KAPITOLA VI.

VYJÁDŘENÍ REGULÁRNÍCH FUNKCÍ POMOCÍ ŘAD.

§ 58. Řady v komplexním oboru. Budiž $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, posloupnost komplexních čísel; její pomocí můžeme vytvořit *řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Označme ještě $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n$ *částečné součty* řady (1).

Definice. Řada (1) je *konvergentní*, existuje-li konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

t. j. pro libovolně malé kladné číslo $\varepsilon > 0$ lze najít takové kladné číslo $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ je

$$|s - s_n| < \varepsilon.$$

Číslo s nazýváme *součtem řady* (1). Neexistuje-li součet, nebo je-li roven ∞, říkáme, že řada *diverguje* (je divergentní).

Následující věta převádí theorii řad s komplexními členy na theorii řad s reálnými členy. Její pomocí snadno přeneseme známé výsledky z theorie řad s reálnými členy do komplexního oboru;

Věta [1]. *Řada* (1) *je tehdy a jen tehdy konvergentní, konvergují-li řady*

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots; \quad \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n + \ldots \tag{2}$$

s reálnými členy.

Důkaz. Označme $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \sigma_n$, $\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n = \tau_n$; pak $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + i \lim_{n\to\infty} \tau_n.$$

Odtud ihned plyne naše věta. Pomocí věty **[1]** dokážeme na př. snadno: konverguje-li řada (1), pak je

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Podobně jako pro řady s reálnými členy definujeme:

Definice. Řada (1) se nazývá absolutně konvergentní, konverguje-li řada

$$|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| + \dots \tag{3}$$

Přenecháváme čtenáři aby dokázal, že absolutně konvergentní řada konverguje a že má vlastnosti známé z analysy reálné proměnné (na př. je možno libovolně přestavět její členy).

Budiž $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, posloupnost libovolných funkcí komplexní proměnné. Pomocí této posloupnosti snadno utvoříme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \tag{4}$$

Bude-li v každém bodě z_0 nějaké oblasti D příslušná řada s konstantními členy $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ konvergentní, budeme říkat, že řada (4) je *konvergentní v oblasti D*. V tomto případě její součet definuje v oblasti D jistou funkci $F(z)$.

Vznikají otázky běžné v theorii řad: bude funkce $F(z)$ spojitá v oblasti D, budou-li v této oblasti spojité všechny funkce $f_n(z)$? Kdy je možné řadu (4) derivovat a integrovat člen po členu? Jako v theorii řad s reálnými členy i zde formulujeme příslušné věty pomocí pojmu stejnoměrné konvergence.

Definice. Řada (4) *konverguje stejnoměrně v oblasti D**) k funkci $F(z)$, jestliže lze pro libovolně malé kladné číslo $\varepsilon > 0$ najít takové číslo $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ a pro všechny body z oblasti D platí

$$|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon, \tag{5}$$

kde

$$F_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z). \tag{6}$$

Smysl této definice je tento: Konvergence řady (4) v bodě z_0 nám zaručuje existenci limity $\lim_{n\to\infty} F_n(z_0) = F(z_0)$, t. j. ke každému libovolně malému $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ platí nerovnost (5). Číslo ε nám udává, jak rychle řada (4)

*) Proložením jsme zdůraznili, že naše definice se vztahuje k celé oblasti. Pojem stejnoměrné konvergence v jednotlivém bodě nemá smysl.

konverguje k uvedenému součtu. Zvolíme-li nyní pevně číslo ε a měníme-li bod z_0, budou se měnit i členy naší řady a obecně může být číslo $N(\varepsilon)$, pro něž je splněna nerovnost (5), v bodě z_1 větší než v bodě z_0. Vidíme tedy, že číslo $N(\varepsilon)$ nezávisí jen na volbě čísla ε, ale že závisí též na bodě z: $N = N(\varepsilon, z)$.

Volme pevně číslo $\varepsilon > 0$ a budiž $z_1, z_2, \ldots, z_k$ několik bodů oblasti D. Čísla N_k ,pro něž je splněna nerovnost (5) v těchto bodech, buďtež $N_1 = N(\varepsilon, z_1), N_2 = N(\varepsilon, z_2), \ldots, N_k = N(\varepsilon, z_k)$. Budeme-li nyní chtít míti zaručený jistý spád konvergence řady (daný číslem ε) pro všechny body z_k současně (stejnoměrně), vidíme, že stačí vzít největší z čísel $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — $N^*(\varepsilon) = \max (N_1, N_2, \ldots, N_k)$ — a pak je nerovnost (5) splněna pro všechna $n > N^*(\varepsilon)$.

Rozšíříme-li nyní tento požadavek na celou oblast D, může se nám stát, že ač budou existovat čísla $N(\varepsilon, z)$ v jednotlivých bodech z oblasti D, nebude existovat jejich maximum. To vyplývá z toho, že nekonečná číselná množina nemusí být vždy shora ohraničená. Existuje-li takové maximum čísel $N(\varepsilon, z)$ v oblasti D, je zřejmě nerovnost (5) splněna pro všechna $n > \mathrm{Max}(N(\varepsilon, z))$ a pro všechny body oblasti D. V tom spočívá pojem stejnoměrné konvergence, zavedený naší definicí. Místo oblasti D uvedené v naší definici můžeme též uvažovat křivku L nebo uzavřenou oblast $\overline{D}$ nebo jakoukoliv jinou nekonečnou bodovou množinu; definice se přenáší na tyto případy bez jakýchkoliv omezení.

Jelikož naše definice souhlasí s obdobnou definicí pro řady s reálnými členy, je možno bez změny přenést všechny věty o stejnoměrně konvergentních řadách do komplexního oboru.*) Nebudeme se tedy zdržovat ani jejich formulací, ani jejich důkazy.

§ 59. Věta Weierstrassova. Známá věta o derivování řad připouští v komplexním oboru podstatné zesílení. Jak známo, řadu s reálnými proměnnými členy můžeme derivovat člen po členu, je-li daná řada konvergentní aspoň v jednom bodě uvažovaného intervalu a je-li řada derivací stejnoměrně konvergentní v tomto intervalu. Jak se snadno nahlédne, plyne odtud okamžitě, že je pak i daná řada stejnoměrně

*) Nejdůležitější jsou věty o spojitosti součtu, o možnosti integrace člen po členu a konečně dostatečná podmínka stejnoměrné konvergence.

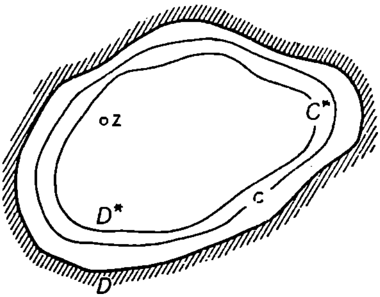
konvergentní v celém intervalu. S druhé strany vidíme, že stejnoměrná konvergence dané řady v uvažovaném intervalu nestačí, není tím ještě zajištěna stejnoměrná konvergence řady derivací.

V komplexním oboru platí věta, kterou první dokázal Weierstrass:

Věta [2]. *Nechť jsou $f_0(z), f_1(z), \ldots$ funkce regulární v jisté oblasti D a nechť řada*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

v této oblasti konverguje a má součet $F(z)$. Konverguje-li naše řada v libovolné uzavřené oblasti $\bar{D}^*$ ležící uvnitř D stejnoměrně, pak: 1. $F(z)$ je regulární v oblasti D, 2. derivace $F^{(k)}(z)$ všech řádu obdržíme, budeme-li derivovat řadu (4) člen po členu, vzniklé řady jsou opět stejnoměrně konvergentní v libovolné uzavřené oblasti $\bar{D}^*$, ležící uvnitř oblasti D.



Obr. 96.

Nejprve dokážeme, že $F(z)$ je regulární. Budiž z libovolný bod oblasti D, $\bar{D}^*$ libovolná uzavřená oblast ležící i se svou hranicí v D a obsahující bod z, budiž C^* hranice D^* a bod ζ budiž libovolný bod křivky C^* (obr. 96). Řada

$$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots$$

stejnoměrně konverguje na hranici C^* a můžeme tedy integrovat člen po členu (pro jednoduchost dělíme obě strany číslem $2\pi i$):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \\ + \ldots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \ldots$$

Protože funkce $f_n(z)$ jsou podle předpokladu regulární v D, existuje podle Cauchyho integrální věty funkce

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^*}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = F(z). \qquad (7)$$

Funkce $F(z)$, která je definována jako součet stejnoměrně konvergentní řady regulárních funkcí, je na hranici C^* spojitá, a tedy integrál vlevo v (7) je typu Cauchyho. Je tedy funkce $F(z)$ representována integrálem typu Cauchyho a tedy podle věty § 52 je regulární v D^* a tedy i v bodě z. Protože bod z byl podle předpokladu libovolným vnitřním bodem oblasti D, je $F(z)$ regulární všude v oblasti D. Tím jsme dokázali prvou část naší věty.

Abychom dokázali druhou část, zvolíme si libovolnou uzavřenou oblast $\overline{D}^*$ a sestrojíme libovolnou uzavřenou křivku C, ležící mezi hranicemi oblastí D a D^*. Budiž d nejmenší vzdálenost mezi body oblasti D^* a křivkou C, budiž z libovolný bod oblasti D^* a ζ libovolný bod na křivce C. Řada

$$\frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{f_0(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \ldots,$$

kde k je libovolné celé číslo, konverguje stejnoměrně na C. Tedy

$$\frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta = \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f_0(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta + \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta +$$
$$+ \ldots + \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta + \ldots$$

a podle vzorce pro derivace analytických funkcí (§ 53)

$$F^{(k)}(z) = f_0^{(k)}(z) + f_1^{(k)}(z) + \ldots + f_n^{(k)}(z) + \ldots \qquad (8)$$

Dostaneme tedy derivace libovolného řádu funkce $F(z)$ derivováním řady (4) člen po členu. Zbývá dokázat, že řady (8) stejnoměrně konvergují pro libovolné celé k.

Protože je řada (4) podle předpokladu stejnoměrně konvergentní na C, lze k libovolnému dostatečně malému $\varepsilon > 0$ zvolit číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N$ platí pro všechna ζ

$$|F(\zeta) - F_n(\zeta)| < \varepsilon$$

[kde $F_n(\zeta)$ je částečný součet řady (4)]. Kromě toho pro všechna ζ platí

$$|\zeta - z| \geqq d$$

a podle věty o odhadu integrálu máme (§ 46) pro všechna $n > N$

$$|F^{(k)}(z) - F_n^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\oint \frac{F(\zeta) - F_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| \leqq \frac{k!}{2\pi}\,\frac{\varepsilon l}{d^{k+1}},$$

kde l je délka křivky C. Protože naše nerovnost platí pro všechna $n > N$ a pro všechny body oblasti $\overline{D}^*$ a $\frac{k!}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon l}{d^{k+1}} = \varepsilon_1$ je libovolné, dokázali jsme tím stejnoměrnou spojitost řady (8) v oblasti $\overline{D}^*$, a tím i celou větu **[2]**.

§ 60. Potenční řady. Potenční *(mocninnou) řadou* nazýváme řadu typu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n, \quad (9)$$

kde z je komplexní proměnná a c_n a a konstanty. Konstanty c_n se nazývají *koeficienty řady* (9) a konstanta *a jejím středem.*

Základní větou theorie potenčních řad je *Abelova věta.*

Věta [3]. *Konverguje-li řada* (9) *v bodě* z_0, *pak konverguje absolutně v celém kruhu* $|z - a| < |z_0 - a|$. *V každém uzavřeném kruhu* $|z - a| \leqq q$, *kde* $q < |z_0 - a|$, *konverguje stejnoměrně.*

Podle předpokladu konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0 - a)^n$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(z_0 - a)^n = 0$. Posloupnost $c_n(z_0 - a)^n$ konverguje a je tedy podle § 7 ohraničená; existuje tedy číslo M tak, že

$$|c_n(z_0 - a)^n| \leqq M$$

pro všechna n.

V uzavřeném kruhu $|z - a| \leqq q$ tedy platí

$$|c_n(z - a)^n| = |c_n(z_0 - a)^n| \left|\frac{z - a}{z_0 - a}\right|^n \leqq M\left(\frac{q}{|z_0 - a|}\right)^n.$$

V kruhu $|z - a| \leqq q$ jsou členy řady v absolutní hodnotě menší než členy geometrické řady s kvocientem $\frac{q}{|z_0 - a|} < 1$, pokud $q < |z_0 - a|$. Pak geometrická řada konverguje a podle známé věty o majorantních řadách řada (9) konverguje stejnoměrně všude v kruhu $|z - a| < |z_0 - a|$. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *Diverguje-li řada* (9) *v bodě* $z = z_0$, *je divergentní i ve všech bodech, pro něž* $|z - a| > |z_0 - a|$.

Důkaz. Kdyby řada (9) konvergovala v nějakém bodě z', pro nějž $|z' - a| > |z_0 - a|$, pak by podle Abelovy věty konvergovala i v bodě z_0, což je spor.

Příklad 1. *Geometrická řada*

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

absolutně konverguje v kruhu $|z| < 1$. *V libovolném uzavřeném kruhu* $|z| \leqq q$, *kde* $q < 1$, *konverguje stejnoměrně. Pro* $|z| > 1$ *diverguje.*

Důkaz plyne přímo z Abelovy věty, uvážíme-li, že řada konverguje pro všechna reálná $z = q$, kde $0 \leqq q < 1$, a diverguje pro $q = 1$. Pro $q = 1$ řada diverguje, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Přenecháváme čtenáři, aby si dokázal, že pro $|z| < 1$ platí

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1 - z}.$$

Příklad 2. *Potenční řada*

$$1 + z + 2!\, z^2 + \ldots + n!\, z^n + \ldots$$

konverguje jen v bodě $z = 0$. Důkaz: pro libovolné reálné $z = x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + 1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} = \lim_{n\to\infty} (n + 1)\, x = \infty$$

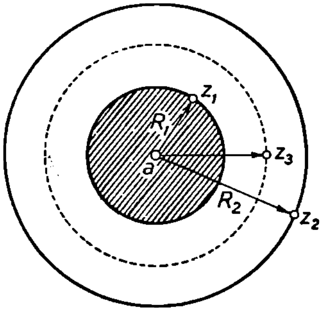
a odtud podle D'Alembertova kriteria pro řady s kladnými členy plyne divergence řady pro všechna $x \neq 0$. Podle Abelovy věty nemůže tedy konvergovat pro žádná komplexní $z \neq 0$.

Příklad 3. Potenční řada

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

konverguje podle D'Alembertova kriteria *pro všechna komplexní* $z \neq \infty$.

Při vyšetřování oboru konvergence libovolné řady (9) mohou nastat jen tyto tři případy: 1. řada konverguje jen ve svém středu, 2. řada konverguje pro všechna konečná z, 3. řada konverguje pro určitá konečná z a pro ostatní diverguje. Výše uvedené tři příklady ukazují, že se všechny tři případy skutečně vyskytují. Probereme si podrobně poslední případ. Nechť řada (9) konverguje v bodě z_1 a diverguje v bodě z_2. Pak podle Abelovy věty konverguje pro všechna z, pro která platí $|z - a| < |z_1 - a| = R_1$, a diverguje pro všechna z, pro něž $|z - a| > |z_2 - a| = R_2$ (zřejmě $R_1 \leq R_2$). Je-li $R_1 = R_2$, položíme $R_1 = R_2 = R$ a řada (9) konverguje pro všechna z uvnitř kruhu $|z - a| < R$ a diverguje pro všechna z vně tohoto kruhu.



Obr. 97.

Je-li $R_1 \neq R_2$, sestrojíme bod $z_3 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = R_3$. Konverguje-li řada (9) v tomto bodě, konverguje i v kruhu $|z - a| < R_3$, diverguje-li v tomto bodě, diverguje i ve všech bodech vně kruhu $|z - a| = R_3$.

V obou případech se mezikruží, v němž je třeba ještě určit konvergenci resp. divergenci řady, zúží na polovinu. Na takto sestrojené mezikruží opět aplikujeme náš postup a v limitě obdržíme takové číslo R, že řada (9) konverguje všude uvnitř kruhu $|z - a| < R$ a diverguje všude vně tohoto kruhu. Konvergence řady na kružnici $|z - a| = R$ zůstává nevyřešena. Číslo R těchto vlastností budeme nazývat *poloměrem konvergence* řady (9) a kruh $|z - a| < R$ jejím *oborem konvergence.*

Pokud se týká případu 1., budeme považovat za poloměr konvergence číslo $R = 0$ a v případě 2. číslo $R = \infty$.

Tím jsme dokázali větu.

Věta [4]. *Každá potenční řada* (9) *má konečný nebo nekonečný poloměr konvergence.*

V každém uzavřeném kruhu $|z - a| \leq R' < R$ konverguje řada (9) podle Abelovy věty stejnoměrně. Odtud a z věty Weierstrassovy plyne, že řada

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (10)$$

definuje svým součtem funkci regulární uvnitř jejího oboru konvergence. Dále podle Weierstrassovy věty platí pro každý bod z vnitřku konvergenčního kruhu

$$\begin{aligned} f'(z) &= c_1 + 2c_2(z-a) + \ldots + nc_n(z-a)^{n-1} + \ldots \\ f''(z) &= 2c_2 + 3\,.\,2c_3(z-a) + \ldots + n(n-1)\,c_n(z-a)^{n-2} + \ldots \qquad (11) \\ f^{(n)}(z) &= n!c_n + (n+1)!\,c_{n+1}(z-a) + \ldots \end{aligned}$$

Dosadíme-li v (10) a v (11) $z = a$, dostaneme

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ldots \qquad (12)$$

a řadu (10) můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f''(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \end{aligned} \qquad (13)$$

Řadu (13) nazýváme Taylorovou řadou funkce $f(z)$. Tím jsme dokázali další větu.

Věta [5]. *Součet potenční řady* (9) *je regulární uvnitř konvergenčního kruhu a řada* (9) *je Taylorovou řadou svého součtu.*

Z věty [5] plyne: ať obdržíme rozklad nějaké funkce v potenční řadu jakýmkoliv způsobem, je tato řada vždy Taylorova.

§ 61. Vyjádření regulárních funkcí pomocí Taylorovy řady. Budiž $f(z)$ funkce regulární v kruhu $|z-a| < R$. Vybereme dvě libovolná čísla R_1, R_2 tak, že $0 < R_1 < R_2$ a označíme C kružnici $|z-a| = R_2$. Pak podle Cauchyho integrální věty (§ 51) je pro všechna z z kruhu $|z-a| < R_2$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

odkud

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \cdot \frac{d\zeta}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}}. \qquad (14)$$

Předpokládejme, že bod z leží v kruhu $|z - a| < R_1$. Protože bod ζ leží na C, je

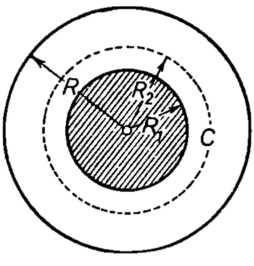
$$\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| < \frac{R_1}{R_2} < 1.$$

Odtud plyne, že v kruhu $|z - a| < R_1$ konverguje stejnoměrně řada

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right) + \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^n + \ldots$$

(viz př. 1 § 60). Dosazením tohoto výrazu do (14) a integrováním člen po členu (což můžeme učinit v důsledku stejnoměrné konvergence) dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - a} + \frac{z - a}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots \tag{15}$$



Obr. 98.

Koeficienty potenční řady funkce $f(z)$ jsou

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Použijeme-li vzorce (38) § 52, je možno přepsat řadu (15) jako řadu Taylorovu

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \ldots \tag{13}$$

a vztah (16) udává integrální tvar koeficientů Taylorovy řady.

Poznamenejme ještě, že jsme ve své úvaze mohli volit číslo R_1 libovolně blízko číslu R_0, takže rozklad v řadu (13) platí pro všechny body z kruhu $|z - a| < R$. Kromě toho za kruh $|z - a| < R$ můžeme vždy volit největší kruh se středem v bodě a, v jehož vnitřku je funkce $f(z)$ regulární. Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta [6]. *Každá funkce regulární v bodě a může být rozvinuta v Taylorovu řadu* (13). *Tato řada konverguje v největším kruhu* $|z - a| < R$, *v němž je ještě funkce* $f(z)$ *regulární.*

Poznámka. Funkce $f(z)$ nemůže být regulární ve všech bodech kružnice $|z - a| = R$. Důkaz: Nechť je ve všech bodech kružnice $|z - a| = R$ funkce $f(z)$ regulární. Pak pro každý bod ζ kružnice $|z - a| = R$ existuje taková kružnice $|z - \zeta| < r_\zeta$ se středem v bodě ζ, že $f(z)$ je uvnitř této kružnice regulární. Budiž $r > 0$ nejmenší z těchto r_ζ (od důkazu, že takové nejmenší r_ζ existuje, upouštíme); pak je $f(z)$ regulární všude uvnitř kruhu $|z - a| < R + r$ a podle věty **[6]** by řada (13) konvergovala i v tomto kruhu, což je proti předpokladu.

Není-li funkce $f(z)$ regulární v bodě $z = a$, ale je regulární v libovolném okolí tohoto bodu, nazýváme bod *a singulárním bodem* funkce $f(z)$ (viz výše § 48).

Řada Taylorova tedy konverguje všude uvnitř kruhu, který neobsahuje žádné singulární body dané funkce a prochází singulárním bodem, nejbližším ke středu konvergence.

Podle vět **[5]** a **[6]** můžeme vyslovit novou definici regularity funkce $f(z)$ v bodě $z = a$, ekvivalentní s definicí § 14: Funkce $f(z)$ je *regulární v bodě* $z = a$, dá-li se v jeho okolí rozvinout v Taylorovu řadu. Z této definice by bylo možno odvodit všechny vlastnosti regulárních funkcí. Řady

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \tag{17}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots; \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \tag{18}$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots; \quad \cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \tag{19}$$

konvergují pro všechna konečná z a funkce jimi definované jsou regulární v celé konečné rovině. Hlavní hodnota logaritmu $\ln(1 + z)$ je regulární všude kromě bodu $z = -1$ a můžeme ji tedy rozvinout v Taylorovu řadu

$$\ln(z + 1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \tag{20}$$

konvergentní v kruhu $|z| < 1$. Protože se dá obecná exponenciální funkce definovat pomocí logaritmické funkce (§ 32), platí i pro její hlavní hodnotu rozklad

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \dots \quad (21)$$

a řada konverguje pro $|z| < 1$*) (m je libovolné komplexní číslo).

Rozklady (17)—(21) dostaneme ihned ze vzorce (13), dosadíme-li $a = 0$. Neliší se od rozvojů známých z analysy funkcí reálné proměnné; Taylorovy rozvoje a vzorce pro derivování elementárních funkcí v komplexním a reálném oboru jsou tedy shodné.

§ 62. Nulové body regulární funkce. Věta o jednoznačnosti. Definice. Bod $z = a$ se nazývá *nulový bod* funkce $f(z)$, je-li $f(a) = 0$.

Budiž $f(z)$ funkce regulární v bodě $z = a$, který je jejím nulovým bodem, a nechť není identicky rovna nule v žádném okolí bodu $z = a$. Pak nejsou všechny koeficienty Taylorova rozvoje rovny nule (neboť pak by byla funkce $f(z) \equiv 0$ v některém okolí bodu $z = a$) a Taylorova řada má tvar

$$f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots, \quad (22)$$

kde $c_n \neq 0$ a $n \geqq 1$. Číslo n nazýváme *řádem* nulového bodu.

Ze vzorce (22) plyne: *Řád nulového bodu $z = a$ se rovná řádu první nenulové derivace v bodě $z = a$.*

Podle (22) může být regulární funkce v okolí svého nulového bodu vyjádřena ve tvaru

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \quad (23)$$

kde

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - a) + \dots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0.$$

Funkce $\varphi(z)$ je spojitá v bodě a, neboť řada, kterou je definována, konverguje v jistém okolí bodu a (a je též regulární jako součet potenční řady) a je $\lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = \varphi(a)$. Podle předpokladu $\varphi(a) = c_n \neq 0$ a tedy i v jistém okolí bodu a $\varphi(z) \neq 0$.

*) Bod $z = -1$ je regulárním bodem funkce $(1 + z)^m$ jen tehdy, je-li m celé kladné číslo nebo nula. V tom případě má (21) jen konečný počet členů.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon = \frac{|c_n|}{2}$; v důsledku spojitosti existuje pak takové okolí bodu a $|z - a| < \delta$, v němž $|\varphi(z) - \varphi(a)| < \varepsilon$, t. j. $|\varphi(z) - c_n| < \frac{|c_n|}{2}$, a tedy v okolí $|z - a| < \delta$ bodu $z = a$ je funkce $\varphi(z)$ různá od nuly.

Odtud a z (23) plyne další věta:

Věta [7]. Nechť je $f(z)$ *regulární v bodě a a nechť není identicky rovna nule v žádném okolí bodu a. Je-li bod a nulovým bodem funkce* $f(z)$, *vždycky existuje takové okolí bodu a, v kterém je funkce* $f(z)$ *různá od nuly.*

Z věty **[7]** plyne:

Důsledek. *Je-li* 1. *funkce* $f(z)$ *regulární v bodě* $z = a$ *a* 2. *existuje-li posloupnost nulových bodů konvergující k bodu a, pak* $f(z) \equiv 0$ *v jistém okolí bodu a.*

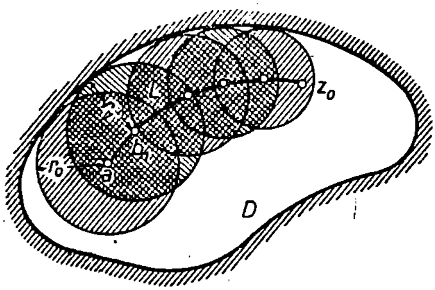
Důkaz: Ze spojitosti funkce $f(z)$ v bodě a plyne $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$, t. j. bod a je nulový bod funkce $f(z)$, a předpoklad, že $f(z) \neq 0$ v jistém okolí bodu a, je ve sporu s větou **[7]**.

Z věty **[7]** plyne ještě důležitá věta:

Věta [8]. Jsou-li $f_1(z)$ a $f_2(z)$ *dvě funkce regulární v oblasti D a jsou-li jejich hodnoty stejné pro jistou bodovou posloupnost konvergující k bodu a, který je vnitřním bodem oblasti, je*

$$f_1(z) \equiv f_2(z)$$

všude uvnitř této oblasti.



Obr. 99.

Důkaz. Utvořme funkci $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. $f(z)$ je regulární v D a body a_n jsou jejími nulovými body. Odtud z důsledku věty **[7]** plyne, že $f(z) \equiv 0$ v jistém okolí $|z - a| < r_0$ bodu a. Zbývá jen dokázat, že $f(z) \equiv 0$ v celé oblasti D. Budiž z_0 libovolný bod oblasti D.

Spojíme bod z_0 s bodem a libovolnou křivkou L, která leží celá v D (obr. 99). Označme b_1 libovolný bod křivky L ležící v okolí $|z - a| < r_1$ bodu a. Protože je v tomto okolí $f(z) \equiv 0$, jsou všechny koeficienty Taylorova rozvoje

$$f(z) \equiv f(b_1) + \frac{f'(b_1)}{1}(z - b_1) + \ldots + \frac{f^{(n)}(b_1)}{n!}(z - b_1)^n + \ldots$$

rovny nule. Tato řada definuje funkci $f(z)$ v jistém největším kruhu $|z - b_1| < z_1$, který leží celý v D, a zřejmě všude v tomto kruhu $f(z) \equiv 0$. Bod b_1 volíme co nejblíže kružnici $|z - a| = r_0$, takže kruh $|z - b_1| < r_1$ padne zcela určitě částečně mimo kruh $|z - a| < r_0$. Nyní zvolíme na křivce L bod b_2 v kruhu $|z - b_1| < r_1$ a celý postup opakujeme. Snadno zjistíme, že funkce $f(z) \equiv 0$ v celém kruhu $|z - b_2| < r_2$, který opět padne částečně mimo kruh $|z - b_1| < r_1$. Po konečném počtu kroků padne konečně bod z_0*) do kruhu $|z - b_n| < r_n$ a bude tedy $f(z_0) = 0$.

Poznámka. Z věty [8] plyne, že funkce regulární v jisté oblasti je plně definována svými hodnotami v bodech jisté bodové posloupnosti konvergující k bodu a. Otázka existence funkce, přijímající apriori dané hodnoty v bodech takové posloupnosti, není tím ovšem nikterak vyřešena zrovna tak jako methoda skutečné konstrukce takové funkce. Těmito otázkami se zabývají různé interpolační theorie.

§ 63. Analytické pokračování. Pojem analytické funkce. Nechť dvě oblasti D_1 a D_2 mají společnou část, kterou označíme oblast Δ. Mají-li oblasti D_1 a D_2 více společných částí (obr. 100 b), budeme uvažovat jen jednu z nich. Budiž dána v oblasti D_1 regulární funkce $f_1(z)$ a v oblasti D_2 též regulární funkce $f_2(z)$.

Definice. Nabývají-li funkce $f_1(z)$ a $f_2(z)$ v oblasti Δ těchže hodnot, nazýváme funkci $f_2(z)$ *analytickým pokračováním funkce $f_1(z)$ v oblasti D_2 přes oblast Δ*.

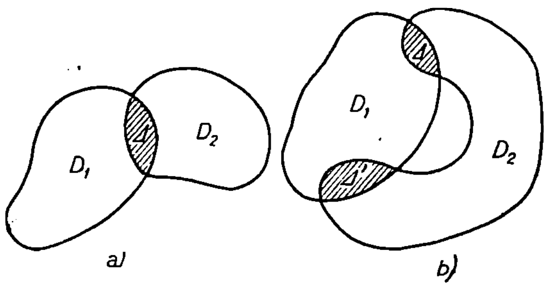
Pro dané oblasti D_1, D_2 a Δ je analytické pokračování funkce $f_1(z)$ v D_2 definováno jednoznačně, což plyne okamžitě z věty o jed-

*) Nebudeme zde uvádět přesný důkaz toho, že můžeme skutečně dosáhnout bodu z_0 konečným počtem kroků.

noznačnosti [8] předešlého paragrafu. Mají-li oblasti D_1 a D_2 více společných částí, může být analytické pokračování funkce $f_1(z)$ přes oblast Δ různé od analytického pokračování téže funkce přes oblast Δ' (v téže oblasti D_2, viz obr. 100). Ujasníme si to na příkladě.

Budiž dán řetězec oblastí $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tak, že každé dvě za sebou následující oblasti D_k a D_{k+1} mají společnou část Δ_k. V každé z oblastí D_k je dána regulární funkce $f_k(z)$.

Definice. Nabývají-li funkce $f_k(z)$ a $f_{k+1}(z)$ pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ stejných hodnot v oblasti Δ_k, nazývá se $f_n(z)$ *analytickým pokračováním funkce* $f_1(z)$ v oblasti D_n přes řetězec oblastí $\{D_k\}$.



Obr. 100.

Pro pevná $D_1, D_2, \ldots, D_n$ a $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ je analytické pokračování jednoznačně určeno. Změníme-li jakýmkoliv způsobem články v řetězu nebo společné oblasti Δ_k, může dojít i ke změně analytického pokračování. Může se stát, že první a poslední člen řetězce jsou shodné (viz obr. 101); pak může být analytické pokračování $f_n(z)$ v oblasti D, které dostaneme proběhnutím celého řetězce kolem dokola, různé od výchozí funkce $f_1(z)$. Objasníme si to na konkretním případě. Budiž dán kruh $|z - 1| < \frac{1}{2}$ a označme tuto oblast D_1.

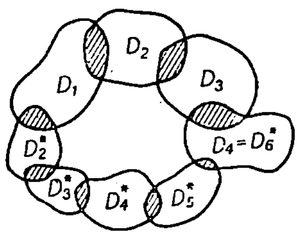
V D_1 budiž dána regulární funkce $f_1(z) = \int_{1\,L}^{z} \frac{dz}{z}$, kde L je cesta spojující libovolný bod této oblasti s bodem 1. Pak

$$f_1(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

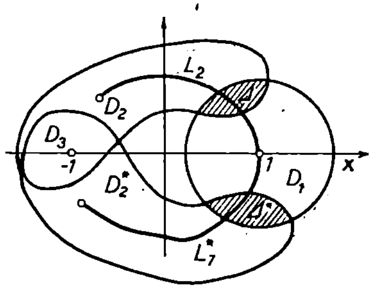
při čemž $\arg z$ značí hlavní hodnotu argumntu a nabývá v horní polorovině kladných a v dolní polorovině záporných hodnot. Budiž dále D_2 a D_2^* oblasti zobrazené na obr. 102 a budiž D_3 jejich společná část. Analytickým pokračováním funkce $f_1(z) = \ln z$ v oblasti D_2 resp. D_2^* budou

$$f_2(z) = \int_{1\ L_2}^{z} \frac{dz}{z}; \quad \text{resp.} \quad f_2^*(z) = \int_{1\ L_2^*}^{z} \frac{dz}{z},$$

kde L_2 resp. L_2^* jsou cesty spojující bod 1 s bodem z, ležícím v D_2 resp. v D_2^*. Tyto funkce jsou též rovny $\ln|z| + i \arg z$, ale argument pro



Obr. 101.



Obr. 102.

prvou z nich nabývá jen kladných hodnot, pro druhou z nich jen záporných hodnot. V oblasti D_3 definují tyto dvě funkce dvě rozličná pokračování analytické funkce $f_1(z) = \ln z$, neboť je na př. $f_2(-1) = \pi i$ a $f_2^*(-1) = -\pi i$. Z našeho příkladu vidíme, že analytické pokračování může být závislé na volbě řetězce oblasti.

Náš příklad nám dovoluje vyjasnit ještě další poměry, o nichž se již mluvilo. Nechť je oblast D tvořena body oblastí D_2 a D_2^*; pak má s oblastí D_1 společné dvě navzájem nesouvislé části Δ a Δ_2^* (obr. 102). Analytická pokračování funkce $f_1(z) = \ln z$ z oblasti D_1 do oblasti D přes oblast Δ resp. oblast Δ_2^* se navzájem liší. Pro prvé z nich nabývá $\arg z$ v $\ln|z| + i \arg z$ hodnot kladných, pro druhé z nich hodnot záporných. Sestrojme ještě analytické pokračování funkce $f_1(z)$ z oblasti D_1 do oblasti D_1 pomocí řetězce $D_1D_2D_2^*D_1$. Obě dvě funkce se budou lišit o konstantní hodnotu $2\pi i$.

Zavedení pojmu analytického pokračování nám dovoluje zformulovat obecný pojem analytické funkce, o kterém bylo již mnohokrát hovořeno (§§ 25, 30, atd.). Budiž $f_2(z)$ v oblasti D_2 analytickým pokračováním funkce $f_1(z)$ z oblasti D_1. Zahrneme-li body oblastí D_1 a D_2 do jedné oblasti D, budeme se dívat na funkce $f_1(z)$ a $f_2(z)$ jako na jedinou funkci v oblasti D, danou rovnicemi

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{je-li } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{je-li } z \in D_2. \end{cases}$$

Mají-li oblasti D_1 a D_2 jen jednu společnou část, pak funkce $f(z)$ podle toho, co bylo výše řečeno, je jednoznačná a regulární v D. Mají-li oblasti D_1 a D_2 několik společných částí, může mít analytické prodloužení funkce $f_1(z)$ přes různé tyto části v oblasti D_2 různé hodnoty. Funkce $f(z)$ se může stát mnohoznačnou. V obou případech ji však budeme nazývat analytickou.

V obecném případě analytického prodloužení funkce $f_1(z)$ z oblasti D_1 přes řetězec oblastí $D_1, D_2, \ldots, D_n$ do oblasti D_n můžeme též body všech D_k zahrnout do jedné oblasti D a považovat $f_k(z)$ za jedinou funkci definovanou rovnicemi

$$f(z) = f_k(z) \quad \text{pro} \quad z \in D_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Definice. Funkce $f(z)$, která je analytickým pokračováním regulární funkce do oblasti D, se nazývá *analytickou* v oblasti D.

Jak jsme již řekli, může být tato funkce jednoznačná nebo též mnohoznačná. V prvém případě bude regulární.

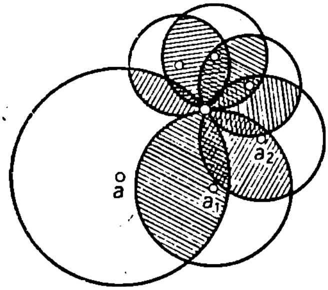
Dále se umluvíme uvažovat i řetězec oblastí $D_1, D_2, \ldots, D_n$ jen o jednom článku D_1. To nám umožní nazývat každou funkci regulární v jisté oblasti analytickou v této oblasti.

Definice. Budiž dána v oblasti D jednoznačná regulární funkce $f(z)$. Sestrojme všechna možná analytická pokračování této funkce ve všech možných řetězcích v rovině z. Shrneme všechna takto získaná prodloužení v jedinou, obecně nekonečně mnohoznačnou funkci $F(z)$, budeme ji nazývat *úplnou analytickou funkcí*.

Regulární funkce sestrojené jako analytické pokračování v různých částech roviny budeme nazývat jejími regulárními větvemi.

Všechny funkce, o kterých jsme hovořili v kapitole III, byly analytické.

Principiálně velmi prostý způsob konstrukce analytické funkce pochází od Weierstrasse. Jako základ konstrukce vezmeme potenční řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = f(z)$ s nenulovým poloměrem konvergence — t. zv. *regulární element* analytické funkce. Protože $f(z)$ je regulární všude v kruhu $|z-a| < r$, lze ji v okolí bodu a_1, který náleží do tohoto kruhu, rozvinout v Taylorovu řadu



Obr. 103.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a_1)}{n!} (z-a_1)^n.$$

Takto konstruovaná řada je jistě konvergentní v kruhu se středem v bodě a_1, pokud celý tento kruh leží ještě v kruhu $|z-a| < r$. Může se však stát, že tato řada konverguje i ve větším kruhu, a pak definuje analytické pokračování funkce $f(z)$, neboť ve společné části obou kruhů (čárkováno na obr. 103) $f_1(z) \equiv f(z)$. Pro body kruhu $|z-a| < r_1$ ležící v kruhu $|z-a| < r$ to plyne okamžitě z konstrukce funkce $f_1(z)$ a pro ostatní z jednoznačnosti rozvoje.

Tuto konstrukci můžeme libovolně opakovat, vybírajíce za středy konvergenčních kružnic Taylorových řad vždy regulární body předcházející funkce (elementu). V závěru obdržíme úplnou analytickou funkci obecně mnohoznačnou. Jednotlivé elementy (t. j. součty jednotlivých potenčních řad) budou tvořit její regulární větve.

Potenční řady*) představující elementy úplné analytické funkce konvergují, pokud jejich konvergenční kružnice neobsahují některý ze singulárních bodů funkce (§ 61). Singulární body budou tedy tvořit hranici oblasti, na kterou je možno prodloužit tu kterou funkci (*existenční oblast funkce*). Tato hranice může být tvořena uzavřenými křivkami (t. zv. *přirozená hranice*), oblouky křivek nebo též jednotlivými body.

*) Další výklad má jen informativní popisný charakter; přesný důkaz závěru § 63 je mimo rámec naší knihy.

Pro jednodušší funkce je jejich existenční hranice tvořena jednotlivými isolovanými singulárními body. Singulární body mají *jednoznačný* nebo *mnohoznačný charakter*, podle toho, zda příslušná funkce je v dostatečně malém okolí jednoznačná či mnohoznačná. Tak na př. singulární bod jednoznačný je singulární bod $z = 0$ funkce $w = \frac{1}{z}$ (v bodě $z = 0$ má funkce $\frac{1}{z}$ nespojitost). Podrobně se budeme těmito body zabývat v § 65 a dalších.

Mnohoznačným singulárním bodem — častěji takové singulární body nazýváme *body rozvětvení* — je bod $z = 0$ funkce $\sqrt[n]{z}$ (derivace $\frac{\mathrm{d}\sqrt[n]{z}}{\mathrm{d}z}$ neexistuje v tomto bodě). Další příklad poskytuje funkce Lnz v bodě $z = 0$ (funkce je tam nespojitá). Obecnou diskusí těchto bodů se nebudeme v našich úvahách zabývat.

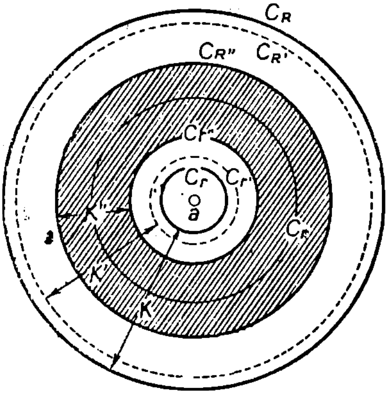
Z jednotlivých konvergenčních kruhů elementů analytické funkce můžeme sestrojit Riemannovu plochu, na níž bude naše funkce jednoznačná. Když při pokračování elementu nějaké analytické funkce pomocí jistého řetězce konvergenčních kruhů padne nový konvergenční kruh na jeden z předcházejících, musíme si ho myslet umístěný na druhém listě Riemannovy plochy, ležícím nad či pod listem, na němž leží předcházející kruhy řetězce. Obecnou konstrukcí listů Riemannovy plochy analytické funkce se zde nebudeme zabývat, jen čtenáři připomeneme, aby si zopakoval strukturu Riemannovy plochy funkcí $\sqrt[n]{z}$ a Lnz, jak byla vyložena v kap. III.

§ 64. Laurentovy řady. Budiž $f(z)$ regulární v jistém mezikruží $K : r < |z - a| < R$. Sestrojíme ještě mezikruží $K' : r' < |z - a| < R'$ a $K'' : r'' < |z - a| < R''$ tak, že mezikruží K' leží uvnitř K a K'' uvnitř K' (obr. 104). Funkce $f(z)$ je regulární v uzavřeném mezikruží K' a možno ji tedy vyjádřit Cauchyho integrálem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{24}$$

kde $C_{R'}$ a $C_{r''}$ jsou kružnice tvořící hranici mezikruží se středem v bodě a (viz § 51). Předpokládejme, že bod z leží v mezikruží K''. Pak v prvém z integrálů (24) je $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < \frac{R''}{R'} = q_1 < 1$ a zlomek v integrandu je možno rozložit v geometrickou řadu

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots,$$



Obr. 104.

která konverguje stejnoměrně pro všechna ζ na kružnici $C_{R'}$. Dosadíme do prvého z integrálů (24) a integrujeme člen po členu. Dostaneme

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \quad (25)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (26)$$

Poznamenejme však, že zde není možno v (26) vyjádřit koeficienty c_n ve tvaru $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, neboť $f(z)$ není v bodě $z = a$ regulární.

V druhém z integrálů (24) je $\left|\frac{\zeta - a}{z-a}\right| < \frac{r'}{r''} = q_2 < 1$, a tedy

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} - \frac{\zeta - a}{(z-a)^2} - \frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3} - \ldots - \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n} - \ldots;$$

geometrická řada, kterou jsme obdrželi, konverguje stejnoměrně pro všechna ζ na kružnici $C_{r'}$. Dosadíme do druhého z integrálů (24), integrujeme člen po členu a dostaneme

$$\begin{aligned} f_2(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots, \end{aligned} \tag{27}$$

kde

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r'}} f(\zeta)\,(\zeta - a)^{n-1}\,d\zeta,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Zaměníme nyní ještě index $-n$ ve vzorcích (27) a (28) indexem n, probíhajícím hodnoty $-1, -2, -3, \ldots$; a máme konečný výsledek

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{c_n}{(z-a)^{-n}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n. \end{aligned} \tag{29}$$

Dále je možno podle (13) § 47 zaměnit v (26) a (28) integrační cestu libovolnou kružnicí, ležící v mezikruží K'. Pak — po záměně indexu $-n$ na n v (28) — je možno psát (26) a (28) jako jediný vzorec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{30}$$

Protože je možno volit poloměry r'' a R'' libovolně blízko poloměrům r a R a podle (30) koeficienty c_n nezávisí na volbě těchto poloměrů, plyne z toho hned, že rozvoj (29) platí v celém mezikruží K.

Definice. Řada (29), jejíž koeficienty jsou dány vztahem (30), se nazývá *Laurentovou řadou* funkce $f(z)$ v mezikruží K. Řady (25) resp. (27) se nazývají *normální* resp. *hlavní* částí Laurentovy řady.

Normální část Laurentovy řady

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{25}$$

je obyčejná potenční řada. Z konvergence této řady v mezikruží K plyne její konvergence v celém kruhu $|z-a| < R$ a podle § 61 můžeme konvergenční kružnici rozšířit až k nejbližšímu singulárnímu bodu funkce.

Hlavní část Laurentovy řady

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{27}$$

je potenční řada pro proměnou $Z = \dfrac{1}{z-a}$. Podle předpokladu konverguje v mezikruží $\dfrac{1}{R} < |Z| < \dfrac{1}{r}$ a podle Abelovy věty konverguje tedy v kruhu $|Z| < \dfrac{1}{r}$, t. j. konverguje pro všechna z vně kruhu $|z-a| < r$. Poloměr konvergence můžeme zmenšovat, pokud nepadne na hranici konvergenčního kruhu některý ze singulárních bodů funkce.

Mezikruží K, ve kterém konverguje Laurentova řada, je tedy maximálním mezikružím, v kterém je funkce regulární, a na každé z obou jeho hranic leží aspoň jeden singulární bod funkce. Při tom se může mezikruží K rozšířit až na kruh s vyjmutým středem, $0 < |z-a| < R$, po případě se může vně rozšířit až na celý vnějšek kruhu s vyjmutým bodem $z = \infty : r < |z-a| < \infty$.

Z Abelovy věty ještě plyne, že uvnitř každého uzavřeného mezikruží patřícího do mezikruží K konverguje Laurentova řada stejnoměrně.

Výsledky obsahuje věta:

Věta [9]. *Každou funkci regulární v mezikruží K: $r < |z-a| < R$ můžeme rozvinout v Laurentovu řadu*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{29}$$

kde se koeficienty c_n vyjádří pomocí (30); *mezikruží K je přitom maximální mezikruží, v němž je $f(z)$ regulární. Normální část Laurentovy řady konverguje všude v $|z-a| < R$ a hlavní část všude vně kruhu $|z-a| < r$. Laurentova řada konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném mezikruží $r' \leq |z-a| \leq R'$, jež patří do K.*

Poznámka. Z (30) plyne podle věty o odhadu integrálu § 46 pro koeficienty

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varrho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leqq \frac{M \cdot 2\pi\varrho}{2\pi\varrho^{n+1}} = \frac{M}{\varrho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

kde M je maximum $|f(z)|$ na kružnici C_ρ a ϱ její poloměr. Nerovnosti

$$|c_n| < \frac{M}{\varrho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{31}$$

se nazývají *Cauchyho odhady pro koeficienty Laurentovy řady.*

Nechť je nyní dána libovolná řada v kladných a záporných mocninách $(z - a)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Podle toho, co bylo dříve řečeno, se snadno přesvědčíme, že ta část řady, která obsahuje jen positivní mocniny $(z - a)$, konverguje v jistém kruhu $|z - a| < R$ a část obsahující jen negativní mocniny $(z - a)$ konverguje vně jistého kruhu $|z - a| > r$. Bude-li $r < R$, pak naše řada konverguje stejnoměrně v každé uzavřené oblasti patřící do mezikruží K: $r < |z - a| < R$. Označme $f(z)$ její součet, který podle právě řečeného existuje všude v mezikruží K a je tam i všude regulární (věta Weierstrassova § 59). Budiž C_ρ kružnice $|z - a| = \varrho$ ležící v K; v důsledku stejnoměrné konvergence řady

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\zeta - a)^{k-n-1}$$

na kružnici C_ρ můžeme integrovat člen po členu podél této kružnice. Podle (31) § 50 bude z integrálů na pravé straně různý od nuly jen integrál pro $k - n - 1 = -1$, t. j. $k = n$.

Jako výsledek jsme dostali

$$\oint_{C_\varrho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = 2\pi i c_n$$

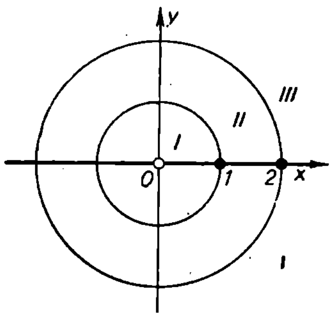
a tím je dokázána tato věta:

Věta [10]. *Libovolná řada typu*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k,$$

konvergentní v jistém mezikruží $r < |z-a| < R$, je v tomto mezikruží Laurentovou řadou funkce definované jejím součtem.

Z věty **[10]** ihned plyne, že jakýmkoliv způsobem získaný rozvoj funkce $f(z)$ podle positivních a negativních mocnin $(z-a)$ je jejím Laurentovým rozvojem.



Obr. 105.

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

je regulární v „mezikružích" (I): $|z| < 1$, (II): $1 < |z| < 2$, (III): $2 < |z|$. Než budeme hledat její Laurentův rozvoj, napíšeme si ji ve tvaru

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

V mezikruží (I) pro $|z| < 1$ konvergují geometrické řady

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots\right) \\ \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} = -(1+z+z^2+\ldots) \end{aligned} \qquad (32)$$

a řada Laurentova pro funkci $f(z)$ je obyčejná potenční řada

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots\right)+(1+z+z^2+\ldots) = \\ &= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\ldots \end{aligned} \qquad (33)$$

Tento rozvoj je zřejmě správný, neboť bod $z = 0$ není singulárním bodem funkce $f(z)$.

V mezikruží (II) první z řad (32) platí dále, ale druhý z rozvojů je třeba nahradit rozvojem

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

konvergujícím pro všechna $|z| > 1$. Odtud je ihned vidět, že v mezikruží (II) má $f(z)$ rozvoj

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right).$$

V mezikruží (III) je třeba nahradit prvou z řad (32) řadou

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \ldots\right),$$

konvergentní pro všechna $|z| > 2$, zatím co rozvoj pro $\dfrac{1}{z-1}$ z mezikruží (II) platí i v mezikruží (III), funkce $f(z)$ má v mezikruží III rozvoj

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \ldots$$

Objasníme si ještě souvislost mezi Fourierovými řadami známými z analysy funkcí reálné proměnné a řadami Laurentovými.*) Nechť je funkce $f(z)$ regulární v sebemenším mezikruží $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$; vždy tam může být rozvinuta v Laurentovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\, e^{-in\Theta}\, d\Theta.$$

*) Viz K. Petr: Počet integrální, str. 367 a násl., II. vyd., JČMF, Praha, 1931. [*Pozn. překl.*]

Pro body $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ na jednotkové kružnici obdržíme

$$F(t) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \tag{34}$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Theta}\, \mathrm{d}\Theta. \tag{35}$$

Řada (34) s koeficienty (35) představuje *Fourierovu řadu v komplexním tvaru* pro funkci $F(t)$. To plyne ihned z rovnice

$$F(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + c_{-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{36}$$

kde jsme při odvození posledního vztahu položili $c_0 = \frac{1}{2}a$, použili Eulerovy formule a dosadili $c_n + c_{-n} = a_n$, $\mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = b_n$. Pro koeficienty a_n a b_n platí podle (35)

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta)\, \mathrm{d}\Theta, \quad a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta) \cos n\Theta\, \mathrm{d}\Theta,$$

$$b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{\mathrm{i}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta) \sin n\Theta\, \mathrm{d}\Theta;$$

a_0, a_n, b_n jsou tedy koeficienty Fourierovy řady pro funkci $F(t)$. Tím je tvrzení dokázáno. *Na jednotkové kružnici je Laurentova řada shodná s Fourierovou řadou funkce $F(t) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, kde pro okamžik považujeme Laurentovu řadu za funkci reálného argumentu t (parametru na kružnici).*

V analyse reálné proměnné se dokazuje, že ve Fourierovu řadu lze rozvinout každou funkci reálné proměnné v intervalu $0 \leq t \leq 2\pi$, pokud vyhovuje jistým dosti obecným předpokladům (t. zv. podmínky Dirichletovy). Odtud plyne, že se libovolná komplexní funkce $F(t) = u(t) + iv(t)$ dá též rozvést ve Fourierovu řadu, pokud funkce u a v vyhovují uvedeným podmínkám. Provedeme-li postup opačným směrem, dostaneme Fourierovu řadu v komplexním tvaru (34). *Komplexní tvar Fourierovy řady platí tedy vždy, když platí příslušný* *tvar reálný.* Obecně nemusí existovat regulární funkce $f(z)$ na kružnici $|z| = 1$ tak, že $f(e^{it}) = F(t)$. V tom případě řada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta)\, e^{-in\Theta}\, d\Theta,$$

diverguje pro všechna $|z| \neq 1$.

§ 65. Isolované singulární body. Definice. Budiž $f(z)$ regulární v „mezikruží" $0 < |z - a| < R$. V bodě $z = a$ není $f(z)$ regulární. Bod a pak nazýváme *isolovaným singulárním bodem funkce* $f(z)$.

Z úvah předešlého paragrafu plyne, že v „mezikruží" $0 < |z - a| < R$, přimykajícím se k isolovanému bodu, může být funkce $f(z)$ rozvinuta v Laurentovu řadu (29). Přitom je možno rozšířit poloměr R až do nejbližšího singulárního bodu. Normální část Laurentovy řady konverguje všude v $|z - a| < R$ a hlavní část všude kromě bodu $z = a$.

Ze vzorce (30) pro koeficienty Laurentovy řady pro $n = -1$ dostaneme

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varrho} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{37}$$

kde C_ϱ je kružnice $|z - a| = \varrho$ a ϱ libovolné číslo $0 < \varrho < R$.

Porovnáním s definicí residua v § 48 dostaneme ihned důležitou větu:

Věta [11]. *Residuum funkce $f(z)$ v isolovaném singulárním bodě a je rovno koeficientu při $(z - a)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ v okolí bodu a.*

Použití této věty bude věnována celá další kapitola.

Rozlišujeme tři druhy isolovaných singulárních bodů podle chování funkce v jejich okolí.

Definice. Isolovaný singulární bod se nazývá

a) *odstranitelným singulárním bodem,* jestliže existuje **konečná** limita

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \neq \infty,$$

b) *pólem* (nepodstatně singulárním bodem), je-li

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty,$$

c) *podstatně singulárním bodem* jestliže $\lim_{z \to a} f(z)$ neexistuje.

Dále si probereme podrobně všechny tři případy.

§ 66. Odstranitelné singulární body. Z definice plyne (jelikož limita je konečná) že funkce $f(z)$ je v okolí bodu $z = a$ ohraničená. Budiž $|f(z)| \leqq M$; pak v Cauchyho nerovnosti pro koeficienty Laurentovy řady

$$|c_n| < \frac{M}{\varrho^n} = M\varrho^{-n} \tag{31}$$

můžeme zvolit číslo ϱ tak malé, že pro všechny koeficienty se záporným indexem platí $c_n = 0$ (neboť pro $n < 0$ $\varrho^{-n} \to 0$ pro $\varrho \to 0$). V Laurentově rozvoji zbudou tedy jen členy s positivními mocninami $z - a$ a rozvoj v okolí bodu $z = a$ bude obsahovat jen normální část:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots \tag{38}$$

Naopak má-li funkce $f(z)$ v okolí isolovaného singulárního bodu Laurentův rozvoj typu (38), existuje $\lim_{z \to a} f(z) = c_0 \neq \infty$ a singulární bod je odstranitelný. Tím jsme dokázali:

Věta [12]. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod $z = a$ byl odstranitelným singulárním bodem funkce $f(z)$ je, aby Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ obsahoval jen normální část:*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

Poznámka 1. Jestliže rozvoj (38) platí i v bodě $z = a$, t. j. $f(a) = c_0$, je $f(z)$ regulární v kruhu $|z - a| < R$ a řada je shodná s potenční řadou. Jestliže je bod $z = a$ podle předpokladu singulárním bodem funkce $f(z)$, která v něm není regulární, pak v něm buď není $f(z)$ definována, nebo $f(a) \neq c_0$. Tuto singularitu můžeme odstranit, položíme-li definitoricky $f(a) = c_0$. Odtud byl také odvozen název odstranitelný singulární bod.

Poznámka 2. Je-li bod $z = a$ odstranitelným singulárním bodem funkce $f(z)$, je funkce $f(z)$ v jeho okolí ohraničená. Toto tvrzení platí i naopak: *Je-li funkce $f(z)$ ohraničená v okolí některého svého isolovaného singulárního bodu, je tento bod odstranitelným singulárním bodem.*

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

není definována pro $z = 0$. Pro $z \neq 0$ ji lze rozvést v řadu

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Bod $z = 0$ je zřejmě odstranitelným singulárním bodem funkce $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Z rozvoje plyne

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Doplníme-li definici naší funkce pro bod $z = 0$ takto: $f(0) = 1$, bude naše funkce regulární i v bodě $z = 0$.

Všimněme si ještě toho, že podle věty 11 § 65 je *residuum naší funkce v bodě $z = 0$ rovno nule.*

§ 67. Póly. Z definice plyne, že lze vždy najít takové okolí $0 < |z - a| < R$ bodu $z = a$, v kterém je funkce $f(z)$ různá od nuly (neboť podle § 12 je vždy $|f(z)| > M$ ať si zvolíme jakkoliv velké $M > 0$.)

V takto konstruovaném okolí je funkce $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, jejíž jmenovatel je podle uvedeného předpokladu od nuly různý, regulární. Je zřejmě $\lim_{z \to a} g(z) = 0$ a tedy $g(z)$ má v bodě $z = a$ odstranitelnou singularitu. Položíme $g(a) = 0$ a funkce $g(z)$ bude regulární v kruhu $|z - a| < R$ a bod $z = a$ bude jejím nulovým bodem. Naopak bude-li bod $z = a$ nulovým bodem funkce $g(z) \not\equiv 0$, která je regulární v tomto bodě, pak (podle existenční věty § 62) v jistém okolí $0 < |z - a| < R$ bodu a bude funkce $g(z)$ různá od nuly. V tomto okolí bude funkce $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, pro kterou bude bod $z = a$ zřejmě pólem, regulární. Tím jsme dokázali větu:

Věta [13]. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $f(z)$ regulární v jistém okolí bodu a: $0 < |z - a| < R$ měla v tomto bodě svůj pól, je, aby funkce*

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

měla v bodě $z = a$ svůj nulový bod. Přitom předpokládáme, že $g(a) = \lim_{z \to a} g(z) = 0$, a pro důkaz opačným směrem $g(z) \not\equiv 0$ a $g(z)$ je regulární v jistém okolí bodu $z = a$.

Definice. Řád nulového bodu $z = a$ funkce $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ se nazývá *řádem pólu $z = a$* funkce $f(z)$.

Budiž $z = a$ pólem řádu m funkce $f(z)$. Podle věty **[13]** a výsledků § 62

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = c_m(z - a)^m + c_{m+1}(z - a)^{m+1} + \ldots = (z - a)^m \varphi(z),$$

kde funkce $\varphi(z)$, $\varphi(a) = c_m \neq 0$, je regulární v okolí bodu $z = a$. Odtud pro jisté okolí bodu $z = a$ platí

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^m} \{b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \ldots\},$$

neboť funkce $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ je regulární v bodě $z = a$, a můžeme ji tedy rozvést v Taylorovu řadu ($b_0 = \dfrac{1}{\varphi(a)} = \dfrac{1}{c_m} \neq 0$). Změníme-li označení koeficientů a zavedeme-li vhodné pojmenování, dá se poslední rovnost přepsat ve tvaru

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \tag{39}$$

kde $c_{-m} = b_0 \neq 0$. Hlavní část Laurentova rozvoje v okolí pólu má tedy jen konečný počet členů. Naopak, má-li hlavní část Laurentova rozvoje v okolí jistého isolovaného singulárního bodu jen konečný počet členů, je tento bod jejím pólem. Důkaz: Nechť má řada tvar (39); znásobíme celou rovnici $(z - a)^m$ a dostaneme

$$\varphi(z) = f(z)\,(z - a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + c_{-m+2}(z - a)^2 + \ldots$$

Funkce $\varphi(z)$ je regulární, neboť podle definice $\varphi(z) = c_{-m}$ v bodě

$z = a$. Budiž m index posledního členu v hlavní části Laurentova rozvoje (39); pak je $c_{-m} \neq 0$ a

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \infty,$$

t. j. $z = a$ je pólem funkce $f(z)$. Protože $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \frac{1}{\varphi(z)} =$

$= (z-)a^m\{b_{-m} + b_{-m+1}(z-a) + \ldots\}$, kde $b_{-m} = \frac{1}{c_{-m}} \neq 0$, řád pólu je právě m. Tím jsme dokázali větu **[14]**.

Věta [14]. *Podmínka nutná a postačující pro to, aby bod $z = a$ byl pólem funkce $f(z)$ je, aby hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = a$ obsahovala jen konečný počet členů:*

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n;$$
$$c_{-m} \neq 0.$$

Index posledního členu hlavní části (podle předpokladu různý od nuly) udává řád pólu $z = a$.

Věty **[13]** a **[14]** slouží jako kriteria k identifikaci pólů.

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z^2+1)(z+3)^2}$$

má tři póly: $z_{1,2} = \pm$ i prvého řádu a $z_3 = -3$ druhého řádu $\left(\text{tyto body jsou nulovými body těchže řádů pro funkci } \frac{1}{f(z)}\right)$.

Objasněme si zde ještě *hydromechanický význam pólů*. Komplexní potenciál pole s vírem intensity Γ a zřídlem vydatnosti Q, kde oba jsou v bodě $z = a$ (*vířivé zřídlo*), se rovná

$$\Phi(z) = \frac{Q - \mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln}(z-a)$$

(viz př. 2 a 3 § 39 a též př. 4 úlohy ke kap. IV). Vířivé zřídlo „intensity" $Q - \mathrm{i}\Gamma = q$ má tedy komplexní potenciál $\Phi(z) = \frac{q}{2\pi} \operatorname{Ln}(z-a)$, který má v bodě $z = a$ bod rozvětvení. Mějme nyní pole se dvěma vířivými zřídly intensit $q' = \frac{p_2}{h}$ a $q'' = -\frac{p_2}{h}$ v bodech $z_1 = a - h$ a $z_2 = a$. Pole, které obdržíme jako limitní případ tohoto pole, přibližují-li se obě zřídla navzájem, nazýváme *polem dipólu momentu* p_2. Jeho komplexní potenciál je

$$\Phi_2(z) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{p_2}{2\pi h} \operatorname{Ln}(z - a + h) - \frac{p_2}{2\pi h} \operatorname{Ln}(z - a) \right\}$$

$$= \frac{p_2}{2\pi} \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Ln}(z - a + h) - \operatorname{Ln}(z - a)}{h} = \frac{p_2}{2\pi} \frac{1}{z - a},$$

kde jsme při odvození limity použili definice derivace. Komplexní potenciál má zřejmě v bodě $z = a$ pól *prvého řádu*. Tento limitní postup můžeme opakovat pro pole dvou dipólů s nekonečnými momenty $p_2' = \frac{p_4}{h}$ a $p_2'' = -\frac{p_4}{h}$ v bodech $z_1 = a - h$ a $z_2 = a$, t. zv. *pole dipólu*. Jeho komplexní potenciál bude

$$\Phi_4(z) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{p_4}{2\pi} \frac{1}{z - a + h} - \frac{p_4}{2\pi h} \frac{1}{z - a} \right\} =$$

$$= \frac{p_4}{2\pi} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{z + h - a} - \frac{1}{z - a} \right\} = -\frac{p_4}{2\pi} \frac{1}{(z - a)^2}$$

a budeme mít v bodě $z = a$ *pól druhého řádu*. Indukcí snadno odvodíme, že obecně *multipól* násobnosti $2m$ jako limitní případ splynutí dvou multipolů násobnosti $2(m - 1)$ s nekonečnými momenty bude mít komplexní potenciál

$$\Phi_{2m}(z) = (-1)^{m-1} \frac{p_{2m}(m-1)!}{2\pi} \cdot \frac{1}{(z - a)^m},$$

který bude mít v bodě $z = a$ *pól řádu m*.

Naopak *každý pól řádu m funkce $f(z)$ v bodě $z = a$ můžeme považovat za souhrn multipólů v bodě $z = a$, jejichž násobnost nepřevyšuje $2m$ a jejichž momenty jsou rovny koeficientům v hlavní části Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = a$.*

V závěru odvodíme vzorce pro výpočet residuí v pólech funkce $f(z)$. Z rozvoje (39) plyne

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \\ + c_0(z-a)^m + \ldots$$

Abychom určili koeficient c_{-1} budeme $(m-1)$-krát derivovat; dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!\, c_{-1} + m(m-1)\ldots 2c_0(z-a) + \ldots$$

a budeme limitovat pro $z \to a$ (přímé dosazení není možné v levé části, neboť $f(a) = \infty$). Hledaný vzorec má tvar

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \tag{40}$$

Speciálně pro pól prvého řádu máme

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z). \tag{41}$$

Budiž $f(z)$ definována v okolí bodu $z = a$ jako podíl dvou regulárních funkcí

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

při čemž $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Z předešlého je vidět, že funkce $f(z)$ má v bodě $z = a$ pól prvého řádu. V tomto případě však můžeme napsat vzorec (41) ve tvaru

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(a) \lim_{z\to a} \frac{1}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \tag{42}$$

(kde jsme použili věty o limitách a toho, že $\psi'(a) \neq 0$). Vzorec (42) je velmi výhodný pro stanovení residuí v pólech prvého řádu.

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

má pól druhého řádu v bodě $z = 0$ a póly prvého řádu v bodech $z_k = \pm \sqrt{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (neboť $g(z) = \sin z^2$ a tedy $g(z_k) = 0$,

$g'(z_k) = 2z_k \cos z_k^2 \neq 0$ pro $k \neq 0$ a $g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$). Residua v bodech z_k, $k \neq 0$ najdeme snadno podle (42),

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{g'(z_k)} = \frac{1}{2z_k \cos z_k^2} = \frac{(-1)^k}{2z_k},$$

a residuum v bodě $z = 0$ podle (40):

$$c_{-1}^{(0)} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left\{ \frac{z^2}{\sin z^2} \right\} = \lim_{z\to 0} \frac{2z \sin z^2 - 2z^3 \cos z^2}{\sin^2 z^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2z\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \dots\right) - 2z^3\left(1 - \frac{z^4}{2!} + \dots\right)}{\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \dots\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{2}{3}z^7 + \dots}{z^4 + \dots} = 0.$$

Poslední výsledek plyne též z toho, že $f(z)$ pro $0 < |z| < \sqrt{\pi}$ je regulární funkcí argumentu z^2, a proto její Laurentův rozvoj má jen sudé mocniny.

§ 68. Podstatně singulární body. Blížíme-li se k podstatně singulárnímu bodu funkce, neexistuje ani konečná, ani nekonečná limita $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Z toho plyne, že existují aspoň dvě bodové posloupnosti mající za limitu bod $z = a$ takové, že posloupnosti příslušných funkčních hodnot $f(z_n')$ resp. $f(z_n'')$ mají různé limity. Platí věta Weierstrassova:

Věta [14]. *Je-li bod $z = a$ podstatně singulárním bodem funkce $f(z)$, lze ke každému libovolnému komplexnímu číslu A najít takovou bodovou posloupnost $\{z_n\}$ konvergující k bodu $z = a$, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Větu dokážeme nejprve pro $A = \infty$. Funkce $f(z)$ nemůže být ohraničená v žádném okolí bodu a, neboť pak by byl bod a podle poznámky 2 § 66 odstranitelným singulárním bodem. To znamená, že se pro libovolné n najde vždy v okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ bod z_n, pro který $|f(z_n)| > n$. Pak zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$ a věta pro $A = \infty$ je dokázána.

Budiž nyní $A \neq \infty$. Pak buď v každém okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ leží bod z_n, pro nějž $f(z_n) = A$, nebo existuje okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{N}$, v kterém $f(z) \neq A$. V prvém případě věta zřejmě platí, neboť posloupnost bodů z_n je právě hledaná posloupnost. V druhém případě je funkce

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

v okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{N}$ regulární. Bod $z = a$ je isolovaným singulárním bodem této funkce. Může být jen podstatně singulární, neboť v opačném případě by existovala konečná nebo nekonečná limita v bodě $z = a$ funkce $g(z)$, a tím i konečná nebo nekonečná limita funkce $f(z)$: $\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \left(A + \frac{1}{g(z)}\right)$. Podle právě dokázané první části pak existuje posloupnost bodů z_n konvergující k bodu $z = a$ tak, že $\lim_{n \to \infty} g(z_n) = \infty$. Pro tuto bodovou posloupnost je zřejmě $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{g(z_n)} = A$ a věta je úplně dokázána.

Poznámka. Podobné vlastnosti má reálná funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ v okolí bodu $x = 0$. Tak na př. pro bodovou posloupnost $x_n = \frac{1}{4\pi n} \to 0$ má $\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin n\pi = 0$ a pro posloupnost $x_n = \frac{2}{(4n + 1)\pi} \to 0$ je $\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin(4n + 1) \frac{1}{2}\pi = 1$. Změnou posloupnosti můžeme změnit i hodnotu limity, pro posloupnosti $x_n \to 0$ můžeme předepsat limitě A všechny možné hodnoty intervalu $-1 \leqq A \leqq 1$. Podle Weierstrassovy věty může funkce komplexní proměnné $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ pro $z_n \to 0$ nabývat všech možných limitních hodnot.

Funkce, jejichž hlavní část Laurentova rozvoje v bodě $z = a$ má jen konečný počet členů, mají podle vět **[14]** a **[12]** v tomto bodě nepodstatnou singularitu; platí proto zřejmě věta **[16]**.

Věta [16]. *Nutná a postačující podmínka, aby funkce $f(z)$ měla v bodě $z = a$ podstatnou singularitu, je, aby hlavní část jejího Laurentova rozvoje v okolí bodu $z = a$ měla nekonečný počet členů*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{43}$$

Poznamenejme ještě, že pro určení residua funkce v podstatně singulárním bodě bývá obyčejně nutné stanovit přímo koeficient c_{-1} v rozvoji (43).

Příklad 1. Funkce

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

má v bodě $z = 0$ podstatnou singularitu, neboť už pro reálná $z = x$ neexistuje limita $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ $\left(\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0\right)$. Laurentův rozvoj v okolí bodu $z = 0$ má tvar

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots$$

(stačí v rozvoji (17) § 51 dosadit $\frac{1}{z}$ místo z). Odtud

$$\mathbf{res}\, f(0) = \mathbf{1}.$$

Příklad 2. Funkce

$$f(z) = e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

kde $z = a$ je komplexní konstanta, má v bodě $z = 0$ též podstatnou singularitu. Máme

$$f(z) = e^{\frac{az}{2}} \cdot e^{-\frac{a}{2z}} = \left\{1 + \frac{a}{2}z + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^2 z^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 z^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{2}\right)^4 z^4 + \dots\right\} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{a}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{2}\right)^4 \frac{1}{z^4} - \dots\right\},$$

z čehož určíme koeficient při $\frac{1}{z}$:

$$\operatorname{res} f(0) = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{a}{2}\right)^5 + \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{a}{2}\right)^7 - \ldots =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} \,{}^{*}).$$

§ 69. Rozvoj funkce v okolí nekonečně vzdáleného bodu. Budiž funkce $f(z)$ regulární v jistém okolí nekonečně vzdáleného bodu. Základní definice § 65 zůstávají beze změny, neboť pojem limity je formulován stejně pro $z \to \infty$ jako pro $z \to a \neq \infty$. Nicméně se kriteria pro klasifikaci singulárních bodů (věty **[12]**, **[14]** a **[16]**) změní, jak uvidíme v následujících úvahách.

Dosadíme $z = \frac{1}{Z}$ a

$$f(z) = f\left(\frac{1}{Z}\right) = F(Z),$$

kde funkce $F(Z)$ je regulární v jistém okolí $0 < |Z| < \frac{1}{R}$ bodu $Z = 0$. Charakter singularit funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ a funkce $F(Z)$ v bodě $Z = 0$ je tentýž (neboť $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{Z\to 0} F(Z)$). V případě *odstranitelné singularity* máme tedy

$$f(z) = F(Z) = c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \ldots = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \quad (45)$$

V případě *pólu řádu m*

$$f(z) = F(Z) = \frac{c'_{-m}}{Z^m} + \frac{c'_{-m+1}}{Z^{m-1}} + \ldots + \frac{c'_{-1}}{Z} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n Z_n =$$

$$= c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \ldots + c_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad (46)$$

---

*) Viz R. O. Kuzmin: Besselevy funkcii, ONTI, 1935, str. 40. [Nebo Relton: Applied Bessel Functions, London, 1946. Tabulky Besselových funkcí najde čtenář v již citovaném díle E. Jahnke-F. Emde na str. 90—174 něm. vyd. a str. 224—368 rus. vyd. *Pozn. překl.*]

(kde $c_n = c'_{-n}$) a konečně v případě *podstatné singularity*

$$f(z) = F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_{-n}}{Z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n Z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \tag{47}$$

(kde $c_n = c'_{-n}$).

Vidíme, že v *Laurentově rozvoji v okolí nekonečně vzdáleného bodu* (45), (46) a (47) *hraje roli hlavní části souhrn všech členů s positivními mocniteli a členy s negativními mocniteli hrají roli normální části.*

Poznámka 1. Má-li funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ odstranitelnou singularitu, klademe obyčejně definitoricky $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$ a funkce $f(z)$ je regulární v nekonečnu.

Poznámka 2. Liouvilleově větě § 53 můžeme nyní dát trochu jinou formulaci: *Je-li funkce $f(z)$ regulární v uzavřené rovině, je identicky rovna konstantě.*

Důkaz. Protože $f(z)$ je regulární v bodě $z = \infty$, je v jeho okolí ohraničená. Budiž $|f(z)| < M_1$ pro $|z| > R$. S druhé strany, protože je regulární v uzavřeném kruhu $|z| \leq R$, je tam ohraničená (§ 13). Budiž $|f(z)| < M_2$ pro $|z| \leq R$. Označíme M větší z čísel M_1, M_2. Pak $|f(z)| < M$ pro všechna z a podle věty Liouvilleovy je identicky rovna konstantě.

Příklad 1. Racionální funkce lomená

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0},$$

kde $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$ je regulární v bodě $z = \infty$ pro $n \leq m$ (přesněji: má tam nulový bod řádu $m - n$ pro $n < m$) a má v bodě $z = \infty$ pól řádu $n - m$, je-li $m < n$. O tom se snadno přesvědčíme, položíme-li $z = \frac{1}{Z}$ a zkoumáme-li funkci $F(Z) = f\left(\frac{1}{Z}\right)$. Speciálně pro $m = 0$ dostaneme mnohočlen n-tého stupně

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$, který má v nekonečnu pól řádu n.

Příklad 2. Známé rozvoje pro funkce e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\sinh z$, $\cosh z$ (§ 62) v okolí bodu $z = 0$ můžeme považovat za Laurentovy rozvoje v okolí bodu $z = \infty$. Jelikož všechny tyto rozvoje mají nekonečně mnoho členů s positivními exponenty, mají všechny tyto funkce v bodě $z = \infty$ podstatnou singularitu.

Naproti tomu je funkce $e^{\frac{1}{z}}$ regulární v bodě $z = \infty$, neboť její Laurentův rozvoj v okolí bodu $z = \infty$ (viz př. 1 předchozího paragrafu) nemá žádné členy s positivními exponenty.

Příklad 3. Funkce $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ má v bodě $z = \infty$ neisolovaný singulární bod, neboť póly $z_k = k\pi$ této funkce jsou nakupeny v nekonečnu ($\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$).

V závěru uvedeme ještě poznámku o residuu funkce v nekonečně vzdáleném bodě.

Definice. Budiž $f(z)$ regulární v jistém okolí bodu $z = \infty$. *Residuem této funkce v bodě* $z = \infty$ budeme pak nazývat integrál

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{-1}} f(z)\, dz, \tag{48}$$

kde C^{-1} je kružnice $|z| = \varrho$, $\varrho > R$, proběhnutá v záporném smyslu (tak, aby bod $z = \infty$ zůstal vlevo). Integrál (48) je zřejmě nezávislý na ϱ pro $\varrho > R$ (§ 47).

Z definice plyne další věta:

Věta [17]. *Má-li funkce $f(z)$ v úplné komplexní rovině konečný počet singulárních bodů, je součet jejich residuí roven nule.*

Důkaz. Nechť $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p$ jsou konečné singulární body ležící v kružnici C. Pak podle Cauchyho residuové věty (§ 48) máme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{-1}} f(z)\, dz = \\ &= \operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) + \ldots + \operatorname{res} f(z_p) + \operatorname{res} f(\infty). \end{aligned} \tag{49}$$

Na konec ještě jedna poznámka.

Věta [18]. Residuum funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ je rovno koeficientu při z^{-1} v Laurentově rozvoji v okolí bodu $z = \infty$ s opačným znaménkem.

Důkaz. Budiž $f(z)$ regulární pro $R < |z| < \infty$. Pak její Laurentova řada konverguje stejnoměrně na kružnici $|z| = \varrho$ pro $\varrho > R$ (v rozvoji je jen konečný počet $c_n \neq 0$, viz § 64). Integrujeme podél C v kladném smyslu oběhu člen po členu:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_C z^n dz,$$

ale na pravé straně bude podle § 50 různý od nuly jen integrál

$$\oint_C \frac{dz}{z}.$$

Konečně dostáváme

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}. \tag{50}$$

Tím je věta dokázána.

Poznámka. Podobnost této věty s větou **[11]** § 65 je jen vnější; mezi oběma je podstatný rozdíl. Spočívá v tom, že zde člen c_{-1} náleží do normální a nikoliv hlavní části Laurentova rozvoje a $\operatorname{res} f(\infty)$ *může být různé od nuly i tehdy, je-li $f(z)$ regulární v bodě $z = \infty$.*

Příklad. Mějme

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z^{15}\, dz}{(z^2+1)^2 (z^4+2)^3}.$$

Výpočet residuí v konečných singulárních bodech je značně obtížný; proto použijeme (48) a máme

$$I = -\operatorname{res} f(\infty) \,.\, 2\pi i.$$

V bodě $z = \infty$ má $f(z)$ nulový bod řádu $n = 1$. Normální část jeho rozvoje bude tedy začínat členem $\frac{1}{z}$. Tedy $c_{-1} = -\operatorname{res} f(\infty) = 1$ a $I = -1$.

§ 70. Žukovského věta o vztlaku. Vraťme se k úloze o úplném obtékání, probírané již v § 44. Budeme hledat komplexní potenciál proudění kolem uzavřeného konečného profilu C s danou hodnotou cirkulace Γ a s danou rychlostí proudění v nekonečnu V_∞. Jako řešení této úlohy jsme našli (vzorec 74)

$$w = \Phi(z) = \overline{V}_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi \mathrm{i}} \operatorname{Ln} g(z), \tag{51}$$

kde $\zeta = g(z)$ je funkce zprostředkující konformní zobrazení vnějšku profilu C na vnějšek kruhu $|\zeta| < R$ s okrajovými podmínkami

$$g(\infty) = \infty, \ g'(\infty) = 1,$$

ale nedokázali jsme jednoznačnost tohoto řešení.

Budeme zkoumat jednoznačnost řešení úlohy o úplném obtékání. Nechť je z počátku profil C kružnicí $|\zeta| = R$ v rovině ζ. Řešení úlohy je pak dáno vzorcem

$$w = \varphi(\zeta) = \overline{V}_\infty \zeta + \frac{V_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi \mathrm{i}} \operatorname{Ln}\zeta. \tag{52}$$

Budiž $w = \varphi_1(\zeta)$ druhé řešení této úlohy. Derivace $\varphi_1'(\zeta)$ definuje vektor rychlosti pole ($\mathbf{V} = \overline{\varphi_1'(\zeta)}$ viz § 39) a je tedy jednoznačná a regulární pro $R < |\zeta| < \infty$. Pro $\zeta \to \infty$ konverguje $\varphi_1'(\zeta)$ podle předpokladu ke konečné veličině $\overline{V}_\infty$. Má tedy v bodě $\zeta = \infty$ odstranitelnou singularitu a její Laurentův rozvoj v okolí bodu $\zeta = \infty$ bude mít tvar

$$\varphi_1'(\zeta) = \overline{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \frac{c_{-3}}{\zeta^3} + \dots \tag{53}$$

Podle věty **[9]** tento rozvoj platí pro všechna $|\zeta| > R$, neboť $\varphi_1(\zeta)$ je pro tato ζ regulární. Cirkulace rychlosti proudění definovaného funkcí $w = \varphi_1(\zeta)$ má být podle předpokladu podél kružnice $|\zeta| = R$ rovna Γ a tok touto konturou se má zřejmě rovnat nule. Pak podle (22) § 48 (kde položíme $Q = 0$) je

$$\Gamma = \oint_{C^*} \varphi_1(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} c_{-1},$$

kde C^* je libovolná křivka, ležící vně naší kružnice. Odtud snadno vypočteme $c_{-1} = \dfrac{\Gamma}{2\pi \mathrm{i}}$. Integrujeme-li (53) a vypustíme-li nepodstatnou adiční konstantu, dostaneme

$$\varphi_1(\zeta) = \overline{V}_\infty \zeta + \frac{\Gamma}{2\pi \mathrm{i}} \operatorname{Ln}\zeta - \frac{c_{-2}}{\zeta} - \frac{c_{-3}}{2\zeta^2} - \dots \tag{54}$$

Podle definice obtékání na kružnici $|\zeta| = R$ musí být $\operatorname{Im} \varphi_1(\zeta) = \text{const}$, odkud, položíme-li $\zeta = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$, $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, $V_\infty = V_x + iV_y$, dostaneme

$$RV_x \sin t - RV_y \cos t - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R + \frac{\beta_{-2}\cos t - \alpha_{-2}\sin t}{R} +$$

$$+ \frac{\beta_{-3}\cos 2t - \alpha_{-3}\sin 2t}{2R^2} + \ldots = \text{const}$$

čili

$$A + \left(\frac{\beta_{-2}}{R} - RV_y\right)\cos t + \left(RV_x - \frac{\alpha_{-2}}{R}\right)\sin t +$$

$$+ \frac{\beta_{-3}}{2R^2}\cos 2t - \frac{\alpha_{-3}}{2R^2}\sin 2t + \ldots = 0,$$

kde A je blíže neurčená konstanta. Protože poslední vztah platí pro všechna t identicky, jsou všechny jeho koeficienty nalevo rovny nule a je:*)

$$A = 0, \frac{\beta_{-2}}{R} - RV_y = 0, \quad RV_x - \frac{\alpha_{-2}}{R} = 0,$$

$$\beta_{-k} = \alpha_{-k} = 0 \quad (k \geqq 3).$$

Odtud

$$c_{-2} = \alpha_{-2} + i\beta_{-2} = R^2V_x + iR^2V_y = R^2V_\infty,$$

$$c_{-k} = \alpha_{-k} + i\beta_k = 0 \quad (k \geqq 3)$$

a rozvoj (54) je shodný s (52). Tedy $\varphi_1(\zeta) \equiv \varphi(\zeta)$ a pro speciální případ vnějšku kruhu $|\zeta| > R$ je jednoznačnost řešení dokázána.

Obrátíme se nyní k obecnému případu libovolného profilu C. Budiž $w = \Phi_1(z)$ řešení naší úlohy. Budiž $z = h(\zeta)$ funkce inversní k funkci $\zeta = g(z)$, zprostředkující konformní zobrazení vnějšku kružnice $|\zeta| > R$ na vnějšek profilu C za počátečních podmínek

$$h(\infty) = \infty, \ h'(\infty) = \frac{1}{g'(\infty)} = 1.$$

*) Poslední vztah představuje rozvoj funkce identicky rovné nule ve Fourierovu řadu. Z jednoznačnosti takového rozvoje však plyne, že všechny jeho koeficienty musí být rovny nule.

Jak je poznamenáno v poznámce pod čarou na str. 149, jsou funkce $g(z)$ a tedy i $h(\zeta)$ jednoznačně určeny. Sestrojíme dále funkci

$$w = \Phi_1[h(\zeta)] = \varphi_1(\zeta),$$

která je analytická pro $R < |\zeta| < \infty$ a která tedy může být považována za komplexní potenciál jistého rovinného proudění v rovině ζ. Na kružnici $|\zeta| = R$ je

$$\operatorname{Im} \varphi_1(\zeta) = \operatorname{Im} \Phi_1(z) = \text{const},$$

neboť body kružnice se při zobrazení $z = h(\zeta)$ zobrazí na body profilu C a $\Phi(z)$ podle předpokladu řeší obtékání profilu C. Tímto způsobem $w = \varphi_1(\zeta)$ řeší obtékání kružnice $|\zeta| = R$. Cirkulace rychlosti proudění je

$$\Gamma_1 = \oint_{C_1^*} \varphi_1'(\zeta)\, d\zeta = \oint_{C_1^*} \Phi_1'[h(\zeta)]\, h'(\zeta)\, d\zeta = \oint_{C^*} \Phi_1'(z)\, dz,$$

kde C_1^* je libovolná uzavřená křivka vně kružnice $|\zeta| = R$ v rovině ζ a C^* její obraz při zobrazení $z = h(\zeta)$. Tento obraz je zřejmě uzavřený a leží vně profilu C. Podle předpokladu se integrál napravo a tedy i Γ_1 rovná Γ. Kromě toho rychlost proudění v nekonečnu je

$$\overline{\varphi_1'(\infty)} = \overline{\Phi_1(\infty)}\, \overline{h'(\infty)} = V_\infty.$$

Funkce $w = \varphi_1(z)$ tedy řeší obtékání kružnice $|\zeta| = R$ a podle toho, co bylo výše dokázáno, je shodná s funkcí $w = \varphi(z)$ z (52). Potom však $\Phi_1(z) = \varphi(\zeta) = \varphi[g(z)]$ je totožná s funkcí $\Phi(z)$ z (51) a věta je dokázána.

Zbývá stanovit velikost *vztlaku* $\boldsymbol{P}$ na obtékaném profilu C. Podle Čaplyginova vzorce (25) § 48 se velikost komplexně sdružené veličiny vztlaku $\boldsymbol{P}$ rovná

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{i\varrho}{2} \oint_{C^*} [\Phi'(z)]^2\, dz,$$

kde C^* je libovolná uzavřená křivka vně profilu C. Přepíšeme si tuto formuli pomocí residua funkce $[\Phi'(z)]^2$ v bodě $z = \infty$.

Derivace komplexního potenciálu úplného obtékání je regulární vně profilu C a v okolí bodu $z = \infty$ má Laurentův rozvoj

$$\Phi'(z) = \overline{V}_\infty + \frac{c_1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$$

(To bylo dokázáno na počátku paragrafu pro speciální případ kružnice, ale důkaz se provede stejným způsobem i pro obecný případ.) Uvažme dále, že cirkulace rychlosti proudění je

$$\Gamma = \oint_{C^*} \Phi'(z)\, dz = c_{-1} 2\pi i,$$

odkud $c_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}$. A dále

$$[\Phi'(z)]^2 = \left(\overline{V}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots\right)^2 =$$

$$= \overline{V}^2_\infty + \frac{\overline{V}_\infty \Gamma}{\pi i z} + \frac{c'_{-2}}{z^2} + \dots,$$

kde $c'_{-2}, \dots$ jsou blíže neurčené konstanty, a residuum funkce $[\Phi'(z)]^2$ v bodě $z = \infty$ je $\frac{\overline{V}_\infty \Gamma}{\pi i}$. Tedy konečně

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{i\varrho}{2}\, 2\pi i \frac{\overline{V}_\infty \Gamma}{\pi i} = i\varrho\Gamma\overline{\boldsymbol{V}}_\infty.$$

Přejdeme-li ke komplexně sdruženým veličinám, dostáváme hledaný výsledek

$$\boldsymbol{P} = -\, i\varrho\Gamma\boldsymbol{V}_\infty, \tag{55}$$

který je obsahem věty Žukovského:

Velikost vztlaku na obtékaném profilu je rovna součinu cirkulace, hustoty a rychlosti v nekonečnu a směr vztlaku je kolmý na vektor rychlosti v nekonečnu (pro $\Gamma > 0$ ve směru hodinových ručiček, pro $\Gamma < 0$ proti směru hodinových ručiček).

Bude-li mít profil C ostrou hranu, bude na hraně podle Čaplygina bod sjednocení proudění vyšinuto a podle (73) § 41

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\varphi_0 - \Theta), \tag{56}$$

kde $v_\infty = |V_\infty|$, $\Theta = \arg V_\infty$ a φ_0 je argument obrazu bodu sjednocení proudění při zobrazení $\zeta = g(z)$ vnějšku profilu C na vnějšek kružnice $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$. Vzorec pro absolutní velikost vztlaku má pak tvar

$$P = |\boldsymbol{P}| = 4\pi\varrho R v^2_\infty |\sin(\varphi_0 - \Theta)|. \tag{57}$$

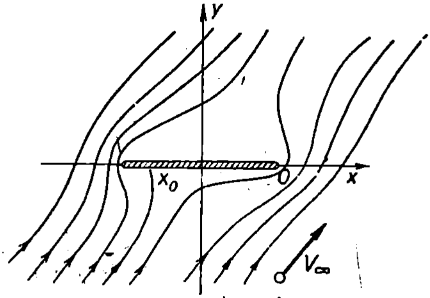
Příklad. *Obtékání rovinné destičky*, která má v rovině (z) stopu $-a \leqq x \leqq a$ na ose x (obr. 106). Funkce $\zeta_1 = \frac{z}{a}$ zobrazí tuto úsečku na jednotkovou, $\zeta_2 = \zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 1} = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}$ ji zobrazí na vnějšek jednotkového kruhu (§ 26). Derivace poslední funkce v bodě $z = \infty$ je

$$\left.\frac{d\zeta_2}{dz}\right|_{z=\infty} = \left.\frac{1}{a}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}\right)\right|_{z=\infty} = \frac{2}{a}.$$

Za funkci $\zeta = g(z)$ tedy volíme

$$\zeta = g(z) = \frac{a}{2}\zeta_2 = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{2};$$

poloměr kruhu, na který tato funkce zobrazí vnějšek úsečky, bude $R = \frac{1}{2}a$. Komplexní potenciál (51) má tvar



Obr. 106.

$$w = \Phi(z) = \frac{\overline{V}_\infty}{2}(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{\overline{V}_\infty a^2}{2(z + \sqrt{z^2 - a^2})} +$$
$$+ \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Avšak

$$\frac{1}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a^2}, \quad V_\infty = v_\infty e^{i\Theta}, \text{ a tedy}$$

$$w = \Phi(z) = v_\infty(z \cos\Theta - i\sqrt{z^2 - a^2} \sin\Theta) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Předpokládejme nyní ještě podle Čaplygina (§ 44), že pravý konec úsečky $z_0 = a$ je bodem sjednocení proudění. Funkce $\zeta = g(z)$ ho zobrazí do bodu $\zeta_0 = \frac{1}{2}a$, $\varphi_0 = \arg \zeta_0 = 0$ a podle (56)

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\varphi_0 - \Theta) = -2\pi v_\infty a \sin\Theta.$$

Komplexní potenciál má tedy konečně tento tvar:

$$w = \Phi(z) = v_\infty[z \cos\Theta - \mathrm{i}\sqrt{z^2 - a^2} \sin\Theta + \mathrm{i}a \sin\Theta \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - a^2})],$$

a jeho derivace

$$\overline{V} = \Phi'(z) = v_\infty \left\{ \cos\Theta - \mathrm{i} \sin\Theta \frac{z - a}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} =$$

$$= v_\infty \left\{ \cos\Theta - \mathrm{i} \sin\Theta \sqrt{\frac{z - a}{z + a}} \right\}.$$

Na úsečce $-a \leqq x \leqq a$ je reálná rychlost

$$V = \overline{\Phi'(x)} = v_\infty \left\{ \cos\Theta \pm \sin\Theta \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \right\}.$$

Z poslední rovnice se snadno najde kritický bod proudění. Máme

$$\frac{a - x_0}{a + x_0} = \operatorname{cotg}^2\Theta,$$

odkud

$$x_0 = -a \cos^2\Theta,$$

kde a je bod rozvětvení proudění. Bod sjednocení proudění není zřejmě kritickým bodem proudění, neboť je na ostré hraně obtékaného profilu (§ 44). Proudnice proudění jsou zakresleny na obr. 106. Vztlak účinkující na destičku je roven podle (57)

$$\mathbf{P} = 2\pi a \varrho v_\infty^2 \sin\Theta t e^{\mathrm{i}\Theta}$$

a jeho *modul*

$$P = |\mathbf{P}| = 2\pi a \varrho v_\infty^2 |\sin\Theta|$$

je úměrný sinu úhlu proudění Θ.

§ 71. Jednodušší třídy analytických funkcí. Definice. Funkce $f(z)$ regulární v celé konečné rovině se nazývá *celistvá.*

Rozvineme $f(z)$ v Taylorovu řadu v okolí bodu $z = 0$:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{32}$$

Podle věty **[6]** § 62 tato řada konverguje pro všechna konečná z a (32) je i jejím Laurentovým rozvojem v okolí bodu $z = \infty$.

Odtud vidíme: 1. je-li celistvá funkce regulární v bodě $z = \infty$, je konstantní: $f(z) \equiv c_0$; 2. jestliže je bod $z = \infty$ jejím pólem řádu n, je $f(z)$ mnohočlen stupně n-tého; 3. je-li bod $z = \infty$ podstatně singulární pro celistvou funkci $f(z)$, nazýváme ji *celistvou transcendentní funkcí.* Mezi tyto funkce patří na př. e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Definice. Funkce, jejíž všechny konečné singularity jsou póly, se nazývá *meromorfní.*

Poznamenejme ještě, že v libovolné uzavřené části roviny má meromorfní funkce pouze konečný počet pólů. V celé konečné rovině může být počet pólů i nekonečně veliký. Funkce meromorfní jsou na př.: $\dfrac{1}{\sin z}$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$.

Dokážeme následující větu:

Věta [18]. Meromorfní funkce $f(z)$, která má v celé konečné rovině konečný počet pólů, je racionální funkce lomená.

Důkaz. Budiž $a_1, a_2, \ldots, a_p$ konečný počet pólů. Buďtež

$$g_1(z) = \frac{c^{(1)}_{-m_1}}{(z - a_1)^{m_1}} + \frac{c^{(1)}_{-m_1+1}}{(z - a_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{c^{(1)}_{-1}}{z - a_1}$$

$$g_2(z) = \frac{c^{(2)}_{-m_2}}{(z - a_2)^{m_2}} + \frac{c^{(2)}_{-m_2+1}}{(z - a_2)^{m_2-1}} + \ldots + \frac{c^{(2)}_{-1}}{z - a_2} \quad \text{a}$$

$$g_p(z) = \frac{c^{(p)}_{-m_p}}{(z - a_p)^{m_p}} + \frac{c^{(p)}_{-m_p+1}}{(z - a)^{m_p-1}} + \ldots + \frac{c^{(p)}_{-1}}{z - a_p}$$

hlavní části Laurentových rozvojů v okolí těchto pólů. Budiž ještě

$$g(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m$$

hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = \infty$ (je-li $f(z)$ regulární v $z = \infty$, nemusíme tuto funkci uvažovat).

Označme

$$\varphi(z) = f(z) - g_1(z) - g_2(z) - g_3(z) - \ldots - g_p(z) - g(z).$$

Tato funkce je regulární ve všech konečných bodech kromě $z = a_k$ (je to součet regulárních funkcí). V každém z bodů $z = a_k$ má odstranitelnou singularitu, neboť podle konstrukce funkcí $g_k(z)$ hlavní část jejího Laurentova rozvoje neexistuje (hlavní část rozvoje funkce $f(z)$

v bodě $z = a_k$ se vyruší s $g_k(z)$ a ostatní funkce $g_{k'}(z)$ pro $k' \neq k$ jsou v bodě $z = a_k$ regulární). Totéž platí i pro bod $z = \infty$. Doplníme-li vhodným způsobem definitoricky funkci $\varphi(z)$ v bodech $z = a_k$ a $z = \infty$, dostaneme funkci regulární v úplné rovině z. Ta je podle poznámky 2 § 69 identicky rovna konstantě. Budiž $\varphi(z) \equiv A_0$. Pak

$$f(z) = A_0 + g(z) + \sum_{n=1}^{p} g_k(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m +$$
$$+ \frac{c_{-m_1}^{(1)}}{(z - a_1)^{m_1}} + \frac{c_{-m_1+1}^{(1)}}{(z - a_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(1)}}{z - a_1} + \ldots + \tag{33}$$
$$+ \frac{c_{-m_p}^{(p)}}{(z - a_p)^{m_p}} + \frac{c_{-m_p+1}^{(1)}}{(z - a_p)^{m_p-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(p)}}{z - a_p},$$

čímž je naše věta dokázána.

Poznámka 1. Vzorec (33) nám dává rozklad racionální lomené funkce v parciální zlomky a celistvou část, známý z integrálního počtu. Důkaz věty nám dává elegantní použití tohoto vzorce při výpočtu integrálů racionální funkce lomené.

Poznámka 2. Sloučíme-li v (33) všechny zlomky, dostaneme jako výsledek podíl dvou mnohočlenů (dvou celistvých racionálních funkcí). Každá racionální lomená funkce se tedy dá vyjádřit jako podíl dvou racionálních funkcí celistvých.

ÚLOHY

1. V jakém oboru absolutně konvergují řady a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$; b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz +$ $+ b_n \sin nz)$, kde a_n, b_n jsou komplexní (komplexní tvar Fourierovy řady)?

2. Stanovte poloměr konvergence řad a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$.

3. Najděte Taylorův rozvoj všech větví funkcí a) $\sqrt[3]{z}$, b) $\mathrm{Ln}\, z$ v okolí bodu $z = i$.

4. Najděte první tři členy Taylorova rozvoje té větve funkce $f(z) = (1 + z)^{\frac{1}{z}}$ v okolí bodu $z = 0$, pro niž $f(0) = e$.

5. Dokažte, že kružnice $|z| = 1$ je hranicí existenčního oboru řady $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$

6. Jsou následující funkce jednoznačné nebo mnohoznačné?

a) $\sqrt{e^z}$, b) $\sqrt{\cos z}$, c) $\cos\sqrt{z}$, d) $\sqrt{1 - \sin^2 z}$, e) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, f) $\mathrm{Ln}\, e^z$, g) $\mathrm{Ln} \sin z$?

7. Koeficient při n-té mocnině z v Taylorově rozvoji funkce $f(z) = \dfrac{4 - z^2}{4 - 4zt + z^2}$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ v okolí bodu $z = 0$ se nazývá Čebyševův polynom (symbol $T_n(t)$). Dokažte:

$$T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t).$$

8. Najděte Fourierův rozvoj funkcí ($|a| < 1$):

a) $\dfrac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2}$, b) $\ln(1 - 2a \cos t + a^2)$.

9. Rozveďte v Laurentovu řadu v okolí bodu $z = \infty$ funkce:

a) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, c) $\mathrm{Ln}\dfrac{1}{1-z}$, d) $\mathrm{Ln}\dfrac{a-z}{b-z}$.

10. Koeficient při n-té mocnině z v Laurentově rozvoji funkce $f(z) = e^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$ v okolí bodu $z = \infty$ se nazývá Besselova funkce řádu n (symbol $J_n(t)$). Odvoďte vyjádření Besselovy funkce v integrálním tvaru a odvoďte její rozvoj v potenční řadu.

11. Nulové body funkce $f(z) = \sin\dfrac{1}{1-z}$, $z_k = 1 - \dfrac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$ tvoří bodovou posloupnost, konvergující k bodu $z = 1$. Funkce $f(z)$ není identicky rovna nule. Proč není tento výsledek v rozporu s větou o jednoznačnosti § 62?

12. Jaký je rozdíl v rozvoji v řadu v okolí bodu $z = 0$ funkce

a) reálné proměnné $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$

b) funkce komplexní proměnné $w = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & \text{pro } z \neq 0 \\ 0 & \text{pro } z = 0 \text{?} \end{cases}$

13. Ověřte přímým výpočtem větu Weirstrassovu (§ 68) pro funkci $w = \sin z$ v okolí bodu $z = \infty$ tím, že dokážete, že pro libovolné komplexní $A \neq \infty$, body pro něž $\sin z = A$, tvoří bodovou posloupnost konvergující k bodu $z = \infty$.

14. Jaké sigularity mají funkce:

a) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$, b) $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$, c) $\dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$, d) $z^2 e^{-z}$?

15. Pro jaké a bude jednoznačná funkce

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) dz ?$$

16. Najděte residua těchto funkcí v jejich singulárních bodech:

a) $\frac{1}{\sin z}$ $(z \neq \infty)$, b) $\frac{z^{2n}}{1 + z^n}$, c) $\frac{z^{2n}}{(1 + z)^n}$, d) $\cos z - \sin z$, e) $z^n e^z$, f) $\frac{e^z}{1 + z}$,

g) $e^z \ln \frac{z - a}{z - b}$.

17. Stanovte tok a cirkulaci rychlosti proudění s komplexním potenciálem $\Phi(z) = \operatorname{arctg}^2 z$ podél kružnice $|z - e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$.

18. Najděte sumární náboj rozprostřený v kruhu $|z| < n + \frac{1}{2}$, je-li potenciál pole $F(z) = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{\sin \pi z}$.