \lambda \int_a^{nb - (n-1)a} K(x, s)\, \Phi(s)\, ds = F(x). \tag{3}$$

§ 7. Užití přibližného integrování. Nahrazení daného jádra degenerovaným nám umožňuje najít řešení ve tvaru vzorce vhodného pro celý interval $a \leqq x \leqq b$ a pro libovolné hodnoty parametru λ. Vážným nedostatkem tohoto způsobu se jeví nutnost výpočtu kvadratur, někdy značně obtížných a četných. Stejný nedostatek má i methoda postupných aproximací. Vyložíme nyní methodu přibližného řešení integrálních rovnic, jež nevyžaduje výpočtu kvadratur.

Nechť v rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{1}$$

jsou jádro $K(x, s)$ i pravá strana $f(x)$ spojité pro $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq s \leqq b$. Potom je $\varphi(x)$ také spojitá. Integrál

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

nahradíme konečným součtem podle některého ze vzorců pro přibližný výpočet integrálů, na příklad podle vzorce vztaženého na dělení obdélníkové

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds \approx h \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k),$$

kde

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh.$$

V přibližné rovnici

$$\varphi(x) - \lambda h \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k) = f(x)$$

dosadíme za x hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic s neznámými $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_k)$:

$$\varphi(x_i) - \lambda h \sum_{k=1}^{n} K(x_i, x_k)\, \varphi(x_k) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Řešením této soustavy dostaneme přibližné hodnoty neznámé funkce $\varphi(x)$ v bodech $x_1, x\ , \ldots, x_k$. Užijeme-li kterékoliv z interpolačních method, dostaneme přibližné vyjádření $\varphi(x)$ v celém intervalu. Nejjednodušeji se ovšem přibližné vyjádření dostane přímo z integrální rovnice: nahradíme-li v ní integrál konečným součtem, dostaneme přibližné vyjádření

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda h \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k).$$

Místo obdélníkové methody je ovšem možno užít i jiných vzorců pro přibližný výpočet integrálu. Mnohem přesnější výsledky dostaneme, užijeme-li vzorce Simpsonova nebo ještě lépe Gaussova.

Když $n \to \infty$, výraz $\varphi(x)$ nalezený naznačeným způsobem má za limitu řešení integrální rovnice (1) za předpokladu, že řešení existuje a je jediné. Důkaz je možno najít na příklad v knize L. V. Kantoroviče a V. I. Krylova [42].

Řešme uvedeným způsobem rovnici (7), § 5 pro elipsu. Aby bylo možno všechny výpočty provést až do konce, udejme číselné hodnoty veličin a a b a zvolme určitou funkci $f(t)$. Nechť na př.

$$a = 5,\ b = 3,\ f(t) = x^2 + y^2 = 25\cos^2 t + 9\sin^2 t.$$

Naše rovnice přibližně zní

$$\mu(t) + 0{,}10 \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \frac{d\tau}{1 - 0{,}64\cos^2 \dfrac{t+\tau}{2}} = 25\cos^2 t + 9\sin^2 t$$

neboli, užijeme-li periodičnosti funkce $\mu(t)$,

$$\mu(t) + \int_{-\pi}^{+\pi} \mu(\tau) \frac{d\tau}{6{,}8 - 3{,}2\cos(t+\tau)} = 25 - 16\sin^2 t. \qquad (3)$$

Pravá strana nabývá stejných hodnot v bodech symetricky položených vzhledem k osám souřadnic. Není obtížné zjistit pomocí vzorce (13), § 5, že tuto vlastnost má také $\mu(t)$, t. j. že

$$\mu(\pi - t) = \mu(-t) = \mu(t). \qquad (4)$$

Zřejmě také má $\mu(t)$ periodu 2π. Stačí tedy určit $\mu(t)$ v intervalu $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\pi$.

Vezměme $n = 12$, takže $h = \frac{1}{6}\pi$. Označme pro stručnost

$$\mu(0) = y_1,\ \mu(\tfrac{1}{6}\pi) = y_2,\ \mu(\tfrac{1}{3}\pi) = y_3,\ \mu(\tfrac{1}{2}\pi) = y_4.$$

Soustava (2) v našem případě zní:

$$\begin{aligned} 1{,}19y_1 + 0{,}35y_2 + 0{,}31y_3 + 0{,}15y_4 &= 25, \\ 0{,}18y_1 + 1{,}34y_2 + 0{,}32y_3 + 0{,}16y_4 &= 21, \\ 0{,}16y_1 + 0{,}32y_2 + 1{,}34y_3 + 0{,}18y_4 &= 13, \\ 0{,}15y_1 + 0{,}31y_2 + 0{,}35y_3 + 1{,}19y_4 &= 9. \end{aligned} \tag{5}$$

Řešení je

$$y_1 = 16{,}04;\ y_2 = 12{,}27;\ y_3 = 4{,}73;\ y_4 = 0{,}94.$$

V našem případě je nejlépe interpolovat pomocí Fourierova rozvoje, neboť funkce $\mu(t)$ je periodická. Protože $\mu(t)$ splňuje relace (4), má její Fourierův rozvoj tvar

$$\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kt.$$

Ponechme v této řadě pouze prvé čtyři členy. Známe-li čtyři hodnoty funkce $\mu(t)$, můžeme vypočítat čtyři koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3. Obvyklým způsobem najdeme

$$a_0 = 8{,}50;\ a_1 = 7{,}54;\ a_2 = 0;\ a_3 = 0;$$

$$\mu(t) \approx 8{,}50 + 7{,}54 \cos 2t. \tag{6}$$

Porovnejme (6) s přesným řešením nalezeným v § 5, vzorce (13) až (15). V našem případě

$$f(t) = 25 - 16 \sin^2 t = 17 + 8 \cos 2t,$$

takže $F_0 = 17$, $F_2 = 8$ a všechny ostatní Fourierovy koeficienty jsou rovny nule. Podle vzorců (14), § 5

$$A_0 = 8{,}50;\ A_2 = 7{,}53.$$

Ostatní koeficienty A_k a všechny B_k jsou rovny nule. Tudíž

$$\mu(t) = 8{,}50 + 7{,}53 \cos 2t.$$

Přibližné řešení (6), jak vidíme, je prakticky shodné s přesným; maximální relativní chybu dostaneme pro $t = \frac{1}{2}\pi$ a ta činí přibližně 1%. Pro $t = 0$ je relativní chyba menší než $0{,}07\%$.

§ 8. Fredholmovy věty. Už jsme viděli, že integrální rovnice není obecně řešitelná v uzavřené formě. Obyčejně je při řešení integrálních rovnic třeba použít přibližných method. Při tom, jak bylo poznamenáno v §§ 5 a 7, můžeme přibližných method s jistotou užít jen tehdy, když byla řešitelnost rovnice dokázána již dříve, při čemž máme na mysli řešitelnost při libovolné pravé straně. Proto nabývá velkého významu rozbor rovnice, jenž předchází jejímu vlastnímu řešení. Tento rozbor lze vždy provést pomocí obecných vět o integrálních rovnicích, jež byly dokázány Fredholmem. Takové věty jsou čtyři.

Budeme užívat následujícího názvosloví. Hodnoty λ, pro něž existuje resolventa Fredholmovy rovnice, budeme nazývat *regulární* a hodnoty λ, pro něž resolventa neexistuje, nazveme *charakteristické*. Převrácené hodnoty charakteristických čísel se nazývají *vlastními hodnotami rovnice.*

Je zřejmé, že homogenní rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = 0 \tag{1}$$

má pro regulární λ pouze triviální řešení $\varphi(x) = 0$.

Předpokládejme, že homogenní rovnice (1) má netriviální řešení; podle věty (1) je to možné jen tehdy, když hodnota λ je charakteristická. Jestliže $\varphi_1(x)$ je řešením rovnice (1), pak $c\, \varphi_1(x)$, kde c je libovolná konstanta, je také řešením; jestliže $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou dvě taková řešení, je jejich součet $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ také řešení. Tudíž když $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ vyhovují homogenní rovnici (1), pak jejich libovolná lineární kombinace

$$c_1\, \varphi_1(x) + c_2\, \varphi_2(x) + \ldots + c_k\, \varphi_k(x)$$

jí vyhovuje také. Jestliže má tedy homogenní integrální rovnice alespoň jedno netriviální řešení (t. j. takové, jež není identicky rovno nule), má jich nekonečně mnoho. Netriviální řešení homogenní integrální rovnice se nazývají *vlastními* nebo *charakteristickými* funkcemi jádra $K(x, s)$ (nebo rovnice), odpovídajícími danému charakteristickému číslu.

Vyslovíme nejprve všechny Fredholmovy věty, potom uvedeme některá dobře známá tvrzení lineární algebry a jejich pomocí dokážeme Fredholmovy věty.

Věta 1. *V libovolné omezené části komplexní roviny λ existuje pouze konečná množina charakteristických čísel Fredholmovy integrální rovnice*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x). \tag{2}$$

Věta 2. *Ke každému charakteristickému číslu patří alespoň jedna charakteristická funkce. Počet lineárně nezávislých charakteristických funkcí, jež příslušejí danému charakteristickému číslu, je konečný.*

Dříve než vyslovíme dvě zbývající Fredholmovy věty, zavedeme nový pojem, jenž hraje důležitou úlohu v theorii integrálních rovnic. Jádro $\overline{K(s, x)}$, jež dostaneme z daného jádra $K(x, s)$ výměnou proměnných a přechodem k funkci komplexně sdružené, nazývá se *konjugované* s daným jádrem a rovnice

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, \mathrm{d}s = g(x) \tag{3}$$

se nazývá konjugovanou s rovnicí (1) a také s ní příslušnou nehomogenní rovnicí. Konjugovaná rovnice se dostane z dané záměnou jádra za konjugované a záměnou parametru za komplexně sdružený; pravá strana $g(x)$ je úplně libovolná.[1]

Poznamenejme, že konjugovanost je reflexivní, takže rovnice (1) je konjugovaná s (3).

Jestliže jádro $K(x, s)$ je reálné, dostane se konjugované jádro prostou výměnou proměnných.

Věta 3. *Jestliže λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$, pak $\overline{\lambda_0}$ je charakteristické číslo konjugovaného jádra $\overline{K(s, x)}$. Počet lineárně nezávislých charakteristických funkcí rovnice*

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = 0 \tag{4}$$

a rovnice s ní konjugované

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, \mathrm{d}s = 0 \tag{5}$$

je tentýž.

---

[1] V učebnicích integrálních rovnic se konjugovaná rovnice obyčejně píše ve tvaru

$$\omega(x) - \lambda \int_a^b K(s, x)\, \omega(s) \mathrm{d}s = h(x);$$

tuto formu konjugované rovnice dostaneme tím, že položíme $\omega(x) = \overline{\psi(x)}$, $h(x) = \overline{g(x)}$ a nahradíme všechny členy rovnice (3) komplexně sdruženými.

V dalším hraje důležitou úlohu pojem skalárního součinu. *Skalárním součinem* (φ, ψ) dvou funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ se nazývá integrál

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dx.$$

Uveďme několik jednoduchých vlastností skalárního součinu, jež vyplývají bezprostředně z jeho definice.

a) Jestliže $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou součtem několika sčítanců, provede se skalární násobení podle pravidla o násobení mnohočlenů. Tak na př.:

$$(\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_1, \psi_2) + (\varphi_2, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2).$$

b) Při záměně činitelů se součin stane komplexně sdruženým:

$$(\psi, \varphi) = \overline{(\varphi, \psi)}.$$

c) Konstantní koeficient u prvého činitele lze vytknout před skalární součin:

$$(\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi).$$

d) Konstantní koeficient u druhého činitele lze vytknout před skalární součin, když jej před tím nahradíme komplexně sdruženým:

$$(\varphi, \lambda\psi) = \overline{\lambda}(\varphi, \psi).$$

e) Skalární součin funkce se sebou samou je veličina nezáporná:

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)| \, dx \geqq 0;$$

rovná se nule, když a jen když $\varphi \equiv 0$.

Dvě funkce φ a ψ se nazývají *orthogonální* v intervalu $\langle a, b \rangle$, když

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dx = 0.$$

Jestliže jsou tyto funkce reálné, je podmínka orthogonality jednodušší a nabývá tvaru

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx = 0.$$

Veličina $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ se nazývá *normou* $\varphi(x)$ a značí se $\|\varphi\|$.

Funkce, jejichž norma se rovná jedné, se nazývají *normované.*

Uveďme některé důležité vlastnosti normy. Zřejmě norma libovolné funkce je nezáporná; rovnost normy nule je ekvivalentní s indentickým vymizením příslušné funkce. Dále je zřejmé, že $\|a\varphi\| = |a| \cdot \|\varphi\|$, jestliže a je konstanta. Užijeme-li na integrál

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dx$$

Buňakovského nerovnosti, dostaneme

$$|(\varphi, \psi)|^2 \leqq (\int_a^b |\varphi(x)| \cdot |\psi(x)| \, dx)^2 \leqq \int_a^b |\varphi^2(x)| \, dx \int_a^b |\psi^2(x)| \, dx$$

a odtud

$$|(\varphi, \psi)| \leqq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|.$$

Poslední nerovnost budeme také nazývat nerovností Buňakovského.

Uvažujme nyní veličinu

$$\|\varphi + \psi\| = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) = (\varphi, \varphi) + (\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) + (\psi, \psi).$$

Aplikujeme-li nerovnost Buňakovského na dva střední členy, dostaneme

$$\|\varphi + \psi\|^2 \leqq \|\varphi\|^2 + 2\|\varphi\| \cdot \|\psi\| + \|\psi\|^2;$$

odtud plyne t. zv. *trojúhelníková nerovnost*

$$\|\varphi + \psi\| \leqq \|\varphi\| + \|\psi\|.$$

Vlastností normy zde vytčené široce využijeme v kap. II.

V dalším budeme užívat označení

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds.$$

Integrál, jenž se vyskytuje v konjugované rovnici, budeme označovat $K^*\psi$:

$$K^*\psi = \int_a^b \overline{K(s, x)} \, \psi(s) \, ds.$$

Výraz $K\varphi$ budeme nazývat *Fredholmovým operátorem* a výraz $K^*\psi$ operátorem *konjugovaným* s $K\varphi$. Je zřejmé, že $K\varphi$ je operátor konjugovaný s $K^*\psi$. Konjugované operátory jsou spolu vázány velmi důležitým vztahem

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi). \tag{6}$$

Skutečně

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \{\overline{\psi(x)} \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s\}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(s)\, \{\int_a^b K(x, s)\, \overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}x\}\, \mathrm{d}s$$

čili, když nahradíme x za s a naopak,

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \{\int_a^b K(s, x)\, \overline{\psi(s)}\, \mathrm{d}s\}\, \mathrm{d}x.$$

Avšak

$$\int_a^b K(s, x)\, \overline{\psi(s)}\, \mathrm{d}s = \overline{\int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, \mathrm{d}s} = \overline{K^*\psi},$$

a tedy

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\, \overline{K^*\psi}\, \mathrm{d}x = (\varphi, K^*\psi).$$

Jestliže $K\varphi$ a $L\varphi$ jsou dva operátory tvaru

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s, \quad L\varphi = \int_a^b L(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s,$$

pak, jak je lehce vidět, $K(L\varphi)$ je operátor téhož tvaru, totiž

$$K(L\varphi) = \int_a^b M(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s,$$

kde

$$M(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, L(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Budeme psát $KL\varphi$ místo $K(L\varphi)$. Poznamenejme, že obecně $KL\varphi \neq LK\varphi$. Dále budeme značit $K^2\varphi = KK\varphi$, $K^3 = KK^2\varphi$ atd. Zřejmě

$$K^n\varphi = \int_a^b K_n(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s,$$

kde $K_n(x, s)$ je n-té iterované jádro příslušející jádru $K(x, s)$.

Není obtížné nahlédnout, že

$$(KL)^*\, \varphi = L^*K^*\varphi.$$

Skutečně podle vzorce (6)

$$(KL\psi, \varphi) = (\psi, (KL)^*\, \varphi).$$

Na druhé straně, podle téhož vzorce (6),

$$(KL\psi, \varphi) = (L\psi, K^*\varphi) = (\psi, L^*K^*\varphi).$$

Porovnáním obou výsledků dostaneme

$$(\psi, (KL)^* \varphi - L^*K^*\varphi) = 0.$$

Funkce $\omega(x) = (KL)^* \varphi - L^*K^*\varphi$, která je orthogonální k libovolné funkci ψ, je orthogonální speciálně k sobě samé. Tudíž

$$0 = (\omega, \omega) = \int_a^b |\omega^2(x)|\, dx,$$

odkud $\omega(x) \equiv 0$, a tedy $(KL)^* \varphi = L^*K^*\varphi$. Z dokázané rovnice mezi jiným plyne, že $(K^n)^* = (K^*)^n$, t. j. jádro konjugované s n-tým iterovaným je n-tým iterovaným jádrem pro konjugované.

Pomocí pojmu orthogonality můžeme formulovat čtvrtou Fredholmovu větu.

Věta 4. *Nechť λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Aby nehomogenní rovnice*

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{7}$$

měla řešení, je nutné a stačí, aby její pravá strana $f(x)$ byla orthogonální ke všem charakteristickým funkcím konjugované homogenní rovnice

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds = 0.$$

Uveďme nyní bez důkazu některé věty z theorie lineárních algebraických rovnic. Podrobný výklad těchto otázek čtenář najde na př. v knize V. I. Smirnova, Kurs vyšší matematiky, sv. III.

Každou soustavu n komplexních čísel, napsaných v určitém pořádku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, budeme nazývat *vektor* a budeme ji označovat písmenem se šipkou nahoře. Definujme pro vektory sčítání, násobení číslem a skalární součin vzorci

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda\vec{x} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \\ (\vec{x}, \vec{y}) &= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}. \end{aligned}$$

Jestliže $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, pravíme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou orthogonální.

Vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ nazýváme nulovým a značíme obvyklým symbolem 0. Vektory $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ nazýváme lineárně nezávislé, jestliže rovnost

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \vec{x}^{(j)} = 0$$

je splněna pouze tehdy, když všechna čísla c_j jsou rovna nule. V opačném případě se vektory nazývají lineárně závislé.

Soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

je možno uvažovat jako jedinou rovnici pro neznámý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, je-li dán vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Soustava

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{kj} y_k = g_j, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

se nazývá konjugovanou k soustavě (8). Determinanty dvou konjugovaných soustav mají hodnoty komplexně sdružené.

Platí následující věty:

a) Jestliže determinant soustavy je různý od nuly, potom jak soustava daná, tak i soustava k ní konjugovaná jsou řešitelné, a to jednoznačně pro libovolné pravé strany soustavy. Speciálně homogenní soustava má pouze nulové řešení.

b) Jestliže determinant soustavy je roven nule, má homogenní soustava řešení různá od nulového.[1] Počet lineárně nezávislých řešení dvou homogenních konjugovaných soustav je tentýž; leží mezi jednotkou a n. Jestliže $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(r)}$ jsou různá lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy, potom její obecné řešení je

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}^{(j)},$$

kde c_j jsou libovolné konstanty.

---

[1] Taková řešení soustavy budeme nazývat *netriviální* na rozdíl od triviálního — nulového.

c) Jestliže determinant soustavy (8) je roven nule, je tato řešitelná, když a jen když je vektor $\vec{b}$ orthogonální ke všem řešením homogenní konjugované soustavy. Obecné řešení soustavy (8) má tvar

$$\vec{x} = \vec{x}^{(0)} + \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}^{(j)},$$

kde c_j a $\vec{x}^{(j)}$ mají tentýž význam jako ve větě b) a $\vec{x}^{(0)}$ je libovolné partikulární řešení soustavy (8).

Přistupme k důkazu Fredholmových vět. Jak bylo dokázáno v § 5, Fredholmova rovnice obecného tvaru vede na rovnici s ní ekvivalentní, avšak s degenerovaným jádrem, která opět vede na lineární algebraickou soustavu. Nechť λ leží v kruhu $|\lambda| \leqq R$. Jestliže ve shodě s § 5 provedeme rozložení jádra tak, aby bylo $B' < 1 : (R + 1)$, budou koeficienty a pravé strany ve výše uvedené soustavě holomorfními funkcemi λ v témže kruhu $|\lambda| \leqq R$. Dále determinant soustavy není roven identicky nule, neboť nabývá hodnoty jedna pro $\lambda = 0$. Potom však determinant, protože je holomorfní funkcí λ vkruhu $|\lambda| \leqq R$, může mít v tomto kruhu pouze konečný počet nulových bodů. V důsledku věty a) budou všechny zbývající hodnoty λ v uvedeném kruhu regulární. Tím je prvá věta Fredholmova dokázána.

Poznámka 1. Z prvé Fredholmovy věty plyne důsledek, který je s ní ekvivalentní:

Množina charakteristických čísel Fredholmovy integrální rovnice je buď konečná, nebo spočetná; v posledním případě rostou charakteristická čísla do nekonečna spolu se svým indexem.

Poznámka 2. Jestliže je jádro degenerované, je shora uvedený determinant polynom v λ. Odtud plyne, že degenerované jádro má konečný počet charakteristických čísel.

Druhá věta Fredholmova plyne přímo z věty b). Skutečně, nechť $\lambda = \lambda_0$ je charakteristické číslo. Potom determinant soustavy (5), § 4 je roven nule a příslušná homogenní soustava má určitý počet r, $1 \leqq r \leqq n$, lineárně nezávislých řešení $\vec{c}^{(j)} = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \ldots, c_n^{(j)})$. Podle vzorce (4), § 4 přísluší každému z nich řešení homogenní integrální rovnice

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(j)} a_i(x).$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá: skutečně, nechť $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \varphi_j(x) = 0$. Dosadíme-li sem hodnoty $\varphi_j(x)$ a užijeme-li lineární nezávislosti funkcí $a_i(x)$, najdeme, že

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j c_i^{(j)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

čili, což je totéž,

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \vec{c}^{(j)} = 0.$$

Poněvadž vektory $\vec{c}^{(j)}$ jsou lineárně nezávislé, je $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, a tedy $\varphi_j(x)$ jsou také lineárně nezávislé. Jiných řešení homogenní Fredholmova rovnice zřejmě nemá.

Číslo r se nazývá *hodnost* charakteristického čísla.

Třetí Fredholmova věta plyne jednoduše z věty b) v tom případě, když jádro rovnice je degenerované. Stačí si jen všimnout, že se konjugované integrální rovnice v tomto případě převádějí podle § 4 na konjugované lineární soustavy, které v důsledku věty b) mají stejný počet lineárně nezávislých řešení.

Tuto úvahu nelze provést přímo pro Fredholmovy rovnice s libovolným jádrem, protože, převedeme-li podle § 5 dvě konjugované rovnice na rovnice s degenerovanými jádry, přesvědčíme se, že tyto poslední konjugované nejsou. Abychom se vyhnuli této překážce, budeme postupovat takto: Na rovnici (4) užijeme postupu z § 5 a ten nás přivede k ekvivalentní rovnici

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K''(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0. \tag{10}$$

Rovnici (5) konjugovanou se (4) napíšeme ve tvaru

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K'(s, x)}\, \psi(s)\, ds = \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{P(s, x)}\, \psi(s)\, ds \tag{11}$$

a položíme

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K'(s, x)}\, \psi(s)\, ds = \omega(x). \tag{12}$$

Uvažujíce (12) jako integrální rovnici s neznámou $\psi(x)$, rozřešíme ji methodou postupných aproximací. Potom dostaneme

$$\psi(x) = \omega(x) + \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{\Gamma'(s, x; \lambda_0)}\, \omega(s)\, ds. \tag{13}$$

Dosadíme výrazy (12) a (13) do rovnice (11). Tím dostaneme pro $\omega(x)$ integrální rovnici s degenerovaným jádrem

$$\omega(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K''(s, x)}\, \omega(s)\, \overline{d}s = 0, \tag{14}$$

konjugovanou s (10). Podle shora dokázaného má právě tolik řešení jako rovnice (10) nebo, což je totéž, jako rovnice (4). Rovnice (12) a (13) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi řešeními rovnic (5) a (14), při čemž lineárně nezávislým řešením odpovídají lineárně nezávislá. Odtud plyne, že rovnice (5) a (14) a tedy i konjugované homogenní rovnice (4) a (5) mají stejný počet lineárně nezávislých řešení.

Přejděme ke čtvrté větě Fredholmově. Jednoduše se dokáže, že podmínka věty je nutná. Nechť λ_0 je charakteristická hodnota a $\psi(x)$ je libovolné řešení rovnice (5). Předpokládejme, že nehomogenní rovnice

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

má řešení. Utvořme skalární součin funkcí $f(x)$ a $\psi(x)$:

$$(f, \psi) = (\varphi - \lambda_0 K\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \lambda_0(K\varphi, \psi),$$

což je podle vzorce (6) možno napsat ve tvaru

$$(f, \psi) = (\varphi, \psi) - \lambda_0(\varphi, K^*\psi).$$

Oba skalární součiny napravo sloučíme v jeden; číselný koeficient připojíme ke druhému činiteli ve skalárním součinu, při čemž je nutno λ_0 nahradit $\overline{\lambda_0}$. Nyní

$$(f, \psi) = (\varphi, \psi - \overline{\lambda_0} K^*\psi).$$

Ve skalárním součinu napravo je druhý činitel roven nule v důsledku rovnice (5). Avšak potom $(f, \psi) = 0$.

To, že podmínka čtvrté věty je postačující, dokážeme nejprve pro degenerované rovnice. Rovnici (5) můžeme podle § 4 převést na lineární soustavu

$$\gamma_j - \overline{\lambda_0} \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{kj} \gamma_k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

kde

$$\gamma_j = \int_a^b \overline{a_j(s)}\, \psi(s)\, ds.$$

Přitom, jak je zřejmé,

$$\psi(x) = \overline{\lambda_0} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \overline{b_k(x)}.$$

Nechť hodnost charakteristického čísla λ_0 je rovna r. Soustava (15) má právě r lineární nezávislé řešení:

$$\vec{\gamma}^{(j)} = (\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \ldots, \gamma_n^{(j)}),\ j = 1, 2, \ldots, r,$$

kterým přísluší řešení rovnice (5)

$$\psi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(j)} \overline{b_k(x)}.$$

Podle věty c) soustava (5), § 4 a s ní i daná integrální rovnice je řešitelná, když

$$(\vec{f}, \vec{\gamma}^{(j)}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, r, \tag{16}$$

kde

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Dále, podle definice f_k,

$$(\vec{f}, \vec{\gamma}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \overline{\gamma_k^{(j)}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma_k^{(j)}} \int_a^b f(x)\, b_k(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \overline{\psi_j(x)}\, \mathrm{d}x = (f, \psi_j)$$

a podmínky (16) řešitelnosti integrální rovnice se převádějí na podmínky čtvrté Fredholmovy věty.

V obecném případě převedeme danou rovnici na rovnici s ní ekvivalentní (6), § 5, k jejíž řešitelnosti podle již dokázaného stačí, aby

$$(F, \omega) = 0, \tag{17}$$

kde $\omega(x)$ je libovolné řešení homogenní rovnice (14), konjugované s (6), § 5. Avšak $F(x) = f(x) + \lambda_0 \Gamma' f$, kde jsme označili

$$\Gamma' f = \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda_0)\, f(s)\, \mathrm{d}s,$$

a odtud

$$(F, \omega) = (f + \lambda_0 \Gamma' f, \omega) = (f, \omega) + \lambda_0 (\Gamma' f, \omega).$$

Avšak podle vzorce (6) $(\Gamma' f, \omega) = (f, \Gamma'^* \omega)$, kde

$$\Gamma'^* \omega = \int_a^b \overline{\Gamma'(s, x; \lambda_0)}\, \omega(s)\, \mathrm{d}s.$$

Uvažujeme-li stejně jako v důkazu třetí Fredholmovy věty, najdeme, že

$$(F, \omega) = (f, \omega + \overline{\lambda_0}\Gamma'^*\omega),$$

neboli podle vzorce (13)

$$(F, \omega) = (f, \psi),$$

kde ψ je řešení homogenní rovnice (5), konjugované s rovnicí danou; podmínka (17), která stačí pro řešitelnost dané rovnice, přejde v podmínku

$$(f, \psi) = 0,$$

což je podmínka čtvrté Fredholmovy věty.

Jestliže λ_0 je charakteristické číslo a rovnice

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{18}$$

je řešitelná, pak má nekonečně mnoho řešení. Nechť $\varphi_0(x)$ je řešení rovnice (18). Položme $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Phi(x)$. Dosadíme-li toto do (18), nalezneme, že $\Phi(x)$ vyhovuje homogenní rovnici

$$\Phi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \Phi(s)\, ds = 0.$$

Podle věty 2 má poslední rovnice netriviální řešení. Nechť $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ jsou lineárně nezávislé charakteristické funkce této rovnice. Potom její obecné řešení bude

$$\Phi(x) = c_1\, \varphi_1(x) + c_2\, \varphi_2(x) + \ldots + c_k\, \varphi_k(x)$$

a obecné řešení rovnice (18) bude

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + c_1\, \varphi_1(x) + c_2\, \varphi_2(x) + \ldots + c_k\, \varphi_k(x). \tag{19}$$

Z Fredholmových vět plyne t. zv. Fredholmova alternativa:

Buď je nehomogenní rovnice řešitelná, ať je její pravá strana jakákoliv, nebo příslušná homogenní rovnice má netriviální řešení.

Právě Fredholmovy alternativy se používá nejčastěji při rozboru integrálních rovnic.

§ 9. Fredholmova resolventa.[1] V § 2 jsme sestrojili analytický výraz pro resolventu, vhodný pouze pro malá λ:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s). \tag{1}$$

Konečným cílem tohoto paragrafu je analytické vyjádření resolventy, platné pro všechny regulární hodnoty parametru. Budeme nyní předpokládat, že jádro vyhovuje mimo nerovnost (1), § 2 ještě nerovnosti

$$\int_a^b |K^2(x, s)| \, \mathrm{d}x < E, \quad E = \text{konst.} \tag{2}$$

Určíme předběžně některé vlastnosti resolventy, vycházejíce z řady (1).

Najdeme odhad pro iterovaná jádra. Podle vzorce (8), § 2

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_{m-1}(x, t) \, K(t, s) \, \mathrm{d}t.$$

Užijeme nerovnosti Buňakovského na poslední integrál:

$$|K_m^2(x, s)| \leqq \int_a^b |K_{m-1}^2(x, t)| \, \mathrm{d}t \int_a^b |K^2(t, s)| \, \mathrm{d}t,$$

odkud podle nerovnosti (11), § 2 a nerovnosti (2) tohoto paragrafu

$$|K_m(x, t)| < \sqrt{C_1 E} B^{m-1}. \tag{3}$$

Z odhadu (3) plyne, že *řada (1) konverguje absolutně a stejnoměrně pro x a s současně v kruhu* $|\lambda| < 1 : B$. V řadě (1) nahradíme iterovaná jádra jejich výrazy ze vzorce (8), § 2. Vyměníme-li pořádek sčítání a integrování, což je dovoleno vzhledem k stejnoměrné konvergenci řady, zjistíme, že resolventa vyhovuje integrální rovnici[2]

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) \, \Gamma(t, s; \lambda) \, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

---

[1] Tento paragraf může být vynechán bez újmy pro pochopení dalšího výkladu.

[2] Kdybychom vyšli ze vzorce (8_1), § 2, přišli bychom touž cestou k rovnici

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(t, s) \, \Gamma(x, t; \lambda) \, \mathrm{d}t.$$

Vyšetřme ještě integrál

$$\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Absolutní konvergence řady (1) dovoluje vynásobit v integrandu obě řady člen za členem a stejnoměrná konvergence této řady dovoluje ji integrovat člen za členem. Tudíž

$$\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(x, s).$$

Položme $m + n = p$ a zaměňme pořádek sčítání; řada na pravé straně nabude takového tvaru:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^{p-2} K_p(x, s) = \sum_{p=2}^{\infty} (p - 1)\, \lambda^{p-2} K_p(x, s) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma(x, s; \lambda).$$

Tak jsme našli, že resolventa vyhovuje integro-diferenciální nelineární rovnici

$$\frac{\partial \Gamma(x, s; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Učiňme nyní tuto poznámku: Pro $x = s$ nemusí být jádro integrovatelné v intervalu $a \leqq x \leqq b$. V takovém případě změníme hodnoty jádra pro $x = s$ libovolným způsobem tak, aby funkce $K(x, x)$ byla třeba spojitou v intervalu $a \leqq x \leqq b$. Můžeme na př. předpokládat, že $K(x, x) \equiv 0$. Taková změna jádra nezmění ani v jednom bodě hodnoty Fredholmova operátoru

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s$$

v třídě funkcí, jež uvažujeme. Nyní můžeme předpokládat, že integrály

$$A_m = \int_a^b K_m(x, x)\, \mathrm{d}x$$

existují pro všechna m. Integrál A_m nazýváme m-tou *stopou* jádra $K(x, s)$. Také se nazývá stopou m-tého iterovaného jádra. Klademe-li v (1) $s = x$ a integrujeme-li, dostaneme v dalším užitečný vzorec

$$\int_a^b \Gamma(x, x; \lambda)\, \mathrm{d}x = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \lambda^{m-1}. \tag{6}$$

Vyšetřme nyní strukturu řešení integrální rovnice pro libovolné regulární λ. Zvolme libovolné kladné číslo R a uvažujme kruh $|\lambda| \leqq R$. Jádro $K(x, s)$ rozložme na součet $K(x, s) = P(x, s) + K'(x, s)$, kde $P(x, s)$ je trigonometrický polynom a

$$\int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2 \, dx \leqq \frac{1}{(R + 1)^2}.$$

Postupujeme-li dál jako v § 5, převedeme danou integrální rovnici na rovnici (6), § 5, jejíž jádro je degenerované. Poslední rovnice se opět převede podle § 4 na lineární algebraickou soustavu. Když tuto řešíme, snadno najdeme, že v kruhu $|\lambda| \leqq R$ je možno napsat řešení dané integrální rovnice ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) f(s) \, ds + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x); \tag{7}$$

c_k jsou řešení výše zmíněné lineární soustavy; ta je totožná se soustavou (5), § 4, v níž je pouze třeba položit

$$f_k = \int_a^b F(s) b_k(s) \, ds = \int_a^b [f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(s, t; \lambda) f(t) \, dt] b_k(s) \, ds =$$
$$= \int_a^b f(s) \tilde{b}_k(s) \, ds,$$

kde jsme pro stručnost položili

$$\tilde{b}_k(s) = b_k + \lambda \int_a^b \Gamma'(t, s; \lambda) b_k(t) \, dt.$$

Poněvadž hodnota λ je regulární, determinant soustavy (5), § 4, jejž označíme $D_R(\lambda)$, je různý od nuly a c_k jsou určeny podle Cramerova vzorce. Determinanty, jež stojí v čitatelích uvedeného vzorce, rozložíme podle prvků f_m, což vede na vzorce:

$$c_k = \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{m=1}^{n} \Delta_{mk}(\lambda) f_m;$$

Δ_{mk} značí algebraický doplněk prvku, jenž stojí v m-té řádce a k-tém sloupci. Dosadíme-li hodnoty c_k a f_m do (7), dostaneme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \, ds, \tag{8}$$

kde jsme položili

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \Gamma'(x, s; \lambda) + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k,m=1}^{n} \Delta_{m,k}(\lambda)\, a_k(x)\, \tilde{b}_m(s). \tag{9}$$

Vzpomeneme-li si na definici resolventy danou v § 2, můžeme vyvodit: *Fredholmova rovnice má resolventu pro každé regulární λ. V kruhu $|\lambda| \leqq R$ je resolventa definována vzorcem* (9).

Uveďme jednoduché vlastnosti resolventy:

1. *Resolventa je meromorfní v celé rovině λ.* To přímo plyne z toho, že resolventa může mít v kruhu s libovolným poloměrem R jen konečný počet pólů. Těmito póly mohou být jen charakteristická čísla — nulové body determinantu $D_R(\lambda)$, jež v absolutní hodnotě nepřevyšují R.

2. *Pro malá λ je resolventa definována řadou* (1). To plyne z jednoznačnosti resolventy, dokázané v § 2.

3. Z principu analytického pokračování plyne, že *v celé rovině λ vyhovuje resolventa rovnicím* (4) *a* (5).

4. *Každé charakteristické číslo je pól resolventy.*

Předpokládejme opak. Nechť pro charakteristické číslo λ_0 je resolventa holomorfní. Nechť $\psi_0(x)$ je charakteristická funkce konjugované rovnice

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, \mathrm{d}s = 0.$$

V důsledku čtvrté Fredholmovy věty rovnice

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = \psi_0(x) \tag{10}$$

nemá řešení. Nechť nyní λ je regulární bod, blízký k λ_0. Rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s) = \psi_0(x) \tag{11}$$

má řešení dané vzorcem (8), v kterém je třeba nahradit $f(x)$ funkcí $\psi_0(x)$. Dosadíme-li toto řešení do (11), dostaneme identitu

$$\psi_0(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\, \psi_0(s)\, \mathrm{d}s - \lambda \int_a^b K(x, s) \Big\{ \psi_0(s) +$$
$$+ \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda)\, \psi_0(t)\, \mathrm{d}t \Big\}\, \mathrm{d}s = \psi_0(x).$$

Poněvadž resolventa je holomorfní pro $\lambda = \lambda_0$, je možno v poslední rovnici provést limitní přechod pro $\lambda \to \lambda_0$ za integračním znamením. Když jej provedeme, dostaneme novou rovnici

$$\psi_0(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0)\, \psi_0(s)\, ds - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \Big\{ \psi_0(s) + \\ + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda_0)\, \psi_0(t)\, dt \Big\}\, ds = \psi_0(x),$$

která ukazuje, že rovnice (10) má řešení, rovné

$$\psi_0(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0)\, \psi_0(s)\, ds.$$

Tím dostáváme spor, jenž dokazuje naše tvrzení.

Protože je resolventa meromorfní funkcí λ, může být vyjádřena jako podíl dvou celistvých funkcí. Sestrojme je.

Položme v (9) $x = s$ a zintegrujme nalezenou rovnici:

$$\int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, ds = \int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\, ds + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk}(\lambda) \int_a^b a_k(s)\, \tilde{b}_m(s)\, ds. \quad (12)$$

Dokážeme, že součet na pravé straně poslední rovnice je roven $- D'_R(\lambda)$. Derivujeme-li $D_R(\lambda)$ (vzorec (6), § 4), máme

$$D'_R(\lambda) = - \sum_{k, m=1}^{n} a_{mk} \Delta_{mk} - \lambda \sum_{k, m=1}^{n} \frac{da_{mk}}{d\lambda} \Delta_{mk}.$$

Dále podle definice $\tilde{b}_i(s)$ máme

$$\sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b \tilde{b}(s)\, a_k(s)\, ds = \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b b_m(s)\, a_k(s)\, ds + \\ + \lambda \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds = \\ = \sum_{k, m=1}^{n} a_{mk} \Delta_{mk} + \lambda \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds$$

a stačí dokázat, že

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt = \frac{da_{mk}}{d\lambda}. \quad (13)$$

Připomeňme (viz § 5), že b_m nezávisí na λ a

$$a_k(x) = \alpha_k(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, \tau; \lambda)\, \alpha_k(\tau)\, d\tau; \; \alpha_k(\tau) = \cos \frac{k\pi\tau}{b - a}.$$

Odtud

$$a_{mk} = \int_a^b b_m(s)\, \alpha_k(s)\, ds + \lambda \int_a^b \int_a^b b_m(s)\, \alpha_k(t)\, \Gamma'(s, t; \lambda)\, dt\, ds; \tag{14}$$

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, ds\, dt = \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds +$$
$$+ \lambda \int_a^b \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(\tau)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, \Gamma'(s, \tau; \lambda)\, ds\, dt\, d\tau. \tag{15}$$

Trojný integrál napišme ve tvaru

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(\tau)\, dt\, d\tau \int_a^b \Gamma'(t, s; \lambda)\, \Gamma'(s, \tau; \lambda)\, ds.$$

V důsledku integrodiferenciální rovnice (5) pro resolventu je vnitřní integrál roven $\frac{\partial}{\partial\lambda} \Gamma'(t, \tau; \lambda)$ a rovnice (15) přejde v rovnici následující:

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds = \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds +$$
$$+ \lambda \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(\tau)\, \frac{\partial \Gamma(t, \tau; \lambda)}{\partial\lambda}\, dt\, d\tau. \tag{16}$$

Porovnáme-li to s (14), přesvědčíme se o správnosti (13).

Máme nyní

$$\int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, ds = \int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\, ds - \frac{D'_R(\lambda)}{D_R(\lambda)}. \tag{17}$$

Prvý člen napravo v (17) je holomorfní v kruhu $|\lambda| \leqq R$. Nechť λ' je m'-násobný kořen determinantu $D_R(\lambda)$, ležící v témže kruhu. Vzorec (17) ukazuje, že λ' je jednoduchý pól funkce

$$\delta(\lambda) = \int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, ds$$

s residuem rovným $-m'$. Odtud plyne, že násobnost zůstane nezměněna při změně R, i když se determinant $D_R(\lambda)$ při tom mění. Dále, jak je patrno ze (17), má meromorfní funkce $\delta(\lambda)$ pouze jednoduché póly, identické s charakteristickými čísly jádra $K(x, s)$ a s residui, jež se rovnají celým záporným číslům. Odtud plyne, že funkce

$$D(\lambda) = e^{-\int_0^\lambda \delta(\lambda)\, d\lambda} \tag{18}$$

je celistvá funkce, jejíž nulové body v kruhu $|\lambda| \leqq R$ (kde R je libovolné kladné číslo) se shodují s nulovými body $D_R(\lambda)$ a mají touž násobnost. Avšak potom, jak je patrno z (9), součin

$$D(x, s; \lambda) = D(\lambda)\, \Gamma(x, s; \lambda) \tag{19}$$

je holomorfní v kruhu $|\lambda| \leqq R$; protože R je libovolné, je $D(x, s; \lambda)$ celistvá funkce λ. Tím jsme dostali vyjádření resolventy ve tvaru podílu dvou celistvých funkcí:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{20}$$

při čemž póly resolventy jsou totožny s nulovými body jmenovatele.

Jestliže $|\lambda| < 1 : B$, pak

$$\delta(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1},$$

kde A_n jsou výše definované stopy jádra $K(x, s)$. Odtud

$$D(\lambda) = e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \lambda^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \lambda^n \right)^k. \tag{21}$$

Srovnáme-li poslední řadu podle mocnin λ, dostaneme řadu konvergující v celé rovině. To je zřejmé, neboť funkce $D(\lambda)$ je celistvá.

Věta. *Čitatel a jmenovatel resolventy je dán Fredholmovými řadami, konvergujícími v celé rovině*

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, s)\, \lambda^n, \tag{22}$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n, \tag{23}$$

kde

$$B_0(x, s) = K(x, s),$$

$$B_n(x, s) = \int_a^b \dots \int_a^b \Delta_n(x, s)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

a

$$\Delta_n(x, s) = \begin{vmatrix} K(x, s), & K(x, t_1), & K(x, t_2), & \dots, & K(x, t_n) \\ K(t_1, s), & K(t_1, t_1), & K(t_1, t_2), & \dots, & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, s), & K(t_2, t_1), & K(t_2, t_2), & \dots, & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, s), & K(t_n, t_1), & K(t_n, t_2), & \dots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix}, \tag{24}$$

$$c_0 = 1,$$

$$c_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1), & K(t_1, t_2), & \dots, & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1), & K(t_2, t_2), & \dots, & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1), & K(t_n, t_2), & \dots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_n. \tag{25}$$

Dokážeme nejdříve, že $B_n(x, s)$ a c_n splňují vztahy

$$c_{n+1} = \int_a^b B_n(s, s) \, \mathrm{d}s, \tag{26}$$

$$B_n(x, s) = c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t) \, B_{n-1}(t, s) \, \mathrm{d}t. \tag{27}$$

Rovnice (26) je zřejmá. Abychom dokázali rovnici (27), rozviňme determinant (24) podle prvků prvé řádky:

$$B_n(x, s) = K(x, s) \, c_n + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_a^b \dots \int_a^b (-1)^\alpha K(x, t_\alpha) \, \Delta_\alpha(s) \, \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_n,$$

kde

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} K(t_1, s), & K(t_1, t_1), & \dots, & K(t_1, t_{\alpha-1}), & K(t_1, t_{\alpha+1}), & \dots, & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, s), & K(t_2, t_1), & \dots, & K(t_2, t_{\alpha-1}), & K(t_2, t_{\alpha+1}), & \dots, & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, s), & K(t_n, t_1), & \dots, & K(t_n, t_{\alpha-1}), & K(t_n, t_{\alpha+1}), & \dots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

Ve sčítanci s indexem α posuneme α-tou řádku na prvé místo, čímž se determinant vynásobí $(-1)^{\alpha-1}$, a provedeme změnu označení integračních proměnných podle schematu

$$\begin{matrix} t_\alpha, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{\alpha-1}, & t_{\alpha+1}, & \dots, & t_n \\ t, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{\alpha-1}, & t_\alpha, & \dots, & t_{n-1} \end{matrix}$$

tak, že horní symbol nahradíme dolním. Po této záměně budou integrály v součtu stejné a dostaneme (viz (24_1))

$$B_n(x, s) = c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, dt \int_a^b \dots \int_a^b \Delta_{n-1}(t, s)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n =$$
$$= c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, B_{n-1}(t, s)\, dt.$$

Vztahy (26) a (27) nám umožňují najít rekurentní vztah mezi koeficienty c_n. Položme v (27) $x = s$ a zintegrujme v mezích od a do b. Potom dostaneme

$$c_{n+1} = c_n A_1 - n \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, B_{n-1}(t, s)\, ds\, dt.$$

Dosadíme-li do této rovnosti za B_{n-1} podle vzorce (27), lehce jej upravíme na tvar

$$c_{n+1} = c_n A_1 - n c_{n-1} A_2 + n(n-1) \int_a^b \int_a^b K_2(s, t)\, B_{n-2}(t, s)\, ds\, dt.$$

Opakujeme-li tento postup, nalezneme hledanou závislost

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, n!\, A_{n-k+1}}{k!}\, c_k. \tag{28}$$

Nyní už není těžké najít rozvoj $D(\lambda)$ v mocninnou řadu. Nechť

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n \lambda^n; \quad \gamma_n = (-1)^n D^{(n)}(0).$$

Z (18) plyne

$$D'(\lambda) = -\delta(\lambda)\, D(\lambda).$$

Derivujeme-li n-krát tuto relaci podle Leibnitzova vzorce, najdeme:

$$D^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, \delta^{(n-k)}(0)\, D^{(k)}(0)$$

neboli

$$\gamma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, n!\, A_{n-k+1}}{k!}\, \gamma_k.$$

Veličiny γ_{n+1} a c_{n+1} vyhovují jednomu a témuž rekurentnímu vztahu. Dále $\gamma_0 = c_0 = 1$. Odtud plyne, že $\gamma_n = c_n$ pro libovolné n. Celistvá funkce $D(\lambda)$ je tudíž dána řadou (23), která proto konverguje pro všechna konečná λ.

Obraťme se k funkci $D(x, s; \lambda)$. Dosadíme-li

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}$$

do integrální rovnice pro resolventu, nalezneme, že $D(x, s; \lambda)$ vyhovuje rovnici

$$D(x, s; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, D(t, s; \lambda)\, dt = K(x, s)\, D(\lambda). \tag{29}$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru nekonečné mocninné řady pro proměnnou λ:

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{n=}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n(x, s)}{n!} \lambda^n.$$

Dosadíme-li tuto řadu do (29) a porovnáme-li koeficienty u stejných mocnin λ, dostaneme rekurentní vztah pro $\beta_n(x, s)$:

$$\beta_0(x, s) = K(x, s),$$

$$\beta_n(x, s) = c_n\, K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, \beta_{n-1}(t, s)\, dt.$$

Porovnáme-li to s (27), přesvědčíme se o tom, že $\beta_n(x, s) = B_n(x, s)$, čímž je dokázán vzorec (22). Řada (22) konverguje v celé rovině — to plyne přímo z toho, že $D(x, s; \lambda)$ je celistvá funkce.

Poznámka. Koeficienty $B_n(x, s)$ i c_n je možno určit z rekurentních vzorců (26) a (27), čímž obejdeme výpočet a integrování determinantů z (24) a (25).

Řady (22) a (23) po prvé nalezl Fredholm, jenž také dokázal jejich konvergenci pro všechna konečná λ za předpokladu, že jádro je omezené. Fredholmův důkaz spočívá na pozoruhodné Hadamardově větě pro odhad hodnoty determinantů.[1] Carleman [15a] dokázal, že řady (22) a (23) jsou celistvými funkcemi λ za toho jediného předpokladu, že integrál

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds$$

je konečný. Jiný důkaz Carlemanovy věty je uveden v našem článku [27n]. Úvah tohoto článku jsme vhodně užili i v této knize pro případ méně obecný, kdy jádro vyhovuje nerovnostem (1) a (1_1), § 2. Konečně I. A. Ickovič [41] ve svém článku dokázal konvergence řad (22) a (23)

[1] Hadamardova věta a Fredholmův důkaz se zpravidla uvádějí v učebnicích integrálních rovnic. Viz na př. [2], [5] a [7].

pro všechna konečná λ za ještě obecnějších podmínek než Carleman.

Funkce $D(\lambda)$ se obyčejně nazývá Fredholmovým determinantem a $D(x, s; \lambda)$ prvým Fredholmovým minorem. Fredholm zavedl pojem minorů libovolného řádu. Jsou to řady svou strukturou obdobné řadám (22) a (23). My je však nepotřebujeme, a proto je v této knize nebudeme zavádět.

Příklad. Najděme resolventu jádra

$$K(x, s) = x + s.$$

Máme $c_0 = 1$, $B_0(x, s) = x + s$. Dále

$$c_1 = \int_0^1 2s \, ds = 1,$$

$$B_1(x, s) = x + s - \int_0^1 (x + t)(t + s) \, dt = \tfrac{1}{2}(x + s) - xs - \tfrac{1}{3},$$

$$c_2 = \int_0^1 (s - s^2 - \tfrac{1}{3}) \, ds = -\tfrac{1}{6},$$

$$B_2(x, s) = -\tfrac{1}{6}(x + s) - 2\int_0^1 (x + t)[\tfrac{1}{2}(t + s) - ts - \tfrac{1}{3}] \, dt = 0.$$

Když $B_2(x, s) \equiv 0$, pak, jak je vidět ze vzorců (26) a (27), všechny koeficienty $c_3, c_4, \ldots; B_3, B_4, \ldots$ se rovnají nule a dostaneme

$$D(x, s; \lambda) = x + s - [\tfrac{1}{2}(x + s) - xs - \tfrac{1}{3}]\,\lambda,$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda - \tfrac{1}{12}\lambda^2,$$

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{x + s - [\frac{1}{2}(x + s) - xs - \frac{1}{3}]\,\lambda}{1 - \lambda - \frac{1}{12}\lambda^2}.$$

Poznámka ke konvergenci postupných aproximací. Methoda postupných aproximací dává řešení ve tvaru mocninné řady pro proměnnou λ. Tato řada zřejmě konverguje uvnitř nějakého kruhu $|\lambda| \leqq R$, jestliže v tomto kruhu konverguje mocninná řada, kterou je dána resolventa. Avšak z obecných vět theorie funkcí komplexní proměnné je známo, že tato řada konverguje uvnitř kruhu $|\lambda| < |\lambda_1|$, kde λ_1 je charakteristické číslo s nejmenší absolutní hodnotou. Odtud plyne, že postupné aproximace konvergují v témže kruhu. Z toho vyplývá:

Jestliže v nějakém kruhu $|\lambda| \leqq R$ *neleží žádné charakteristické číslo, postupné aproximace v tomto kruhu konvergují.*

§ 10. Rovnice se slabou singularitou. Připomeňme, že rovnicemi se slabou singularitou nazýváme rovnice, jejichž jádro má tvar

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^{\alpha}},$$

kde $0 < \alpha < 1$ a $H(x, s)$ je omezená funkce, nebo jestliže integračním oborem je omezená oblast Ω n-dimensionálního prostoru, pak

$$K(M, M_1) = \frac{H(M, M_1)}{r^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n, \tag{1}$$

kde M a M_1 jsou body oblasti Ω a r je vzdálenost těchto bodů. Theorie rovnic se slabou singularitou je téměř shodná s theorií Fredholmových rovnic. Zvláště, jak ukážeme, zůstávají v platnosti Fredholmovy věty a s nimi i Fredholmova alternativa. Budeme zde uvažovat obecný případ n-dimensionální oblasti Ω, neboť právě tento případ je nejdůležitější pro aplikace, a dimense prostoru hraje jistou úlohu při formulaci a důkazu hlavní věty theorie rovnic se slabou singularitou. Tato věta zní takto:

Věta 1. *Nechť*

$$|K(M, M_1)| < \frac{A_1}{r^{\alpha}}; \quad |L(M, M_1)| < \frac{A_2}{r^{\beta}},$$

kde A_1 a A_2 jsou konstanty a $0 \leqq \alpha < n$; $0 \leqq \beta < n$. Potom pro jádro

$$N(M, M_1) = \int_{\Omega} K(M, M_2)\, L(M_2, M_1)\, \mathrm{d}M_2$$

platí odhad

$$|N(M, M_1)| < \begin{cases} C, \alpha + \beta < n, \\ C|\lg r|, \quad \alpha + \beta = n, \\ \dfrac{C}{r^{\alpha+\beta-n}}, \quad \alpha + \beta > n, \end{cases} \tag{2}$$

kde C je nějaká konstanta.

Označme r_0 vzdálenost MM_2, r_1 vzdálenost M_1M_2 a h veličinu, jež není menší než průměr oblasti Ω. Máme

$$|N(M, M_1)| \leqq A_1 A_2 \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}M_2}{r_0^{\alpha} r_1^{\beta}} < A_1 A_2 \int_{r_0 \leqq h} \frac{\mathrm{d}M_2}{r_0^{\alpha} r_1^{\beta}}. \tag{3}$$

Jestliže $\alpha + \beta < n$, integrál v (3) stejnoměrně konverguje a je proto omezený; odhad (2) je v tom případě dokázán. Nechť nyní $\alpha + \beta \geqq n$. Položme počátek souřadnic do M a veďme osu x_1 bodem M_1 tak, aby směr od M k M_1 byl kladný. Souřadnice bodů M a M_1 budou $(0, 0, \ldots, 0)$ a $(r, 0, \ldots, 0)$. Souřadnice bodu M_2 označíme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Potom

$$r_0^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad r_1^2 = (x_1 - r)^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2.$$

V integrálu (3) provedeme substituci $x_k = r\xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Odhad (3) přejde v

$$|N(M, M_1)| < \frac{A_1 A_2}{r^{\alpha+\beta-n}} \int\limits_{\varrho \leqq \frac{h}{r}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\varrho^\alpha [(\xi_1 - 1)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \xi_k^2]^{\frac{\beta}{2}}}. \tag{4}$$

Zde jsme označili $\varrho = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2}$. Odhadněme integrál v (4). Máme

$$d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n = \varrho^{n-1}\, d\varrho\, dS,$$

kde dS je plošný element nadkoule jednotkového poloměru v prostoru se souřadnicemi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Dále

$$(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{k=2}^{n} \xi_k^2 = \varrho^2 - 2\xi_1 + 1 \geqq (\varrho - 1)^2.$$

Není obtížné nahlédnout, že pro $\varrho > 2$, $(\varrho - 1)^2 > \frac{1}{4}\varrho^2$, a tudíž

$$(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{k=2}^{n} \xi_k^2 > \tfrac{1}{4}\varrho^2.$$

Nyní

$$|N(M, M_1)| < \frac{A_1 A_2}{r^{\alpha+\beta-n}} \left\{ \int\limits_{\varrho \leqq 2} \frac{\varrho^{n-1-\alpha}\, d\varrho\, dS}{[(\xi_1 - 1)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \xi_k^2]^{\frac{\beta}{2}}} + 2^\beta \int\limits_{2 < \varrho \leqq \frac{h}{r}} \varrho^{n-1-\alpha-\beta}\, d\varrho\, dS \right\}. \tag{5}$$

Prvý integrál v závorce je konstanta a je pro $\alpha + \beta > n$ menší než

$$2^\beta S \int\limits_2^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^{\alpha+\beta+1-n}} = \frac{2^{n-\alpha} S}{\alpha + \beta - n},$$

kde S je plošný obsah nadkoule jednotkového poloměru. Výraz v závorce (5) je tedy menší než nějaká konstanta a odhad (2) je proveden pro $\alpha + \beta > n$. Konečně jestliže $\alpha + \beta = n$, druhý integrál (5) se rovná

$$2^\beta S \int_2^{\frac{h}{r}} \frac{d\varrho}{\varrho} = 2^\beta S \lg \frac{h}{2r};$$

odtud plyne odhad (2) i pro tento případ.[1]

Důsledek. *Jestliže jádro má slabou singularitu, všechna jeho iterovaná jádra, od některého počínaje, jsou omezená.*

Jestliže jádro vyhovuje nerovnosti (1), pak pro jeho n-té iterované jádro, jak vyplývá z věty (1), platí odhad

$$|K_m(M, M_1)| < \begin{cases} \dfrac{C_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}}, & m\alpha - (m-1)\,n > 0, \\ C_m, & m\alpha - (m-1)\,n \leq 0, \end{cases}$$

kde C_m je nějaká konstanta. Tudíž $K_m(M, M_1)$ je omezená, jestliže

$$m > \frac{n}{n - \alpha}. \tag{6}$$

V dalším budeme m považovat za číslo, jež splňuje nerovnost (6), takže jádro $K_m(M, M_1)$ je omezené.

Zaveďme následující označení. Libovolnou funkci $\varphi(M)$ budeme také označovat $E\varphi$, takže

$$E\varphi = \varphi(M).$$

V souhlase s tím budeme na př. psát:

$$\varphi(M) - \lambda \int_\Omega K(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, dM_1 = (E - \lambda K)\, \varphi.$$

Polynomy s mocninami operátoru K lze násobit jako obyčejné polynomy, jestliže přitom uvažujeme E jako jednotku; tak na př.

$$(E - \lambda K)(E + \lambda K)\, \varphi = (E - \lambda^2 K^2)\, \varphi = \varphi(M) - \\ - \lambda^2 \int_\Omega K_2(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, dM_1.$$

---

[1] Srovnej s S. L. Sobolev, Uravněnija metematičeskoj fiziki, Gostěchizdat, 1947, str. 233—237.

Uvažujme nyní rovnici

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = f(M), \tag{7}$$

kde $K(M, M_1)$ má tvar (1). Nechť m je libovolné číslo, vyhovující nerovnosti (6). Rovnici (7) napišme ve tvaru

$$(E - \lambda K)\, \varphi = f(M)$$

a aplikujme na obě strany operátor

$$(E - \varepsilon\lambda K)(E - \varepsilon^2\lambda K) \dots (E - \varepsilon^{m-1}\lambda K) = E + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \\ + \dots + \lambda^{m-1} K^{m-1},$$

kde $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Potom dostaneme rovnici Fredholmova typu s omezeným jádrem

$$(E - \lambda^m K^m)\, \varphi = (E + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots + \lambda^{m-1} K^{m-1})\, f$$

nebo podrobněji

$$\varphi(M) - \lambda^m \int_{\Omega} K_m(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = f(M) + \\ + \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1)\, f(M_1)\, \mathrm{d}M_1 + \lambda^2 \int_{\Omega} K_2(M, M_1)\, f(M_1)\, \mathrm{d}M_1 + \\ + \dots + \lambda^{m-1} \int_{\Omega} K_{m-1}(M, M_1)\, f(M_1)\, \mathrm{d}M_1. \tag{8}$$

Je zřejmé, že každé řešení rovnice (7) vyhovuje také rovnici (8). Tato okolnost hraje důležitou úlohu ve všem dalším. Opačné tvrzení je obecně nesprávné — rovnice (8) může mít řešení, jež nevyhovuje rovnici (7).

Přistupme k důkazu Fredholmových vět pro rovnici (7).

Pozměníme nyní poněkud definici charakteristického čísla: číslo λ_0 budeme nazývat charakteristickým číslem jádra $K(M, M_1)$, jestliže homogenní rovnice

$$(E - \lambda_0 K)\, \varphi = 0$$

má netriviální řešení. Poznamenejme, že se tato definice hodí i pro Fredholmovy rovnice. To plyne z 2. Fredholmovy věty.

1°. Uvažujme kruh $|\lambda| \leqq R$, kde R je libovolné číslo > 0; nechť λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(M, M_1)$, které leží v tomto kruhu. Označme $\varphi_0(M)$ příslušnou charakteristickou funkci, takže

$$\varphi_0(M) - \lambda_0 \int_{\Omega} K(M, M_1)\, \varphi_0(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = 0. \tag{9}$$

V důsledku shora řečeného vyhovuje $\varphi_0(M)$ také identitě

$$\varphi_0(M) - \lambda_0^m \int_\Omega K_m(M, M_1)\, \varphi_0(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = 0. \tag{10}$$

Odtud je vidět, že λ_0^m je charakteristické číslo jádra $K_m(M, M_1)$. Toto má v kruhu poloměru R pouze konečný počet charakteristických čísel. Potom však i jádro $K(M, M_1)$ jich má v kruhu $|\lambda| \leqq R$ pouze konečný počet. Tím je pro jádro $K(M, M_1)$ dokázána první Fredholmova věta.

2°. Nechť rovnice (9) a (10) mají r resp. r' lineárně nezávislých charakteristických funkcí. Poněvadž každé řešení rovnice (9) vyhovuje také rovnici (10), platí $r \leqq r'$. Avšak číslo r' je konečné. Tedy také r je konečné; druhá věta Fredholmova je tudíž správná i pro jádra se slabou singularitou.

3°. Označme ještě r^* počet lineárně nezávislých řešení rovnice, konjugované s (9)

$$(E - \overline{\lambda}_0 K^*)\, \psi = 0. \tag{11}$$

Zvolme m tak, aby ani jedno z čísel

$$\varepsilon\lambda_0,\ \varepsilon^2\lambda_0,\ \ldots,\ \varepsilon^{m-1}\lambda_0$$

nebylo charakteristické číslo jádra $K(M, M_1)$. Vybrat takové číslo m je vždy možné, neboť v opačném případě by jádro $K(M, M_1)$ mělo nekonečně mnoho charakteristických hodnot na kružnici $|\lambda| = |\lambda_0|$, což odporuje první Fredholmově větě. Při této volbě m jsou rovnice (9) a (10) ekvivalentní. Abychom to dokázali, přepíšeme (10) ve tvaru

$$(E - \varepsilon\lambda_0 K) \prod_{\alpha=2}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_0 = 0.$$

Označme

$$\prod_{\alpha=2}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_0 = \varphi_1(M).$$

Potom

$$(E - \varepsilon\lambda_0 K)\, \varphi_1 = 0,$$

a poněvadž $\varepsilon\lambda_0$ není charakteristické číslo, $\varphi_1(M) = 0$, čili

$$\prod_{\alpha=2}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_0 = 0.$$

Položíme-li nyní $\prod_{\alpha=3}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_1 = \varphi_2(M)$, dokážeme úplně stejně, že

$\varphi_2(M) = 0$. Pokračujeme-li v tomto postupu, najdeme nakonec, že

$$(E - \varepsilon^m \lambda_0 K)\, \varphi_0 = (E - \lambda_0 K)\, \varphi_0 = 0,$$

což je identické s (9).

Jestliže rovnice (9) a (10) jsou ekvivalentní, počet lineárně nezávislých řešení poslední rovnice je r. Stejný počet řešení podle 3. Fredholmovy věty má s ní konjugovaná rovnice

$$(E - \bar{\lambda}_0^m K^{*m})\, \omega = 0. \tag{12}$$

Avšak tato poslední rovnice, kterou lze napsat ve tvaru

$$(E - \bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0 K^*)(E - \bar{\varepsilon}^2\bar{\lambda}_0 K^*) \ldots (E - \bar{\varepsilon}^{m-1}\bar{\lambda}_0 K^*)(E - \bar{\lambda}_0 K^*)\, \omega = 0,$$

má alespoň r^* řešení. Odtud $r^* \leqq r$.

Úplně obdobně dokážeme, že $r^* \geqq r$. Tedy $r^* = r$, a to je 3. Fredholmova věta.

4°. Přejděme ke 4. Fredholmově větě. Nutnost podmínky věty se dokazuje stejně jako v § 8; zde dokážeme, že podmínka je postačující. Zvolme m jako dříve tak, aby čísla $\varepsilon\lambda_0, \varepsilon^2\lambda_0, \ldots, \varepsilon^{m-1}\lambda_0$ nebyla charakteristická čísla jádra $K(M, M_1)$. Potom rovnice (7) a (8) jsou ekvivalentní — to se dokáže stejně jako pro rovnice (9) a (10); je třeba jen položit

$$\varphi_k(M) = \prod_{\alpha=k+1}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)[(E - \lambda_0 K)\, \varphi - f],$$

a vyjasnit podmínky řešitelnosti rovnice (8). Podle 4. Fredholmovy věty je rovnice (8) řešitelná, když

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{m-1} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, f, \omega\right) = 0, \tag{13}$$

kde ω je libovolné řešení rovnice (12). Podmínku (13) upravíme takto: Položíme $\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, f = f_1$ a potom

$$0 = ((E - \varepsilon\lambda_0 K)\, f_1, \omega) = (f_1, \omega) - \varepsilon\lambda_0 (K f_1, \omega)$$

neboli podle vzorce (6), § 8

$$0 = (f_1, \omega) - \varepsilon\lambda_0 (f_1, K^*\omega) = (f_1, (E - \bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0 K^*)\, \omega) =$$
$$= \left(\prod_{\alpha=2}^{m-1} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, f,\ (E - \overline{\varepsilon\lambda_0} K^*)\, \omega\right).$$

Položíme nyní $\prod_{\alpha=3}^{m-1}(E - \varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K) f = f_2$ atd. Pokračujeme-li takto, převedeme rovnici (13) na tvar

$$(f, \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega) = 0. \tag{14}$$

Napíšeme nyní rovnici (12) v tomto tvaru:

$$\prod_{\alpha=0}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega = (E - \bar{\lambda}_0 K^*) \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega = 0.$$

Z toho je vidět, že druhý činitel ve skalárním součinu (14) je řešením rovnice (11), konjugované se (7). Tedy k tomu, aby rovnice (8) a s ní i ekvivalentní rovnice (7) měla řešení, stačí, aby $f(M)$ byla orthogonální k jistým řešením rovnice (11), totiž k těm, jež mají tvar $\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*)\omega$, kde $\omega(M)$ je řešení rovnice (12). Tím spíše stačí, když $f(M)$ je orthogonální ke všem řešením rovnice (11).

Tím je dokončen důkaz 4. Fredholmovy věty pro rovnice se slabou singularitou.

Poznámka 1. Není obtížné dokázat, že *každé* řešení rovnice (11) má tvar

$$\psi(M) = \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega,$$

kde $\omega(M)$ vyhovuje rovnici (12).

Poznámka 2. Při důkaze Fredholmových vět pro jádro se slabou singularitou jsme použili pouze toho, že jeho iterovaná jádra, od nějakého počínaje, jsou omezená. Vyjádření jádra ve tvaru (1) nehrálo žádnou úlohu. Tím jsou Fredholmovy věty dokázány také pro libovolnou integrální rovnici, jestliže její iterovaná jádra jsou omezená od jistého počínaje.

Jestliže λ není charakteristické číslo rovnice (7), nazveme λ regulárním. Dokážeme, že rovnice (7) má řešení, a to jediné, jestliže λ je regulární. V tom případě má skutečně homogenní rovnice

$$\psi(M) - \bar{\lambda} \int_{\Omega} \overline{K(M_1, M)}\, \psi(M_1)\, dM_1 = 0 \tag{15}$$

pouze triviální (nulové) řešení; podmínka 4. Fredholmovy věty je automaticky splněna pro libovolnou funkci $f(M)$, což zabezpečuje řešitelnost rovnice (7). Jednoznačnost řešení plyne z toho, že rovnice (15) nemá netriviální řešení.

KAPITOLA 2

SOUMĚRNÉ ROVNICE (HILBERT-SCHMIDTOVA THEORIE)

§ 11. Souměrná jádra. Jádro nazýváme *souměrným*, jestliže je identické s jádrem k němu konjugovaným. Takové jádro je charakterisováno identitou

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}. \tag{1}$$

Jestliže jádro je reálné, potom jeho souměrnost je definována vztahem

$$K(x, s) = K(s, x). \tag{2}$$

Integrální rovnici se souměrným jádrem nazýváme *souměrnou*.

Jestliže jádro je souměrné, můžeme se lehce přesvědčit o tom, že všechna jeho iterovaná jádra jsou také souměrná. Tak na příklad

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt = \int_a^b \overline{K(s, t)}\; \overline{K(t, x)}\, dt = \overline{K_2(s, x)},$$

$$K_3(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)\, K(t, s)\, dt = \int_a^b \overline{K(s, t)}\; \overline{K_2(t, x)}\, dt = \overline{K_3(s, x)}$$

atd.

Příklady. Jádra $x + s$, $\lg|x - s|$, $i(x - s)$ jsou souměrná. Jádro $i(x + s)$ je nesouměrné, neboť v tomto případě

$$\overline{K(s, x)} = -K(x, s).$$

Základní vlastnost souměrných jader, která v podstatě určuje celou theorii souměrných integrálních rovnic, spočívá ve vztahu