Úvod do počtu diferenciálního

Řady

In: Miloš Kössler (author): Úvod do počtu diferenciálního. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926. pp. 36–47.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402709

jistého indexu $N(k)$ počínaje všechny členy posloupnosti mají totožné nebo téměř totožné úseky řádu k-tého, a tedy, jsou-li n', n'' dva indexy větší než $N(k)$, jest, jak snadno nahlédneme, $|a_{n'} - a_{n''}| < 2 . 10^{-k}$ Při daném ε lze vhodnou volbou čísla k docíliti toho, aby $2 \quad 10^{-k} < \varepsilon$ a tedy také $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$, q. e. d.

Jako druhý krok dokážeme: Jestliže posloupnost splňuje podmínku $B - C$, má limitu. Zvolme $\varepsilon = 10^{-k}$. Pak pro všechna $n > N(k)$ je $|a_N - a_n| < 10^{-k}$ a tedy úseky řádu $(k-1)$-ho pro všechna taková a_n jsou totožné nebo téměř totožné. Jsou totiž tři možnosti. Buď číslo a_N má na k-tém místě desetinném cifru *9* nebo cifru *0*, nebo konečně cifru jinou než *9* a *0*.

Je-li tam cifra jiná než 9 a 0, jsou patrně úseky řádu $(k-1)$-ho u všech čísel a_n pro $n > N(k)$ totožné, neboť $a_n = a_N + \varepsilon_n$, kdež $|\varepsilon_n| < 10^{-k}$. Jsou to tedy úseky *definitivní*.

Je-li cifra ta devítka, jsou patrně úseky $a_n^{(k-1)}$ pro $n > N(k)$ rovny buď $a_N^{(k-1)}$ nebo $(a_N^{(k-1)} + 10^{-k+1})$ a jsou tedy *definitivní*.

Je-li cifra ta nula, jsou patrně $a_n^{(k-1)}$ pro $n > N(k)$ rovny buď $a_N^{(k-1)}$ nebo $(a_N^{(k-1)} - 10^{-k+1})$ a jsou tedy *definitivní*.

Posloupnost, která splňuje podmínky $B - C$, má tedy definitivní úseky každého řádu a má tedy také limitu.

Kapitola III.

ŘADY.

10. Obecné kriterium konvergence. Sčítání jsme definovali pouze pro *konečný* počet sčítanců. Nemůžeme tedy mluviti o »součtu všech členů« dané posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$, aniž jsme přiřkli symbolickému rčení tomu novou definicí nějaký význam. Proto definujeme:

Součet všech členů posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$ jest roven s, jestliže nová posloupnost **částečných součtů**

$$s_1 = u_1, \; s_2 = u_1 + u_2, \; s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots \; s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

má limitu rovnou s.

Místo znaku $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)$

píšeme pak

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

a vyslovujeme větu:

Součet nekonečné řady $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ jest roven s.

Nekonečná řada, která má součet, nazývá se *konvergentní*. Jestliže číslo s neexistuje, to jest, jestliže posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_3 \dots$ nemá limity, nazývá se nekonečná řada *divergentní*. Tak na př. řada $q + q^2 + q^3 + \dots$ při $|q| < 1$ jest konvergentní, neboť $s_n = q \,.\, (1 - q^n) : (1 - q)$, a tedy $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = q : (1 - q)$. Řada $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ jest divergentní, neboť posloupnost $s_1, s_2, \dots$ nemá limity. Z definice konvergence vyplývá ihned důležitý poznatek: Jestliže v nekonečné řadě vynecháme nebo přidáme konečný počet sčítanců, lze tím sice změniti součet řady, nikoliv však konvergenci její. Z kriteria Bolzano-Cauchy-ova pro posloupnost $s_1, s_2, s_3 \dots$ vyplývá ihned toto *všeobecné kriterium konvergence:*

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

jest:

Ať zvolím kladné číslo ε jakkoli, vždy dá se nalézti takové celistvé kladné $N(\varepsilon)$, že pro všechna $n \geqq N(\varepsilon)$ a pro všechna celistvá $k > 0$ platí

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon.$$

Toto kriterium má, jak uvidíme, velký význam při provádění důkazů různých vět. Pro praktické rozhodování o konvergenci odvodíme v příštím odstavci pravidla sice méně všeobecná, za to však pohodlnější.

Zde připojíme jen jednu poznámku. Nutná, nikoliv postačující podmínka pro konvergenci řady jest $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Pro konvergentní řadu jest totiž

$$\lim s_n = s, \ \lim s_{n-1} = s \qquad \text{a tedy nutně}$$

$$\lim u_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

Tak na př. v geometrické řadě

$$q : (1 - q) = q + q^2 + q^3 + \dots \qquad |q| < 1$$

jest vskutku $\lim q_n = 0$. Byl by však omyl, domnívati se, že řada, v níž $\lim u_n = 0$, jest vždy konvergentní, čili, že podmínka ta jest postačující. Jednoduchým příkladem pro to jest řada *harmonická,* jejíž rozbor provedeme. Jest to řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Při tom jest

$$1+\frac{1}{2}>2\,.\,\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\,.\,\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\,.\,\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>8\,.\,\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k}>2^k\,.\,\frac{1}{2\,.\,2^k}=\frac{1}{2}$$

Sečtením těchto nerovnin dostaneme

$$s_{2^{k+1}}>1+\frac{k}{2}.$$

Z toho plyne, že částečné součty $s_2, s_4, s_8, s_{16},\ldots$ vzrůstají nad všechny meze. Řada harmonická jest tedy divergentní, ačkoliv $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Cvičení. Dokažte věty:

a) Jestliže $u_1+u_2+\ldots$ konverguje a má součet s, pak také $au_1+au_2+\ldots$ konverguje a má součet as.

b) Jestliže řady $u_1+u_2+\ldots$, $v_1+v_2+\ldots$ obě konvergují, konverguje také řada $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots$ a má součet rovný součtu prvých dvou řad.

11. Řady s kladnými členy. Řada s členy vesměs kladnými buď konverguje nebo diverguje tak, že částečné součty $s_1, s_2, s_3,\ldots s_n\ldots$ vzrůstají s rostoucím n do nekonečna.. To plyne okamžitě z toho, že posloupnost stále vzrůstající $s_1\leqq s_2\leqq s_3\leqq$ buď jest shora ohraničená a pak má limitu, nebo není shora ohraničená.

O konvergenci či divergenci řady s kladnými členy velmi často můžeme rozhodnouti podle tak zvaného *principu přirovnání řad.*

Přirovnejme dvě řady s kladnými členy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

Znamení $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ čteme »součet u_n od $n = 1$ do nekonečna«. Dejme tomu, že o řadě *druhé* víme, že konverguje a o členech řady prvé nechť platí $u_n \leq v_n$ pro všechna n. *Pak také prvá řada konverguje a její součet jest menší nebo roven součtu druhé řady.* Při důkazu označme částečné součty prvé řady s_n a druhé řady σ_n. Tvrzení, že druhá řada konverguje, jest identické s větou, že eksistuje limita $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$. Avšak víme, že $u_1 \leq v_1$, $u_2 \leq v_2, \dots u_n \leq v_n, \dots$ a tedy

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = s_n \leq \sigma_n \leq \sigma.$$

Posloupnost $s_1 < s_2 < s_3 \dots$ jest tedy shora ohraničená a má tudíž nějakou limitu s. Ze vztahu $s_n \leq \sigma$ plyne dále $s \leq \sigma$.

Doplňkem k větě dokázané jest věta: Jestliže druhá řada diverguje a je-li $u_n \geq v_n$, diverguje i řada první. Důkaz jest téměř samozřejmý.

Zvolme speciálně za druhou řadu konvergentní řadu geometrickou

$$\frac{q}{1-q} = q + q^2 + q^3 + \dots, \quad 0 < q < 1.$$

Tak obdržíme tak zv. kriterium Cauchy-ovo:

Jestliže řada s kladnými členy Σu_k má vlastnost vyjádřenou nerovnostmi $\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1$, kdež q jest konstanta na k nezávislá, řada konverguje a její součet $s \leq q : (1 - q)$. Jestliže však $\sqrt[k]{u_k} \geq 1$ pak řada diverguje.

Podmínka konvergence jest na př. vždy splněna, jestliže existuje limita $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{u_k} = q_1 < 1$, neboť pak jest $\sqrt[k]{u_k} = q_1 + \varepsilon_k$, kdež $\lim \varepsilon_k = 0$. Zvolíme-li k větší než jisté K, je ε_k menší nežli na př. $(1 - q_1) : 2$ a tedy $\sqrt[k]{u_k} < q_1 + (1 - q_1) : 2 = (1 + q_1) : 2 < 1$ pro všechna $k > K$.

Odvoďme ihned další kriterium *d'Alembertovo:*

Jestliže v řadě kladných členů Σu_k jest od nějakého k počínaje $(u_{k+1} : u_k) \leqq q < 1$, řada konverguje. Jestliže však $(u_{k+1} : u_k) \geqq 1$ řada diverguje.

Je-li totiž první nerovnost splněna pro $k \geqq K$, je

$$u_{K+1} \leqq (u_K \,.\, q),\ u_{K+2} \leqq (u_{K+1} \,.\, q), \ldots u_{K+p} \leqq (u_{K+p-1} \,.\, q).$$

Násobením nerovnin obdržíme $u_{K+p} \leqq (u_K \,.\, q^p)$. Řada

$$u_K\, q + u_K\, q^2 + u_K\, q^3 + \ldots$$

konverguje a tedy podle principu přirovnání řad tím spíše konverguje i řada

$$u_{K+1} + u_{K+2} + u_{K+3} + \ldots$$

a tedy i řada původní. Zcela podobně se dokáže i druhá část věty o divergenci.

Podmínka *d'Alembertova* jest na př. vždy splněna, jestliže existuje limita $\lim\limits_{k \to \infty} (u_{k+1} : u_k) = q < 1$. Důkaz jest zcela obdobný jako při kriteriu Cauchy-ovu.

Tak na př. řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r\, x^k$ konverguje pokud $0 \leqq x < 1$ a diverguje pro $x > 1$, neboť $\lim\limits_{k \to \infty} (u_{k+1} : u_k) = \lim (k + 1)^r\, x : k^r = x$. Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konverguje pro každé $x \geqq 0$, neboť

$$\lim (u_{k+1} : u_k) = \lim x : (k + 1) = 0 < 1.$$

Kritérium *d'Alembertovo* selhává na př. při řadě

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots,$$

neboť podíl $(u_{k+1} : u_k)$ jest roven

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3} \qquad \text{nebo} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2},$$

podle toho, zda k jest liché či sudé. Jestliže k vzrůstá sudými hodnotami, podíl vzrůstá nad všechny meze, vzrůstá-li k lichými hodnotami, blíží se podíl nule. Proto nemůžeme souditi ani na konvergenci, ani na divergenci. Kriterium Cauchy-ovo však rozhodne pro konvergenci, neboť jest vždy $\sqrt[k]{u_k} \leqq \frac{1}{2}$.

Obě kriteria selhávají při řadách, v nichž limita podílu $(u_{k+1} : u_k)$ jest rovna právě *jedné*. Že v případě tom selhává také Cauchy-ovo kriterium, nebudeme zde dokazovati. Příklad takové řady jest $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Jestliže řada taková má členy *nestoupající*, poslouží nám často tak zv. Cauchy-ovo *kondensační kriterium:*

Jestliže v řadě kladných členů $u(1) + u(2) + \ldots$ *jest* $u(1) \geqq u(2) \geqq u(3) \geqq \ldots$, *pak řada konverguje (diverguje), když řada* $2 \, . \, u(2) + 2^2 \, . \, u(2^2) + 2^3 \, . \, u(2^3) + \ldots$ *konverguje (diverguje).*

Důkaz jest zcela obdobný důkazu při řadě harmonické. Jest totiž

$$u(2) + u(3) \leqq 2 \, u(2)$$
$$u(4) + u(5) + u(6) + u(7) \leqq 4 \, . \, u(4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u(2^n) + u(2^n + 1) + \ldots + u(2^{n+1} - 1) \leqq 2^n \, . \, u(2^n)$$
$$u(2) + u(3) + \ldots + u(2^{n+1} - 1) \leqq 2 \, u(2) + 2^2 \, u(2^2) + \ldots + 2^n \, u(2^n),$$

a tedy z ohraničenosti součtů na pravé straně při rostoucím n vyplývá ohraničenost součtů na levé straně a tedy i konvergence řady. Druhá část kriteria o divergenci se dokáže obdobně z nerovnin

$$u(3) + u(4) \geqq 2 \, u(4)$$
$$u(5) + u(6) + u(7) + u(8) \geqq 4 \, . \, u(8) \quad \text{atd.}$$

V řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$ jest $u(k) = 1 : k^\alpha$ a tedy pomocná řada zní

$$2 \, . \, \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \frac{2^3}{2^{3\alpha}} + \ldots \text{ čili } \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \ldots$$

To však jest geometrická řada s podílem $q = 1 : 2^{\alpha-1}$, která konverguje, když $2^{\alpha-1} > 1$ a diverguje, když $2^{\alpha-1} \leqq 1$. Řada původní tedy konverguje, když $\alpha > 1$, a diverguje, když $\alpha \leqq 1$.

Cvičení. 1. Prvá z řad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^k \, . \, x^k$ konverguje a druhá diverguje pro každé $x > 0$.

2. Dokažte, že řady $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \lg^\alpha k}$, $\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k \lg k \lg^\alpha (\lg k)}$ konvergují či divergují podle toho, zda $\alpha < 1$ či $\alpha \geqq 1$.

3. Dokažte podle Cauchy-ova kondensačního krit., že v konvergentní řadě s nestoupajícími kladnými členy $\Sigma u(k)$ musí býti $\lim n \,.\, u(n) = 0$ (A b e l ů v teorém. Při důkazu užijte okolnosti $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k u(2^k) = 0$).

4. Pro která s konverguje řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ak+b)^s$?

Další důležitou vlastností řad s kladnými členy jest tak zv. teorém D i r i c h l e t-ů v:

Jestliže z konvergentní řady s kladnými členy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ utvoříme novou řadu Σv_k přemístěním členů, pak nová řada opět konverguje a má týž součet jako původní řada. Při přemisťování nesmíme ovšem žádný člen vynechati.

Věc tato jest zobecnění komutativního zákona pro sčítání. Zdá se sice samozřejmou, ale uvidíme později, že neplatí pro některé řady s členy také negativními. Větu *D.* lze dokázati na př. takto.

Součet řady budiž s, částečné součty její $s_1, s_2, s_3, \ldots$, částečné součty řady $v_1 + v_2 + v_3 \ldots$ buďtež $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$. Protože σ_n obsahuje jen n sčítanců původní řady, je $\sigma_n \leqq s$. Tvoří tedy čísla σ_n posloupnost stále stoupající shora ohraničenou. Druhá řada tedy konverguje, to jest má součet $\lim \sigma_n = \sigma$. Podle věty e) odst. 4 plyne z nerovnosti $\sigma_n \leqq s$ výsledek $\sigma \leqq s$. Obrátíme-li pořádek řad, to jest pokládáme-li druhou řadu za původní, dokážeme stejným postupem $s \leqq \sigma$. Jest tedy nutně $s = \sigma$.

Teorému D. užijeme k odvození věty o násobení řad. Konvergentní řady o kladných členech $u_0 + u_1 + \ldots$, $v_0 + v_1 + \ldots$ nechť mají součty s a σ. Pak platí

$$s \,.\, \sigma = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots$$

Seřaďme všechny možné součiny $u_i \,.\, v_k$ do pravoúhlého schematu

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
u_0\,v_0 & u_0\,v_1 & u_0\,v_2 & u_0\,v_3 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\hline
u_1\,v_0 & u_1\,v_1 & u_1\,v_2 & u_1\,v_3 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\hline
u_2\,v_0 & u_2\,v_1 & u_2\,v_2 & u_2\,v_3 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\hline
u_3\,v_0 & u_3\,v_1 & u_3\,v_2 & u_3\,v_3 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\hline
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

a utvořme řadu, jejíž vznik v obrazci jest naznačen silnými čarami $u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_2 + u_2v_2 +$

$+ u_2 v_1 + u_2 v_0) + \dots$ Každou závorku pokládejme za člen řady $c_0 + c_1 + c_2 \dots$ Patrně jest $c_0 = u_0 \,.\, v_0$, $c_1 = (u_0 + u_1) \,.$ $. (v_0 + v_1) - u_0 v_0$, $c_2 = (u_0 + u_1 + u_2) \,.\, (v_0 + v_1 + v_2) - (u_0 + u_1) \,.$ $. (v_0 + v_1)$ atd. Jest tedy

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_n) \cdot (v_0 + v_1 + \dots + v_n).$$

Z toho plyne $\lim\limits_{n \to \infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n) = s \,.\, \sigma$. Jestliže v řadě $c_0 + c_1 + \dots$ vynecháme závorky, obdržíme zřejmě řadu o kladných členech, která má opět součet $s \,.\, \sigma$. Neboť každý její částečný součet jest uzavřen mezi dvěma částečnými součty řady $c_0 + c_1 + \dots$ Na př.

$$c_0 + c_1 \leqq u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_1 v_1 + u_1 v_0 + u_0 v_2 + u_1 v_2 + u_2 v_2 \leqq c_0 + c_1 + c_2$$

Přemístíme-li členy této řady podle schématu

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

obdržíme podle teorému *D.* týž součet.

12. Absolutní konvergence. Jednali jsme dosud o řadách s členy vesměs kladnými. Řady, které mimo členy kladné obsahují také členy rovné nule, převedeme vynecháním členů nulových na případ předešlý. Výsledky jsou beze změny platny pro řady, které mají jen konečný počet členů záporných, jak jest bezprostředně patrno z toho, že charakter řady se nezmění, když vynecháme konečný počet členů. Řady s členy vesměs zápornými nebo s pouze konečným počtem kladných členů, převedeme násobením (-1)nou na předešlý případ.

Jestliže však řada má nekonečný počet členů jak kladných tak záporných, nemůžeme ovšem předcházejících kriterií užíti, s výjimkou *Bolzano-Cauchy-ova* všeobecného kriteria. Proto odvodíme větu, která nám v mnohých případech umožní přenésti výsledky dosud odvozené na řady obecnějšího typu. Zní takto:

Když řada prostých hodnot $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | u_k |$ *konverguje, konverguje také řada* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Říkáme v tom případě: Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *konverguje absolutně.*

K důkazu užijeme všeobecného kriteria B — C.

Řada $\sum^{\infty} |u_k|$ konverguje a ať tedy zvolíme kladné ε jakkoli malé, vždy lze nalézti číslo $N(\varepsilon)$ tak, že

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots + |u_{n+k}| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geqq N(\varepsilon)$, $k > 0$. Podle základní věty o počítání prostými hodnotami jest

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}|$$

a je tedy i levá strana této nerovnosti menší než ε pro všechna $n \geqq N(\varepsilon)$, $k > 0$. Jinak řečeno: Řada $\sum u_k$ splňuje také kriterium B — C a tedy konverguje. Tak na př. řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, o níž víme, že konverguje pro $x \geqq 0$, jest podle hořejší věty jistě konvergentní i pro $x < 0$ a tedy konverguje pro všechna x vůbec.

V absolutně konvergentní řadě $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ vynechejme členy záporné. Vznikne řada s kladnými členy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ Vynecháme-li členy kladné, vznikne řada s členy $-b_1 - b_2 - b_3 \ldots$ Obě tyto řady jsou absolutně konvergentní. V částečném součtu $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ označme součet kladných členů α_n a záporných členů $-\beta_n$, takže jest $s_n = \alpha_n - \beta_n$. Dále jest patrně

$$(a_1 + a_2 + a_3 \ldots) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n; \quad (-b_1 - b_2 - b_3 \ldots.) = \lim_{n\to\infty} -\beta_n.$$

Jest tedy také

$$\lim s_n = \lim (\alpha_n - \beta_n) = \lim \alpha_n - \lim \beta_n.$$

Součet absolutně konvergentní řady lze tedy počítati tak, že se napřed sečtou členy kladné, pak záporné a výsledky se sečtou:

$$(u_1 + u_2 + \ldots) = (a_1 + a_2 + \ldots) - (b_1 + b_2 + \ldots)$$

Užitím tohoto výsledku rozšíříme platnost teorému *Dirichletova* na řady absolutně konvergentní.

Původní řada budiž $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$, řada přeřazená $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Řada $|v_1| + |v_2| + |v_3| + \cdots$ jest podle teorému *D.* pro řady s kladnými členy konvergentní a rovná řadě $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ Proveďme rozklad na kladné a záporné členy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = a_1 + a_2 + \ldots - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = c_1 + c_2 + \ldots - (d_1 + d_2 + d_3 + \ldots)$$

Řada $c_1 + c_2 + \dots$ jest konvergentní a rovná $a_1 + a_2 + \dots$, řada $d_1 + d_2 + \dots$ jest konvergentní a rovná $b_1 + b_2 + \dots$ Jest tedy $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$

Cvičení. 1. Dokažte, že v absolutně konvergentní řadě jest

$$|u_1 + u_2 + \cdots| \leqq |u_1| + |u_2| + \cdots$$

2. Dokažte, že pro dvě absolutně konv. řady $s = u_0 + u_1 + \dots$ $\sigma = v_0 + v_1 + \dots$ platí

$$s \, . \, \sigma = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \dots$$

(Pokyn: Dokažte nejdříve, že řada poslední, zbavená závorek, jest absolutně konvergentní.)

13. Relativní konvergence. Konvergentní řada $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ nazývá se *relativně konvergentní*, jestliže řada $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ diverguje. Uvidíme později, že takové řady vskutku existují. Při nich musí divergovati řada členů kladných $a_1 + a_2 + \dots$ a rovněž řada členů záporných $-b_1 - b_2 - b_3 - \dots$ Neboť, kdyby obě tyto řady konvergovaly, konvergovala by také řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots$ a podle teorému *D.* také řada $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ by byla konvergentní, což odporuje předpokladu. Právě tak nemůže divergovati řada členů kladných a konvergovati řada členů záporných anebo obráceně, jak čtenář sám snadno dokáže.

Pro řady relativně konvergentní neplatí teorém Dirichletův. Vhodným přeřazením členů řady lze dokonce docíliti toho, aby řada měla libovolný součet a předem zvolený (věta *Riemannova*). Postupujeme při tom takto: Sčítáme kladné členy v pořádku řadou určeném, žádný nevypouštějíce, až dospějeme po prvé k součtu rovnému a, nebo většímu než a, což jest jistě možno, protože řada kladných členů diverguje. Tyto členy nazveme prvá serie. Pak přičítáme členy negativní v pořádku řadou určeném, až součet opět po prvé klesne pod a (druhá serie); pak opět přičítáme další členy kladné, až součet opět dosáhne a nebo stoupne nad a (třetí serie) atd. Nová řada, takto vzniklá, jest jistě konvergentní se součtem a, protože její částečné součty oscilují kolem čísla a v mezích k nule se zúžujících. Neboť částečný součet končící kladným členem uchyluje se buď napravo od a o číslo menší nežli jest tento kladný člen, nebo nalevo od a o číslo menší nežli jest poslední záporný člen předcházející záporné serie. Obdobná věta platí pro částečný součet, který končí členem záporným.

14. Řady alternující jsou řady tvaru $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$, v nichž všechna u_k jsou čísla kladná. Mimo to musí býti, jak víme, $\lim u_n = 0$. Omezíme se zde na řady, jichž členy nestoupají, to jest $u_{n+1} \leqq u_n$. Taková řada vždy konverguje. Neboť částečné součty se sudými indexy

$$s_2 = (u_1 - u_2),$$
$$s_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) = u_1 - (u_2 - u_3) - u_4 \text{ atd.}$$

mají vlastnosti vyjádřené nerovnostmi:

$$s_2 \leqq s_4 \leqq s_6 \leqq \ldots, \qquad s_{2n} \leqq u_1.$$

Posloupnost jejich jest tedy neklesající a shora ohraničená. Má tedy limitu $\lim s_{2n} = s$. Touž limitu mají částečné součty s lichými indexy, neboť $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$ a tedy $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = s + 0$. Tak na př. řada

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

konverguje a její součet jest v mezích $1 > s > 1 - \frac{1}{2}$ nebo přesněji

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > s > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ atd.}$$

Konvergence jest relativní, neboť řada prostých hodnot jest řada harmonická, která diverguje. Jiný jednoduchý příklad dává řada

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \ldots\ldots,$$

která obsahuje členy tvaru 2^{-n} v počtu 2^n se střídavými znaménky. Součet její jest patrně roven nule. Řadu lze přeřaditi k součtu na př. $s = 1$ tímto postupem:

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad s_4 = s_3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$
$$s_8 = s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1;$$
$$s_9 = s_8 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad s_{13} = s_9 + \frac{4}{16} = 1; \quad s_{14} = s_{13} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$
$$s_{18} = 1; \quad s_{19} = \frac{7}{8}; \quad s_{23} = 1 \quad \text{atd.}$$

Cvičení. 1. Určete několik prvých částečných součtů řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

přeřazené a) k součtu $(+1)$; b) k součtu (-1).

2. Totéž pro řadu

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

přeřazenou a) k součtu (1·5), b) k součtu (—1).

Kapitola IV.

FUNKCE.

15. Definice a druhy funkcí. Často označujeme týmž znakem, na př. x, různá čísla reálná nějakého množství O. V tom případě budeme znak x nazývati *proměnná* a množství O *obor* proměnné. Proměnná, jejíž obor jest jen jedno číslo, nazývá se konstanta.

Jestliže y tak závisí na proměnné x, že každé hodnotě x odpovídá určitá jediná hodnota y, říkáme, že y jest funkce proměnné x.

Tuto závislost značíme symbolem

$$y = f(x),$$

který čteme: y jest (rovná se) funkce (funkci) x. Číslu x říkáme *nezávisle* proměnná, číslu y *závisle* proměnná. Při různých závislostech užíváme různých písmen k označení funkčního vztahu, na př. $g(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ atd. Geometricky znázorňujeme vztah $y = f(x)$ tak, že myslíme si v rovině, opatřené dvěma osami souřadnic, vyznačeny všechny body o souřadnicích $[x, f(x)]$. Názor, který s těmito názvy spojujeme, jest ovšem, jako všechno smyslové vnímání, nepřesný a proto podáme definice na názoru nezávislé, abychom terminologie té mohli užívati i při přesném myšlení. Rovina souřadnic jest množství všech dvojic reálných čísel $[x, y]$. Osa x jest množství všech dvojic $[x, 0]$, uspořádaných podle velikosti čísel x, osa y jest podobně uspořádané množství všech dvojic $[0, y]$. Přímka jest množství všech dvojic $[x, y]$, které vyhovují rovnici $ax + by + c = 0$. Čára (křivka, graf) jest množství všech dvojic $[x, y]$, které vyhovují rovnici $y = f(x)$. Podobně definujeme paprsek, úhel (část roviny »mezi« dvěma paprsky, vycházejícími z téhož bodu) atd.

Předpis, který při definici funkce přiřazuje hodnotě čísla x určitou hodnotu čísla y, může býti velmi rozmanitý. Často to