HYPERBOLICKÁ ROVINA.

Kapitola IV.

ÚVAHY ZÁKLADNÍ.

§ 1. Formulace problému.

V posledním paragrafu druhé kapitoly naznačili jsme obecně svůj úkol při studiu neeuklidovské geometrie v rovině. V třetí kapitole, v paragrafu druhém jsme přesně definovali úkol neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru. Týmž způsobem definujeme úkol neeuklidovské geometrie v rovině. Při tom ovšem musíme obor působnosti rozšířiti na obor ternární, t. j. uvažovati zásadně výrazy ve třech proměnných, kdežto dříve jsme se omezovali jen na obor binární (pro dvě proměnné. Viz též VIII, 6). Místo projektivní transformace dvou proměnných budeme uvažovati projektivní transformace tří proměnných (VIII, 4). Taková transformace závisí na osmi koeficientech.

Podkladem našich úvah bude tedy projektivní osmimocná grupa (VIII, 5) transformací. — V této grupě obsažena je trojmocná projektivní grupa, která reprodukuje libovolnou kuželosečku (jednoduchou.[1]) VIII, 7).

Naším úkolem bude studovati invarianty vzhledem k této trojmocné grupě, která je podgrupou osmimocné grupy projektivní.

Podle toho, jakého druhu je kuželosečka, zda reálná, či imaginární, rozeznáváme geometrii hyperbolickou resp.

[1]) Je-li ona kuželosečka složená, pak grupa projektivních transformací ji reprodukujících jest obecně čtyřmocná, jak jsme viděli na příkladě pohybu euklidovského (II, 1). Tam totiž isotropické body představují právě takovou složenou kuželosečku. Přes to však pohyb je vyjádřen trojmocnou grupou (II, 1, konec).

eliptickou (II, 4, konec, kde uvažován též případ geometrie parabolické pro kuželosečku složenou).

Budeme se prozatím zabývati jen geometrií hyperbolickou, kdy tedy kuželosečka se reprodukující je reálná.

Úkol geometrie hyperbolické v rovině můžeme po této přípravě definovati přesně takto:

Hyperbolická geometrie v rovině zabývá se studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$
\begin{aligned}
\varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
\varrho' x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
\varrho' x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned}
\qquad
\begin{gathered}
(a_{ij} \text{ const. reálné}, \\
i, j = 1, 2, 3),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

které reprodukují jednoduchou, reálnou kuželosečku

$$
f_{\xi\xi} = g_{11}\xi_1^2 + g_{22}\xi_2^2 + g_{33}\xi_3^2 + 2(g_{12}\xi_1\xi_2 + g_{13}\xi_1\xi_3 + g_{23}\xi_2\xi_3) = 0. \tag{2}
$$

Této kuželosečce budeme říkati absolutní kuželosečka. Někdy se též označuje jako kuželosečka Cayleyova, neboť Cayley prvý ji použil k úvahám podobným. Rovině, ve které budeme studovati geometrii hyperbolickou, krátce budeme říkati rovina hyperbolická.[1a])

V útvaru jednorozměrném šlo buď o body na přímce, neb o přímky svazku. V rovině nutno však uvažovati současně body *a* přímky. Ježto přímka jest určena dvěma body, jistě bychom ke studiu invariantních vlastností přímek vystačili s definicí problému, jak jsme ji právě uvedli. Často však je výhodné takové invarianty vyjádřiti přímo v souřadnicích t. zv. přímkových (VIII, 3, 18). Proto budeme definovati zvláště úkol geometrie hyperbolické vzhledem ke studiu přímek.

Na udaném místě kap. VIII dovodili jsme způsob transformace souřadnic přímkových rovnicemi 23) a nebudeme jej tedy znova odvozovati. Rovněž tak odvodili jsme v § 6 téže kapitoly přímkovou rovnici kuželosečky, je-li bodová její rovnice dána. Můžeme ihned těchto poznatků použíti k definici neeuklidovského studia přímek v rovině:

[1a]) Ve svých číselně teoretických úvahách zavádí *Minkovski* pojem tělesa, nikde konkávního. Průsekem tohoto tělesa s obecnou rovinou, určenou třemi body uvnitř tělesa, získáme ovál, nikde konkávní. *Hilbert* ukázal, že takový ovál může zastupovati *Cayleyovu* kuželosečku v geometrii, obdobné geometrii hyperbolické.

Hyperbolická geometrie v rovině zabývá se též studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$1') \qquad \begin{aligned} \varrho' X_1 &= A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + A_{13} X_3 \\ \varrho' X_2 &= A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + A_{23} X_3, \\ \varrho' X_3 &= A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + A_{33} X_3 \end{aligned}$$

které reprodukují kuželosečku 2), jejíž přímková rovnice jest

$$2') \quad F_{\Xi\Xi} \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \Xi_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \Xi_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \Xi_3 \\ \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv G_{11} \Xi_1^2 + G_{22} \Xi_2^2 + G_{33} \Xi_3^2 + 2 (G_{12} \Xi_1 \Xi_2 + \\ + G_{13} \Xi_1 \Xi_3 + G_{23} \Xi_2 \Xi_3) = 0.$$

Podle těchto definic budeme postupovati v následujících paragrafech.

Poznámka: Jsou-li z, y dva body v rovině, přímka je spojující má souřadnice (VIII, 3, 18)

$$3) \qquad \varrho X_1 = [y_2 z_3], \qquad \varrho X_2 = [y_3 z_1] \qquad \varrho X_3 = [y_1 z_2].$$

Ale přímkové souřadnice můžeme za určitých předpokladů definovat i jinak. Budiž

$$x^2_1 + x^2_2 + \varepsilon x^2_3 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

rovnice nějaké jednoduché kuželosečky v rovině, která se grupou projektivních transformací reprodukuje. Rovnice poláry k bodu u $(u_1 : u_2 : u_3)$ vzhledem k této kuželosečce jest

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \varepsilon x_3 u_3 = 0.$$

Ježto však rovnici obecné přímky je vždy možno psáti

$$x_1 a + x_2 b + \varepsilon x_3 c = 0 \qquad (a, b, c \text{ const}),$$

plyne z přirovnání obou rovnic

$$4) \qquad \varrho u_1 = a, \qquad \varrho u_2 = b, \qquad \varrho u_3 = c.$$

Ježto poměr $a : b : c$ určuje jednoznačně přímku, můžeme čísla a, b, c považovati za přímkové souřadnice přímky. Jsou to tedy zároveň bodové souřadnice jejího pólu.

Vyjádříme-li rovnici přímky pomocí souřadnic, definovaných rovnicí 3), získáme (VIII, 3, 16)

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0.$$

Jsou tedy oba druhy souřadnic vázány rovnicemi

$$a : b : c = X_1 : X_2 : \varepsilon X_3.$$

Pokud se týče užívání jednotlivých druhů těchto souřadnic, smluvíme se na tom, že není-li výslovně jinak podotčeno, budeme užívati souřadnic definovaných rovnicemi 3).

§ 2. Základní metrické vztahy.

1. Vzdálenost dvou bodů. Vzdálenost dvou bodů v rovině hyperbolické definujeme podobným způsobem, jako jsme definovali míru dvou elementů v hyperbolickém útvaru. Spojíme dva body dané x, y přímkou, která protne absolutní kuželosečku v bodech ξ, ξ'. Stanovíme poté dvojpoměr $(\xi\,\xi'\,x\,y)$ a jeho logaritmus, násobený nějakou vhodně volenou konstantou, prohlásíme za vzdálenost bodů x a y. Nazveme-li body ξ, ξ' absolutními body dané přímky, je tím i formálně tento postup identifikován s postupem, kterým jsme v (III, 2, odst. 3) odvodili míru dvou elementů. Proto již nebudeme znova dokazovati, že takto definovaná míra vyhovuje podmínkám, které předepisujeme vzdálenosti. (Týž odstavec.)

Postup nahoře vylíčený provedeme analyticky takto: Souřadnice každého bodu z na přímce možno vyjádřiti lineárně souřadnicemi dvou jejích bodů:

5) $$\sigma z_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, \quad \sigma z_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2, \quad \sigma z_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3.$$

Totéž platí ovšem i o bodech absolutních (průsečících spojnice $x\,y$ s absolutní kuželosečkou):

$$\sigma \xi_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, \quad \sigma \xi_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2, \quad \sigma \xi_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3.$$

Koeficienty α_1, α_2 určíme opět z podmínky, že bod ξ leží na absolutní kuželosečce. Obdržíme tak

6) $$\alpha_1^2 f_{xx} + 2\,\alpha_1 \alpha_2 f_{xy} + \alpha_2^2 f_{yy} = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} f_{xx} &= g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 + 2\,(g_{12} x_1 x_2 + g_{13} x_1 x_3 + g_{23} x_2 x_3)\,[2] \\ f_{yy} &= g_{11} y_1^2 + g_{22} y_2^2 + g_{33} y_3^2 + 2\,(g_{12} y_1 y_2 + g_{13} y_1 y_3 + g_{23} y_2 y_3) \\ f_{xy} &= g_{11} x_1 y_1 + g_{22} x_2 y_2 + g_{33} x_3 y_3 + g_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \\ &\quad + g_{13}(x_1 y_3 + x_3 y_1) + g_{23}(x_2 y_3 + x_3 y_2). \end{aligned}$$

Každému poměru $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ odpovídá nějaký bod na přímce $x\,y$.

---

[2]) $f_{xx} = 0$ značí, že bod x leží na absolutní kuželosečce, podobně $f_{yy} = 0$ značí bod y na této kuželosečce, $f_{xy} = 0$ jest rovnicí polárně sdružených bodů vzhledem ke kuželosečce absolutní. (Bodem x musí procházeti polára bodu y vzhledem k této kuželosečce a naopak.)

Specielně pro bod

x obdržíme z rovnic 5)

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 0,$$ pro bod

y obdržíme z rovnic 5)

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 0 : 1,$$ pro bod

ξ obdržíme z rovnice 6)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \nu_1 = \frac{-f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}},$$ pro bod

ξ' obdržíme z rovnice 6)

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \nu_2 = \frac{-f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}}.$$

Takovým způsobem jsou tyto čtyři body na přímce $x\ y$ určeny právě poměrem dvou údajů a můžeme tudíž výpočet pro logaritmus dvojpoměru ($\xi\ \xi'\ x\ y$) (který opět budeme značiti λ) uspořádati tak, jako v (III, 2, odst. 3).

Získáme pro $\log \lambda$ rovnici

$$\log \lambda = \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}.$$

Vzdálenost dvou bodů x a y definujeme pak obdobně jako ve zmíněné kapitole vzorcem

$$7) \qquad m(xy) = \frac{c}{2} \log \lambda = \frac{c}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}, \quad (c \neq 0)$$

kde obecně $c = k + k'i$ (k, k' reálné).

Při volbě konstanty c nutno však postupovati s opatrností. Body absolutní mohou totiž v hyperbolické rovině na reálné přímce býti buď

a) reálné různé, protíná-li přímka absolutní kuželosečku ($f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} > 0$),

b) imaginární různé, neprotíná-li[3]) přímka absolutní kuželosečku ($f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$),

[3]) Přesněji říkáme, že každá reálná přímka protíná kuželosečku a to buď ve dvou různých bodech reálných, nebo ve dvou bodech imaginárních sdružených, nebo konečně ve dvou splývajících reálných bodech. Jako příklad imaginárně sdružených bodů na reálné kuželosečce stůjtež zde průsečíky přímky $x_3 = 0$ s reálnou kuželosečkou

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Jejich souřadnice jsou $1 : i : 0$ resp. $1 : -i : 0$.

c) reálné splývající, je-li přímka tečnou kuželosečky absolutní ($f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = 0$).

Podle toho rozeznáváme v rovině hyperbolické tři druhy přímek: *a)* hyperbolické, *b)* eliptické, *c)* parabolické.

V předcházející kapitole jsme ukázali, že pro každý z těchto případů je nutno voliti konstantu c jinak, má-li býti splněn samozřejmý požadavek, že vzdálenost dvou reálných bodů je vždy reálná. Již z toho je zřejmo, že volba konstanty c vyžaduje hlubšího rozboru. Odvodíme ji z požadavků, které sice nejsou logickou nutností, ale pro názor jsou téměř samozřejmé. Tyto požadavky jsou:

1. Vzdálenost různých reálných bodů je vždy reálná, od nuly různá.

2. Na přímce možno volně pohybovati bodem.

Rozepíšeme poslední vzorec pro $m(xy)$, při čemž se omezíme jen na hlavní hodnoty. Obdržíme tak pro přímku hyperbolickou (VIII, 2)

$$m = \frac{k + k'i}{2} \overline{\log} \lambda, \qquad \lambda > 0$$

$$m = \frac{k}{2} \overline{\log} |\lambda| - \frac{k'}{2}\pi + \frac{i}{2}(k' \log |\lambda| + k\pi), \qquad \lambda < 0,$$

pro přímku eliptickou

$$m = \frac{ki - k'}{2} \varphi$$

a konečně pro přímku parabolickou

$$m = 0.$$

Z těchto vzorců jest ihned zřejmo, že nemůžeme voliti současně $k \neq 0$, $k' \neq 0$, neboť pak by pro přímku hyperbolickou a eliptickou nebyla splněna první podmínka a to i v tom případě, omezili-li bychom se na obor jen uvnitř, nebo jen vně obrazu absolutní kuželosečky. Zkusme tedy zvoliti jedno z čísel k, k' rovno nule.

Pro přímku eliptickou jsou oba požadavky splněny, jen když volíme $k = 0$, t. j. $c = k'i$. Při této volbě konstanty není však jistě splněna první podmínka pro přímku hyperbolickou. Nesmíme tedy voliti $c = k'i$. Volíme-li však $c = k$, jsou pro hyperbolickou přímku podmínky 1., 2. splněny jen tenkráte, omezíme-li se na studium dvojic bodů, jichž obrazy nejsou oddělovány obrazy bodů absolutních. To znamená, že hořejší podmínky jsou splněny pro každou přímku hyperbolickou, omezíme-li se na studium té části roviny, jejíž obraz je buď vně, nebo uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Avšak v té části roviny, jejíž obraz je vně obrazu absolutní kuželosečky, nalézají se přímky eliptické a parabolické, pro něž hořejší podmínky za předpokladu $c = k$ nejsou splněny. Nesmíme tudíž tuto část uvažovati. V té části roviny, jejíž obraz jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky, neexistují eliptické a parabolické přímky a tudíž za předpokladu $c = k$ jsou pro vzdálenost hořejší podmínky vždy splněny. Tento důležitý výsledek formulujeme takto: Podmínkám 1. a 2. je vždy vyhověno, omezíme-li se na tu část roviny, jejíž obraz jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky a předpokládáme-li $c = k$.

Dosazením této hodnoty k do vzorce pro $m(xy)$ obdržíme definitivní rovnici pro vzdálenost dvou bodů:

$$7') \quad \boxed{m(xy) = \frac{k}{2} \log \lambda = \frac{k}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}}$$

Interpretaci a přetvoření tohoto vzorce provedeme později. Nyní však se obrátíme ke studiu vzorce pro úhel dvou přímek v rovině.

2. Úhel dvou přímek. Nechť v hyperbolické rovině jsou dány dvě přímky X, Y o souřadnicích X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3. Jejich úhel stanovíme obdobným způsobem, jakým jsme v předcházejícím odstavci stanovili vzdálenost dvou bodů. Tam jsme na spojnici xy stanovili průsečné body s absolutní kuželosečkou, zde průsečíkem obou přímek vedeme tečny k absolutní kuželosečce. Nazveme je Ξ a Ξ'. Tím jsme ve svazku přímek, který prochází bodem (XY), stanovili přímky, které jsme dříve nazvali přímky absolutní. Odvození úhlu dvou přímek děje se právě týmž způsobem jako v kapitole předcházející. Při tom ovšem předpokládáme kuželosečku absolutní danou ve tvaru přímkovém 2'. (Komu by přece toto stanovení úhlu zdálo se obtížným, ten může aplikovati krok za krokem postup odstavce předcházejícího.) Získáme tak vzorec pro úhel $M(XY)$

$$8) \quad M(XY) = \frac{C}{2} \log \Lambda = \frac{C}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}.$$

Zde je C libovolná, od nuly různá konstanta, obecně tvaru

$$C = K + K'i,$$

při čemž K a K' jsou čísla reálná a Λ dvojpoměr přímek Ξ, Ξ', X, Y, t. j. $\Lambda = (\Xi\Xi'XY)$. Bližší stanovení konstanty C neskýtá obtíží. Víme totiž již z předcházejícího odstavce, že se musíme omeziti na studium bodů, jichž znázornění jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Z takového bodu můžeme však vésti jen tečny imaginárně sdružené. Jsme tedy vedeni v hyperbolické rovině jen ke svazkům eliptickým. Při takových svazcích je však nutno voliti konstantu C ryze imaginární $C = K'i$ $(K = 0)$. V prvním odstavci sedmého paragrafu kapitoly III jsme dokázali, že horní hranice pro M jest (až na násobky $- k'\pi$) právě

$$M_{max} = K'\pi.$$ [4])

Učiníme ještě jeden předpoklad, který omezí volbu konstanty K'. Budeme totiž požadovati, aby úhrnná hodnota úhlu dvou přímek byla právě, jako v geometrii euklidovské, rovna π.

Z posledního vzorce je zřejmo, že musíme voliti $K' = 1$, má-li tomuto požadavku býti vyhověno. Tím jsme vedeni k definitivnímu tvaru vzorce pro úhel dvou přímek

8') $$\boxed{M(XY) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX}F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX}F_{YY}}}}$$

3. **Jiný tvar vzorců základních.** Právě tak, jako jsme odvozovali vzorce 18), 24), 25) v předcházející kapitole, můžeme obdobné vzorce stanoviti i zde. Nebudeme již prováděti výpočet podrobně a podáme jen výsledky. Základní vzorec pro vzdálenost dvou bodů možno též psáti

9)
$$a)\quad m(xy) = k \operatorname{arc\,Cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}} = ik \arccos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}},$$

$$b)\quad m(xy) = k \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}{f_{xx}f_{yy}}} = ki \arcsin \sqrt{\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}f_{yy}}}.$$

---

[4]) Na uvedeném místě jsme užívali poněkud jiného označení pro konstantu, což snad čtenáře nebude mýliti.

Pro úhel dvou přímek obdržíme ze vzorce 8')

$$
10) \quad \begin{aligned} a) \quad & M(XY) = \arccos \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}, \\ b) \quad & M(XY) = \arcsin \sqrt{\frac{F_{XX}F_{YY} - F_{XY}^2}{F_{XX}F_{YY}}}. \end{aligned}
$$

Tyto vzorce nám velice prospějí v pozdějším počtu a proto je zde výslovně uvádíme.

§ 3. Interpretace základních vzorců.

Interpretace základních vzorců je nám vlastně již známa z kapitoly předcházející. Nebudeme ji proto znova odvožovati, nýbrž omezíme se na stručné poznámky. Tak v prvé řadě vidíme, že v hyperbolické rovině podle naší úmluvy přicházejí v úvahu jen přímky hyperbolické a svazky jen eliptické. To znamená:

V hyperbolické rovině měříme vzdálenosti hyperbolicky, ale úhly elipticky.

Tento výsledek ovšem není nový, ale je dobře uvésti jej právě tímto způsobem, neboť takto je zřejma jedna z nejcharakterističtějších vlastností hyperbolické roviny: její metrická neduálnost.[5])

Vzdálenosti dvou bodů neodpovídá totiž duálně úhel dvou přímek, které jsou projektivně duálné k oněm bodům.[6])

Z prvé části věty nahoře vyslovené můžeme odvoditi mnoho význačných vlastností hyperbolické roviny, uvědomíme-li si výsledky získané v předcházející kapitole při studiu hyperbolické přímky. V prvé řadě je to zavedení bodů nevlastních. Na každé hyperbolické přímce existují dva reálné body nevlastní. Dokázali jsme, že jsou to právě absolutní body dané přímky. Vzdálenost dvou bodů, z nichž

---

[5]) Euklidovská rovina je také metricky neduální. Vzdálenosti měříme parabolicky, úhly elipticky.

[6]) To bylo jedním z důvodů, pro který někteří matematikové zavrhovali možnost domněnky, že roviny v našem prostoru jsou hyperbolické, neb euklidovské (t. j. že náš prostor je hyperbolický, neb euklidovský). Poukazovali na to, že v přírodě jeden úkaz plyne z druhého a tudíž je málo pravděpodobno, že by takové roviny se dvěma různými metrikami (pro body a přímky) se v přírodě vyskytovaly.

alespoň jeden je nevlastní, je nekonečně velká. Při odvozování vzorce pro vzdálenost dvou bodů v rovině hyperbolické jsme za body absolutní pokládali průsečíky přímky s absolutní kuželosečkou. To platilo o každé přímce a proto můžeme říci:

Body kuželosečky absolutní, a jen tyto, jsou nevlastními body hyperbolické roviny. Jsou vždy reálné. Vzdálenost libovolného bodu, který není nevlastní, od nějakého bodu absolutní kuželosečky je nekonečně velká.

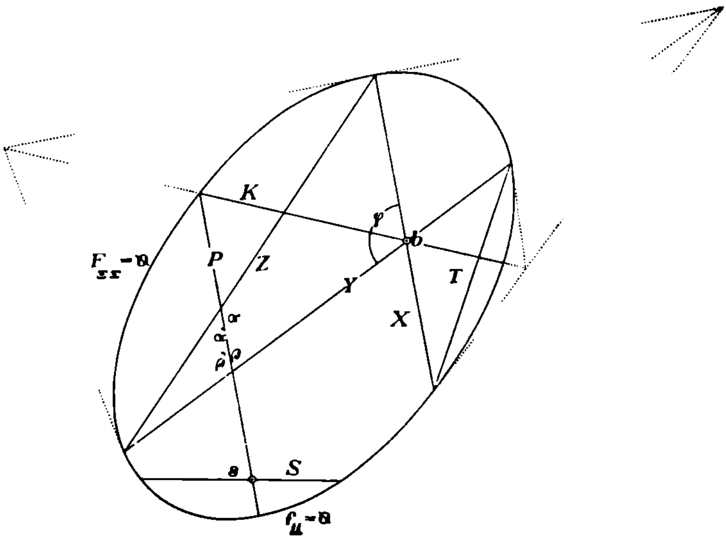
Z toho plyne, že dvojrozměrná bytost, nadaná schopností měřiti vzdálenosti jen hyperbolicky, nikdy by bodů absolutních nedosáhla a tudíž ani nemohla přestoupiti. Tím naše omezení na obor na téže straně absolutní kuželosečky jest i logicky a noeticky sankcionováno, neboť se stanoviska takové bytosti existuje jen jeden obor roviny vzhledem k absolutní kuželosečce. Omezili jsme se však na obor uvnitř absolutní kuželosečky. Je tudíž jen logickou konsekvencí, když slovem „bod" označíme jen takový, jehož obraz jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Podobně slovem „přímka" budeme rozuměti jen tu její část, která se znázorňuje uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Budeme-li přes to nuceni mluviti o bodech, jichž zobrazení je vně obrazu absolutní kuželosečky, budeme užívati označení „bod ideální".

Podobně budeme mluviti o částech přímky, jichž zobrazení je vně obrazu absolutní kuželosečky, jako o „ideální části přímky". Dle toho přímky eliptické budou pro nás „ideální". Rovněž tak přímky parabolické, s výjimkou jednoho (vlastně dvou splývajících) bodu tečného.

Učiníme ještě jednu úmluvu rázu více formálního. Mohli jsme ji učiniti sice již dříve, ale přistoupíme k ní teprve nyní, když je možno předpokládati, že čtenář již dokonale rozeznává mezi neeuklidovským útvarem a jeho euklidovským modelem. Při výkladu nebudeme názvy nahoře zavedené dávati do uvozovek. To jsme učinili jen proto, aby více vynikly. Uvozovky si reservujeme pro útvary na modelu. Tak obrazem bodu je „bod". podobně obrazem přímky je „přímka". Uvozovkami tedy zdůrazňujeme, že mluvíme o obraze útvaru, nikoliv přímo o něm. To, jak později poznáme, velice zjednoduší prostředky výrazové. — Obraťme se nyní ke studiu přímek v rovině.

§ 4. Dvě přímky.

Výsledky předcházejících odstavců neposkytovaly vlastně více, než jsme znali již z kapitoly předchozí. V tomto paragrafu odvodíme některé poznatky, jež budou pro nás zcela nové. K tomu cíli všimněme si obrazu 1, kde jsou vyznačeny různé polohy dvou přímek. Přímky X, Y[7]) se protínají ve skutečném bodě mimo kuželosečku absolutní, přímky X, Z (nebo Y, Z) se protínají na absolutní kuželosečce, konečně přímky Z, T se neprotínají. Je třeba všimnouti si zvláště každé z těchto tří poloh dvou přímek, což učiníme v následujících řádcích.



Obr. 1.

Přímky X, Y, které se protínají ve skutečném bodě mimo absolutní kuželosečku, nazýváme různoběžky. Jejich úhel[8]) měříme podle 8′. Je vždy reálný, jak jsme dovodili na příslušných místech při studiu eliptického svazku (III, 7, odst. 1). Největší úhel dvou takových přímek je

[7]) Podle úmluvy v předcházejícím § míníme tím přímky, které jsou znázorněny „přímkami“ X, Y.

[8]) Úhlem dvou přímek nazýváme opět hlavní hodnotu logaritmu ve vzorci 8′.

roven π (IV, 2, odst. 2). Zvláštní zmínky zasluhují přímky, které svírají úhel $\frac{\pm\pi}{2}$, t. zv. přímky kolmé. Tu musí podle 8') býti

$$M(XY) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}} = \pm \frac{\pi}{2}$$

Z této rovnice plyne (podle VIII, 1, 3)

$$\frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}} = e^{\pm \pi i} = \cos \pi \pm i \sin \pi = -1,$$

to jest

$$F_{XY} = 0.$$

S podobnou rovnicí (pro souřadnice bodové) jsme se již setkali (III, 2, odst. 3, poznámka 4) a dovodili (podle VIII, 6, odst. 1), že značí elementy harmonicky sdružené k elementům absolutním. Podle poznámky 2 v této kapitole víme, že $f_{xy} = 0$ je rovnicí bodů polárně sdružených vzhledem k absolutní kuželosečce. Přímkám, které vyhovují rovnici $F_{XY} = 0$, říkáme také přímky polárně sdružené. Jejich obrazy mají tu vlastnost, že „přímka" X prochází „pólem" „přímky" Y a obráceně. Můžeme tedy říci:

Dvě kolmé různoběžky (kolmice) jsou polárně sdruženy vzhledem k absolutní kuželosečce.[9]

Někdy se takovým přímkám říká též harmonicky sdružené (III, 7, odst. 1). Na obraze 1 jsou to právě „přímky" X, Y.

Známe-li již definici kolmých přímek, můžeme snadno odvoditi větu: Dvě různoběžky nemají společné kolmice. Taková kolmice by musela procházeti póly obou přímek. Tyto póly jsou však ideální, vždy tak položeny, že i jejich spojnice je ideální a tudíž pro nás neexistuje. („Průsečík" různoběžek je totiž uvnitř „absolutní kuželosečky". Společná „kolmice" obou různoběžek je jeho polárou a ta tedy protíná „absolutní kuželosečku" v bodech imaginárních a tudíž je vně „abs. kuželosečky".)

Obraťme se nyní ke studiu přímek, které se protínají na absolutní kuželosečce. (Na př. X, Z, nebo Y, Z.) V tomto

---

[9]) Připomeňme si obdobnou větu z euklidovské geometrie: „Dvě přímky kolmé jsou polárně (harmonicky) sdruženy k přímkám isotropickým". Čtenář si tuto větu snadno odvodí ze vzorce *Laguerreova*. (III, 1, 4.)

případě absolutní přímky se ztotožňují v jedinou, totiž tečnu k absolutní kuželosečce. V kapitole III, 2, odst. 3 ad *c)* jsme však dovodili, že rovnice (nyní v souřadnicích přímkových) $F_{XZ}^2 - F_{XX} F_{ZZ} = 0$ má za následek splývání elementů absolutních. Totéž však platí i obráceně, takže v tomto případě je podle 8′)

$$M(XZ) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XZ}}{F_{XZ}} = \frac{i}{2} \log 1 = 0.$$

Úhel přímek, které se protínají na absolutní kuželosečce, je roven 0. Přímky, jež se protínají na absolutní kuželosečce, nazýváme rovnoběžné (rovnoběžky) zcela podle analogie rovnoběžek euklidovských. Z obrázku přímo plyne důležitá věta o rovnoběžkách:

Z libovolného bodu možno k dané přímce vésti **dvě** a **jen dvě** rovnoběžky.

Tak možno na př. z bodu *b* vésti dvě rovnoběžky *X* a *Y* k přímce *Z*. (Obr. 1.) To znamená, že ke každému z obou možných směrů na přímce *Z* náleží jen jedna přímka (buď *X*, nebo *Y*). (V literatuře se mluví též o polopřímkách (*X*, *Y*), k dané přímce (*Z*) rovnoběžných.) Tato možnost do jisté míry sama charakterisuje geometrii hyperbolickou. *Lobačevský,* tvůrce hyperbolické geometrie, učinil ji jedním ze základních požadavků své geometrie, nahradiv jí V. postulát *Euklidův.* O dvou rovnoběžkách je možno dokázati, že nemají společné kolmice. Taková kolmice by musila procházeti póly obou rovnoběžek a je tudíž ideální. (Je to ovšem „tečna" absolutní kuželosečky.) Nejvýše bychom snad mohli říci, že mají společný směr kolmý (znázorněný směrem „tečny" k „absolutní kuželosečce" v jejich společném „průsečíku"). Ale čtenář se sám snadno přesvědčí, že tento směr svírá s příslušnými rovnoběžkami úhly neurčité. Kdybychom přes to chtěli pojem společného kolmého směru dvou rovnoběžek zachovati, musili bychom definitoricky zavésti hodnotu úhlu přímky a směru tečného k absolutní kuželosečce v jejím bodě absolutním. To by však mělo právě tak málo geometrického oprávnění, jako kdybychom zaváděli v euklidovské geometrii pojem úhlu přímky vlastní a nevlastní a tudíž tak neučiníme.

Třetí případ, kdy dvě přímky se neprotínají, není méně zajímavý než případ předcházející. Přímky, které se neprotínají, budeme nazývati mimoběžné (mimoběžky).[9a]

[9a]) Poincaré je nazývá rovnoběžky.

Jsou to na příklad Z a T. Zodpovězme nejdříve otázku, jaký úhel svírají mimoběžky? Opakujme krok za krokem postup, jakým získáme úhel! „Přímky“ Z a T prodloužíme až do společného „průsečíku“, z něhož vedeme „tečny“ k „absolutní kuželosečce“. Tyto „tečny“ jsou vždy reálné, příslušný dvojpoměr tedy také, a to vždy kladný, a tudíž jeho logaritmus je taktéž reálný. Podle vzorce 8') obdržíme hodnotu úhlu násobením tohoto logaritmu $\frac{i}{2}$, což v našem případě dává výsledek imaginární:

Úhel dvou mimoběžek je vždy imaginární.

O takových mimoběžkách Z, T můžeme dokázati, že mají společnou kolmici. „Kolmice“ K musí totiž procházeti „póly“ „přímek“ Z, T, t. j. býti polárou „průsečíku“ „přímek“ Z, T vzhledem k „absolutní kuželosečce“. Ježto tento „průsečík“ je vně „absolutní kuželosečky“, je tím zaručeno, že „kolmice“ protíná „absolutní kuželosečku“ v reálných „bodech“. My ovšem neuvažujeme její ideální část.

(Existence společné kolmice dvou mimoběžek vysvětluje také jejich jiný, poněkud nezvyklý název nadrovnoběžky.)

Seznámivše se takto s různými polohami dvou přímek, můžeme výslovně formulovati větu (obr. 1):

Bodem s uvnitř nějakého úhlu dvou různoběžek (X, Y) nebo rovnoběžek (Z, X) můžeme vždy vésti mimoběžku alespoň k jednomu z ramen úhlu.

Později uvidíme, že tato zdánlivě jednoduchá věta byla příčinou nezdarů při ‚důkazech‘ V. postulátu *Euklidova*. V následujícím paragrafu některé tyto pokusy uvedeme a vytkneme jejich chyby.

§ 5. Některé pokusy o důkaz V. postulátu Euklidova.

Pokusy, o nichž se v tomto paragrafu zmíníme, spočívají většinou na předpokladech, které buď nejsou logicky nutné, nebo jsou přímo rovnocenné s V. postulátem. Můžeme zhruba říci, že jejich autoři dokázali to, co předpokládali, když z těchto předpokladů chtěli dokázati onen postulát. Většinou a priori popírali (byť i nevědomky) možnost hyperbolické geometrie.

Posidonius (v prvém století před Kristem) upotřebil k důkazu této definice rovnoběžek[10]: Dvě přímky jsou rovnoběžné, mají-li stejné vzdálenosti. Při tom předpokládal, že vzdálenosti se měří na společných kolmicích. My jsme však o přímkách rovnoběžných dokázali, že v hyperbolické rovině vůbec společné kolmice nemají. Ostatně později (V, 1, odst. 3) dokážeme, že geometrickým místem bodů, stejně od dané přímky vzdálených, není přímka. Tento autor tedy jistě ze svých úvah vylučoval — nevědomky — hyperbolickou geometrii.

Ptolemaios (v druhém století po Kr.) chtěl dokázati V. postulát následujícím pochodem (obr. 1): Předpokládáme-li, že úhly α, β, tvořené rovnoběžkami Z, Y a příčkou P, jsou dohromady větší než úhel 180^0, $\alpha + \beta > 2R$, musí býti též $\alpha' + \beta' > 2R$. Z toho plyne $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4R$. Předpokladem $\alpha + \beta < R$ dospějeme týmž pochodem k nerovnině $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' < 4R$. Ježto však platí rovnice

$$4R = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') = \alpha + \beta + \alpha' + \beta',$$

je nutno předpokládati $\alpha + \beta = 2R$. Z této rovnice snadno plyne důkaz V. postulátu. Chyba spočívala v tom, že předpokládal $\alpha = \beta'$, $\alpha' = \beta$, což není logicky nutné. Skutečně v rovině hyperbolické je $\alpha \neq \beta'$, $\alpha' \neq \beta$.[11]

Proclus (v pátém stol. po Kr.) dokázal V. postulát větou: Protíná-li přímka P jednu ze dvou rovnoběžek Z a X, musí nutně protínati i druhou. Jistě tedy i tento matematik vylučoval — nevědomky — možnost hyperbolické geometrie, jak nás poučí pohled na obrazec.

Saccheri (1667—1733) postupoval asi tímto způsobem: Předpokládal čtyřúhelník s třemi pravými úhly a chtěl dokázati, že čtvrtý úhel jest rovněž pravý. (Z existence čtvrtého úhlu pravého plyne V. postulát.) Dokázal, že tento úhel

---

[10]) *D'Alembert* v „Encyclopédie Méthodique Mathématique“, sv. II, str. 519, ve článku „Parallèles“ píše: „La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie.“ „Definice a vlastnosti přímky, jakož i rovnoběžek jsou úskalím a takřka ostudou základů geometrie.“ Citováno podle *Bonola-Liebmann:* „Die nichteuklidische Geometrie“, str. 54. (V tomto paragrafu je této knihy hojně použito.)

[11]) Ovšem, že i na modelu euklidovském jsou tyto nerovnice obecně splněny, měříme-li je euklidovsky. Z euklidovské velikosti úhlů, které nemají společný vrchol a jedno rameno, nesmíme však usuzovati na poměr jejich hyperbolických velikostí!

nemůže býti větší než 90°.[12]) Chtěl rovněž dokázati, že nemůže býti menší než 90°. To se mu však matematicky nepodařilo. Naopak sestrojil prvé základy hyperbolické geometrie. Ježto však chtěl dokázati V. postulát, zavrhl z důvodů logických hypotésu o ostrém úhlu. Při odvozování důsledků z této hypotésy dospěl totiž k výsledkům, které odporují podle jeho názoru přirozenosti přímky. Tento italský mnich byl snad prvý, který logicky vybudoval základy geometrie hyperbolické. Tragické je, že vlivem tradice a názoru je sám zavrhl.

Legendre (1752—1833) podal důkaz V. postulátu, opíraje se o větu: Bodem *s* uvnitř úhlu přímek *Y* a *X* možno vždy vésti různoběžku k oběma ramenům. Na jiném místě se mu podařilo dokázati, že v případě geometrie hyperbolické (podle naší terminologie) musel by úhel býti závislý na délce ramen. Tato závislost (v hyperbolické geometrii zcela správná, jak později dovodíme) zdála se *Legendreovi* býti protismyslná a proto zavrhl možnost geometrie hyperbolické.

Saccheri byl prvý, který si byl vědom, že se mu nepodařilo matematicky dokázati, že geometrie hyperbolická je nemožná. Zmínili jsme se o důvodech, které ho přiměly k tomu, aby neuznal její logické oprávnění. Nebyly to důvody matematické a tudíž zaujetí kladného stanoviska k této geometrii bylo jen otázkou času. Skutečně později mnozí, kteří počali pracovati s úmyslem dokázati V. postulát, musili složiti zbraně a často přiznati možnost geometrie hyperbolické.[13])

Mohlo by se říci, že v době *Gaussově* (1777—1855) vše bylo připraveno k objevu a zdůvodnění hyperbolické geometrie. Dosud však nebyly přesně definovány rovnoběžky. To učinil *Gauss* takto (obr. 1): Neprotínají-li se dvě přímky *Y*, *Z* (v konečnu), ale každá přímka bodem *b* na *Y* mezi *K*, (která je různoběžná se *Z*, ale nikoliv nutně kolmá k *Z*) a *Y* protíná *Z*, pak tyto přímky jsou rovnoběžné. (*Gauss* měl zřejmě na mysli

[12]) Dnes víme, že se mu to podařilo proto, že předpokládal přímku nekonečnou, čímž předem byla vyloučena geometrie eliptická. Formulace, kterou podáváme, není přesně *Saccheriho*, ale věcně je stejná.

[13]) O geometrii eliptickou se před *Riemannem* nikdy nejednalo. Z kritiků důkazů V. postulátu uvedu zde alespoň jedno jméno, *Kluegelovo* (1739—1812), který po důkladné kritice stávajících důkazů dovodil jejich nesprávné založení a přišel k domněnce, že dvě mimoběžky mohou divergovati.

rovnoběžnost jen v jednom směru.) Tato definice je platna pro geometrii euklidovskou a hyperbolickou. Nutno však napřed dokázati, že není závislá na poloze bodu b, což *Gauss* skutečně učinil. Na této definici konstruoval pak základy hyperbolické geometrie. Nepokračoval však v této práci, neboť 1832 seznámil se s prací *J. Bolyaie* o „absolutní geometrii". (*Bolyai* nazývá tak souhrn pouček geometrických, které platí pro geometrii hyperbolickou i euklidovskou.[14])

V novější době *Hilbert* formuloval postulát o rovnoběžkách pro hyperbolickou geometrii a nahradil tak V. postulát geometrie euklidovské. Tento postulát zní (obr. 1):

Je-li Z libovolná přímka a b libovolný bod mimo Z, pak možno jím vždy vésti dvě (polo)-přímky (souměrné podle kolmice K), které nespadají v jednu a Z (v konečnu) neprotínají, kdežto každá (polo)přímka v úhlu φ bodem b vedená ji protíná.

Tak jsme se dostali stručnými poznámkami až do doby historické. Příležitostně se znovu vrátíme k těmto úvahám. Nyní však budeme pokračovati ve studiu hyperbolické roviny.

§ 6. Úhel rovnoběžnosti.

V předcházejícím paragrafu jsme ukázali, že dvě rovnoběžky nemají společné kolmice. To znamená, že přímka K (obr. 1), která je kolmá na přímku Z, není jistě kolmá na přímku $X \parallel Z$. Úhel přímek K a X nazýváme úhlem rovnoběžnosti rovnoběžek ZX. Jeho hodnotu můžeme snadno vypočítati z obecného vzorce 8'). Výpočet se však velmi zjednoduší, volíme-li „přímky" zkoumané ve zvláštní poloze vzhledem k „absolutní kuželosečce". Tím úvaha nestane se méně obecnou, ale její výsledky obdržíme s menší námahou. Tak na obraze 2 zvolena za jednu z rovnoběžek „přímka" základního trojúhelníka $X \equiv o''o'''$, za druhou rovnoběžku „přímka" P. Kolmice k X budiž taktéž „přímka" základního trojúhelníka $Y \equiv o'o'''$. — Máme vypočítati úhel γ. K tomu použijeme vzorce 10b).

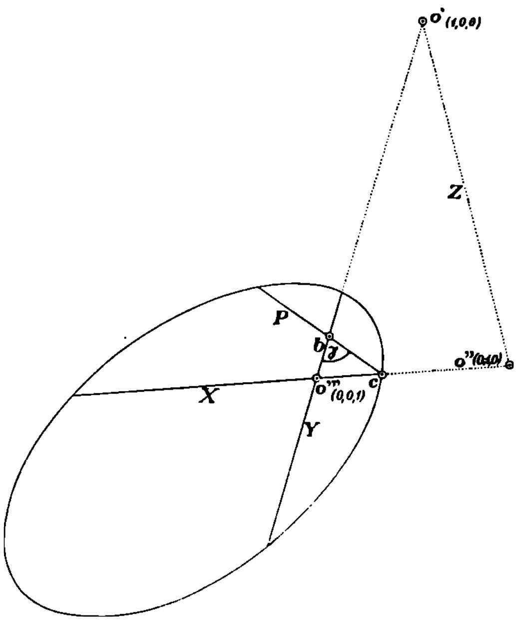
Můžeme předpokládati, že „absolutní kuželosečka" jest dána rovnicí v kanonickém tvaru (VIII, 6, odst. 3)

$$f_{\xi\xi} = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0.$$

[14]) Za zmínku stojí, že göttingský kolega *Gaussův*, *Thibaut*, přednášel důkaz V. postulátu, který ještě ve XX. století byl jako takový reprodukován!

Z této rovnice je zřejmo, že „bod“ c má souřadnice buď $0:1:1$, nebo $0:1:-1$. Budeme předpokládati, že jeho souřadnice jsou právě $0:1:1$. Tečnovou rovnici „absolutní kuželosečky“ odvodíme podle rovnice 2′) (viz též VIII, 6, 28′):

$$-F_{\Xi\Xi} \equiv -\Xi_1^2 - \Xi_2^2 + \Xi_3 = 0.$$



Obr. 2.

Abychom mohli vypočítati úhel γ podle 10b), potřebujeme znáti přímkové souřadnice přímek P a Y. Přímka P prochází body b (b_1, 0, b_3) a c (0, 1, 1) a tudíž její rovnice je (podle VIII, 3, 17)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv -b_3x_1 - b_1x_2 + b_1x_3 = 0.$$

Z toho odvozujeme, že její přímkové souřadnice jsou v poměru $P_1 : P_2 : P_3 = -b_3 : -b_1 : b_1$. Podobně odvodíme přímkové souřadnice přímky Y, $Y_1 : Y_2 : Y_3 = 0 : 1 : 0$. Dosazením těchto souřadnic do výrazů F_{PP}, F_{YY}, F_{PY} obdržíme

$$F_{PP} = b_3^2, \quad F_{PY} = -b_1, \quad F_{YY} = 1.$$

Ze vzorce 10*b*), aplikovaného na náš případ, plyne

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{F_{PP}F_{YY} - F_{PY}^2}{F_{PP}F_{YY}}} = \mp \frac{\sqrt{b_3^2 - b_1^2}}{b_3}.$$

Tak jsme vypočítali úhel γ. Vzorec ten však dá se snadno upraviti, zavedeme-li do počtu vzdálenost bodů $x \equiv o'''$ a b. Použijeme k tomu vzorce 9*a*). Dosadíme-li souřadnice těchto dvou bodů do výrazů f_{xb}, f_{xx}, f_{bb}, získáme

$$f_{xx} = -1, \quad f_{xb} = -b_3, \quad f_{bb} = b_1^2 - b_3^2.$$

Ze vzorce 9*a*), aplikovaného pro náš případ, plyne

$$\operatorname{Cos} \frac{m(xb)}{k} = \frac{f_{xb}}{\sqrt{f_{xx}f_{bb}}} = \frac{-b_3}{\sqrt{b_3^2 - b_1^2}}.$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí pro *sin* γ obdržíme důležitou formuli

11) $$\boxed{\sin \gamma = \pm \frac{1}{\operatorname{Cos} \dfrac{m(xb)}{k}}}$$ [15])

Z této relace odvodíme některé důsledky. Tak jest ihned zřejmo, že

úhel rovnoběžnosti závisí na délce ramene, t. j. na výrazu $m(x, b)$, a to tak, že

při klesající délce ramene stoupá velikost úhlu.

Tímto způsobem můžeme

každé úsečce přiřaditi úhel a obráceně každému úhlu přiřaditi jistou úsečku.

Z toho důvodu se někdy (podle *Lobačevského*) užívá pro úhel, příslušný délce m, označení $\Pi(m)$. V tomto označení je vzorec 11) ve tvaru

11') $$\boxed{\sin \Pi(m) = \frac{1}{\operatorname{Cos} \dfrac{m}{k}}}$$

[15]) V dalším budeme uvažovati jen znamení horní, t. j. jen úhel γ a nikoliv $2R + \gamma$.

Rozvineme-li Cos $\frac{m}{k}$ v řadu (VIII, 1, 6), získáme z rovnice 11')

$$\sin \Pi(m) = \frac{1}{1 + \frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \dots}$$

Když $\frac{m}{k} \to 0$, jest $\lim\limits_{\frac{m}{k} \to 0} \left(1 + \frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \dots\right) = 1$

a tudíž

$$\lim_{\frac{m}{k} \to 0} \sin \Pi(m) = 1.$$

Z toho soudíme, že $\lim\limits_{\frac{m}{k} \to 0} \Pi(m) = \frac{\pi}{2}$ a proto:

Pro každou úsečku m, která je dostatečně malá vzhledem ke k, je v prvém přiblížení úhel $\Pi(m)$ roven konstantnímu úhlu $\frac{\pi}{2}$.

V euklidovské rovině je pro každou úsečku m úhel rovnoběžnosti $\frac{\pi}{2}$. Vzbuzuje to dojem, jako bychom v případě euklidovské roviny uvažovali hyperbolickou rovinu, jejíž konstanta k je dostatečně velká vzhledem ke každé úsečce m této roviny. Proto někdy říkáme, že euklidovská geometrie jest vlastně diferenciální geometrií geometrie hyperbolické. (Srovnej III, 5, konec.)

Závislost úhlu na délce ramene byla již známa před *Lobačevským*. Tak na příklad *Legendre* k tomu výsledku přišel a právě proto neuznával možnost hyperbolické geometrie. (Viz předcházející paragraf.) *Lambert* (1728—1777) na základě tohoto faktu, který mu byl znám, dospěl až k přesvědčení, že existuje absolutní jednotka délky a tedy i absolutní měření. To zdálo se mu však protismyslným a proto tak jako *Legendre* zastával názor, že hyperbolická geometrie jest nemožná.

Poznámka. *Lobačevský* nejen že věřil v možnost hyperbolické geometrie (v prostoru), ale chtěl i praktickým pokusem stanoviti konstantu k. Byl si vědom toho, že, existuje-li skutečně prostor jako hyperbolický, musí nutně jeho konstanta k býti tak velká vzhledem k zemským rozměrům, že při zemských měřeních můžeme užívati euklidovské geometrie, aniž bychom se dopustili znatelné chyby. Proto chtěl konstantu tu zjistiti měřením astronomickým. K tomu cíli uvažoval pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny byly tvořeny poloměrem dráhy zemské r a vzdáleností Siria od Země. Aplikací vzorce 11') na tento trojúhelník dospěl k nerovnině

$$\frac{r}{k} < 0{\cdot}000006012.$$

Tato nerovnina vedla ho k přesvědčení, že konstanta k jest i pro takováto astronomická měření příliš veliká, neboť dle uvedeného vzorce jest alespoň 166.320 průměrů zemské dráhy. Z toho usuzoval, že pro praktické účely možno považovati k vzhledem k měřeným délkám za nekonečně veliké, neboli, že pro praktická měření platí geometrie euklidovská.

§ 7. Tři a více přímek.

1. Trojúhelník. Z vývodů předcházejících paragrafů možno odvoditi některé zajímavé věty. Všimněme si na př. trojúhelníku v hyperbolické rovině. Můžeme sestrojiti trojúhelník, jehož úhly (vnitřní) jsou vesměs rozdílné od nuly. To není nic zvláštního a proto se u takových trojúhelníků nebudeme zdržovati. Můžeme však sestrojiti trojúhelník, jehož jeden, dva, nebo všechny úhly jsou rovny nule. Takovým trojúhelníkům říkáme jednou, dvakrát, třikrát asymptotické. Na obraze 3 jest *abc* jednou, *abc'* dvakrát, *ab'c'* dokonce třikrát asymptotický. Již z toho je zřejmo, že v hyperbolické geometrii neplatí obecně známá věta o součtu úhlů v trojúhelníku.[16]) Dokážeme později, že neplatí vůbec.

Podobně možno ukázati, že neexistují trojúhelníky, jichž dva úhly jsou pravé. Mají-li totiž dvě „strany" býti na třetí kolmé, jsou nutně mimoběžné (svírají úhel imaginární, viz IV, 4). Takovým „trojúhelníkem" jest na obr. 3 trojúhelník *edf*.

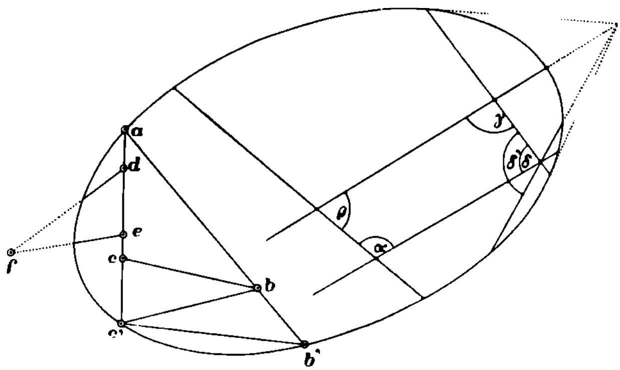
2. Čtyřúhelník. S historického hlediska jest zajímavý čtyřúhelník, jehož tři vnitřní úhly jsou pravé. Takový čtyřúhelník sloužil při důkazech V. postulátu *Euklidova*. (Vlastně již u *Saccheriho*. *Lambert, Legendre* a jiní užívají přímo tohoto čtyřúhelníka.) Postup takových důkazů byl asi následující: Zbývající úhel je buď menší než pravý (t. zv. hypotésa úhlu ostrého), nebo jest pravý (hypotésa úhlu pravého), nebo konečně je větší než pravý (hypot. tupého úhlu). Je-li platna hypotésa pravého úhlu, je možno z ní dokázati V. postulát. Snahou dokazovatelů bylo tudíž dokázati, že obě zbývající hypotésy nejsou přípustné. O hypo-

[16]) „Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku jest 180."

tése úhlu tupého to skutečně dokázali.[17]) O hypotése úhlu ostrého se jim to většinou nepodařilo matematicky. Spíše objevili nějakou poučku z hyperbolické geometrie, která se jim zdála l o g i c k y nemožná a proto hypotésu ostrého úhlu neuznávali. Zbývala jim ovšem nyní hypotésa úhlu pravého, z níž plyne V. postulát.

Pouhý pohled na obr. 3 nás poučí, že úhel δ v čtyřúhelníku, jehož tři úhly α, β, γ jsou pravé, je m e n š í n e ž p r a v ý. Je totiž jednak $\delta' > \delta$, jednak $\delta' = 90^0$ a tudíž

$$\delta < 90^0.^{17a})$$



Obr. 3.

Čtyřúhelník ten je v poloze zcela obecné. Z tohoto poznatku plyne, že

h y p o t é s a o s t r é h o ú h l u v e d e k e g e o m e t r i i h y p e r b o l i c k é.[18])

Zdálo by se na prvý pohled, že z hypotésy ostrého úhlu plyne ihned věta: „Součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180^0.“ Úhlopříčna, spojující vrcholy úhlů β, δ, rozděluje čtyřúhelník na dva trojúhelníky, v nichž součet úhlů je menší než 360^0. To je sice správné, ale není možno z toho usuzovati, že v k a ž d é m z těchto trojúhelníků je součet menší než 180^0. Dokážeme tuto větu až v kapitole následující prostředky jednoduššími (V, 5, resp. V, 6).

[17]) Ježto předpokládali, že přímka je nekonečná.

[17a]) Přesný důkaz tohoto tvrzení, který je velmi snadný, přenechávám píli čtenářově.

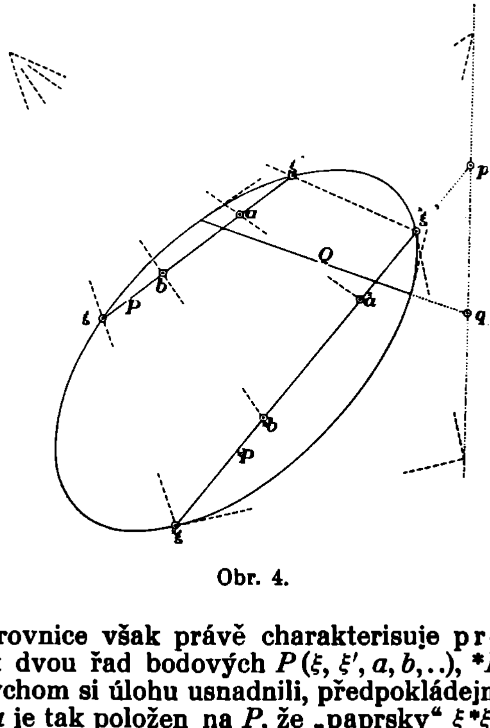
[18]) Tím není ovšem řečeno, že tato hypotésa vede j e n ke geometrii hyperbolické! Takové tvrzení by bylo krajně neopatrné.

§ 8. Základní konstrukce.

1. Přenášení délek. Jak se přenášejí délky na téže přímce hyperbolické, ukázali jsme již v kapitole III, § 6, a nebudeme tedy tuto konstrukci znovu opakovati. Zato rozřešíme úlohu (obr. 4.):

Úsečku ab přenésti s přímky P na přímku $*P$. Tato úloha je velmi jednoduchá. Víme, že úsečky ab, $*a*b$ jsou jen tenkráte stejné, když dvojpoměry $(\xi\xi'ab)$, $(*\xi*\xi'*a*b)$ jsou stejné

$$(\xi\xi'ab) = (*\xi*\xi'*a*b).$$

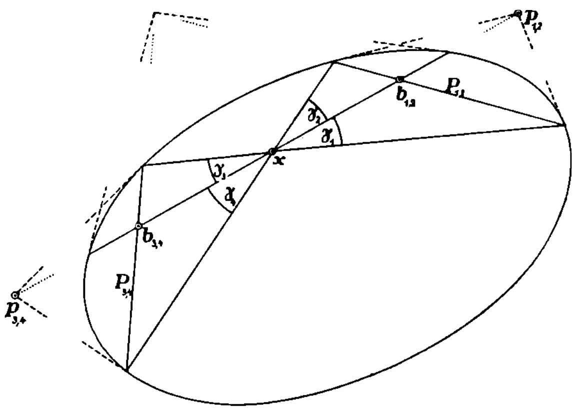


Obr. 4.

Tato rovnice však právě charakterisuje projektivní příbuznost dvou řad bodových $P(\xi, \xi', a, b, ..)$, $*P(*\xi, *\xi', *a, *b, ..)$. Abychom si úlohu usnadnili, předpokládejme nejdříve, že „bod“ a je tak položen na P, že „paprsky“ $\xi*\xi$, $\xi'*\xi'$, $a*a$ se protínají v jednom „bodě“. Pak zmíněné řady jsou perspektivně projektivní a spojnice každých dvou si odpovídajících bodů prochází „průsečíkem“ paprsků $\xi*\xi$, $\xi'*\xi'$. Odpovídající „bod“ $*b$ na $*P$ k „bodu“ b na P podle toho snadno najdeme. Pak jest skutečně $ab = *a*b$. — Je-li bod a na P libovolně položen, posuneme úsečku ab podle

(III, 6) do polohy, o níž jsme právě mluvili a provedeme naznačenou konstrukci. Tak jsme rozřešili úlohu: *Úsečku* ab *přenésti s přímky* P *do libovolné polohy na přímce* $^*P$.

2. *Otáčení a přenášení úhlů*. *Úhel* „přímek“ P a Q můžeme *otáčeti* takovým způsobem, že na „přímce“ pq, která je „polárou“ vrcholu úhlu, provádíme pohyb eliptický. Konstrukce ta je v základě stejná s konstrukcí uvedenou pro přímku hyperbolickou (III, 6), má však tu nevýhodu, že operuje s elementy imaginárními. Proto v následujících odstavcích podáme konstrukci jinou. Již zde však můžeme upozorniti, že rozřešením předložené úlohy získáme též snadno řešení úlohy obecnější, totiž *přenášení úhlu*.



Obr. 5.

Ježto však i tato konstrukce má nevýhodu stejnou, jako konstrukce dříve uvedená, rozřešíme tuto úlohu jinak.

3. *Konstrukce úhlu rovnoběžnosti* $\Pi(m) = \gamma$ *k dané úsečce* $m = xb'$ *a obráceně*. Rozřešme nejdříve úlohu: *K danému úhlu rovnoběžnosti* γ_1 *nalézti příslušnou úsečku* $xb_{1,2}$ (obr. 5). Považujeme-li „přímku“ $xb_{1,2}$ za „kolmici“ k „rovnoběžce“ s druhým „ramenem“ daného úhlu, je zřejmo, že ona „rovnoběžka“ $P_{1,2}$ musí procházeti „pólem“ přímky $xb_{1,2}$. „Přímky“ $P_{1,2}$ a $xp_{1,2}$ se protínají v „bodě“ $b_{1,2}$, který s „bodem“ x určuje hledanou úsečku.

Je zřejmo, že jsme mohli tutéž konstrukci prováděti s úhlem γ_3. Dospěli bychom tak do bodu $b_{3,4}$. Platí obecně

$$\overline{b_{3,4}x} = \overline{xb_{1,2}}.$$

Rozřešili jsme tím tedy zároveň úlohu: Danou „úsečku" $\overline{b_{1,2}b_{3,4}}$ rozpůliti. Neboť stačí „body" $b_{1,2}$, $b_{3,4}$ spojiti s „pólem" „přímky" $\overline{b_{1,2}b_{3,4}}$ a poté k „přímkám" $P_{1,2}$, $P_{3,4}$ vésti „rovnoběžky", které se protínají. (Skutečná konstrukce je tato: Body $b_{1,2}$, $b_{3,4}$ vedeme kolmice k přímce $\overline{b_{1,2}b_{3,4}}$, načež přímky, protínající se v konečnu a rovnoběžné s $P_{1,2}$ a $P_{3,4}$, určují svým průsečíkem x půlící bod.)

Nyní snadno rozřešíme úlohu: K dané úsečce $xb_{1,2}$ stanoviti úhel rovnoběžnosti γ_1. Spojíme „pól" „úsečky" $xb_{1,2}$ s „bodem" $b_{1,2}$ „přímkou" $P_{1,2}$. Druhé „rameno" hledaného „úhlu" je rovnoběžno s $P_{1,2}$. Získáme však dvě „rovnoběžky" s touto přímkou, takže pro absolutní hodnoty úhlů γ_1, γ_2 platí

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Tím jsme tedy rozřešili úlohu: Daný úhel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ rozpůliti. „Ramena" tohoto úhlu protínají totiž „absolutní kuželosečku" v bodech, jichž spojením získáme $P_{1,2}$, $P_{3,4}$. „Průsečík" těchto „přímek" je „pólem" hledané „osy" úhlu $xb_{1,2}$. (Kdybychom průsečné „body" „přímek" $P_{1,2}$, $P_{3,4}$ spojili druhým způsobem — zde neznačeným — dospěli bychom k „ose" úhlu vedlejšího ke γ.)

Známe-li konstruktivní souvislost úsečky a úhlu, snadno přeneseme úhel na dané rameno. Stačí sestrojiti k danému úhlu příslušnou úsečku, tuto přenésti na dané rameno podle prvého odstavce tohoto paragrafu, načež k této úsečce přenesené sestrojíme úhel podle metody právě naznačené. Tento úhel jest úhlem hledaným. Pozorný čtenář najde podle tohoto návodu sám konstrukci, kterou může otáčeti daný úhel. — Skutečně při těchto konstrukcích nepoužíváme elementů imaginárních.

Poznámka: „Absolutní kuželosečku" jsme znázorňovali stále elipsou. Není to však nutné. Jejím obrazem by mohla býti i hyperbola, resp. parabola. Zvolili jsme tento způsob znázornění, ježto je nejpřístupnější.

V kapitole následující navážeme na výsledky základní, získané v této kapitole a budeme studovati pohyb v hyperbolické rovině. Poté provedeme některé úvahy z analytické geometrie a trigonometrie.