KAPITOLA II

OBJEVITELÉ NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE

24. N. I. Lobačevskij (1792—1856).[30]) Již v úvodu této knížky jsme se zmínili o tom, že Lobačevského objev neeukleidovské geometrie je těsně spjat s jeho činností na universitě. Jako mladý docent měl Lobačevskij za úkol přednášet o elementární matematice a geometrii s vyššího hlediska, a právě zde si uvědomil, jak velkým nedostatkem geometrie je neuspokojivě fundovaná theorie rovnoběžek. Dříve, než se budeme zabývat objevitelskou prací Lobačevského, bude užitečné říci několik poznámek o jeho činnosti na universitě vůbec.

Kazaňská universita, na které Lobačevskij vystudoval (v letech 1807 až 1811) a které zasvětil pak celý svůj život, byla založena teprve 1804 až 1805, tedy několik let před tím, než na ni Lobačevskij vstoupil. V té době byla Kazaň hlavním kulturním střediskem východní části Ruska, na vzdáleném okraji rusko-evropského východu, uprostřed takřka nedotknuté přírody. Historik kazaňské university N. P. Zagoskin píše, že zde byly pro rozvoj university podmínky krajně nepříznivé.

Problém sestavit profesorský sbor se rozřešil tak, že jednak byly vybráni schopní profesoři kazaňského gymnasia, s nímž ostatně v prvních letech byla universita úzce spjata, jednak byli povoláni profesoři z ciziny. Na fysikálně-matematické fakultě byli vedle ruských profesorů G. J. Kartaševského (katedra vyšší matematiky) a J. J. Zapolského (katedra aplikované matematiky a exper. fysiky) cizinci J. M. C. Bartels (čistá matematika), K. F. Renner (aplikovaná matematika), J. J. Littrow (astronomie) a F. X. Bronner (fysika).

To, že universita byla založena teprve nedávno a že si musela vychovat dorost vědeckých sil, dalo velkou příležitost Lobačevskému, aby po ukončení studií rozvinul svůj talent. R. 1811 dosáhl titulu magistra matematických a fysikálních věd. Titul magistra dostávali mladí lidé, kteří vzhledem k úspěchům při studiu měli zůstat na universitě jednak jako pomocníci profesorů, jednak aby se připravovali na vě-

---

[30]) Dříve se uváděl r. 1793 jako rok narození Lobačevského. R. 1943 byly však objeveny dokumenty, podle nichž se Lobačevskij narodil 20. listopadu (1. prosince) 1792. Podrobněji o tom viz Kagan [9], str. 14.

deckou a profesorskou činnost. Roku 1814 byl Lobačevskij jmenován docentem, 1816 mimořádným a 1822 řádným profesorem kazaňské university.

Je pozoruhodné, jakého širokého matematického vzdělání nabyl Lobačevskij za dobu svých studií, o čemž svědčí to, že vedle elementární matematiky, kterou přednášel na začátku své činnosti na universitě, přednášel zakrátko nejrůznější matematické discipliny: algebru, analysu, geometrii, theorii čísel. Čteme o něm, že z talentovaného a nadějného studenta se vypracoval vážný profesor, samostatně myslící, mnoho pracující a neustále promýšlející svoje přednášky.

Když kolem r. 1820 opustili profesoři - cizinci universitu v důsledku dusné reakční atmosféry, kterou vytvořil nový carský úředník ministerstva Magnickij, pověřený provedením revise university a její pozdější samovládce, padla veškerá zodpovědnost za vyučování matematiky a fysiky na mladého Lobačevského.

Zvláštním rysem Lobačevského bylo, že vedle nadání pro matematiku měl skvělé organisační schopnosti. Při vší tak velké pedagogické činnosti byl vázán nemalými administrativními úkoly. Ačkoli byl teprve mimořádným profesorem, stal se r. 1820 děkanem fysikálně-matematické fakulty. Vedle toho zastával ještě celou řadu drobných úkolů. Bylo nutno založit universitní knihovnu — vedení bylo svěřeno Lobačevskému; byl zřízen komitét pro stavbu universitních budov — Lobačevskij je zvolen za jeho člena a později se stává předsedou a spolupracuje na návrzích nebo dokonce sám projektuje stavby; uvažuje se o vydávání učených spisů *Učenyje zapisky* — za redaktora je určen Lobačevskij; organisuje se fysikální kabinet — organisací je pověřen Lobačevskij; plánuje se zřízení universitní astronomické observatoře — Lobačevskij se zajímá o toto dílo a aktivně se účastní. Za všechny organisační úspěchy se dostává Lobačevskému čestného uznání: po odvolání Magnického, kdy se opět po dlouhé době volí r. 1827 nový rektor kazaňské university, je zvolen a stále volen Lobačevskij a zůstává v této funkci plných 19 let.

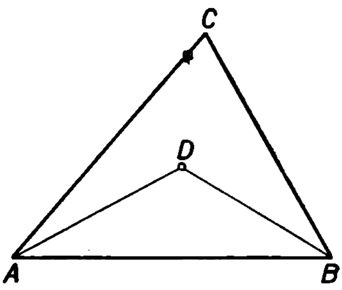
V. F. Kagan, známý sovětský geometr, píše ve své knize *Lobačevskij*:

„Mnozí vědci, obdaření velkým talentem, se vyznačovali podivuhodnou schopností spojit tvůrčí vědeckou práci s velkou činností administrativní a veřejnou. Leibniz publikoval četná filosofická i matematická pojednání během své rozsáhlé politické, administrativní a diplomatické činnosti. Monge se věnoval vědecké práci, ačkoliv byl vázán složitými povinnostmi, spojenými s organisováním vojska v době revolučních bojů. U nás dovedl také M. V. Lomonosov spojit vědeckou tvořivost s velkou činností administrativní a s tímže se setkáváme u Lobačevského. Když se podrobně seznamujeme s činností Lobačevského v prvním období, kdy řídil universitu, nebo i když jen čteme jeho dopisy Musin-Puškinovi,[31]) tu stěží chápeme, že se Lobačevskij mohl uprostřed všelijakých spletitých povinností věnovat hluboké badatelské práci. Při tom právě tou dobou napsal svoje nejdůležitější spisy."

(Kagan [9], str. 218.)

Obraťme se nyní k Lobačevského práci a objevům v theorii rovnoběžek.

Jak jsme již řekli, byl Lobačevskij pověřen hned na začátku své činnosti na universitě přednáškami z elementární matematiky a geometrie. Byla nalezena skripta přednášek z doby 1815—1817, z nichž je vidět, že Lobačevskij se pokoušel třemi různými způsoby fundovati theorii rovnoběžek. Nejdříve chce definicí rovnoběžek jakožto přímek stejného směru obejít V. Eukleidův axiom, ve druhém se obírá nekonečně velkými částmi roviny podobně jako Bertrand. Třetí pokus ukazuje, že Lobačevskij se podrobně zabýval Légendrovými pracemi z theorie rovnoběžek. Zná obě věty Légendrovy a pokouší se dokázat, že existuje alespoň jeden trojúhelník se součtem úhlů $2R$. Zná již také některé věty o trojúhelnících se součtem úhlů menším než $2R$, na př.: je-li bod D uvnitř trojúhelníka $\triangle ABC$ (viz obr. 139), pak součet úhlů v trojúhelníku $\triangle ABD$ je větší než v trojúhelníku $\triangle ABC$. V této době byl mladý Lobačevskij ještě cele v zajetí přesvědčení, kterého se Légendre nemohl zbavit po celý život, že totiž je možné dokázat Eukleidův axiom o rovnoběžkách.



Obr. 139.

Když kurátor kazaňské university vyzval profesory, aby každý

[31]) [M. N. Musin-Puškin byl kurátorem kazaňské university po Magnickém a velice se zasloužil o její rozkvět.]

z nich napsal pro tisk učební text nebo učebnici, Lobačevskij jako jeden z nemnohých, kteří vyhověli, předložil r. 1823 rukopis, nadepsaný krátce *Geometrija*. K vytištění jeho knížky však nedošlo, protože podle mínění recensenta se spis za učebnici nehodil. Skutečně, v této knize, jejíž rukopis se zachoval a byl vytištěn až později r. 1909, nešlo o nějaký systematický výklad geometrie, rozhodně ne o výklad podle tradice Eukleidových Základů, které tou dobou stále ještě byly v čele vyučování geometrie. Lobačevského výklad byl určen pro pokročilejší a rozváděl blíže některé partie elementární geometrie. Ze třinácti kapitol je deset věnováno měření (měření délek, úhlů, stěnových úhlů, trojúhelníků, hranolů atd.), ostatní se zabývají kolmostí, shodností trojúhelníků a rovnoběžností přímek.

Z toho, co zde Lobačevskij říká o rovnoběžkách, je zřejmé, že pronikl hlouběji do jejich theorie. Je mu jasné, že všechny dosavadní pokusy dokázat V. postulát selhaly a že ani předpoklad, že úhly trojúhelníka závisí jen na poměru stran a ne na absolutních jejich délkách, se netýká podstaty otázky, protože je svým způsobem konvencí. Lobačevského spis je pozoruhodný také ještě tím, že v prvních pěti kapitolách je soustředěna ta část geometrie, která nezávisí na postulátu o rovnoběžkách, tedy část patřící t. zv. absolutní geometrii.

Pro dobu, ve které Lobačevskij žil, je charakteristické, že recensent rukopisu knihy *Geometrija* zvláště upozornil na okolnost, která byla zřejmě okolností přitěžující, že totiž autor zavádí metrický systém: za jednotku délky bere *metr* a za jednotku úhlu stý díl kvadrantu pod názvem *grad*. Recensent k tomu poznamenává:

> „Je známo, že tato dělení byla vymyšlena za francouzské revoluce, kdy vášeň národa ničit vše dřívější pronikla dokonce i do kalendáře a dělení kruhu. Avšak tato novota nikde nebyla přijata a v samotné Francii dávno už byla opuštěna pro svou zjevnou nepohodlnost.“ (Kagan [9], str. 112.)

Rukopis knihy *Geometrija* ukazuje, že r. 1823 nenašel ještě Lobačevskij řešení problému rovnoběžek. Teprve po dalším tříletém usilovném bádání, totiž r. 1826, předložil fysikálně-matematické fakultě kazaňské university práci, ve které rozřešil dvoutisíciletý spor o Eukleidově axiomu o rovnoběžkách. Práce byla psána francouzsky, jak bylo tehdy zvykem, a nesla název *Exposition succinte des principes de la*

Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.[32]) K jejímu vytištění opět nedošlo, tentokráte pro nepochopení se strany kolegů na universitě, kteří neměli pro základy geometrie smysl. Komise, která měla o vytištění práce rozhodnout, rukopis fakultě nevrátila a veškeré pátrání po něm skončilo nezdarem. Přesto jeho obsah přibližně známe, protože první tištěná práce Lobačevského obsahuje výtah z tohoto rukopisu, jak sám Lobačevskij poznamenává v předmluvě.

Touto první tištěnou prací je spis *O načalach geometrii*, který vycházel po částech v universitním časopise *Kazaňskij vestnik* v letech 1829—1830. Zde se Lobačevskij věnoval nejdříve nedostatkům v počátcích budování geometrie (viz citát uvedený na str. 20) a pokoušel se na prvních dvaceti stránkách tyto nedostatky odstranit. Definuje zde pomocí pojmu vzdálenosti základní geometrické útvary tak, jak jsme se o tom zmínili již v odstavci 7. Dále zavádí pojem úhlu a zabývá se vlastnostmi sférických mnohoúhelníků a srovnává věty o shodnosti rovinných a sférických trojúhelníků. Dále pak pokračuje slovy:

„Viděli jsme, že součet úhlů trojúhelníka nemůže být $> \pi$. Zbývá tedy připustit, že je buď $= \pi$ nebo $< \pi$. Jedno i druhé můžeme připustit, aniž bychom kdy došli ke sporu; odtud vycházejí dvě geometrie: jedna, *běžně užívaná*[33]) pro svoji jednoduchost, je v souladu se všemi skutečnými měřeními; druhá, *pomyslná*,[34]) obecnější a proto ve výpočtech složitější, připouští závislost délek na úhlech.

Chceme-li pro jeden trojúhelník připustit, že má součet úhlů roven π, bude mít součet tuto hodnotu pro každý trojúhelník. Jestliže naproti tomu pro jeden jediný připustíme, že je menší než π, pak se snadno dokáže, že s rostoucími stranami tento součet klesá.

Za žádných okolností se tedy nemohou protnout přímky, které s třetí tvoří úhly, jejichž součet je π. Je však možné, že se také neprotnou, i když tento součet je $< \pi$, pokud chceme připustit, že součet úhlů v trojúhelníku je $< \pi$.

[32]) *Krátký výklad základů geometrie s přesným důkazem theorie rovnoběžek.*

[33]) [употребительная].

[34]) [воображаемая; toto slovo v době Lobačevského bylo užíváno také ve smyslu *imaginární* (komplexní). Cizí překlady zde mají výrazy *„imaginäre Geometrie"*, *„géométrie imaginaire"* a pod. Ve skutečnosti zde však nejde o nějakou „komplexní" geometrii. Lobačevskij chtěl názvem pouze naznačit, že jde o geometrii pomyslnou, smyšlenou.]

Vzhledem k jedné přímce mohou proto všechny přímky roviny být rozděleny na *protínající* a *neprotínající*. Z těchto posledních budeme nazývat *rovnoběžnými* ty, které mezi všemi přímkami, vycházejícími z jednoho bodu, tvoří hranici nebo jinak řečeno, přechod od jedněch k druhým."

(Lobačevskij [5], str. 194.)

Proč Lobačevskij říká, že jeho nová geometrie je obecnější než naše běžně užívaná? O tom pokračuje již o stránku dále:

„Předpoklad, že součet úhlů v trojúhelníku je $< \pi$, má ten následek, že se kružnice s rostoucím poloměrem neblíží přímce, ale zvláštní křivce, kterou budeme nazývat *limitní kružnicí*. Také koule se v takovém případě bude blížit ploše, kterou podobně budeme nazývat *limitní koulí*. Rovinný řez této plochy je buď kružnice nebo limitní kružnice.

Geometrie na limitní kouli je úplně stejná jako ta, kterou známe v rovině.[35]) Limitní kružnice nahrazuje v ní přímku a úhly mezi rovinami, v nichž leží limitní kružnice, nahrazují úhly mezi přímkami.

Limitní kružnice se přímce blíží tím více, čím menší je její oblouk, takže rozdíl v poměru k délce oblouku může být učiněn libovolně malý. Proto všechno, co platí o jednom, platí i o druhém, jen když obojí bereme hodně malé.

Jestliže tedy v přírodě platící geometrie je taková, že dvě rovnoběžky svírají s třetí přímkou úhly, jichž součet je menší než π, potom běžně užívaná geometrie by byla geometrií čar zvlášť malých délek ve srovnání s čarami, které tvoří trojúhelníky se součtem menším než π." (Lobačevskij [5], str. 195.)

Ve čtyřiceti paragrafech pak Lobačevskij rozvíjí svoji „pomyslnou" geometrii. Odvozuje její trigonometrii a analytickou geometrii, pracuje s rovnicemi přímek, kružnic a limitních kružnic, stanoví délky křivek, plošné obsahy a objemy různých těles.

Pokouší se také přesvědčit čtenáře o „bezespornosti nové geometrie", jak bychom to řekli dnes. Ukazuje, jak trigonometrie jeho nové geometrie je v úzké souvislosti se sférickou trigonometrií; stačí jen místo stran a, b, c dosadit $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$. Ukazuje, že analysa a nová geometrie spolu harmonují, a to tak, že řešení některých integrálů pomocí nové geometrie je totéž jako řešení klasickými prostředky. Lobačevskij také předhazuje otázku, jak by se změnila mechanika v prostoru ovládaném novou geometrií. V důsledku závislosti velikosti součtu úhlů trojúhelníka na jeho stranách zkoumá součet pro trojúhelník, jehož vrcholy jsou stálice *Rigel* — *Sirius* — 29 *Eridani*, a zjišťuje, že rozdíl od π je ještě příliš malý, totiž v mezích pozorovacích chyb.

---

[35]) [Rozumí se, že v eukleidovské rovině.]

Jaký ohlas měla tak významná práce, jako je stať *O načalach geometrii*, jak bylo přijato první pojednání o neeukleidovské geometrii? S výsměchem a urážkami. R. 1834 se objevuje v časopise *Syn otečestva* recense pod značkou *S. S.* Uvedeme z ní dva citáty:

„Jsou lidé, kteří si někdy po přečtení knihy postěžují: byla příliš prostá, příliš obyčejná, nebylo v ní ani, nad čím by se člověk mohl zamyslet. Takovým milovníkům přemýšlení doporučuji, aby si přečetli geometrii p. Lobačevského. Zde už je opravdu o čem přemýšlet. Mnozí z našich prvotřídních matematiků ji četli, dumali nad ní, ale ničemu neporozuměli; proto považuji za zbytečné podotknout, že i já, ačkoliv jsem nad ní dlouho rozvažoval, ničeho jsem se nedomyslel, t. j. neporozuměl jsem ani jedné myšlence. Bylo by těžké pochopit třebas jen to, jak p. Lobačevskij z nejsnadnější a nejjasnější matematické nauky, jakou je geometrie, mohl udělat tak těžkou, tak temnou a nepronikuutelnou nauku, jestliže by nám sám částečně nenapověděl tím, když říká, že jeho geometrie se liší od *běžně užívané*, které jsme se všichni učili a které se už podle všeho neodnaučíme, ale že je jen *pomyslná*. Ano, teď je vše jasné. Avšak co všechno nám nemůže obrazotvornost dát, obzvláště obrazotvornost živá a přitom nestvůrná! Proč si nepředstavit na příklad černé jako bílé, kulaté jako čtyřhranné, součet úhlů trojúhelníka menší dvou pravých a jeden a týž omezený integrál rovný jednou $\frac{1}{4}\pi$ a po druhé ∞? Velice, velice dobře je to možné, i když rozumem je to nepochopitelné.

Ale může se někdo zeptat: nač psát a dokonce ještě tisknout takové nejapné fantasie. Přiznávám se, na tuto otázku těžko odpovědět. Autor nikde nedal na srozuměnou, za jakým účelem vydal svůj spis, a proto se musíme uchýlit k domněnkám. Pravda, na jednom místě autor říká jasně, že určité nedostatky, jichž si všiml na dosud užívané geometrii, ho přiměly k tomu, sepsat a vydat tuto novou geometrii, ale to je zřejmě naprosto nesprávné a se vší pravděpodobností řečeno jen proto, aby se ještě více ukryl pravý cíl spisu. Předně to odporuje tomu, co sám autor řekl o své geometrii, že je pomyslná, t. j. že ve skutečnosti vůbec neexistuje a může existovat pouze v jeho představách a pro měření se ve skutečnosti vůbec nehodí; za druhé to odporuje obsahu nové geometrie, podle něhož se dá spíše říci, že není vymyšlena proto, aby doplnila, ale popřela naši obvyklou geometrii. Přitom nám budiž dovoleno dotknout se autorovy osoby. Jak možno pomyslit, že by p. Lobačevskij, řádný profesor matematiky, napsal s vážným úmyslem knihu, která by nepřinesla mnoho cti ani poslednímu farnímu učiteli. Jestliže ne učeností, tedy alespoň zdravým rozumem musí být obdařen každý učitel; ale v nové geometrii nezřídka i ten chybí.

Uváživ všechno toto, docházím k závěru, že p. Lobačevskij nejpravděpodobněji napsal a vydal svoji Geometrii jen za tím účelem, aby si tropil žerty nebo lépe řečeno, aby napsal satiru na učence-matematiky, a snad vůbec na učence-spisovatele současné doby. Avšak nyní již ne s pravděpodobností, ale s naprostou jistotou tvrdím, že dva nedostatky, totiž bezesmyslná vášeň psát nezvyklým a nesrozumitelným způsobem, kterou lze časem pozorovat u mnohých našich spisovatelů, a nepředložená touha objevovat nové, se kterou se setkáváme u talentů, postačujících sotva na to, aby si řádně osvojili staré, opakuji, tyto dva nedostatky autor hodlal zobrazit a zobrazil je, jak lépe ani není možné...

Avšak jsa si vědom ceny spisu p. Lobačevského, nemohu mu nevytknout to, že tím, že nedal své knize patřičný titul, nechal nás dlouho přemýšlet nadarmo. Proč nenapsat místo titulu „*O načalach geometrii*" na příklad „*Satira na geometrii*", „*Karikatura na geometrii*" nebo něco podobného? Potom by každý na první pohled viděl, o jakou knihu jde, a autor by byl ušetřen mnoha nepříznivých o něm úsudků a mínění. Štěstí, že se mi podařilo proniknout ke skutečnému cíli, pro který byla napsána tato kniha — a bůh ví, co jsem se o ní i o jejím autoru napřemýšlel. Nyní doufám a věřím, že ctěný p. autor se bude cítit mně zavázán za to, že jsem ukázal skutečné hledisko, s něhož nutno posuzovat jeho spis.

S. S." (Kagan [9], str. 245—248.)

O této fejetonistické recensi napsal Lobačevskij na začátku svého spisu *Voobražaemaja geometrija*, který vyšel r. 1835, tuto poznámku:

„Časopis Syn Otěčestva otiskl v čísle 41 ročníku 1834 vůči mně velmi urážlivou kritiku, a jak jsem přesvědčen, naprosto nespravedlivou. Recensent založil svůj posudek jen na tom, že mé theorii neporozuměl, a považuje ji za chybnou proto, že v příkladech nalezl jeden *nejapný* integrál. Nenacházím však takového integrálu ve svém pojednání. V listopadu minulého roku jsem zaslal vydavateli odpověď, která nebyla z neznámých mi příčin dosud, během pěti měsíců, ještě otištěna." (Lobačevskij [5], str. 408.)

Na žádost Lobačevského zaslal senát Kazaňské university práci *O načalach geometrii* petrohradské Akademii věd. Spis byl dán k recensi akademiku Ostrogradskému, který napsal do posudku mimo jiné:

„Autor, jak se zdá, si postavil jako cíl psát tak, aby mu nebylo vůbec rozumět...

O tom, co jsem pročetl, považuji za povinnost sdělit Akademii toto:

1. Ze dvou omezených integrálů, které p. Lobačevskij považuje za svůj objev, jeden je už známý. Je možné ho vyčíslit pomocí nejelementárnějších method integrálního počtu. Výpočet druhého integrálu, uvedeného na straně 120, je skutečně něco nového. Patří cele p. kazaňskému rektorovi. Na neštěstí je nesprávný.

2. Vše, co jsem pochopil z geometrie p. Lobačevského, je více než podprůměrné.

3. Všechno, co jsem nepochopil, bylo zřejmě špatně vyloženo a lze tudíž těžko luštit.

Z toho jsem učinil závěr, že kniha p. rektora Lobačevského je poskvrněna chybou, je nedbale napsána a nezasluhuje tudíž pozornosti Akademie."

(Kagan [9], str. 254.)

Ostrý výpad Ostrogradského proti Lobačevskému není podložen žádnými objektivními důvody. Pokud jde o druhý integrál, byl Lobačevského výpočet správný a ostatně proveditelný i elementárními prostředky. Mimo to, Lobačevskij nechtěl nikterak objevovat nové integrály; v tom však, že řešení některých integrálů pomocí nové geometrie bylo v souhlase s řešením klasickým, viděl, jak jsme už poznamenali výše, potvrzení logické pravdivosti nové geometrie.

To, co Ostrogradskij z práce ještě chápal, bylo asi prvních sedm paragrafů, kde jsou vyloženy logické základy geometrie. Pro úvahy o logickém budování geometrie však Ostrogradskij neměl pochopení, takže mu musely připadat příliš triviální.

Pokud jde o to, že se výklad nové geometrie dal špatně číst — na tom snad něco bylo. Každý objev, s nímž nejsme seznámeni, je temný, ať je vyložen jakkoli jasně. Na druhé straně objevitel nemá čas všechno říci a není to ostatně také jeho věc, rozhlašovat na všechny strany pomocí nejtriviálnějších obrazů, co vytvořil a uvedl na svět. Jeho úkolem především je otevřít cestu nástupcům, kteří by mohli přivést dál jeho myšlenky a přiblížit je nové generaci.

U Lobačevského bylo zapotřebí úžasné energie, jestliže se nezalekl křiku Boiotů a nenechal se odradit ani výsměchem, ani nepochopením. Rozvíjel svoji geometrii dál, shromažďoval další argumenty, aby ukázal, že nová geometrie je právě tak logicky pravdivá jako geometrie obyčejná, běžně užívaná, a snažil se psát srozumitelnější výklad. Tak vyšla r. 1835 v serii *Učenyje zapisky Kazaňskogo universiteta* kniha pod titulem *Voobražaemaja geometrija* a r. 1836 vychází tamtéž spis *Primenenije voobražaemoj geometrii k nekotorym integralam.* Obě tyto práce napsal Lobačevskij původně francouzsky pro Crellův žurnál v Německu, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, kde skutečně r. 1836 vycházejí pod názvem *Application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales*, a r. 1837 jako *Géométrie imaginaire.*

Ve *Voobražaemoj geometrii* postupuje Lobačevskij tak, že do čela staví trigonometrické rovnice vyjadřující vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka v nové geometrii jakožto něco daného a z nich odvozuje celou novou geometrii. Důkazem, že rovnice tvoří bezesporný systém a že pro trojúhelníky s nekonečně malými stranami tento systém přechází v rovnice eukleidovské geometrie, se snaží prokázat logickou rovnocennost *běžné* i *pomyslné* geometrie. Ukazuje tím také, že obyčejná geometrie je jen speciálním případem jeho nové geometrie.

Jestliže obě práce *O načalach geometrii* i *Voobražaemaja geometrija* se navzájem doplňují tak, že jedna nemůže stát bez druhé,[36]) Lobačevskij se snažil nyní podat samostatný výklad nové geometrie od samých jejích počátků, a to synthetickou methodou. Proto v letech 1835 až 1838 vydával v *Učenych zapiskach* stať *Novye načala geometrii s polnoj teoriej paralelnych*, která zabrala celkem čtyři čísla a je nejrozsáhlejším spisem Lobačevského vůbec.

V úvodu ukazuje na nedostatky Eukleidovy theorie rovnoběžek a různých pokusů dokázat Eukleidův postulát, odhaluje chyby Bertrandova důkazu a nedostatky v důkazu Légendrově i v jeho úvahách, které platily tehdy za poslední slovo v oboru theorie rovnoběžek. V prvních šesti kapitolách pak vyložil absolutní geometrii, v zbývajících pěti svoji novou geometrii. Toto pojednání bylo už napsáno tak, že mu mohl rozumět každý hloubavý člověk s obecným matematickým vzděláním. Přesto nikdo toto dílo nečetl.

Proto se Lobačevskij rozhodl napsat zcela krátké a pokud možno snadno přístupné pojednání a vydal je tentokráte německy r. 1840 v Berlíně pod názvem *Geometrische Untersuchungen*. Tato velice jasně psaná malá knížka byla předposledním spisem Lobačevského. Po ní napsal nebo přesněji řečeno nadiktoval napolo oslepl Lobačevskij již jen jednu práci, rok před svou smrtí. Byla věnována nové geometrii a byla určena pro sborník chystaný k padesátiletému jubileu kazaňské university. Sepsána byla francouzsky pod názvem *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles* a r. 1855 vyšla také samostatně rusky jako *Pangeometrija* v *Učenych zapiskach*.[37])

---

[36]) Výklad v *Načalach*, bez důkazů a velice stručný, je rozveden ve spise *Voobražaemaja Geometrija*. Protože zde se však začíná systémem rovnic, aniž by se objasnilo, jak se k nim došlo, předpokládá tento spis znalost *Načal*.

[37]) Lobačevskij v pozdější době místo méně vhodného názvu *pomyslná geometrie* začal užívat slova *pangeometrie*, neboť ona zahrnovala také geometrii eukleidovskou.

Lobačevskij si byl dobře vědom toho, jak závažný objev učinil; když nenalezl pochopení doma v Rusku, obrátil se na širší, můžeme říci světové forum: publikoval, jak jsme viděli, svoje výsledky jednak v Crellově žurnálu, jednak v berlínském nakladatelství. Vzniká přirozená otázka, jakou měly nyní jeho výsledky odezvu.

Krátce řečeno, současná doba nepochopila Lobačevského objev ani jeho dalekosáhlý význam. Vinu na tom neslo, jak jsme již v úvodu naznačili, přesvědčení, utvrzené tehdejšími filosofickými a ideologickými názory ve formě Kantova učení o apriorních nazíracích formách, že eukleidovská geometrie plně vystihuje metrické vlastnosti skutečného prostoru. Pod tlakem oficiálních názorů lidé nechápali, oč v geometrii Lobačevského běží, a dívali se na ni asi jako na nesmyslnou theorii.

Názorně to ilustruje recense Lobačevského knížky *Geometrische Untersuchungen*, uveřejněná v bibliografickém časopise *Repertorium der gesammten deutschen Literatur* v čísle 2 r. 1840, která v úplnosti zní takto:

> „Podle autorova tvrzení můžeme připustit, aniž bychom se dostali ke sporu, že daným bodem lze k dané přímce vést dvě nesplývající rovnoběžky (srv. p. 10); mezi těmito dvěma rovnoběžkami mohou prý ležet přímky procházející tímto bodem, které danou přímku neprotínají, a ačkoliv s ní leží v téže rovině, nejsou s ní rovnoběžné. Na takovémto základě chce autor založit vlastní theorii s názvem „imaginární geometrie". Její základy jsou vyloženy v tomto spisku, avšak zmíněný princip a jím dokazovaná věta na p. 21 „čím více se rovnoběžky v orientaci jejich rovnoběžnosti prodlužují, tím více se vzájemně přibližují" spisek dostatečně charakterisují a zprošťují tak referenta dalšího posuzování". (Engel [8], str. 434.)

Přesto však víme o člověku, který četl Lobačevského spisy — upozorněn byl na ně snad právě touto recensí — a dokonale jim rozuměl: byl to C. F. Gauss.

Gauss se během své velmi bohaté matematické činnosti zabýval také theorií rovnoběžek. Čteme, že již od dob svých studií myslel na tento problém. Později se dopracoval k systému neeukleidovské geometrie — ostatně sám tento název pochází od něho, on po prvé užil slov „*antieuklidische Geometrie*".

Gaussův poměr k tomuto objevu však byl zvláštní. Bude nejlépe, když se o Gaussovi v této souvislosti podrobněji rozepíšeme.

25. C. F. Gauss (1777—1855). Nedostatků v budování theorie rovnoběžek a zároveň i celé geometrie si Gauss povšiml již někdy kolem r. 1792, kdy jako patnáctiletý student göttingenské university diskutoval o rovnoběžkách s některými profesory, nejvíce však se svým starším přítelem F. Bolyaiem, který, jak jsme se již zmínili, studoval dva roky v Göttingách. Gauss si s ním také o věci dopisoval, když se F. Bolyai vrátil domů do Maďarska. Podle dopisů můžeme soudit, že se Gauss pokoušel různými způsoby dokázat Eukleidův postulát. Gauss ostatně znal spisy Saccheriho a Lamberta, takže se také zabýval dedukcemi z předpokladu, že Eukleidův axiom není splněn. Ve všech svých úvahách, ať již při důkazu přímém či nepřímém, narážel však na obtíže, které, jak se sám vyjádřil, patřily stále témuž úskalí, o něž se všechny jeho pokusy rozbíjely. R. 1804 však píše v jednom dopise, že stále ještě má naději, že těmito úskalími šťastně propluje. Nemůžeme s určitostí tvrdit, kdy se s touto nadějí rozešel. Nejstarší dokument, který svědčí o jis ém obratu v jeho myšlení, pochází z r. 1816. Tehdy uveřejnil Gauss anonymně v časopise *Göttingische gelehrte Anzeigen* recense dvou publikací jakýchsi naivních *důkazů* V. postulátu. Z této recense uvedeme první odstavec:

„Je málo záležitostí v matematice, o kterých by se tolik psalo, jako o trhlině v základech geometrie při budování theorie rovnoběžek. Zřídka přejde rok, který by nepřinesl nějaký nový pokus tuto trhlinu zacelit, a přece nemůžeme říci, chceme-li mluvit poctivě, že bychom se v podstatě dostali dál než Eukleides před 2000 lety. Takovéto upřímné a přímočaré přiznání se nám zdá být důstojnosti vědy přiměřenější, než marné snažení neudržitelnou sítí zdánlivých důkazů zakrýt trhlinu, kterou nelze zacelit." (Gauss [12], str. 170.)

Další dokument z r. 1816 je Gaussův dopis příteli Gerlingovi, kde můžeme číst komentář k Légendrovu „důkazu" V. postulátu, založenému na argumentu, že *absolutní míra* pro délky není možná. Gauss zde zdůrazňuje, jak je neoprávněné jen tak beze všeho se opírat o takový předpoklad, a pokračuje:

„Je to poněkud paradoxní, že by mohla existovat a priori konstantní délka; já v tom však nenalézám žádného sporu."

A žertem dodává:

„Bylo by si dokonce přát, aby Eukleidova geometrie neplatila, protože bychom pak měli obecnou apriorní míru." (Gauss [12], str. 169.)

Podle obou těchto citátů se dá soudit, že Gauss již někdy krátce před r. 1816 zastával stanovisko, že dokázat V. postulát není možné, protože existuje geometrický systém, v němž tento postulát není splněn. Jak dalece znal a rozvinul Gauss tento systém, nemůžeme s určitostí tvrdit, protože sám ze svých úvah nic nepublikoval a ani v pozůstalosti nezanechal žádného rukopisného pojednání kromě několika stránek s nahozenými poznámkami, jichž si blíže všimneme až později. Vedle těchto málo poznámek jsme proto odkázáni na různé připomínky a poznámky, roztroušené v jeho dopisech.

Z Gaussových dopisů můžeme vedle toho také vidět, jak dalece znal výsledky jiných matematiků, kteří se úspěšně zabývali problémem rovnoběžek, jak reagoval na jejich podněty a jaký sám osobně zaujal k celé věci postoj. To všechno bude nyní předmětem několika příštích stránek.

Viděli jsme již, že Lobačevskij, který neznal dílo Saccheriho ani Lamberta, pracoval na problému rovnoběžek úplně sám a po celý život se nedověděl, že také jiní docházejí k podobným výsledkům jako on, a neměl nikoho, s kým by si o svém objevu mohl pohovořit. Naproti tomu Gauss znal všechny, kteří se tou dobou úspěšně zabývali theorií rovnoběžek, a znal i jejich výsledky. Velkou příležitost k seznámení s nimi mu poskytovalo jeho působení na významné německé universitě v Göttingách. Vedle toho se těšil neobyčejné autoritě, takže se k němu lidé hlásili sami, aby od něho slyšeli dobrozdání o svých výsledcích. Gauss se tímto způsobem stal mimoděk svědkem tvůrčí činnosti v oboru theorie rovnoběžek u celé řady významných i méně významných lidí. Byli to Schweikart, Taurinus, Jan Bolyai a Lobačevskij (jsou uvedeni v pořadí, jak se s nimi Gauss seznamoval).

F. K. Schweikart (1780—1859) nebyl vlastně matematikem (později se stal profesorem práv na universitě v Královci); zabýval se však matematikou ze záliby, zejména theorií rovnoběžek, o které publikoval několik prací. Znal určitě Klügelovu dissertaci o historickém rozvoji theorie rovnoběžek i práci Lambertovu. V letech 1812—1816 hlouběji promyslel geometrický systém nezávislý na V. Eukleidově postulátu a tento systém nazval *astralickou geometrií.*[38]) Když se od svého přítele

[38]) *Astralische Geometrie* — tento název měl napovědět, že tato zvláštní geometrie se uplatní teprve při měření velkých vzdáleností (při astronomických pozorováních).

Gerlinga dozvěděl, že také Gauss dospěl k jistým závěrům v theorii rovnoběžek, poslal mu (r. 1818) po Gerlingovi list, ve kterém stručně shrnul svoje názory a žádal, aby se Gauss o nich vyjádřil.

Bude jistě zajímavé přečíst si toto shrnutí Schweikartových myšlenek:

„Máme celkem dvojí geometrii: geometrii v užším smyslu, totiž Eukleidovu, a pak astralickou geometrii.

Trojúhelníky této druhé geometrie se vyznačují tím, že součet jejich úhlů není roven dvěma pravým.

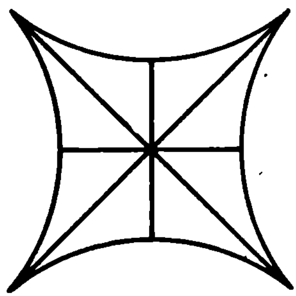
Z toho se dá logicky důsledně odvodit,

a) že součet tří úhlů v trojúhelníku je *menší* než dva pravé,

b) že tento součet bude stále tím menší, čím větší bude jeho obsah,

c) že výška rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka při zvětšování ramen sice stále roste, nepřekročí však určitou délku, kterou nazývám *konstantou*.[39])

Čtverce[40]) proto mají tuto podobu:



Kdyby pro *nás* tato konstanta byla poloměr zemský (takže by každá přímka vesmírného prostoru, která spojuje stálice vzdálené od sebe o 90°, byla tečnou zemského globu), pak by v poměru k rozměrům vyskytujícím se v denním životě byla nekonečně veliká.

Eukleidovská geometrie platí jen za předpokladu, že tato konstanta je nekonečně veliká. Jen tehdy bude platit věta, že součet tří úhlů každého trojúhelníka je roven dvěma pravým; toto lze z předpokladu, že konstanta je nekonečně velká, skutečně také snadno dokázat.“ (Gauss [12], str. 180.)

[39]) [Jde o výšku spuštěnou na přeponu. Podle toho, co již víme o úhlu souběžnosti, nemůže tato výška překročit délku, pro kterou je $\Pi(d) = \frac{1}{2}R$.]

[40]) [Schweikart zde má na mysli čtyřúhelníky se shodnými všemi stranami a úhly.]

Gauss napsal Gerlingovi o Schweikartových poznámkách toto:

„...Poznámka p. prof. Schweikarta mě neobyčejně potěšila a prosím, abyste mu o tom ode mne řekl mnoho krásného. Skoro všechno je to jakoby z mé duše napsáno... Ačkoli mohu docela dobře připustit nesprávnost eukleidovské geometrie, musela by podle našich astronomických pozorování být zmíněná konstanta nepoměrně větší než poloměr Země.“

(Gauss [12], str. 181.)

Schweikart nepublikoval však o *astralické geometrii* nic a ani svoje myšlenky blíže nerozvedl, takže citovaný list obsahoval asi vše, co Schweikart v nové geometrii udělal. Protože jeho publikované práce z dřívější doby se nové geometrie ještě netýkaly, lze říci, že Schweikartovo dílo patří ještě do předhistorie neeukleidovské geometrie, při čemž je jistě pozoruhodné, že jako neprofesionální matematik došel k tak krásným výsledkům.

Schweikart zasvětil do problému rovnoběžek svého synovce F. A. Taurina (1794—1874; byl také právníkem), který se po čase obrátil na Gausse se svými výsledky a zaslal mu svůj první pokus o důkaz V. postulátu. Gauss již z toho, jak se Taurinus k problému stavěl, poznal v Taurinovi *myslící matematickou hlavu* a odepsal mu dlouhým dopisem, který zde uvedeme v doslovném znění:

„Vaše blahorodí,

Váš milý dopis ze dne 30. října spolu s připojeným pojednáním jsem přečetl ne bez potěšení, tím spíše, že jsem zvyklý na to, že většina lidí, kteří se zabývají novými pokusy o t. zv. theorii rovnoběžek, nemá ani špetku geometrického ducha. Proti Vašemu důkazu nemám nic (nebo ne mnoho), co bych poznamenal, než to, že není úplný. Váš důkaz, že součet tří úhlů rovinného trojúhelníka nemůže být větší než 180°, by sice potřeboval, pokud jde o geometrickou přesnost, ještě doplnit, avšak to by se dalo snadno provést a je mimo vši pochybnost, že tuto vlastnost lze zcela rigorosně dokázat. Zcela jinak tomu však je s druhou částí, že totiž součet úhlů nemůže být menší než 180°; toto je vlastní uzel, úskalí, o které vše ztroskotává. Zdá se mi, že jste se tímto předmětem ještě dlouho nezabýval. U mne tomu tak již je přes 30 let a nevěřím, že by se kdo touto druhou částí mohl ještě víc zabývat než já, ačkoli jsem o tom nikdy nic neuveřejnil. Předpoklad, že součet tří úhlů je menší než 180°, vede ke zvláštní geometrii, od naší (eukleidovské) zcela odlišné, která je sama v sobě veskrze bezesporná a kterou jsem si sám pro sebe zcela uspokojivě rozvinul, takže v ní mohu řešit každou úlohu až na určení jisté konstanty, která se nedá stanovit a priori. Čím větší bude tato konstanta, tím více se přiblížíme eukleídovské geometrii a při nekonečné její hodnotě obě geometrie splynou. Některé věty této geometrie jsou paradoxní a nezasvěcenci připadají nesmyslné; přesnějším a pozornějším rozborem však zjistíme, že na nich není nic nemožného. Tak na př. mohou všechny tři úhly trojúhelníka být libovolně malé, jen když zvolíme strany dostatečně velké, a přesto nemůže plošný obsah trojúhelníka, ať jeho strany jsou již jakkoli velké, překročit určitou mez ani jí dosáhnout. Všechno mé snažení nalézt spor nebo nedůslednost v této neeukleidovské[40a]) geometrii zůstalo marné. Jediné, co odporuje našemu rozumu je, že kdyby skutečně platila, pak by v prostoru musela existovat jistá *sama o sobě určená* (i když nám neznámá) délka. Mně se však zdá, že navzdory nic neříkající slovní moudrosti metafysiků toho vlastně o pravé podstatě prostoru víme příliš málo nebo dokonce vůbec nic, než abychom mohli něco pro nás nepřirozeného pokládat za *absolutně nemožné.* Kdyby platila neeukleidovská geometrie a ona konstanta byla v určitých vztazích k těm veličinám, které se vyskytují v oblasti našeho měření na zemi nebo na obloze, pak by se dala určit a posteriori. Proto jsem kdysi žertem vyslovil přání, aby neplatila geometrie eukleidovská, protože bychom pak měli absolutní délku a priori.

Neobávám se nijak, že člověk, který se mi ukázal jako myslící matematická hlava, by všemu tomu, co jsem napsal, neporozuměl: v každém případě to ale považujte za soukromé sdělení, kterého žádným způsobem neužijete veřejně nebo způsobem, který by vedl k uveřejnění. Snad někdy v budoucnu, až budu mít více kdy než nyní, sám uveřejním svoje výsledky.

V hluboké úctě zůstávám

Vašemu blahorodí

Göttingen 8. listopadu
1824.

nejoddanější služebník
C F Gauss.“

(Gauss [12], str. 186.)

Gaussův dopis byl pro Taurina velkým povzbuzením. Pokračoval dál ve studiu theorie rovnoběžek a r. 1825 vydal spisek *Theorie der Parallellinien,* ve kterém sice nepřestává být přesvědčen o bezpodmínečné platnosti Eukleidova axiomu, odvozuje zde však již první věty neeukleidovské geometrie. O rok později vydal vlastním nákladem spis *Geometriae prima elementa,* ve kterém se dopracoval k základům hyperbolické trigonometrie. Ačkoliv Taurinus stál neeukleidovské geometrii blíže než na př. Saccheri nebo Lambert, přesto nemůžeme o něm říci více, než že patří podobně jako Schweikart mezi předchůdce objevitelů nové geometrie; nepřestal být totiž přesvědčen o výlučné platnosti Eukleidovy geometrie.

40a) [in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie]

Je podivné, že vztah mezi Gaussem a Taurinem se vyvinul tak, že göttingenský *princeps mathematicorum* nereagoval na Taurinovy spisy ani slovem. Snad to bylo proto, že Taurinus nevyhověl Gaussovu přání a v předmluvách obou svých spisů se výslovně zmiňuje o Gaussovi. V předmluvě k druhému spisu je to tato poznámka:

„Zaslal jsem některé ze svých důkazů samotnému Gaussovi. Ihned mi velmi přátelsky odpověděl a připojil řadu poznámek, ze kterých jsem ovšem nemohl úplně pochopit jeho názor na tuto věc. Bylo by si tedy přát, aby tento vynikající muž uveřejnil svoje myšlenky týkající se celé otázky co nejdříve, neboť názory takového člověka budou mít jistě nedocenitelnou hodnotu. O tuto věc ho budou se mnou žádat všichni matematikové stále znovu a co nejnaléhavěji.“ (Stäckel-Engel [15], str. 248.)

Taurinovy spisy a myšlenky zůstaly však bez povšimnutí a proto Taurinus rozdal po čase několik exemplářů svých *Geometriae prima elementa* přátelům a matematikům a v zoufalství nad tím, že se jeho snažení nedostalo žádného uznání, spálil zbytek nákladu a zanechal dalšího bádání o theorii rovnoběžek.

O několik let později (r. 1832) se Gauss seznámil s pracemi Jana Bolyaie. O tom však budeme mluvit až v příštím odstavci, ve kterém se budeme zabývat tímto matematikem podrobněji.

O Lobačevském se Gauss dozvěděl až r. 1840, kdy vyšly v Berlíně, jak už víme, jeho *Geometrische Untersuchungen*. Jaký dojem učinil na Gausse tento spis, můžeme poznat z následujících dvou citátů z jeho dopisů (z r. 1841 a 1846):

„Začínám číst rusky již s určitou obratností a působí mi to potěšení. P. Knorre mi zaslal malou rusky psanou knížku od Lobačevského (z Kazaně), která spolu s jeho německým spisem o rovnoběžkách (o kterém vyšla velmi pošetilá recense v Gerdorfs Repertorium[40b]) mě zaujala natolik, že jsem velmi dychtiv číst další práce tohoto ostrovtipného matematika. Jak mi pan Knorre sdělil, obsahují (rusky psané) Rozpravy kazaňské university několik jeho statí...“ (Gauss [12], str. 232.)

„Před krátkým časem jsem znovu prohlížel Lobačevského spisek (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parrallellinien, Berlin 1840, vydal G. Fincke, 4 archy). Obsahuje základy té geometrie, která by platila a také důsledně mohla platit, jestliže by eukleidovská nebyla pravdivá. Jistý

[40b]) [V této knížce je uvedena na str. 187.]

Schweikart nazval takovou geometrii astralickou, Lobačevskij ji nazývá imaginární geometrií. Vy víte, že já již 54 let (od r. 1792) jsem téhož přesvědčení (s určitým pozdějším doplněním, o němž se teď nechci zmiňovat); v Lobačevského práci jsem tedy pro sebe něco věcně nového nenašel, avšak při odvozování a výkladu jde Lobačevskij jinou cestou, než kterou jsem sám nastoupil, totiž v pravém geometrickém duchu a mistrným způsobem. Upozorňuji Vás na jeho knihu, jejíž četba bude pro Vás velkým požitkem..."

(Gauss [12], str. 238.)

Z jiných dopisů se dovídáme, že si Gauss během doby opatřil všechny Lobačevského práce; ruské četl přímo v originále, ačkoliv se rusky začal učit teprve před krátkým časem.

Z obou právě uvedených citátů vidíme, že Gauss vysoko cenil Lobačevského, a tu se můžeme právem ptát, co Gauss učinil, aby seznámil ostatní matematiky s jeho objevem, jak se přičinil, aby uvedl význam Lobačevského na pravou míru, jak obhájil Lobačevského před recensí, kterou v soukromém dopise nazval pošetilou. Odpověď na to vše je taková, že neučinil nic. Gauss se omezil pouze na to, že v listopadu 1842 navrhl Lobačevského jako *jednoho z nejlepších matematiků ruské říše* za člena göttingenské učené společnosti, která měla charakter akademie. Lobačevskij byl zvolen a obdržel diplom podepsaný Gaussem jakožto předsedou, při čemž mu bylo oznámeno, že *v uznání jeho vynikajících zásluh o vědu byl zvolen dopisujícím členem společnosti*. Jaké zásluhy o vědu to byly, Gauss neuvedl.

U Gausse se setkáváme ještě s jinou zvláštností. Nejen že neměl slova povzbuzení pro ty, o nichž věděl, že se úspěšně zabývali theorií rovnoběžek, nejen že se jich nezastal, když byli napadáni; Gauss se ani jinak nepřičinil, aby pomohl věci kupředu. Ze svých myšlenek neuveřejnil nic, i když o to byl žádán, takže mohl být předem jist, že by ho alespoň někteří četli s porozuměním. Jediné, co publikoval, byly dvě recense o důkazech V. postulátu, ale i ty publikoval anonymně. Uvážíme-li, že ve vědě jsme často svědky toho, jak učenci bojují o prioritu svých objevů a dovedou ji často vášnivě hájit před ostatními, je tím podivnější, že Gauss, ačkoliv mohl být prvním, kdo publikoval něco o nové geometrii, tak neučinil.

Tuto zvláštnost vysvětlují snad některá místa Gaussových dopisů, kde je řečeno zcela otevřeně, že nepublikoval nic z jakéhosi strachu, ze strachu před tím, že by nové názory o geometrii působily příliš revolučně, že by nebyl pochopen, nebo také ze strachu, že by musel ztrácet čas vysvětlováním věci zvídavým nezasvěcencům. Již r. 1829 napsal v dopise Besselovi:

„Také nad jiným thematem, které je pro mne již skoro 40 let staré, jsem se občas ve volných hodinách znovu zamýšlel, totiž nad samými základy geometrie; nevím, zda jsem Vám již řekl něco o svých názorech na tuto věc. Také zde jsem mnohé ještě více upevnil a moje přesvědčení, že nemůžeme vybudovat geometrii zcela a priori, se ještě, pokud to bylo možné, posílilo. Bude však trvat ještě dlouho, než se dostanu k tomu, abych zpracoval svoje velmi rozsáhlá vyšetřování této věci k publikaci, a snad k tomu za mého života ani nikdy nedojde, protože se bojím křiku Boiotů, který by se zdvihl, kdybych chtěl svoje názory říci naplno.“ (Gauss [12], str. 200.)

Podobně psal Gauss před deseti lety (1818) v dopise Gerlingovi:

„Těší mne, že máte odvahu vyjádřit se tak, jako byste uznával možnost, že naše theorie rovnoběžek a s ní i celá geometrie je falešná. Avšak vosy, jejichž hnízdo dráždíte, vám začnou létat kolem hlavy.“

(Gauss [12], str. 179.)

Jestliže jsme se dotkli toho, jak se Gauss podivně zachoval k objevu nové geometrie, a jestliže právě uvedené citáty z dopisů nám měly pomoci najít vysvětlení, pak se musíme zde zmínit ještě o jedné věci, totiž o tom, že se Gauss takovýmto zvláštním způsobem choval i při jiných příležitostech. Gauss měl neobyčejně široký rozhled po matematice a jeho přínos v matematice je mnohostranný. Nejednou však učinil objev mlčky, aniž by komu o tom co řekl. Teprve po letech, když už se jiní sami dopracovali k témuž objevu a publikovali svoje výsledky, Gauss psal svým přátelům, že on na tyto věci přišel již před mnoha lety.

Snad nebude vadit, když se na konci odstavce o Gaussovi pokusíme tento zvláštní rys jeho povahy demonstrovat ještě na jiném případě, přestože se základy geometrie a s theorií rovnoběžek přímo nesouvisí.

Tentokráte šlo o theorii eliptických funkcí. První práci o ní napsal čtyřiadvacetiletý norský matematik N. H. Abel (1802—1829) r. 1826 pro pařížskou Akademii. Vyšla však teprve mnohem později, takže první tištěnou prací o této theorii je jiná Abelova práce, totiž *Recherches sur les fonctiona elliptiques*, která vyšla r. 1828 v Crellově žurnálu. Tehdy (r. 1828) napsal Gauss Besselovi v dopise toto:

„Ke zpracování svých úvah z dávných let (1798) o transcendentních funkcích se ještě nedostanu, protože se ještě musím zabývat mnohými jinými věcmi. P. Abel mě nyní, jak vidím, předešel a zprostil mne této povinnosti vzhledem asi tak k jedné třetině celé látky, zvláště když jeho výklad je tak koncisní a elegantní. Nastoupil právě tutéž cestu jako já v r. 1798, takže velká shoda výsledků není ničím zvláštním." (Gauss [13], str. 248.)

Veřejně však svoje pochvalné mínění Gauss neprojevil, ačkoliv pro Abela mohlo tehdy znamenat mnoho.

Abel byl ještě studentem, když ve věku 22 let dokázal, že algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého nelze řešit algebraicky, a tím první zodpověděl tuto starou otázku algebry. Aby se zmenšily výlohy za tisk, musela být jeho práce (*Mémoire sur les équations algébriques*, 1824), ve které byl zmíněný důkaz podán, natolik zkrácena, že některé pomocné věty byly vůbec vynechány a celek byl pak těžko srozumitelný. Ostatně po několika pokusech znamenitých matematiků současnosti i minulosti zodpovědět starý problém bylo řešení neznámého norského studenta přijímáno s nedůvěrou a vážní učení matematikové mu nevěnovali pozornosti.

Z dopisu Schumachera Gaussovi z r. 1824 vyplývá, že Gaussovi se dostala Abelova práce do rukou — byla ostatně nalezena také v jeho knihovně. Mimo tento dopis není v Gaussově korespondenci nikde zmínka ani o práci, ani o tom, zda Gauss zjistil nebo nezjistil správnost Abelova důkazu. Zdá se, že toto absolutní mlčení znamená, že důkaz přijal s nevraživostí.[41])

V každém případě však Gauss poznal Abelovy schopnosti z jeho prací o eliptických funkcích. Stačilo slovo a Abelovi byly všude otevřeny dveře. A zatím Abel, kterého chudá norská universita vyslala na studijní cestu do Německa a Francie, prochází nepoznán mimo hlavní centra matematického světa. Věhlasné matematiky může pozorovat jen z dálky jako divák; nepřijali ho mezi sebe, ačkoliv byl jedním z nich.

Zmíněnou již práci *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes*, kterou podal r. 1826 pařížské Akademii, měli posoudit Cauchy a osmdesátiletý Légendre. Légendre si stěžoval, že nemůže dobře číst drobné Abelovo písmo, a Cauchy byl

[41]) Gauss se prý totiž hodlal sám tímto problémem zabývat.

plně zaujat vydáváním svých vlastních prací (Abelovu práci vydala Akademie teprve po patnácti letech). Pravá velikost Abelova zjevu byla pochopena až r. 1829. V uznání jeho zásluh byl Abel toho roku jmenován profesorem berlínské university — avšak tato pocta přišla už pozdě. Abel dostal zprávu o svém jmenování na smrtelném loži; ještě téhož roku zemřel v Norsku na souchotiny ve věku 27 let. Když se Gauss dozvěděl o jeho smrti, napsal v dopise Schumacherovi:

„Abelova smrt... znamená velkou ztrátu pro vědu. Kdyby se náhodou tisklo nebo mělo tisknout něco o životě této eminentně nadané hlavy a přišlo Vám to do rukou, prosím Vás naléhavě, abyste mi to zaslal. Chtěl bych také mít jeho portrét, lze-li si ho opatřit. Humboldt, se kterým jsem o Abelovi mluvil, se snažil udělat vše, aby ho získal pro Berlín."

(Bjerkness [16], str. 242.)

Vraťme se však ke Gaussovi. O jeho zvláštním chování poznamenává Bjerkness, Abelův životopisec, toto:

„Klid, s kterým Gauss pozoruje vpád Abela a Jacobiho do oblasti svých výzkumů a zříká se tak velké části své práce, a zvyk uchovat dlouho tajemství o důležitých objevech, tvoří zjev tak zvláštní, že jedině podrobnější biografická studie by ho mohla vysvětlit.

Pokud víme, Gauss se spokojil a posteriori dokázat, že byl cele obeznámen s novými principy: jeho výsledky dovolovaly usoudit, že musel tyto principy znát, a vedle toho zanechal jako svědectví svoje papíry s daty a různé poznámky v dopisech." (Bjerkness [16], str. 112.)

Podobné počínání však bylo vůči mladým matematikům kruté. Dlouho a s nadšením pracovali na svém objevu, byli přesvědčeni, že tvoří novou věc, a pak se jim nejen nedostalo zaslouženého uznání, ale museli slyšet, že Gauss objevil již před mnoha lety totéž co oni. Je přirozené, že je to nepovzbuzovalo nikterak v jejich další činnosti. To se zvlášť ostře projevilo na dalším objeviteli neeukleidovské geometrie, na mladém maďarském matematikovi Janu Bolyaiovi.

26. Jan Bolyai. Vedle Lobačevského a Gausse došel k neeukleidovské geometrii také János (Jan) Bolyai (1802—1860), o jehož otci Farkasovi jsme mluvili v závěru předešlé kapitoly.

Již v době, kdy mladý Jan studoval na gymnasiu, jevilo se u něho vysoké nadání pro matematiku. Jeho otec choval odedávna úmysl poslat ho studovat matematiku ke Gaussovi. Proto se r. 1816 obrátil na Gausse s dopisem, ve kterém vylíčil synovo matematické nadání a svůj úmysl dát ho na dva roky na studium do Götting. Přitom prosil Gausse jako dávného přítele, aby vzal na tyto dva roky Jana k sobě, protože nechtěl nechat patnáctiletého syna úplně samotného a poslat s ním vychovatele, jak bylo tehdy zvykem, by bývalo bylo nad jeho prostředky.

Otec se synem čekal týdny a měsíce, ale Gaussova odpověď nepřicházela. Je snadné si představit, jaké to pro oba, ale hlavně pro Jana, znamenalo zklamání. Otec nebyl tak zámožný, aby syna mohl poslat na některou jinou německou universitu, a ve Vídni nebo v Pešti neviděl žádného schopného matematika. Na druhé straně nechtěl syna vystavit nebezpečí volného akademického života. Tak se stalo, že mladý Jan nastoupil vojenskou dráhu, a to ve Vídni, kde v letech 1818 do 1823 studoval na vojenské inženýrské akademii. To ovšem neznamenalo, že se Jan neměl již věnovat matematice: naopak, otec počítal s tím, že synovi zbude ještě dosti času, aby se jí mohl náležitě zabývat.

Na akademii se mladý Jan ukázal znovu jako vynikající žák, který překvapoval svým nadáním. Současně se však začala projevovat jeho prchlá a popudlivá povaha a jeho nevalné zdraví mu jistě klidu nepřidávalo. Tak se stalo, že po deseti letech vojenské služby byl dán do pense.

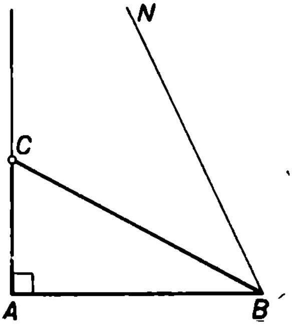
Eukleidovým postulátem se Jan Bolyai zabýval již v době svých studií a v poměrně krátké době dosáhl úspěšně cíle. První popud ke studiu theorie rovnoběžek dostal Jan zřejmě od otce, který ho sám učil matematice a upozornil ho jistě na vážné nedostatky této partie geometrie.

Jan se nejdříve pokoušel dokázat, že ekvidistanta k přímce je opět přímka, a zkoumal proto vlastnosti ekvidistanty za předpokladu, že je to křivka. Speciálně se pokoušel dojít ke sporu důkazem, že pravidelná lomená čára, jejíž všechny vrcholy jsou stejně vzdáleny od dané přímky, musí tuto danou přímku protnout.

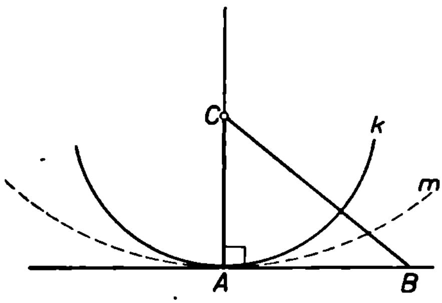
Když Jan r. 1820 psal otci o svých pokusech dokázat Eukleidův postulát, vyděsil ho tím na nejvyšší míru. Starý Bolyai syna prosil a zapřísahal, aby zanechal těchto důkazů:

„Nesmíš bádat o rovnoběžkách touto cestou; znám ji až na sám její konec — také já jsem prošel tuto bezednou noc, každé světlo, každá radost mého života byla v ní uhašena — zapřísáhám Tě skrze Boha!, nech theorii rovnoběžek na pokoji... může tě připravit o všechen Tvůj čas, o Tvoje zdraví, o Tvůj klid a všechno Tvoje životní štěstí.“ (Stäckel [10], str. 76.)

Otcovo napomínání nemělo však na syna žádný vliv; jeho touha a odhodlání pohnout za každou cenu problémem naopak jen stoupaly. Úvah o lomené čáře Jan brzy zanechal, zato však ještě r. 1820 nastoupil cestu, která ho později dovedla k cíli, to je k vybudování abso-



Obr. 140.



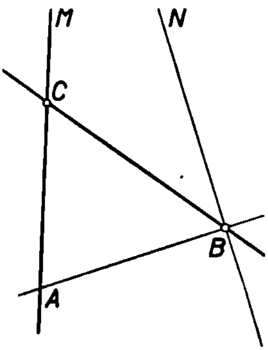
Obr. 141.

lutní geometrie a k přesvědčení, že Eukleidův postulát je na této geometrii nezávislý.

Šlo o tuto myšlenku (podle Stäckela [10], str. 79—80): mějme trojúhelník $\triangle ABC$ s pravým úhlem v A (viz obr. 140) a mysleme si, že se vrchol C bez omezení vzdaluje po přímce $\overline{AC}$. Přímka $\overline{BC}$ má při tom za limitu jakousi přímku $\overline{BN}$. Nechceme-li se opírat o Eukleidův axiom, nemůžeme o úhlu $\sphericalangle\, ABN$ říci nic více, než že nemůže být $\sphericalangle\, CAB + \sphericalangle\, ABN > 2R$.

V souvislosti s touto úvahou byl Jan už blízko pojmu limitní kružnice. Uvažoval totiž dále takto: myslíme-li si, že okolo bodu C jakožto středu je opsán oblouk kružnice k procházející bodem A, při čemž bod C se opět vzdaluje bez omezení po přímce $\overline{AC}$ (viz obr. 141), potom všechny kružnice budou mít za limitu jakousi křivku m, o které opět nemůžeme jen tak beze všeho tvrdit, že je to přímka $\overline{AB}$. Zde Jan Bolyai správně tušil, že z předpokladu, že křivka m je totožná s přímkou $\overline{AB}$, by se dal dokázat Eukleidův postulát (viz naši Větu 18,4).

K těmto důležitým a plodným myšlenkám došel Jan za častých debat se svým přítelem K. Szászem, který s ním studoval na vojenské akademii. Oba přátelé věnovali theorii rovnoběžek každou volnou chvíli. Při jedné takové rozmluvě přišli na šťastnou myšlenku: jestliže se přímka $\overline{BC}$ otáčí okolo bodu B, při čemž C je bod na přímce $\overline{AM}$ (viz obr. 142), pak přímka $\overline{BC}$ po určitou dobu stále protíná přímku $\overline{AM}$, až pojednou od ní, jak se K. Szász vyjádřil, „*odskočí*" a v této poloze $\overline{BN}$ ji lze nazvat „*nejbližší neprotínající přímkou*". Jan ji později nazval *asymptotickou rovnoběžkou* nebo krátce *asymptotou*.



Obr. 142.

Byl to skromný, ale přece jen významný krok vpřed. O geometrii nezávislé na XI. axiomu ovšem neměli tehdy ještě oba přátelé ani potuchy. Proniknout tak daleko stálo Jana Bolyaie ještě mnoho námahy. Někdy na rozhraní let 1820—21 opustil Szász Vídeň, takže Jan už neměl s kým o svých myšlenkách diskutovat.

Ani na otce se nemohl se svými nápady obrátit, protože F. Bolyai se choval k synovým pokusům odmítavě. V jednom dopise píše:

„Přiznávám se, že ani od ‚odskočení' tvých přímek si nic neslibuji. Zdá se mi, že jsem se již také octl v těchto končinách; plavil jsem se ke každému úskalí tohoto pekelného mrtvého moře, ale vždy jsem se vracel s roztříštěným stěžněm a potrhanými plachtami a od té doby se datuje ztráta mého humoru a můj pád." (Stäckel [10], str. 82.)

O nepřemožitelné touze řešit problém rovnoběžek, který ho tolik přitahoval, píše F. Bolyai:

„...Je to skutečná nemoc, jistý druh šílenství, tyranská myšlenka. Je stejná jako kvadratura kruhu, hledání kamene mudrců, transmutace prvků, hledání pokladu." (Stäckel [10], str. 82.)

Čím více pronikal Jan do problému, tím menšího uznání se mu dostávalo se strany otcovy, který již nebyl s to sledovat myšlenky svého geniálního syna. R. 1823 byl Jan už tak daleko, že psal otci:

„Jsem pevně rozhodnut vydat spis o rovnoběžkách, jen co si uspořádám látku a dovolí mi to okolnosti. Dosud jsem tak neučinil, ale cesta, kterou jsem nastoupil, slibuje téměř se vší určitostí dosáhnout cíle, je-li to vůbec možné; cíle jsem ještě nedošel, ale objevil jsem tak důležité věci, že jsem byl sám překvapen, a byla by to věčná škoda, kdyby se měly ztratit; až je, drahý otče, uvidíte, pak to uznáte sám; nyní nemohu víc říci než tolik, že jsem z ničeho stvořil nový svět." (Stäckel [10], str. 85.)

V odpověď napsal F. Bolyai synovi, aby si pospíšil ve spisování, je-li vše tak, jak píše, a aby práci publikoval co nejdříve:

„...a to z dvojího důvodu; jednak proto, že myšlenky snadno přejdou s jednoho člověka na druhého, který je pak může dřív publikovat, jednak proto, že je něco pravdy na tom, že každá věc má svoji dobu, kdy se objevuje současně na různých místech, asi tak jako fialky porůznu vyrážejí na jaře na světlo." (Stäckel [10], str. 85.)

Otec tehdy ovšem sám netušil, jak těsně se těmito prorockými slovy dotýká skutečnosti, neboť tou dobou se opravdu na různých místech Evropy rodila neeukleidovská geometrie.

Nový svět, o kterém se Jan zmiňuje, byla nová geometrie, která před ním vyrostla z pozměněného axiomu o rovnoběžkách. Protože dlouho nedocházel ke sporu, tušil již, že vchází do nové říše geometrických vět a pojmů. Nevíme přesně, kdy přišel k přesvědčení, že nové věty tvoří bezesporný celek, bylo to však někdy krátce kolem počátku r. 1825, tedy když Jan byl sotva třiadvacetiletý. Ještě téhož roku dokončil svůj spis a dohodl se s otcem, že vyjde jako dodatek k jeho knize *Tentamen* pod názvem *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, kde také skutečně r. 1832 vyšel.

Protože však Jan nenalezl u otce uznání ani pochopení, hledal obojí jinde. Na synovo naléhání zaslal r. 1831 F. Bolyai Janův spis ve formě zvláštního otisku (separátu), pořízeného téhož roku, Gaussovi současně s dopisem, ze kterého vyjímáme tuto poznámku:

„Na jeho [Janovo] naléhání zasílám Ti tento spisek: buď tak dobrý, posuď ho svým přísným a vše prohlédajícím okem a v odpovědi, na niž toužebně čekám, napiš o něm bez jakýchkoli ohledů své mínění."

(Stäckel [10], str. 91.)

Gauss dopis sice dostal, ale Janův spis na neštěstí nikoliv: ztratil se ve zmatku, který způsobila tehdy vypuknuvší cholera. R. 1832 zaslal F. Bolyai Gaussovi synův spisek znovu.

„...můj syn dá na Tvůj posudek víc než na mínění kohokoli jiného v celé Evropě." (Stäckel [10], str. 91.)

Tentokráte Janův spisek Gaussovi došel. Gauss ho celý přečetl a svému příteli Gerlingovi napsal:

„Poznamenávám ještě, že mně tyto dny přišel z Maďarska malý spis o neeukleidovské geometrii, ve kterém opět nalézám všechny svoje myšlenky a výsledky. Jsou zde velmi elegantně vyloženy, i když pro nezasvěcence příliš stručně a tudíž poněkud těžko přístupnou formou. Autorem je velmi mladý rakouský důstojník... Považuji tohoto mladého matematika Bolyaie za genia prvého řádu.“ (Gauss [12], str. 221.)

Na rozdíl od tohoto dopisu psal Gauss v odpovědi F. Bolyaiovi víc o sobě než o mladém Janovi.

„Nyní ještě něco o práci Tvého syna.

Jistě se na okamžik zarazíš, jestliže začnu tím, *že ji nemohu chválit*, ale nemohu jinak. Chválit ji by znamenalo chválit sebe samotného: neboť celý obsah spisu, cesta, kterou se Tvůj syn dal, i výsledky, k nimž došel, se téměř všude shodují s mými úvahami, z nichž některé jsem provedl již před 30—35 lety. Skutečně jsem tím nanejvýš překvapen. Měl jsem v úmyslu nepublikovat za svého života vůbec nic ze svých výsledků, z nichž jsem ostatně dosud jen velmi málo zachytil na papír. Mnozí nemají totiž vůbec pravého pochopení pro věc, o kterou zde běží, a já sám jsem našel jen velmi málo lidí, kteří chápali s náležitým zájmem to, co jsem jim sděloval. Aby to mohl někdo chápat, musí si nejdříve dobře uvědomit, co zde vlastně není v pořádku, a v tom většina lidí nemá jasno. Naproti tomu jsem však chtěl časem své úvahy a výsledky sepsat, aby neodešly se mnou do hrobu.

Velmi jsem tedy překvapen, že jsem nyní této práce ušetřen, a velmi mě těší, že právě syn mého starého přítele mě tak zvláštním způsobem předešel...“ (Gauss [12], str. 220.)

F. Bolyai byl Gaussovou odpovědí velmi potěšen, neboť viděl, že jeho syn problém rovnoběžek skutečně rozřešil. Dopis zaslal synovi s poznámkou:

„Gaussova odpověď o Tvé práci je velmi krásná a je naší vlasti a národu ke cti.“ (Stäckel [14], str. 36.)

Zcela jinak však na odpověď reagoval Jan. Zprvu nechtěl vůbec věřit, že Gauss nezávisle na něm a již dlouho před ním dospěl k neeukleidovské geometrii. Odvolával se při tom na Gaussův dopis poslaný otci 1804, ve kterém Gauss ještě doufá, že se mu podaří proplout mezi četnými úskalími marných důkazů. Nějaký čas měl také ošklivé podezření, že otec předčasně sdělil Gaussovi jeho myšlenky a že ho nyní Gauss chce připravit o prioritu. I když se přesvědčil o bezdůvodnosti takového podezření, nemohl pochopit Gaussovo chování. Nemohl pochopit, že Gauss neuznal za nutné tak důležitý objev uveřejnit nebo se o něm alespoň zmínit v tisku.

V Janově pozůstalosti je několik listů, které ukazují, jak pln hořkosti meditoval nad Gaussovým divným chováním. Z nich budiž uvedeno jen toto:

„Podle mého názoru, a jak jsem přesvědčen, také podle názoru každého nepředpojatého člověka, se jeví všechny Gaussem uvedené důvody, proč nechtěl ze svých prací o tomto thematu za svého života nic publikovat, jako chatrné a nicotné. Vždyť ve vědě právě tak jako ve skutečném životě samém se vždy jedná o to, aby nutné a obecně prospěšné, i když ještě ne dosti jasné věci, byly náležitě vysvětlovány a aby chybějící nebo spíše dřímající smysl pro pravdu a právo byl burcován, náležitě utvrzován a podporován. Pochopení pro matematiku je k všeobecné škodě a neštěstí jen u mála lidí živé... Okolnost, že bohužel i mezi matematiky a přitom i mezi nejslavnějšími je mnoho povrchních lidí, nemůže být pro rozumného člověka důvodem, aby pracoval povrchně a průměrně a ponechával vědu v lethargii a v zděděném zastaralém stavu. Takové chování může být nazváno jedině jako protipřirozené a nanejvýš nesmyslné; proto tím hůř, jestliže místo aby psal o způsobu, jak dobré věci proklestit širokou cestu, Gauss se tomu naopak vyhýbá a přitom v pobožných přáních a projevech zármutku vylévá své stížnosti nad nedostatkem náležitého vzdělání lidí. V tom věru nespočívá život ani účinná zásluha..."

(Stäckel [10], str. 96.)

V životě Jana Bolyaie nastal po jeho objevu neeukleidovské geometrie jakýsi zlom: nedostalo se mu oprávněného ocenění jeho práce a stále měl dojem, že ho někdo chce připravit o prioritu jeho objevu. Když se později dozvěděl o Lobačevském, nechtěl věřit, že by věc byla jinak, než že Gauss, který se nechtěl ze strachu před křikem Boiotů exponovat, podnítil k tomu tohoto ruského matematika a sdělil mu Janovy myšlenky. Jeho předrážděná mysl se obírala tímto přesvědčením natolik, že když se mu (r. 1848) dostal do rukou výtisk Lobačevského spisu *Geometrische Untersuchungen*, začal dokazovat, že autor spisu znal *Appendix* a že jim nemohl být konec konců nikdo jiný, než sám Gauss.

Teprve po delší době se J. Bolyai vzchopil z neplodného života, do kterého po svém velkém objevu na čas upadl, a jako by se chtěl mstít za krutou nespravedlnost, snil o dílech, která, jak to sám u sebe myslel, by se mohla postavit vedle děl „göttingenského kolosa", aby Gauss poznal, jak těžce se prohřešil na synovi svého přítele z mládí. A tak kolem r. 1848 začal pro Jana nový úsek jeho života. Vrhal se na velké a těžké problémy matematiky v přesvědčení, že zde dosáhne týchž úspěchů jako v theorii rovnoběžek. Jeho nedostatečný kontakt se současným stavem vědy způsobil, že se s prostou naivností pouštěl do problémů, o jejichž obtížnosti neměl pravou představu. Chtěl na příklad dokázat, že se každá algebraická rovnice dá algebraicky řešit, nebo že každá elementární funkce může být integrována pomocí elementárních funkcí[42]) a pod. Těmto problémům věnoval mnoho bezoddeché a takřka horečné práce, kterou neúnavně vedl, dokud mu těžká nemoc nevyrazila pero z ruky. Zbytek života prožil pak v bídě a opuštěnosti.

27. Zhodnocení. Na konci této kapitoly věnované objevitelům neeukleidovské geometrie nám ještě zbývá podívat se blíže, do jaké míry rozvedl každý z nich tuto disciplinu ve svých spisech, a zhodnotit tak zásluhy těchto matematiků o novou geometrii.

---

[42]) Elementární funkce je název pro jistý obor reálných funkcí, který se dá vymezit takto (Haupt-Aumann: *Differential- und Integralrechnung,* díl II, Berlin 1938, str. 51—52):

1. Mezi elementární funkce patří konstanty (t. j. všechna reálná čísla) a identická funkce ($y = x$).

2. Je-li $f(x)$ elementární funkce, pak také $e^{f(x)}$, $\ln|f(x)|$ (pro ta x, pro něž je $f(x) \neq 0$), $\sin f(x)$, $\arcsin f(x)$ (v posledním případě pro ta x, pro něž je $|f(x)| \leq 1$) a $R(f(x))$ (kde R znamená racionální funkci) jsou elementární funkce.

3. Každá funkce, která se dá složit z konstant a funkce $y = x$ aplikací konečného počtu operací uvedených pod bodem 2, je elementární funkce.

Z uvedené definice plyne, že mezi elementární funkce patří také

a) funkce, jež se dají vyjádřit pomocí odmocnin, neboť na př. $g(x) = \sqrt[n]{f(x)} = e^{\frac{1}{n}\ln|f(x)|}$ (při čemž definici funkce $g(x)$ můžeme doplnit tak, že pro c, pro které je $f(c) = 0$, jest $g(c) = \lim_{x \to c} e^{\frac{1}{n}\ln|f(x)|} = 0$);

b) všechny funkce goniometrické a cyklometrické, neboť na př. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, a také všechny funkce hyperbolické a hyperbolometrické, neboť lze psát na př. $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ a $\operatorname{argsh} x = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$ a podobně také $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ a $\operatorname{argch} x = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

Elementární funkce mají tu vlastnost, že jejich derivace jsou opět elementární funkce. Naproti tomu funkce, jejíž derivace je elementární funkce, není vždy elementární funkcí.

Zmínili jsme se již o tom, že pokud jde o prioritu objevu nové geometrie, byly zde nejasnosti, které vznikly spíše na základě dohadů nebo nacionálních tužeb než na základě historických fakt. Vyskytly se názory, že Gaussovi připadá nejen priorita, ale že teprve jeho objevy inspirovaly Lobačevského a Bolyaie k vlastním úvahám. Byl to na př. známý matematik Felix Klein, který ve svých *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie* (1889—90) napsal:

„Je mimo veškerou pochybnost, že Gaussův vliv podnítil Lobačevského i Bolyaie k jejich bádáním." (1. vydání 1892, str. 175.)

Tomuto závěru se zdály nasvědčovat některé okolnosti: otec J. Bolyaie a Gauss spolu přece studovali v Göttingách, oba se již tehdy zabývali základy geometrie a důkazy V. postulátu a později si o této věci dopisovali. Pokud jde o Lobačevského, byl mezi jeho učiteli na kazaňské universitě Bartels, Gaussův přítel z mládí, který i po odchodu z vlasti byl s Gaussem v písemném styku.

Na příslušném místě jsme se již zmínili, že podrobnější historické zkoumání ukázalo neopodstatněnost této argumentace. Bartels totiž od r. 1808 nedostal až do svého odchodu z Ruska r. 1820 od Gausse žádný dopis. Při tom Gausse opustila víra v jedinečnost eukleidovské geometrie teprve někdy kolem r. 1816. Naproti tomu Lobačevskij ještě r. 1815—16 stál pevně na půdě Eukleidovy geometrie a pokoušel se o různé důkazy V. postulátu až do r. 1823, aniž by měl již podezření, že takový důkaz není možný; tento fakt sám ukazuje, že Lobačevskij nezvěděl nic o Gaussovi od Bartelse, věděl-li vůbec sám Bartels něco o Gaussových výzkumech. Teprve po usilovném bádání v letech 1823 až 1826, jak jsme již řekli, se Lobačevskému podařilo rozetnout gordický uzel, když ukázal, že axiom o rovnoběžkách není k vybudování geometrie nutný. Že Lobačevskij došel ke svému objevu, aniž byl Gaussem nějak ovlivněn, potvrzuje ostatně sám Gauss v některých svých dopisech.

Pokud jde o J. Bolyaie, ukazuje se podobně, že došel k neeukleidovské geometrii úplně samostatně. Jeho otec a Gauss se sice spolu jako studenti göttingenské university zabývali základy geometrie, avšak v těchto otázkách byli úplně rovnocenní. V dopise z r. 1799 píše na příklad Gauss F. Bolyaiovi:

„Velmi mě mrzí, že jsem našich někdejších úzkých styků nevyužil, abych více zvěděl o Tvých pracích v základech geometrie; byl bych si tím byl jistě ušetřil mnoho zbytečné námahy..." (Gauss [12], str. 159.)

Protože žádný z Gaussových dopisů, zaslaných F. Bolyaiovi mezi 1804 až 1832 (kdy Jan vydal svůj *Appendix*), se theorie rovnoběžek vůbec netýkal, nemohl Jan zvědět od otce nic o Gaussových myšlenkách zrodivších se po r. 1804, tedy nic z toho, co by ho snad přivedlo na novou cestu. Podnět k celé Janově práci nevzešel nikterak od Gausse, nýbrž spíše od otce, jehož všechny snahy podat důkaz V. postulátu zůstaly bez úspěchů. Viděli jsme také, že později F. Bolyai zakázal synovi zabývat se theorií rovnoběžek, takže Jan, který se nenechal odradit, byl odkázán sám na sebe.

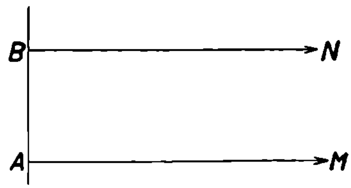
Nyní se postupně podíváme, co všechno každý ze tří objevitelů neeukleidovské geometrie z této nauky znal a kterých věcí z ní si hlavně všímal, tak jak nám o tom svědčí jejich vlastní publikované práce, pozůstalost, dopisy a pod.

O Gaussovi nemáme mnoho zpráv, protože nic nepublikoval. V jeho pozůstalosti bylo nalezeno několik listů papíru, na nichž příležitostně zaznamenal některé svoje myšlenky. Listy nejsou datovány, bylo však možno určit přibližnou dobu jejich vzniku. Týkají se těchto tří themat: rovnoběžek (z doby asi 1831), úměrnosti plochy trojúhelníka a úchylky součtu jeho úhlů od $2R$ (kolem 1832) a objemu jehlanu (kolem 1840).

Rovnoběžky definuje v podstatě týmž způsobem jako Lobačevskij a jako jsme to učinili my v odstavci **17**, kde jsme tyto přímky nazvali souběžkami.

„Jestliže přímky $AM\ldots$, $BN\ldots$ se neprotínají, naproti tomu však každá přímka procházející bodem A a ležící mezi $AM\ldots$ a AB protíná přímku $BN\ldots$, pak se přímka $AM\ldots$ nazývá rovnoběžná s přímkou $BN\ldots$"

(Gauss [12], str. 202.)



Nato nejdříve Gauss dokazuje, že tato definice je nezávislá na volbě bodů A a B, že rovnoběžnost je vztah symetrický (že také $\overline{BN}$ je rovnoběžná s $\overline{AN}$) a transitivní, a posléze, že přímky v tomto smyslu rovnoběžné se neprotínají. Dále zavádí pojem korespondujících bodů na dvou rovnoběžkách (viz náš odstavec **18**, kde jsme tento pojem rozšířili také na přímky různoběžné a rozběžné), dokazuje, že jsou-li A, B, resp. A', B' korespondující body vzhledem ke dvěma rovnoběžkám, pak je vždy $AA' \equiv BB'$ a jsou-li dále body A, B, C na třech různých rovnoběžkách a při tom A a B, jakož i B a C jsou korespondující, pak také body A a C jsou korespondující. Nakonec nazývá slovem „*Trope*" křivku, jež se skládá z korespondujících bodů na všech rovnoběžkách vedených k dané přímce. Jinde nazval tuto křivku *paracykl*. Je zřejmé, že tu jde o limitní kružnici.

Gauss dále zjistil, že t. zv. limitní trojúhelník, t. j. trojúhelník, jehož strany jsou po dvou souběžné, má konečně velký plošný obsah a stanovil výraz pro tento obsah. Věděl dále, že jeho velikost je při tom supremum plošných obsahů všech trojúhelníků neeukleidovského prostoru, a pomocí velikosti tohoto limitního trojúhelníka vyjádřil pak plošný obsah libovolného trojúhelníka. Pokud se týče stanovení objemu čtyřstěnu, odvodil Gauss jeho analytické vyjádření jen ve speciálním případě, kdy totiž každá stěna čtyřstěnu je pravoúhlý trojúhelník.

O objemu obecného čtyřstěnu se zmiňuje v dopise F. Bolyaiovi (psaném r. 1832 současně s posudkem Janovy práce), kde píše, že jeho stanovení není zdaleka tak snadné jako stanovení plošného obsahu obecného trojúhelníka, a předkládá tento problém mladému Bolyaiovi.

Toto je vše, co nalézáme v Gaussově pozůstalosti, kromě drobných poznámek o absolutní míře délek, o součtu úhlů v trojúhelníku a o sférických trojúhelnících, jež jsou roztroušeny v jeho dopisech.

Nyní se obrátíme k Lobačevskému. Ve svých spisech rozvinul novou geometrii jak syntheticky, tak analyticky; k nejzávažnějším výsledkům došel však analyticky.

Po rozboru chybných důkazů Légendrových a Bertrandových se pokusil odstranit vážné nedostatky v budování samých logických základů geometrie a proto některé jeho spisy (*O načalach geometrii*, *Novyje načala geometrii*) počínají výkladem těchto základů, ovšem ještě ne přísně axiomatickým. Po výkladu absolutní geometrie zavádí předpoklad, že součet úhlů trojúhelníka není roven π, a odvozuje hlavní důsledek — existenci asymptotických přímek (souběžek), které nazývá rovnoběžkami. Jejich pomocí zavádí pak limitní kružnici a limitní kouli a ukazuje, že na ní platí eukleidovská geometrie.

Tato vlastnost dovoluje Lobačevskému zavést na limitní kouli trigonometrii, kterou pak převádí na neeukleidovskou rovinu pomocí jím zavedené funkce $\Pi(x)$ (úhel souběžnosti). Studiem závislosti stran a úhlů rovinného trojúhelníka a rozvinutím *trigonometrie neeukleidovské roviny* opouští synthetickou methodu.

V dalším odvozuje analytické vyjádření funkce $\Pi(x)$, totiž

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Pi(x) = a^{-x}, \quad {}^{43})$$

a její vlastnosti, jako na př.

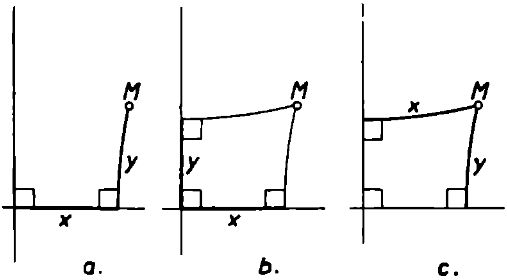
$$\lim_{x\to 0}\Pi(x) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\lim_{x\to \infty}\Pi(x) = 0,$$

$$\Pi(a + b) + \Pi(a - b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\sin\Pi(x + y) = \frac{\sin\Pi(x) \,.\, \sin\Pi(y)}{1 + \cos\Pi(x) \,.\, \cos\Pi(y)}.$$

Dále ukazuje, že volíme-li strany trojúhelníků velmi malé, takže můžeme v analytických výrazech zanedbat jejich vyšší mocniny, dostáváme se k obyčejné eukleidovské geometrii.



Obr. 143.

Po trigonometrii se věnuje *neeukleidovské analytické geometrii.* Přitom vedle polárních souřadnic užívá ještě tří různých souřadných systémů, které v eukleidovské rovině splývají v systém jediný — systém kartézský.

První systém, který můžeme nazvat *pravoúhlý* (viz obr. 143a), bere za první souřadnici úsek na první ose a za druhou příslušnou úsečku na kolmici spuštěné na tuto osu z vyšetřovaného bodu.

Druhý systém, který se dnes označuje jménem *Beltramiho* (viz obr. 143b) bere za souřadnice úseky na obou osách, zatím co třetí systém,

[43]) Konstanta $a > 0$ je zde libovolná, podobně jako ve sférické geometrii můžeme libovolně volit poloměr koule, na níž tuto geometrii uvažujeme.

t. zv. *systém ekvidistantních souřadnic* (viz obr. 143c) bere za souřadnice příslušné úsečky na obou kolmicích spuštěných na osy. V první soustavě jsou křivky $x = \text{const.}$ kolmice na osu x a $y = \text{const.}$ jsou ekvidistanty osy x. V druhé soustavě jsou $x = \text{const.}$, resp. $y = \text{const.}$ kolmice na osu y, resp. x, kdežto ve třetí jsou to ekvidistanty příslušných os.

V těchto různých souřadných soustavách odvozuje rovnice přímek, kružnic a limitních kružnic. Je zajímavé podotknout, že Lobačevskij ve svých spisech nikde nestudoval ekvidistantní křivku ani plochu.

V dalším se pak zabývá výpočty délek úseček a oblouků, na př. kružnice a limitní kružnice, a výpočty plošných obsahů. Ukazuje, že trojúhelníky s týmž součtem úhlů mají týž obsah, že obsah trojúhelníka je přímo úměrný jeho defektu (t. j. rozdílu součtu jeho úhlů od π), a stanoví formule pro obsah pravoúhlého, později pak obecného trojúhelníka, pro obsah kruhu,[44]) pro útvar omezený obloukem limitní kružnice a dvěma jejími osami, pro kulový pás atd. Dále počítá objem různých prostorových útvarů, jako na př. objem limitního trojbokého jehlanu, jehož ramena jsou souběžná a jedno z nich kolmé na rovinu podstavy tvaru pravoúhlého trojúhelníka, a objem limitního kužele (s povrchovými přímkami souběžnými), jejichž pomocí pak stanoví objem rotačních těles, úseče limitní koule a později objem jakéhokoli jehlanu a kužele.

Ačkoli Lobačevskij nechtěl objevovat nová řešení omezených integrálů, jak mu to vytýkal Ostrogradskij, přece se velmi zajímal o aplikace nové geometrie na analysu, zejména na integrální počet. Jak jsme již řekli, viděl Lobačevskij v tom, že pomocí své geometrie znovu a jiným způsobem odvodil známé již integrály, jako na př. integrál *Légendrův*

$$\int_r^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \cos x \, dx}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 r}} = \tfrac{1}{2}\pi \ln(1 + \cos r),$$

důkaz, že jeho nová geometrie je logicky bezesporná a současně také, že jest aplikovatelná uvnitř samé matematiky. Tato jeho řešení

---

[44]) V Lobačevského rovině není poměr obvodu kružnice k jejímu průměru týž pro všechny kružnice, jako tomu je v rovině Eukleidově.

přinesla však přece něco nového. Objem každého tělesa Lobačevského prostoru se dá stanovit integrálem řešitelným elementárními funkcemi[45]) a Lobačevským zavedenou transcendentní funkcí $L(x)$

$$L(x) = x \ln 2 - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \sin 2kx,$$

pro kterou platí

$$L(x) = -\int_0^x \ln \cos t \, dt$$

jestliže je

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

To, že objem jednoho a téhož tělesa bylo lze pomocí nové geometrie stanovit různým rozkladem na elementární části a v různých souřadných soustavách, umožnilo Lobačevskému převádět některé integrály na jednodušší a tímto způsobem Lobačevskij skutečně našel nová řešení integrálů. Při tom se mu mnohdy podařilo naznačit, jakým způsobem lze k uvedenému řešení dojít také čistě analyticky, i když nejčastěji nesrovnatelně obtížnější cestou.

Těmto otázkám věnoval zvláštní spis, totiž *Primenenije voobražaemoj geometrii k nekotorym integralam*, který v sebraných spisech zabírá přes 100 stránek. Je dost málo známo, že integrály, které Lobačevskij spočítal pomocí nové geometrie, jsou pojaty do mnohých sbírek a tabulek omezených integrálů, určených pro potřebu fysiků a inženýrů.

Většina z nich se totiž opírá o tabulky Bierens de Haana,[46]) prvních to tabulek podobného druhu. V jejich prvním vydání jsou bibliografické odkazy na prameny, z nichž Bierens de Haan čerpal, a z nich je patrno, že přes 200 integrálů bylo převzato od Lobačevského, z největší části z jeho spisů *Voobražaemaja geometrija* a *Primenenija voobražaemoj geometrii k nekotorym integralam*, vedle toho však také z dalších dvou spisů, totiž *Sposob uverjatsja v isčezanii beskonečnych strok i peč* (1835) a *Sur la probabilité des résultats moyens* (1842).

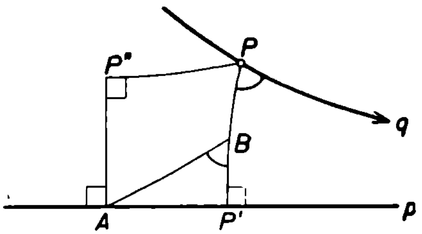
Nakonec shrneme ještě výsledky Jana Bolyaie. Jeho *Appendix* začíná pojmem souběžných přímek a odvozováním jejich základ-

---

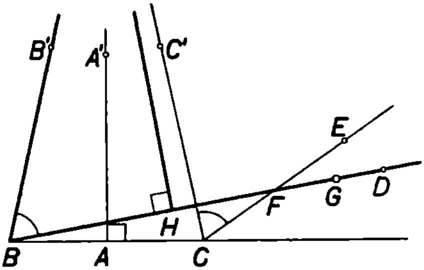
[45]) Viz pozn. [42]), str. 204.

[46]) Bierens de Haan: Tables d'intégrales définies. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam), Deal IV, 1858.

ních vlastností. Dále Jan Bolyai ukazuje, že ke dvěma souběžkám existuje vždy isogonální úsečka (s koncovými body na souběžkách) a že její osa je s oběma přímkami souběžná, a podobně jako Gauss zavádí pomocí korespondujících bodů na souběžkách pojem limitní kružnice a limitní koule (J. Bolyai je označuje jako L-křivku, resp. F-plochu). Dále dokazuje, že když alespoň v jednom případě mají souběžné přímky součet vnitřních úhlů po jedné straně příčky rovný $2R$,



Obr. 144.



Obr. 145.

pak je tomu tak v každém případě a není tomu tak nikdy, jestliže tomu tak není alespoň v jednom případě. Touto cestou nachází rozdíl mezi eukleidovskou a novou geometrií a zavádí t. zv. *absolutní geometrii*[47]) (jako společnou část obou těchto geometrií). Ukazuje, že v eukleidovské geometrii přechází L-křivka v přímku a že v nové geometrii určují každé dva body na F-ploše právě jednu na ní ležící L-křivku a že F-plocha s těmito L-křivkami jako přímkami se řídí eukleidovskou geometrií. Nato odvozuje základní trigonometrické vztahy neeukleidovské roviny a ukazuje, že sférická trigonometrie se dá vybudovat nezávisle na Eukleidově axiomu o rovnoběžkách. Odvozuje také základní formule analytické a diferenciální geometrie, formule pro délky oblouků, obvod kružnice a pod. Zjišťuje dále, že trojúhelníky téhož plošného obsahu mají týž součet úhlů a že plochy trojúhelníků se mají k sobě jako jejich defekty.

Ve svém výkladu se věnuje také konstruktivním úlohám. Uvedeme zde dvě Bolyaiova řešení takových úloh (originál viz Stäckel [11], str. 209—210, §§ 34, 35).

[47]) Název absolutní geometrie pochází od J. Bolyaie.

Máme-li bodem P k přímce p vést souběžku (viz obr. 144), pak spustíme z P na p kolmici, mimo patu P' zvolíme libovolně bod A a na kolmici k p vedenou bodem A spustíme kolmici PP''. Protože je $P''P > AP'$, protne kružnice opsaná kolem bodu A poloměrem $P''P$ přímku $\overline{PP'}$ ve dvou bodech, jeden z nich označme B. Nyní je již $\sphericalangle ABP' \equiv \Pi(PP')$ (používáme Lobačevského symboliky).

Druhá úloha: Máme-li vést kolmici na rameno ostrého úhlu tak, aby byla souběžná s druhým ramenem, čili máme-li obráceně k předcházející úloze nalézt k úhlu α délku a tak, že $\Pi(a) \equiv \alpha$, pak postupujeme takto:

Zvolíme úsečku AB (viz obr. 145) tak, že $\Pi(AB) > \alpha$ (užijeme předchozí konstrukce), na $(AB)^*$ určíme bod C tak, že $AB \equiv AC$, body B a C vedeme souběžky $\overline{BB'}$ a $\overline{CC'}$ k $\overline{AA'} \perp \overline{AB}$. Dovnitř úhlu $\sphericalangle B'BA$ naneseme úhel $\sphericalangle B'BD \equiv \alpha$ a dovnitř úhlu $\sphericalangle (CC')(CA)^*$ úhel $\sphericalangle C'CE \equiv \alpha$. Přímky $\overline{BD}$ a $\overline{CE}$ se vždy protnou. Je-li F jejich průsečík, nanesme na polopřímku $(FB)^*$ úsečku $FG \equiv CF$. Půlící bod H úsečky GB má tu vlastnost, že $\Pi(BH) \equiv \alpha$. (Důkazy obou konstrukcí zde neuvádíme.)

Nakonec J. Bolyai udává konstrukci čtverce, jehož plošný obsah je stejně veliký jako obsah limitního trojúhelníka. Ukazuje, že se dá také sestrojit kružnice s týmž obsahem, takže dochází k překvapujícímu závěru, že v neeukleidovské geometrii existují kružnice, k nimž lze *pomocí pravítka a kružítka* sestrojit čtverec o stejném obsahu. Tuto vlastnost nemají však všechny kružnice neeukleidovské roviny.