Úvod do počtu diferenciálního

Funkce dvou proměnných

In: Miloš Kössler (author): Úvod do počtu diferenciálního. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926. pp. 107–129.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402713

Ostatní neurčité výrazy převádíme na předešlé identitou $\{f(x)\}^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\, l f(x)}$, užívajíce věty o spojité funkci

$$\lim e^{\varphi(x)\, l f(x)} = e^{\lim \varphi(x)\, l f(x)}.$$

$$0^0 : \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\, l x} = e^0 = 1.$$

$$1^\infty : \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{l \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\infty^0 : \lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{l(1+x)}{x}} = e^0 = 1.$$

Velmi jednoduše lze limity počítati, známe-li pro funkce uvažované Taylorovy řady, platné v okolí bodu $x = a$. Na př.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} = \frac{1}{3!}.$$

Poznámka. Funkce $F(x) = f(x) : g(x)$, jejíž limitu v bodě a jsme vyhledávali, byla vždy spojitá v okolí toho bodu, neboť měla tam derivace. V bodě a samotném není $F(x)$ definováno a tedy jest tam nespojité. Jestliže však eksistuje limita $\lim_{x\to a} F(x) = A$ a přiřkneme-li funkci $F(x)$ v bodě a právě tuto hodnotu A, stane se tím $F(x)$ spojitou i v bodě a. Proto se říkává číslu A někdy *pravá hodnota* neurčitého výrazu.

Cvičení 1. $x \to 0 : \frac{\arcsin x}{x} \to 1, \frac{e^x - 1}{x} \to 1, \frac{a^x - 1}{x} \to la,$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \to \frac{1}{2}, \frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x} \to 2, \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \to \frac{1}{3}, \frac{a^x - 1 - x\, la}{x^2} \to \frac{1}{2} l^2 a$$

$$2.\ x \to \frac{\pi}{4} : (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \to e^{-1};\ x \to 0 : \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to e^{-\frac{1}{6}}.$$

Kapitola VII.

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH.

44. Základní pojmy. Funkce spojité. Funkce z dvou nezávisle proměnných x, y $z = f(x, y)$ jest definována, když dán jest předpis, jak k dvojici čísel $[x, y]$ se přiřadí číslo z. Ke grafickému znázornění užívá se obyčejně tří os v prostoru na sobě kolmých, jako v analytické geometrii v prostoru. Každé trojici čísel (x, y, z), která splňuje funkční vztah, odpovídá určitý *bod v prostoru,* mající čísla ta za souřadnice. Rovina položená osami x, y jest rovina nezávisle proměnných. Dvojici čísel $[x, y]$ budeme nazývati *bod (nezávisle proměnný).* Tuto dvojici budeme někdy označovati jediným symbolem o a místo $f(x, y)$ budeme pak psáti stručně $f(o)$. Všechny body $[x, y]$, vyhovující nerovninám $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, kdež a, b, c, d jsou konstanty, nazýváme *(uzavřený) interval* v rovině x, y. Body ty vyplňují obdélník o délce stran $(b - a)$, $(d - c)$; strany ty patří k intervalu. Interval *otevřený* liší se od předešlého tím, že hranice k němu nepočítáme. *Okolí* daného bodu $[a, b]$ jest libovolný interval, který obsahuje $[a, b]$ jako bod vnitřní s výjimkou bodu toho samotného. Často bývá určen čísly kladnými δ, ε a nerovninami

$$|x - a| \leq \delta, \qquad |y - b| \leq \varepsilon, \qquad |x - a| + |y - b| > 0.$$

Jestliže ke každému číslu z přirozené řady čísel $1, 2, 3, \ldots n \ldots$ přiřazen jest bod $o_1, o_2, o_3, \ldots$, mluvíme o posloupnosti bodů. Posloupnost $o_1, o_2, o_3, \ldots$ má limitu $[a, b]$, jestliže při označení $o_n \equiv [x_n, y_n]$ jsou splněny vztahy: $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. Posloupnost do sebe zařazených intervalů (v rovině x, y) I_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ definujeme nerovninami $a_n \leq x \leq b_n$, $c_n \leq y \leq d_n$, toho druhu, že $< a_1, b_1 >$, $< a_2, b_2 > \ldots$ jsou do sebe zařazeny a tedy definují určité číslo ξ (odst. 9) a také $< c_1, d_1 >$, $< c_2, d_2 > \ldots$ jsou do sebe zařazeny a tedy definují určité číslo η. Bod $[\xi, \eta]$ jest pak jediným bodem, který leží v každém intervalu $I_1, I_2, I_3, \ldots$ Proto říkáme obdobně jako v odstavci 9, že posloupnost do sebe zařazených intervalů v rovině $I_1, I_2, I_3, \ldots$ definuje jeden jediný bod $[\xi, \eta]$.

Posloupnost bodů jest ohraničená, jestliže všechny body její leží v jistém intervalu I. O posloupnosti takové platí věty:

Každá ohraničená posloupnost má aspoň jeden bod zhuštění, to jest takový bod, že v každém otevřeném intervalu, bod ten obsahujícím, leží nekonečně mnoho bodů posloupnosti.

Je-li ω bod zhuštění dané posloupnosti, jest možno z ní vybrati jistou posloupnost $o_{\nu_1}, o_{\nu_2}, o_{\nu_3}, \ldots$, která má limitu ω.

Obě tyto věty jsou rozšířením vět z odst. 9 a dokáží se stejně jako tam s tím jediným rozdílem, že intervaly v rovině $I_1, I_2, I_3, \ldots$ rozdělují se při tom nikoliv na dva, nýbrž na čtyři shodné díly pomocí rovnoběžek s osami x, y.

Budeme se v dalším zabývati hlavně funkcemi *spojitými*. K jejich definici jest nutno nejdříve definovati *limitu funkce dvou proměnných:*

Funkce $f(x, y)$ má limitu A, když $x \to a$, $y \to b$, jestliže k libovolně malému číslu kladnému ε lze nalézti takové okolí bodu $[a, b]$, že pro všechny jeho body $[x, y]$ jest

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Fakt ten značíme symbolem

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \quad \text{nebo také} \quad \lim_{o \to [a, b]} f(o) = A.$$

Z definice této plyne ihned důsledek téměř samozřejmý: Jestliže $f(o) \underset{o \to [a,b]}{\to} A$, pak každá posloupnost $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n, \ldots$ mající limitu $[a, b]$, má vlastnost: $\lim\limits_{n \to \infty} f(o_n) = A$. Důkaz provede si čtenář jako cvičení. Nyní již můžeme definovati funkci spojitou:

Funkce jest spojitá v bodě $o_0 = [a, b]$, jestliže $\lim\limits_{o \to o_0} f(o) = f(o_0)$. *Funkce jest spojitá v otevřeném intervalu I, jestliže jest spojitá v každém bodě toho intervalu.*

V dalším budeme mluviti také o funkci spojité v uzavřeném intervalu J. To bude funkce, která jest spojitá v určitém intervalu otevřeném, v němž J jest zcela obsažen.

Spojitá funkce dvou nezávisle proměnných má obdobné vlastnosti, jako spojitá funkce jedné proměnné. Jsou to zejména tyto dvě základní vlastnosti:

I. *Jestliže funkce spojitá v bodě o_0 jest tam od nuly různá, lze vždy nalézti takové okolí bodu o_0, že v něm $f(o)$ má totéž znamení jako $f(o_0)$.*

Důkaz se nijak neliší od důkazu provedeného v odst. 22. Druhá věta zní:

II. *Jestliže $f(x, y)$ jest spojitá v uzavřeném intervalu I, nabývá tam své největší i nejmenší hodnoty a jest tedy z obou stran ohraničená.*

Důkaz této věty provedeme podrobně, hlavně z toho důvodu, že lze jej rozšířiti na jakýkoliv počet nezávisle proměnných. Rozdělme interval na čtyři menší tím, že spojíme úsečkami středy protilehlých stran. Ty nazveme intervaly *prvého dělení*. Každý z nich dělíme podobně znovu. Obdržíme 4^2 intervalů *druhého* dělení a obecně 4^n intervalů *n-tého* dělení. Jest patrno, že každá nekonečná posloupnost takových intervalů do sebe zařazených definuje jediný bod $[x, y]$, který jest všem společný. Také obráceně lze vždy nalézti posloupnost intervalů do sebe zařazených, vybraných z předešlého dělení, tak, aby bod $[x, y]$ v původním intervalu libovolně zvolený byl všem jim společný.

Sledujme funkci $f[x, y]$ na jedné straně některého intervalu. Tam jest na př. y neproměnné; jest tam tedy $f(x, y)$ funkcí spojitou *jediné* proměnné x a tedy nabývá svého maksima v určitém bodě oné strany. Totéž platí pro ostatní tři strany intervalu. Na obvodu intervalu nabývá tedy $f(x, y)$ v určitém bodě svého maksima pro obvodové hodnoty (toto maksimum musíme dobře rozlišovati od maksimální hodnoty $f(x, y)$ v *celém* intervalu). Sledujeme-li obvody všech intervalů n-tého dělení, můžeme zajisté na jednom z nich nalézti bod o_n, který má tu vlastnost, že $f(o_n) \geqq f(o)$ pro všechna o ležící na těchto obvodech. Dále jest patrně $f(o_n) \geqq f(o_{n-1})$, neboť bod o_{n-1} příslušný k dělení $(n-1)$-vému leží na obvodě tohoto dělení a tedy také na obvodě dělení n-tého. Posloupnost bodů $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n, \ldots$ leží v původním intervalu a má tam tedy aspoň jeden bod zhuštění ω. O bodu tom tvrdíme, že v něm $f(o)$ nabývá svého maksima, to jest $f(\omega) \geqq f(o)$, když o jest libovolný bod původního intervalu. Vybeřme z posloupnosti novou, $o_{n_1}, o_{n_2}, o_{n_3}, \ldots$, která má limitu ω a sestrojme další posloupnost

$$f(o_{n_1}) \leqq f(o_{n_2}) \leqq f(o_{n_3}) \leqq \ldots$$

Vzhledem k předpokládané spojitosti funkce je $\lim\limits_{k \to \infty} f(o_{n_k}) = f(\omega)$.

Vyvolme nyní v I libovolný bod o. Podle předešlého lze nalézti posloupnost intervalů do sebe zařazených a patřících postupně k (n_1)-mu, (n_2)-mu atd. dělení, takže definují právě bod o. Na obvodech těchto intervalů zvolme body, třeba levé hořejší vrcholy obdélníků, $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \ldots$ Pak bude $\lim\limits_{k \to \infty} p_{n_k} = o$ a tedy vzhledem k spojitosti $\lim\limits_{k \to \infty} f(p_{n_k}) = f(o)$. Avšak víme, že $f(p_{n_k}) \leqq f(o_{n_k})$ a tedy také $f(o) \leqq f(\omega)$ s. e. d.

Podobně se dokáže eksistence absolutního minima. Další vlastnosti spojitých funkcí jsou: Součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí jest opět spojitá funkce; při podílu musí ovšem jmenovatel býti od nuly různý. Obecněji platí: Spojitá funkce jiných spojitých funkcí jest opět spojitá. To znamená přesně: Je-li $f(u, v)$ spojitá v bodě $[u_0, v_0]$ a jsou-li $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ spojité funkce v bodě $[x_0, y_0]$, mající tam hodnoty u_0, v_0, pak jest také $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. Věta tato vyplývá z následujících vztahů

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} f(u, v) = f(u_0, v_0) = f(\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0)),$$

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} f(u, v) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Poznámka. Pojem limity $\lim\limits_{o \to o_0} f(o)$, který jsme v předešlém definovali a užívali, musíme přísně rozeznávati od t. zv. dvojité limity

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) = B,$$

kterou rozumíme tento pochod:

Pokládáme y za pevně zvolené a určíme $\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$, jestliže vůbec eksistuje. Tato limita je ovšem již nezávislá na x. Po dokonání tohoto kroku provedeme nový: $\lim\limits_{y \to b} \varphi(y) = B$. Při tom jest pamatovati, že limitní přechody často nelze zaměniti beze změny výsledku B.

Příklad 1. $z = ax^2 + by^3$ jest funkce spojitá v bodě $[0, 0]$, neboť $|ax^2 + by^3| \leqq |ax^2| + |by^3| < \varepsilon$, pokud $|x| < \sqrt{\varepsilon/2|a|}$, $|y| < \sqrt[3]{\varepsilon/2|b|}$.

2. Rovněž $z = x \,.\, y \,.\, \sin(y/x)$ jest spojitá v bodě $[0, 0]$, když jí tam přiřkneme hodnotu 0, neboť

$$|z| \leqq |x| \,.\, |y| < \varepsilon, \quad \text{pokud} \quad |x| < \sqrt{\varepsilon}, \quad |y| < \sqrt{\varepsilon}.$$

3. Funkce $z = 4y^2x : (y^2 + x)^2$, v bodě $[0, 0]$ rovná nule, není tam spojitá. Jest sice $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$ a právě tak $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$, avšak přesto $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ neeksistuje, neboť v každém sebe menším okolí bodu $[0, 0]$ jsou body, v nichž $f(x, y) = 1$, a jiné body, v nichž $f(x, y) = 0$. Jsou to body jednak na parabole $x = y^2$, jednak na přímce $y = 0$.

Cvičení. 1. Jak se chová funkce posledního příkladu, když $o \to 0$ *a)* po přímce $y = kx$, *b)* po parabole $y^2 = kx$?

2. Funkce definovaná vztahem $z = y \,.\, \sin(1/x) + x \,.\, \sin(1/y)$, pokud $x \neq 0$, $y \neq 0$, a rovná nule, kdykoliv x nebo y nebo obě tato

čísla jsou rovna nule, jest spojitá v bodě $[0, 0]$! Dokažte, že žádná z dvojitých limit neeksistuje!

3. Dokažte větu: Jestliže obě dvojité limity funkce $f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ eksistují a jsou od sebe různy, není $f(x, y)$ spojitá v bodě tom! [Na př. $z = y : (y + x^2)$.]

45. Parciální (částečné) derivace. Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ budiž dána v nějakém intervalu, jehož jeden vnitřní bod jest $[x, y]$. Pokládejme x, y za pevně zvolené veličiny a utvořme výraz

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Eksistuje-li tato limita, nazýváme ji *parciální derivace $f(x, y)$ podle x v bodě* $[x, y]$ a značíme ji jedním že symbolů

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x z = D_x f = f'_x(x, y) = z'_x.$$

Parciální derivace $f(x, y)$ podle x v bodě $[x, y]$ jest tedy obyčejná derivace, počítaná za předpokladu, že y jest konstantní, kdežto x jest proměnné. Podobně jest parciální derivace podle y

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = \text{atd.}$$

Analogicky definujeme vyšší parciální derivace. Tak na př. druhé derivace jsou čtyři

$$D_x(D_x f(x, y)) = D^2_{xx} f(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad D_y(D_x z) = D^2_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

$$D_x(D_y z) = D^2_{yx} z = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}; \quad D_y(D_y z) = D^2_{yy} z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Všimněme si zvláště symbolu $D^2_{xy} z$ neboli $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$. Podle definice jest nutno $f(x, y)$ derivovati nejdříve parciálně podle x a výsledek pak parciálně podle y. Čtenář vyloží si nyní již sám význam symbolů

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\, \partial y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\, \partial y^k} \quad \text{atd.}$$

Příklady. 1. $z = ax + by$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = b$; všechny vyšší derivace jsou rovny nule.

2. $z = x^y\ (x > 0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \,.\, x^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \,.\, l x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \,.\, (y-1) \,.\, x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = x^{y-1} + y \,.\, x^{y-1}\, l x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y\, l^2 x \quad \text{atd.}$$

Cvičení. 1. Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého stupně pro funkce: $(x \cos y + y \,.\, e^x)$, e^{ax+by}, $e^{ax^2+by^2}$, $(x+y) \,.\, \sin(xy)$ atd.

2. $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$, $z = l \sqrt{x^2 + y^2}$. Dokažte, že tyto dvě funkce vyhovují rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Vypočtěte $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\, \partial y^n}$ pro funkci $z = f(ax + by + c)$ za předpokladu, že $f(u)$ má všechny derivace. $[a^m \,.\, b^n \,.\, f^{(m+n)}(ax + by + c)]$

46. Pokračování o funkcích spojitých. V odst. 44 definovali jsme funkci spojitou v bodě $[x, y]$. Zjišťování spojitosti podle kritéria tam uvedeného jest často obtížné. Proto odvodíme si *postačující* podmínku, která ve většině případů stačí k zjištění spojitosti.

Funkce $f(x, y)$ jest spojitá v bodě $[x, y]$, jestliže jest tam spojitá v jedné proměnné (na př. x) a má-li mimo to v okolí $[x, y]$ ohraničenou parciální derivaci podle druhé proměnné (na př. $|f'_y| < M$).

Jest totiž

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) + f(x + h, y) - f(x, y)$$

a tedy podle věty o střední hodnotě

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = \{ f(x + h, y) - f(x, y) \} + k f'_y(x + h, y + \Theta k).$$

Když $h \to 0$ a $k \to 0$, má závorka limitu 0, protože $f(x, y)$ jest spojitá v proměnné x a druhý sčítanec blíží se nule, protože $|f'_y|$ jest tam menší než M. Tak na př. $e^{\sin(x+y)} : (x^2 + y^2)$ jest spojitá v každém bodě $o \neq [0, 0]$.

Dále jest dobře uvědomiti si, že *ke spojitosti v bodě $[x, y]$ nestačí, jestliže v bodě tom eksistují obě parcielní derivace.* Tím liší se funkce dvou proměnných podstatně od funkce jedné proměnné. Tak na př. $f(x, y) = xy : (x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$ má v bodě $[0, 0]$ obě parciální derivace podle x i podle y

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0} - 0 \right) : h = 0; \quad f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \left(\frac{0 \cdot k}{0 + k^2} - 0 \right) : k = 0,$$

přes to však není spojitá, neboť na přímce $y = x$, $(x \neq 0)$ má funkce hodnotu $1/2$ v libovolné blízkosti bodu $[0, 0]$ a není tedy spojitá.

Právě tak nestačí ke spojitosti v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže jest tam $f(x, y_0)$ spojitá vzhledem k proměnné x a také $f(x_0, y)$ spojitá vzhledem k proměnné y. Tak na př. při funkci z předešlého příkladu jest pro $[x_0, y_0] \equiv [0, 0]$

$$f(x, y_0) = 0, \quad f(x_0, y) = 0,$$

ať x a y jsou jakákoli čísla. Jest tedy $f(x, y_0)$ i $f(x_0, y)$ spojitá, neboť jest konstantní, avšak přes to $f(x, y)$ není, jak již víme, v bodě $[0, 0]$ spojitá.

47. Funkce schopná diferenciace. V odst. 35 definovali jsme funkci jedné proměnné, schopnou diferenciace vztahem

$$f(x + h) - f(x) = A \cdot h + h \cdot \eta(h),$$

kdež $A = f'(x)$ bylo číslo nezávislé na h, a $\eta(h)$ mělo vlastnost $\lim\limits_{h \to 0} \eta(h) = 0$.

Mějme funkci dvou proměnných $f(x, y)$ definovanou v okolí $[x, y]$. Analogicky jako při jedné proměnné definujeme:

$f(x, y)$ jest schopna diferenciace v bodě $[x, y]$, jestliže

$$f(x + h, \; y + k) - f(x, y) = A \cdot h + B \cdot k + \{|h| + |k|\} \cdot \varepsilon, \qquad (1)$$

kdež h, k jsou libovolná čísla, A, B jsou čísla nezávislá na h, k a ε jest funkcí čísel h, k takovou, že $\varepsilon \to 0$, když $\{|h| + |k|\} \to 0$, (to jest, když $h \to 0$ a $k \to 0$).

Příklad. Označme $|h| + |k| = \varrho$. Funkce $z = x^2 \cdot y$ jest schopna diferenciace v každém bodě, neboť

$$(x + h)^2 \cdot (y + k) - x^2 \cdot y = 2xy \cdot h + x^2 \cdot k + \varrho \cdot \left\{ \frac{h^2 (y+k)}{\varrho} + 2x \frac{h \cdot k}{\varrho} \right\}.$$

Zde jest $A = 2xy$, $B = x^2$, $\varepsilon = \dfrac{h^2 (y+k)}{\varrho} + 2x \dfrac{h \cdot k}{\varrho}$.

Patrně jest $|\varepsilon| \leq |h| \cdot |y + k| + 2|x| \cdot |h|$ a má tedy žádanou vlastnost.

Po tomto příkladu vraťme se k obecné úvaze. Čísla A, B jsou funkce proměnných x, y, které můžeme určiti blíže. Ježto

h, k jsou libovolná, zvolme $k = 0$, $h \neq 0$ a dělme rovnici (1) číslem h

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = A + \varepsilon \cdot \frac{|h|}{h}.$$

Jestliže $h \to 0$, má pravá strana limitu A, neboť $\varepsilon \to 0$. Levá strana má tedy rovněž limitu A a podle předešlého odstavce jest

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

Volbou $k \neq 0$, $h = 0$ dokážeme podobně $\dfrac{\partial f}{\partial y} = B$. Výsledek tento můžeme shrnouti ve větu: *Eksistence prvních parciálních derivací jest nutná podmínka, aby funkce byla schopna diferenciace.* Uvidíme v příštím odstavci, že to není podmínka postačující.

V rovnici (1) zaveďme pro libovolná čísla h, k označení $h = \Delta x$, $k = \Delta y$ a definujme Δz vztahem

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \{|\Delta x| + |\Delta y|\} \cdot \varepsilon.$$

Výraz

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

nazývá se *úplný diferenciál* funkce, $\dfrac{\partial f}{\partial x} \Delta x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ jsou *částečné* diferenciály. Toto označení má svůj důsledek, pro speciální funkci $z = x$. Podle hořejší definice je $dz = 1 \cdot \Delta z$ a tedy protože $z = x$, $dx = \Delta x$. Podobně volba funkce $z = y$ vede ke vztahu $dy = \Delta y$. Těchto speciálních výsledků jest zvykem užívati i při obecné funkci schopné diferenciace, takže

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Při tom jsou dx, dy libovolná čísla. Tak na př. funkce $z = x^2 \cdot y$ má úplný diferenciál $dz = 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy$.

Pokládáme-li x, y za pevně zvolená čísla, jako dosud jsme stále činili, jest dz lineární funkcí dvou *proměnných veličin* dx a dy. Jinak jest tomu, když $f(x, y)$ jest schopno diferenciace nejen v bodě $[x, y]$, nýbrž v nějakém jeho okolí. Potom přirozeně dz jest v každém bodě toho intervalu jiné číslo, neboť

$D_x f$ a $D_y f$ jsou funkce obou proměnných $[x, y]$. Pak ovšem jest dz funkcí *čtyř proměnných* x, y, dx, dy. Vzhledem k těmto možnostem jest nutno při každém užívání diferenciálu předem definovati, co rozumíme čísly x, y, dx, dy.

48. Vlastnosti funkce schopné diferenciace. Funkce schopné diferenciace mají několik jednoduchých vlastností, které právě jsou příčinou toho, že funkcemi těmi se zvláště zabýváme.

Funkce $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ schopná diferenciace jest tam spojitá. Jest totiž podle předešlého odstavce

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \{f(x + \Delta x, y + \Delta y)\} = f(x, y),$$

což právě jest definice spojité funkce.

Dále víme z předešlého odstavce, že funkce schopná diferenciace v bodě $[x, y]$ má tam obě první parciální derivace. Opak však neplatí, neboť na př. funkce $z = xy : (x^2 + y^2)$, rovná nule v bodě $[0, 0]$, má v bodě tom obě derivace $D_x f = 0$, $D_y f = 0$, přes to však není tam schopna diferenciace. To plyne z té okolnosti, že v bodě tom jest nespojitá, jak víme z odstavce 46. Eksistence obou prvních derivací jest tedy nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro schopnost diferenciace funkce. Takové nutné a postačující podmínky zde odvozovati nebudeme a spokojíme se pouze konstatováním jednoduchého postačujícího kriteria, které ve většině případů nám dobře poslouží:

Jestliže $f(x, y)$ má v určitém otevřeném intervalu obě první parciální derivace spojité, jest v tom intervalu schopna diferenciace.

K důkazu užijeme vět o střední hodnotě:

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = \{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)\} + \\ + \{f(x, y + k) - f(x, y)\},$$

$$f(x, y + k) - f(x, y) = k \, . \, f'_y\,(x, y + \Theta_1 k).$$

$$f\,(x + h, y + k) - f\,(x, y + k) = h \, . \, f'_x\,(x + \Theta_2 h, y + k).$$

Vzhledem ke spojitosti derivací jest však

$$f'_y(x, y + \Theta_1 k) = f'_y\,(x, y) + \varepsilon_1,$$
$$f'_x(x + \Theta_2 h, y + k) = f'_x(x, y) + \varepsilon_2,$$

kdež $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, když $h \to 0$ a $k \to 0$, a tedy $f(x + h, y +$

$$+k)-f(x,y)=hf'_x+kf'_y+\{|h|+|k|\}\left\{\frac{h}{|h|+|k|}\varepsilon_2+\frac{k}{|h|+|k|}\varepsilon_1\right\}$$

s. e. d.

49. Derivace funkce složené. Budiž $z=f(u,v)$ funkce schopná dif. v bodě $[u,v]$. Dosadíme-li za u, v funkce schopné dif. jediné proměnné (parametru) $u(t)$, $v(t)$, je také z funkcí jediné proměnné t. Jest úkolem vypočísti derivaci $\frac{dz}{dt}$. Zvětšíme-li t o Δt, zvětší se u o Δu, v o Δv a z o Δz. Je tedy podle odstavce 47

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial u}\,.\,\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\,.\,\Delta v+\varepsilon\{|\Delta u|+|\Delta v|\}.$$

Je-li $\Delta u=\Delta v=0$, definujeme $\varepsilon=0$. Dělíme-li obě strany Δt, obdržíme

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon\left\{\frac{|\Delta u|}{\Delta t}+\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\right\}.$$

Jestliže $\Delta t\to 0$, pak také $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$, $\varepsilon\to 0$. Mimo to je

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t)=\frac{du}{dt},\qquad \lim\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)=\frac{dv}{dt},$$

a tedy $\lim\left|\frac{|\Delta u|+|\Delta v|}{\Delta t}\right|=\lim\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|+\lim\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=|u'(t)|+|v'(t)|$.

I jest celkem

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt},\qquad \text{čili } df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Máme tedy pro diferenciál funkce složené touž formuli, jako pro diferenciál funkce $f(u,v)$, v níž u, v jsou nezávisle proměnné.

Jsou-li u, v funkce dvou proměnných $u(x,y)$, $v(x,y)$ schopné diferenciace, je analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Z pravidla o diferenciaci funkce složené vyplývají jako zvláštní případy vzorce, které známe již z dřívějška:

$$d\frac{u}{v}=\frac{1}{v}du-\frac{u}{v^2}dv=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

$$d(u^v)=v\,.\,u^{v-1}\,.\,du+u^v\,.\,lu\,.\,dv,\qquad df(u)=f'(u)\,.\,du+0\,.\,dv.$$

Avšak také obráceně, předpokládajíce znalost těchto formulí, můžeme velmi často vypočísti úplný diferenciál, aniž počítáme derivace parciální. Tak na př.

$$d \arcsin \frac{y^2}{x^2} = \frac{d \frac{y^2}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{y^4}{x^4}}} = \frac{-2y^2\,dx + 2xy\,dy}{x\sqrt{x^4-y^4}}.$$

Z výsledku jest pak možno zjistiti parciálné derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^4-y^4}},$$

neboť z rovnosti

$$A\,dx + B\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

plyne $A = f'_x$, $B = f'_y$, když položím $dx = 0$, nebo $dy = 0$.

50. Vztah $D^2_{xy}z = D^2_{yx}z$. Při počítání různých příkladů setkáváme se téměř pravidelně s rovností v nadpise uvedenou (viz na př. odstavec 45, př. 1 a 2). Byl by však omyl domnívati se, že jest tomu tak vždy. Funkce $z = xy^2(x-y):(x^2 + y^2)$, rovná nule v bodě $[0,0]$, má derivace

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} y^2\frac{h-y}{h^2+y^2} = -y.$$

$$f'_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} xk\frac{x-k}{x^2+k^2} = 0$$

a tedy jest

$$f''_{xy}(0,y) = -1, \quad f''_{xy}(0,0) = -1,$$
$$f''_{yx}(x,0) = 0, \quad f''_{yx}(0,0) = 0.$$

Kdy tedy jsou obě derivace sobě rovny? Odvodíme zde opět jen zcela speciální podmínku postačitelnou, která ve většině případů nám dobře poslouží:

Jestliže obě druhé derivace f''_{xy} a f''_{yx} eksistují v nějakém okolí bodu [x, y] a jsou-li v bodě tom spojité, jsou si tam také rovny.

Abychom větu dokázali, vypočteme tak zv. druhou diferenci

$$A = \frac{f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y)}{h^2}$$

dvojím způsobem. Po prvé položme

$\varphi(x) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$ a uvážíme, že $A = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$;

po druhé položíme

$\psi(y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ a uvážíme, že $A = \frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h}$.

Podle věty o střední hodnotě jest poprvé $A = \varphi'(\xi_1)$, $\xi_1 = x + \vartheta_1 h$ a tedy

$$A = \frac{f'_x(\xi_1, y+h) - f'_x(\xi_1, y)}{h} = f''_{xy}(\xi_1, \eta_1), \quad \eta_1 = y + \Theta_1 h.$$

Po druhé je $\quad A = \psi'(\eta_2), \quad \eta_2 = y + \Theta_2 h,$

a tedy $\quad A = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2), \quad \xi_2 = x + \vartheta_2 h.$

Z toho plyne $f''_{yx}(\xi_2, \eta_2) = f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)$ a jestliže $h \to 0$, je $\xi_1 \to x$, $\xi_2 \to x$, $\eta_1 \to y$, $\eta_2 \to y$, což vzhledem ke spojitosti funkcí dá výsledek hledaný.

Tuto zaměnitelnost derivací můžeme za obdobných podmínek spojitosti rozšířiti i na vyšší derivace jako

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial y^n \partial x^m} \text{ a pod.}$$

Jest totiž na př.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \text{ atd.}$$

51. Vyšší diferenciály. Nechť $f(x, y)$ jest v bodě $[x, y]$ schopna diferenciace a nechť také její derivace f'_x a f'_y mají touž vlastnost, z čehož plyne, že jsou definovány v nějakém okolí bodu $[x, y]$. Úplný diferenciál $dz = f'_x(x, y) \,.\, dx + f'_y(x, y) \,.\, dy$ lze v tom případě pokládati za funkci proměnných x, y v onom intervalu; při tom předpokládáme, že dx a dy jsou *konstanty* na x, y nezávislé. Samo dz jest tedy funkce x, y schopná diferenciace. Její diferenciál označíme znakem δ a právě tak nové libovolné přírůstky nezávisle proměnných označíme δx, δy. Je pak

$$\delta(dz) = (f''_{xx} \,.\, \delta x + f''_{xy} \,.\, \delta y) \,.\, dx + (f''_{yx} \,.\, \delta x + f''_{yy} \,.\, \delta y) \,.\, dy \ldots (1)$$

Učiníme-li předpoklad $f''_{xy} = f''_{yx}$ a zvolíme-li speciálně $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, obdržíme tak zv. druhý diferenciál $f(x, y)$

v bodě $[x, y]$

$$d(dz) = d^2z = f''_{xx} \,.\, dx^2 + 2 \,.\, f''_{xy} \,.\, dx \,.\, dy + f''_{yy} \,.\, dy^2.$$

Podobně definujeme třetí diferenciál

$$d^3z = f'''_{xxx} \,.\, dx^3 + 3 \,.\, f'''_{xxy}\, dx^2 \,.\, dy + 3 \,.\, f'''_{xyy} \,.\, dx \,.\, dy^2 + f'''_{yyy} \,.\, dy^3,$$

obecně pak n-tý diferenciál

$$d^nz = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\, dx^n + c_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} \,.\, dx^{n-1} \,.\, dy + \cdots + c_n \,.\, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\, dy^n.$$

Konstanty $c_1, c_2 \ldots$ jsou nezávislé na tvaru funkce z a můžeme je tedy určiti nějakou speciální volbou funkce na př. $z = e^{x+y}$. I je

$$dz = e^{x+y} \,.\, (dx + dy),\quad d^2z = e^{x+y} \,.\, (dx + dy)^2,\quad d^nz = e^{x+y} \,.\, (dx + dy)^n$$

a dále $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k} = e^{x+y}.$

Dosazením do předešlé rovnice obdržíme

$$(dx + dy)^n = dx^n + c_1 dx^{n-1} \,.\, dy + \cdots + c_n \,.\, dy^n.$$

Protože dx, dy jsou libovolná čísla, musí býti

$$c_1 = \binom{n}{1},\quad c_2 = \binom{n}{2},\ \ldots\ c_k = \binom{n}{k} \ldots$$

K označení prvého diferenciálu užívá se často symbolického násobení

$$dz = \left(dx \frac{\partial \cdot}{\partial x} + dy \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) . z,$$

kdež »faktor« z přijde do míst v čitateli označených tečkami. Právě tak značíme, již bez teček,

$$d^2z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 . z \quad \text{a obecně} \quad d^nz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n . z.$$

Cvičení. 1. Vypočtěte vyšší diferenciály funkcí uvedených v odst. 45.

2. Dokažte, že za předpokladů, které jsme učinili na počátku odstavce o $z = f(x, y)$, jest $\delta(dz) = d(\delta z)$ jen tenkráte, když $f''_{xy} = f''_{yx}$! [Užijte rovnice (1)!]

52. Věta Taylorova pro dvě proměnné. O funkci $f(x, y)$ učiňme předpoklad, že ona a všechny její parciální derivace až po stupeň $(n - 1)$-vý inkl. jsou schopny diferenciace v intervalu

$$a - h \leqq x \leqq a + h \quad , \quad b - k \leqq y \leqq b + k.$$

Funkce

$$\varphi(t) = f(a + ht,\ b + kt),\quad 0 \leqq t \leqq 1$$

závisí potom na jediné proměnné t a má všechny derivace podle t až po n-tou. Položíme-li $a + ht = x$, $b + kt = y$, je podle odst. 49

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k\right).$$

Při tom jsou h, k konstanty na t nezávislé. Druhá derivace jest

$$\varphi''(t) = \left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \frac{dy}{dt}\right) h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{dy}{dt}\right) k\right\},$$

$$\varphi''(t) = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} h \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot k^2\right\} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \cdot f$$

a tedy obecně

$$\varphi^{(m)}(t) = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^m \cdot f(x, y).$$

Pro $t = 0$, čili $x = a$, $y = b$, je tedy

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial a} + k \cdot \frac{\partial}{\partial b}\right)^m \cdot f(a, b),$$

což nám umožňuje, abychom užili formule Maclaurinovy

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!} \varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!} \varphi^{(n)}(\Theta t),$$
$$0 < \Theta < 1.$$

Dosadíme-li sem $t = 1$, získáme *vzorec* Taylorův

$$f(a + h,\ b + k) = f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right) \cdot f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right)^2 \cdot f(a, b) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} \cdot f(a, b) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a + \Theta h,\ b + \Theta k).$$

Nahradíme-li zde znaky a, b, h, k novými x, y, dx, dy a užijeme-li označení z dřívějška známého

$$f(x + dx,\ y + dy) - f(x, y) = \Delta f(x, y)$$

$$\left(dx\,.\frac{\partial}{\partial x}+dy\,.\frac{\partial}{\partial y}\right)^m.\,f(x,y)=d^m f,$$

můžeme Taylorovu formuli psáti ve velmi stručném tvaru

$$\Delta f(x,y)=df+\frac{d^2f}{2!}+\frac{d^3f}{3!}+\dots+\frac{d^{n-1}f}{(n-1)!}+\left(\frac{d^nf}{n!}\right)_{x+\Theta dx,\;y+\Theta dy}.$$

Indeksy u posledního členu značí, že v derivacích obsažených v $d^n f$ jest klásti všude $x+\Theta dx$ místo x a $y+\Theta dy$ místo y.

Vzorec Maclaurinův obdržíme z Taylorova, nahradíme-li znaky a, b, h, k novými $0, 0, x, y$. Napíšeme zde eksplicitně první tři členy:

$$f(x,y)=f(0,0)+\{x\,.f'_x(0,0)+y\,.f'_y(0,0)\}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{x^2.\,f''_{xx}(0,0)+2xy\,.f''_{xy}(0,0)+y^2.\,f''_{yy}(0,0)\right\}+\dots+R_n.$$

Jako při jedné proměnné, můžeme i zde definovati nekonečnou řadu Taylorovu nebo Maclaurinovu, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

Poznámka. Věta Taylorova prvého stupně

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf'_a(a+\Theta h,b+\Theta k)+kf'_b(a+\Theta h,b+\Theta k)$$

bývá často nazývána *věta o střední hodnotě pro dvě proměnné.*

53. Ekstrémy funkcí dvou proměnných. Nechť funkce $z=f(x,y)$ jest definována v intervalu, jehož vnitřní bod jest $[a,b]$. Jestliže lze nalézti okolí bodu $[a,b]$, v němž $f(a,b)>$ $>f(x,y)$, říkáme, že $f(x,y)$ má v bodě $[a,b]$ *relativní maksimum.* Obrácená nerovnina definuje *relativní minimum.* V dalším vyšetřování budeme předpokládati, že $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ jsou schopny diferenciace v bodě $[a,b]$, a že tedy eksistují v nějakém okolí toho bodu. Mimo to ~~nechť~~ $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Má-li nastati maksimum v bodě $[a,b]$, musí býti také $f(a,b)>f(x,b)$; $f(a,b)>f(a,y)$ a tedy funkce jedné proměnné $f(x,b)$ musí míti v bodě $x=a$ maksimum a podobně $f(a,y)$ v bodě $y=b$. Podle odst. 38 musí tedy býti

$$f'_x(x,b)=0 \text{ pro } x=a, \qquad f'_y(a,y)=0 \text{ pro } y=b,$$

Tytéž rovnice obdržíme, když předpokládáme, že $f(x,y)$ má v bodě $[a,b]$ minimum. *Nutná podmínka pro ekstrém v bodě* $[a,b]$ *jest tedy*

$$f'_x(a,b)=0, \qquad f'_y(a,b)=0.$$

Řešením těchto rovnic o dvou neznámých získáme ony body

$[a,b]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$ atd., v nichž ekstrém *může* (avšak nemusí) nastati. Zbývá tedy rozhodnouti, zda v takovém bodě ekstrém vskutku nastává. K tomu cíli utvoříme rozdíl

$$\Delta f = f(a+h,\ b+k) - f(a,b) = hf'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k) + \\ + kf'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k).$$

Je-li rozdíl ten *kladný* pro všechny body $[a+h,\ b+k]$ nějakého okolí bodu $[a,b]$, jest v bodě tom *minimum*, je-li *záporný*, jest tam *maksimum*, nabývá-li různých znamení, ať $|h|$, $|k|$ jsou jakkoliv malá, není tam ekstrému. Abychom rozhodli, užijeme toho, že derivace jsou schopny diferenciace:

$$f'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = f''_{xx}(a,b)\,\Theta h + f''_{xy}(a,b)\,\Theta k + \varepsilon'_1\{|h|+|k|\}\Theta$$
$$f'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = f''_{xy}(a,b)\,\Theta h + f''_{yy}(a,b)\,\Theta k + \varepsilon'_2\{|h|+|k|\}\Theta$$

Při tom víme, že $\varepsilon'_1 \to 0$, $\varepsilon'_2 \to 0$, když $|h|+|k| \to 0$. Užijeme-li ještě zkratek $A = f''_{xx}(a,b)$, $B = f''_{xy}(a,b)$, $C = f''_{yy}(a,b)$ a substituce $h = r\,.\cos\varphi$, $k = r\,.\sin\varphi$, která určuje jednoznačně $r > 0$ a φ v mezích $0 \leqq \varphi < 2\pi$, obdržíme

$$f'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = r\,.\,\Theta\{A\,.\cos\varphi + B\,.\sin\varphi + \varepsilon_1\},$$
$$f'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = r\,.\,\Theta\{B\,.\cos\varphi + C\,.\sin\varphi + \varepsilon_2\},$$

$\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, když $r \to 0$. Tedy dále

$$\Delta f = \Theta r^2\,.\{A\cos^2\varphi + 2B\,.\cos\varphi\sin\varphi + C\,.\sin^2\varphi + \varepsilon\},$$

kdež $\Theta\,.\,r^2$ jest kladné, $\varepsilon = \varepsilon_1\cos\varphi + \varepsilon_2\sin\varphi \to 0$, když $r \to 0$. Z výrazu toho soudíme:

1. Jestliže trojčlen $(A\,.\cos^2\varphi + 2B\,.\sin\varphi\,.\cos\varphi + C\,.\sin^2\varphi)$ jest větší než nějaká *kladná* konstanta*) $m > 0$, ať φ jest jakýkoliv úhel, pak Δf jest kladné pro všechna dosti malá r. Za daných předpokladů lze totiž vždy nalézti takové číslo ϱ, že $|\varepsilon| < m/2$ pro všechna $r \leqq \varrho$. Pak ovšem ta okolnost, zda ε jest kladné či záporné, nemá vlivu na znamení Δf. *Funkce má minimum.*

2. Jestliže trojčlen jest menší než určitá záporná konstanta $-m$, funkce má z týchž důvodů *maksimum.*

3. Jestliže trojčlen pro různá φ má různá znaménka, nemá funkce vůbec ekstrému.

4. Jestliže trojčlen má sice stále totéž znamení, avšak anuluje se pro některá φ, nemůžeme rozhodnouti, neboť pro ona φ jest znaménko Δf určováno znamením ε, o němž nic nevíme.

---

*) To nastává vždy, je-li trojčlen ten v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ stále kladný, podle III. věty o funkcích spojitých.

Provedeme nyní úvahu určující, který z těchto případů nastává. Jestliže všechna tři čísla A, B, C jsou rovna nule, nastává zřejmě případ 4-tý, kdy k rozhodnutí jest třeba přihlédnouti k dalším členům Taylorova rozvoje. Tím však se zde zabývati nebudeme. Učiňme tedy nejdříve předpoklad, že $A \neq 0$. Trojčlen uvedeme na tvar

$$\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\,.\sin^2\varphi}{A}.$$

Jestliže $(AC - B^2)$ jest kladné číslo, je čitatel zlomku kladný pro každé φ. Protože čitatel ten jest *spojitá* funkce proměnné φ s periodou 2π, nabývá v intervalu $<0, \pi>$ kdesi svého absolutního minima m, které podle předpokladů musí býti také kladné. Znaménko celého zlomku jest tedy určováno znaménkem čísla A. Pro kladné A nastává tudíž minimum, pro záporné maksimum. Jestliže $A \neq 0$, $(AC - B^2) < 0$, má zlomek různá znamení pro $\varphi = 0$ a pro φ, určené vztahem $\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{B}{A}$. Není tedy ekstrému. Jestliže $A \neq 0$, $(AC - B^2) = 0$, nemůžeme rozhodnouti, neboť nastává případ čtvrtý.

Předpokládejme dále, že $A = 0$. Trojčlen se redukuje na výraz

$$\sin\varphi\,.\left\{2B\,.\cos\varphi + C\,.\sin\varphi\right\}$$

Jestliže $B \neq 0$, určíme úhel $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, tak, aby

$$|C\,.\sin\varphi_1| < |2B\,.\cos\varphi_1| \quad \text{čili} \quad |C\,.\operatorname{tg}\varphi_1| < |2B|.$$

Takový úhel lze vždy nalézti a potom má uvažovaný součin různá znamení pro $\varphi = \varphi_1$ a pro $\varphi = -\varphi_1$. Není ekstrému.

Jestliže $A = 0$, $B = 0$, redukuje se trojčlen na $C\,.\sin^2\varphi$, a máme opět případ čtvrtý, neboť výraz ten nemění sice znaménka, ale anuluje se pro $\varphi = 0, \pi$.

Celé vyšetřování shrneme do schematu

$$f'_x(a, b) = 0,\; f'_y(a, b) = 0$$

(rovnice určující a, b).

$$A = f''_{xx}(a, b), \qquad B = f''_{xy}(a, b), \qquad C = f''_{yy}(a, b).$$

$AC - B^2 > 0$	$AC - B^2 < 0$	$AC - B^2 = 0$
$A < 0$, maksimum,	**není ekstrému.**	**případ nerozhodný**
$A > 0$, minimum,		**(semidefinitní).**

Cvičení. 1. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$. (Minimum [1, 1].)

2. $z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$. (Minimum $[1, -1]$ a $[-1, 1]$).

3. V pravoúhlých souřadnicích v prostoru vedena jest přímka

$$p \equiv y = a + Ax; \quad z = b + Bx, \quad (a \neq 0).$$

Jest určiti nejmenší vzdálenost přímky té od osy z. [Úsečka ta spojuje bod na přímce p o souřadnicích x_1, y_1, z_1 a bod na ose z o souřadnicích $0, 0, z_2$. Má býti minimem výraz $x^2_1 + y^2_1 + (z_1 - z_2)^2$, čili $f(x_1, z_2) = x^2_1 + (a + Ax_1)^2 + (b + Bx_1 - z_2)^2$.

Řešení jest kolmice na osu z, vedená z bodu o souřadnicích

$$\left(-\frac{aA}{1+A^2}, \frac{a}{1+A^2}, b - \frac{aAB}{1+A^2}\right)\Big].$$

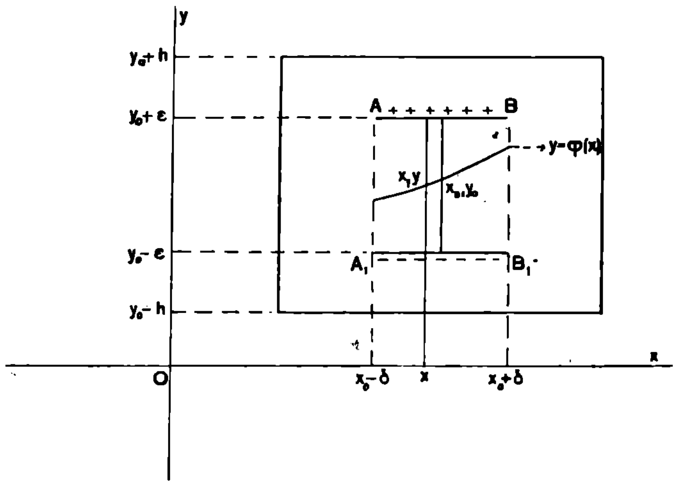
Dokažte logickou úvahou (bez počítání), že úsečka ta jest kolmá i k přímce p!

4. Trojúhelník jest dán v pravoúhlých souřadnicích svými vrcholy $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$. Určiti bod tak, aby součet čtverců jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníka byl co nejmenší! (Těžiště trojúhelníka.) Totéž pro n-úhelník!

5. Dvě křivky v rovině $y = f(x)$, $y = g(x)$ nemají společného bodu. Spojíme-li bod P_1 na prvé křivce s bodem P_2 druhé křivky, může míti úsečka P_1P_2 ekstrém jen tam, kde spojnice ta jest společnou normálou obou křivek! Proveďte důkaz! Vyšetřte ekstrémy blíže za předpokladu, že P_1P_2 jest osou y a tečna v bodě P_1 osou x! (Ekstrém nastává, jestliže $g''(0) - f''(0) > g(0) \,.\, g''(0) \,.\, f''(0)$, když $g(0) > 0$).

54. Funkce implicitní a její derivace. Budiž $z = f(x, y)$ funkce spojitá v nějakém intervalu roviny x, y. Klademe si otázku, kdy jest možno rozřešiti rovnici $f(x, y) = 0$ podle y při libovolném x v daném intervalu, to jest, nalézti takovou funkci $y = \varphi(x)$, která by aspoň v části intervalu splňovala identicky rovnici $f(x, \varphi(x)) = 0$. V některých případech takové řešení lze snadno nalézti, jako na př., když $x^2 + y^2 - 1 = 0$, jest řešení $y = +\sqrt{1 - x^2}$, nebo $y = -\sqrt{1 - x^2}$, pokud $-1 \leq x \leq 1$. Jindy zase jest řešení nemožné, jako na př. při $x^2 + y^2 = 0$. Zde jest možno namítnouti, že rovnice sice nemá reálného řešení, že však má řešení kompleksní $y = ix$. Jsou však známy rovnice, které nemají ani takového řešení, jako na př. $e^{y+x} = 0$. Obecně platnou odpověď na hořejší otázku nelze podati. Spokojíme se zde vytknutím některých postačujících znaků funkce $f(x, y)$, které zaručují eksistenci řešení. Zhruba jest možno pamatovati si heslo: Jestliže $f(x, y)$ jest rovno nule v *jednom* bodě $[x_0, y_0]$, pak lze očekávati, že rovnice $f(x, y) = 0$ má řešení $y = \varphi(x)$ definované v určitém okolí bodu x_0. Přesné podmínky, za nichž to nastane, jsou shrnuty ve větě:

Nechť $f(x, y)$ jest spojitá v intervalu $x_0 - k \leqq x \leqq x_0 + k$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$. Ve středním bodě jeho $[x_0, y_0]$ nechť jest $f(x_0, y_0) = 0$ a mimo to $f(x_0, y_0 + \eta) > 0$, $f(x_0, y_0 - \eta) < 0$, pokud $0 < \eta \leqq h$.) Pak lze nalézti aspoň jednu funkci $y = \varphi(x)$, definovanou v určitém okolí bodu x_0 a spojitou v bodě x_0, která má vlastnosti $\varphi(x_0) = y_0$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.



Obr. 16.

Při důkazu užijeme obr. 16, který nám poslouží jako pomůcka paměti, nikoliv jako pomůcka věcná! Zvolme *pevně* číslo kladné $\varepsilon \leqq h$. Pak podle předpokladů $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$, $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ a vzhledem k spojitosti funkce je $f(x, y)$ kladné na určité úsečce $\overline{AB}$, jdoucí bodem $[x_0, y_0 + \varepsilon]$ rovnoběžně k ose x a záporné na jiné s ní rovnoběžné úsečce $\overline{A_1B_1}$, jdoucí bodem $[x_0, y_0 - \varepsilon]$. To jest pouhý důsledek prvé věty o spojitých funkcích v odst. 22. Jest zřejmo, že obě tyto úsečky lze voliti stejně dlouhé se středem v bodech svrchu vytčených, a dále, že poloviční délku $\delta(\varepsilon)$ úseček těch lze považovati za funkci čísla ε.

Zvolme nyní x *pevně* v int. $< x_0 - \delta, x_0 + \delta >$; funkce spojitá $f(x, y)$ *jedné* proměnné y je záporná pro $y = y_0 - \varepsilon$ a kladná pro $y = y_0 + \varepsilon$. Podle druhé věty o spojitých funkcích (odst. 22) musí tedy eksistovati aspoň jedno číslo y, ležíci mezi $y_0 - \varepsilon$ a $y_0 + \varepsilon$, pro které $f(x, y) = 0$. Jestliže takových y jest více, volme při konečném jejich počtu to z nich, které má co nejmenší $| y - y_0 |$ a jsou-li dvě taková, volme to, pro které $y - y_0 > 0$ a označme je $y = \varphi(x)$.*) Funkční označení je oprávněné, neboť ke každému x v intervalu $< x - \delta, x + \delta >$ přísluší zcela určité y. Jestliže zvolíme nyní jiné ε, obdržíme jiné $\delta(\varepsilon)$ a tedy také jiný definiční interval $< x - \delta, x + \delta >$ pro funkci $\varphi(x)$. Avšak ve společné části obou definičních intervalů je $\varphi(x)$ v prvém i druhém případě totožné, neboť čísla y_1, y_2 v předešlém důkazu se vyskytující jsou závislá pouze na x, nikoliv však na ε. Běží nyní o to, určiti nějaký obor, v němž funkce $\varphi(x)$ jest definována. Jestliže jest d menší z čísel k a $\delta(h)$, jest $\varphi(x)$ definováno aspoň v intervalu $< x_0 - d, x_0 + d >$.

Eksistence funkce $y = \varphi(x)$ v oboru $(x - d, x + d)$ jest tedy prokázána a zbývá jen se přesvědčiti, že funkce ta jest spojitá v bodě x_0. Důkaz toho jest již v předešlém obsažen, neboť, když ε tam volené jest jakkoliv malé, vždy přísluší k němu takové $\delta(\varepsilon)$, že jest $| y - y_0 | < \varepsilon$, čili $| \varphi(x) - \varphi(x_0) | < \varepsilon$, pokud $| x - x_0 | < \delta(\varepsilon)$ a to jest definice spojitosti v bodě x_0. Není snad zbytečné připomenouti, že jest

*) Při nekonečném počtu takových y dokážeme, že jedno z nich má nejmenší prostou hodnotu takto: Bez újmy všeobecnosti můžeme klásti na chvíli $y_0 = 0$. To značí jen posunutí počátku souřadnic. V intervalu $< -\varepsilon, 0 >$ nebo v intervalu $< 0, +\varepsilon >$ anebo v obou z nich leží aspoň jeden nulový bod funkce $f(x, y)$. Dejme tomu, že jest tomu tak v intervalu $< 0, +\varepsilon >$. Rozpůlíme interval ten a volíme k další úvaze onu polovinu, v níž leží aspoň jeden nulový bod. Mají-li obě poloviny tuto vlastnost, volíme »dolní« polovinu (s menšími y). Tuto polovinu opět rozpůlíme a opakujeme předešlou úvahu. Pokračujíce takto, získáme posloupnost intervalů do sebe zařazených, které definují číslo nikoliv záporné y_1. Tvrdíme nyní, že jest $f(x, y_1) = 0$. Bod $[x, y_1]$ jest totiž bodem zhuštění takových bodů $[x, y]$, které mají vlastnost $f(x, y) = 0$ a tedy vzhledem k spojitosti funkce musí býti také $f(x, y_1) = 0$. Z důkazu vyplývá, že žádné nikoliv záporné y menší než y_1 nemůže hověti předešlé rovnici. Jestliže také v intervalu $< -\varepsilon, 0 >$ leží aspoň jeden nulový bod funkce $f(x, y)$, opakujeme předešlou úvahu s tím rozdílem, že při možnosti volby mezi polovinami volíme vždy horní polovinu. Získáme tak nikoliv kladné číslo y_2, hovící rovnici a mající tu vlastnost, že žádné $y \leq 0$, které jest větší než y_2, nesplňuje rovnici $f(x, y) = 0$. Ono z čísel y_1 a y_2, které má menší prostou hodnotu, definuje $\varphi(x)$. Jestliže jest $| y_1 | = | y_2 |$, volíme $\varphi(x) = y_1$.

tím dokázána pouze spojitost v bodě x_0, nikoliv v bodech jiných!

Mimo právě sestrojenou funkci $y = \varphi(x)$, která vyhovuje rovnici $f(x, y) = 0$, mohou ovšem eksistovati ještě jiná řešení, jdoucí bodem $[x_0, y_0]$, jak jest patrno z příkladu prvého. Někdy však $y = \varphi(x)$ jest jediné řešení rovnice.

V praksi nejčastěji se vyskytující rovnice $f(x, y) = 0$, které mají jediné spojité řešení, jsou blíže určeny větou:

Budiž $z = f(x, y)$ rovno nule v bodě $[x_0, y_0]$ a buďtež $f(x, y), f'_y(x, y)$ funkce spojité v nějakém okolí bodu toho. Dále nechť jest $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak eksistuje interval $< x_0 - \eta, x_0 + \eta >$, v němž má rovnice $f(x, y) = 0$ spojité řešení $y = \varphi(x)$, kdež $y_0 = \varphi(x_0)$ a to jediné řešení těchto vlastností.

Jestliže mimo to v okolí bodu $[x_0, y_0]$ eksistuje derivace $f'_x(x, y)$, má funkce $y = \varphi(x)$ derivaci $y' = -f'_x(x, y) : f'_y(x, y)$.

Při důkazu můžeme předpokládati, že $f'_y(x_0, y_0) > 0$, neboť, kdyby bylo záporné, stačí uvažovati místo $f(x, y)$ funkci $-f(x, y)$. Pak jest vzhledem k spojitosti $f'_y(x, y) > 0$ v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$. Při pevném x tedy v tomto okolí $f(x, y)$ vzrůstá stále se vzrůstajícím y. To však znamená, že v okolí tom $f(x_0, y) > 0$ pro $y > y_0$ a $f(x_0, y) < 0$ pro $y < y_0$ a mimo to na každé rovnoběžce s osou y může ležeti jen jediný nulový bod funkce $f(x, y)$. Podle předešlé věty eksistuje tedy jedno jediné spojité řešení $y = \varphi(x)$ v určitém okolí bodu x_0. Zbývá dokázati, že má derivaci a vypočísti ji. Je-li Δx menší než nějaká konstanta, je

$$f(x_0 + \Delta x, \varphi(x_0 + \Delta x)) = 0, \quad f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$$

a tedy také

$$\{f(x_0 + \Delta x, \varphi(x_0 + \Delta x)) - f(x_0, \varphi(x_0))\} : \Delta x = 0.$$

Zavedeme-li označení $\varphi(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$ ($\Delta y \to 0$, když $\Delta x \to 0$), lze předešlou rovnici psáti ve tvaru

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} = 0.$$

Podle věty o střední hodnotě jest čitatel druhého sčítance roven $f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y) \,.\, \Delta y$ a je tedy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} : f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y).$$

Když nyní $\Delta x \to 0$, pak také $\Delta y \to 0$; dělenec pravé strany má pak limitu $f'_x(x_0, y_0)$ a dělitel má limitu $f'_y(x_0, y_0) > 0$. Má tedy také levá strana poslední rovnice touž limitu, jinak řečeno, funkce $\varphi(x)$ má v bodě x_0 derivaci $\varphi'(x_0)$. Úvaha právě vykonaná platí nejen v bodě $[x_0, y_0]$, nýbrž i v každém jiném bodě křivky $y = \varphi(x)$. Jest tedy pro všechny body této křivky

$$y' = \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

pokud ovšem $f'_y(x, y) \neq 0$. Při tom na pravé straně jest klásti $y = \varphi(x)$.

Příklad 1. $f(x, y) = y^3 - y^2x - yx^2 + x^3$. Funkce se anuluje v bodě $[0, 0]$ a mimo to jest $f(0, y) \gtrless 0$, pokud $y \gtrless 0$. Bodem $[0, 0]$ procházejí zřejmě tato dvě spojitá řešení $y = +x$, $y = -x$. Mimo ně jsou tu ještě další dvě spojitá řešení $y = |x|$ a $y = -|x|$. Prvé z nich jest řešením $y = \varphi(x)$ z obecné věty. Dále eksistuje nekonečně mnoho jiných řešení spojitých v bodě $[0, 0]$ na př. $y = x$ pro racionální x a $y = -x$ pro iracionální x. Řešení to jest ovšem v každém jiném bodě nespojité.

Příklad 2. Algebraická funkce (křivka) jest definována rovnicí

$$f(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

kdež $a_k(x)$ jsou polynomy v proměnné x. Jestliže rovnici té vyhovují dvě reálná čísla x_0, y_0, a je-li při tom $f'_y(x_0, y_0) = n y_0^{n-1} \cdot a_0(x_0) + (n-1) y_0^{n-2} \cdot a_1(x_0) + \ldots + a_{n-1}(x_0) \neq 0$, p[illegible] bodem $[x_0, y_0]$ jediné řešení $y = \varphi(x)$ a bodu tomu [illegible] *regulární* bod křivky. Derivace funkce $\varphi(x)$ (směrnice tečny) jest určena obecným vztahem $y' = -f'_x : f'_y$ (viz též odst. 30). Bod je regulární, když sice $f'_y(x_0, y_0) = 0$, avšak $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, neboť pak stačí vyměniti označení os souřadných, abychom došli k předešlému případu. Bod $[x_0, y_0]$ není regulární, když v něm jest současně $f'_x = 0$, a $f'_y = 0$; bodu takovému říkáme *singulární*.

Cvičení. 1. Dokažte, že rovnice $y - x \cdot \sin y - M = 0$ má jediné a spojité řešení procházející bodem $[0, M]$! Vypočtěte jeho derivaci!

[illegible] Jestliže rovnice $f(x, y) = 0$ má singulární bod $[x_0, y_0]$ a je-li v bodě tom $AC - B^2 > 0$ (viz odst. 52), jest bod ten isolovaným bodem nulovým (jako na př. $[0, 0]$ v rovnici $x^2 + y^2 = 0$), je-li však $AC - B^2 < 0$, má rovnice aspoň jedno řešení jdoucí bodem tím. Dokažte tato tvrzení, opírajíce se o úvahy odstavce 53!