VII. ROZŠÍŘENÍ POJMU URČITÉHO INTEGRÁLU (INTEGRÁLY NEVLASTNÍ).

1. FUNKCE INTEGROVANÁ JEST V INTERVALU INTEGRAČNÍM NEKONEČNOU, PO PŘÍPADĚ NEURČITOU.

137. Podstatný předpoklad při Cauchy-Riemannově definici integrálu byl, že funkce integrovaná jest pro všecky hodnoty intervalu (a, b) definována a že jest konečnou v tom intervalu, majíc jistou dolní a jistou horní hranici (m resp. M).

V následujícím provedeme rozšíření pojmu integrálního, při čemž za jistých omezení připuštěny budou i funkce, jež v intervalu integračním pro jednotlivé hodnoty neodvisle proměnné nejsou definovány, po případě, jež se v intervalu integračním stávají v okolí jednotlivých hodnot neodvisle proměnné nekonečnými.

Uvažujme ku příkladu tyto dvě funkce

$$f_1(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x};$$

obě v intervalu $(-1, 1)$. První není definována v bodě $x = 0$, jest však funkcí konečnou v intervalu $(-1, 1)$. Funkce $f_2(x)$ rovněž není definována pro $x=0$, nadto pak jest v $(-1, 1)$ nekonečnou, a to v okolí bodu $x = 0$.

K vůli stručnosti budeme říkati, není-li $f(x)$ pro $x = c$ definována, že jest $f(x)$ v bodě $x = c$ *neurčitá*; stává-li se pak $f(x)$ v okolí bodu $x = c$ nekonečnou, *budeme užívati rčení, že $f(x)$ stává se v bodě c nekonečnou a rovněž k vůli stručnosti učiníme pro následující předpoklad, že pokud se jedná o intervaly, v nichž $f(x)$ není ani neurčitou ani nekonečnou, $f(x)$* (resp. $\varphi(x)$) *jest v těch intervalech schopna integrace* (podle definice Cauchy-Riemannovy).

138. Velmi jednoduché jest rozhodování o tom, jaký význam přiděliti jest integrálu z $f(x)$ v (a, b) podle definice Cauchy-Riemannovy, je-li **funkce $f(x)$ v bodech jistého množství bo-**

dového nacházejícího se v (a, b) neurčitou. Bylo již totiž dříve vytčeno, že, pozměníme-li hodnotu funkce $f(x)$ v bodech množství bodového délky nulové na (a, b) způsobem zachovávajícím konečnost funkce v (a, b), integrál ten svoji hodnotu nezmění (odst. 90). Následkem toho jest patrno, že definice Cauchy-Riemannova stanovící integrál jakožto limitu součtu (resp. součtů) pro případ, že limity částečných intervalů konvergují k nule, podržuje význam i tenkráte, jestliže $f(x)$ jest neurčitou v množství bodovém délky nulové. Při tvoření zmíněných součtů (jejichž limity mají dávati integrál z $f(x)\,dx$ v mezích a, b) pak buď jest možno ty částečné intervaly, jež obsahují body, pro které jest $f(x)$ neurčitou, prostě vynechávati aneb jest možno v bodech, ve kterých $f(x)$ jest neurčita, funkci $f(x)$ přisuzovati nějaké určité hodnoty, avšak takové, aby $f(x)$ v (a, b) zůstávala funkcí konečnou. Existence limity, jakož i její velikost, *již označovati budeme jakožto integrál z $f(x)dx$ v mezích a, b* podle C.-R., nebude, ať užíváme jednoho nebo druhého způsobu, dotčena (je-li jenom $f(x)$ v každém intervalu neobsahujícím body neurčitosti podle C.-R. integrace schopna).

Naproti tomu jest patrno, že, je-li funkce $f(x)$ neurčitá v množství bodovém, jež není délky nulové, jehož tedy délka zevnější $l_z > 0$, můžeme, přisoudíme-li v bodech neurčitosti hodnoty kladné větší než A (kde A jest číslo kladné vhodně ku B volené) docíliti, aby všechny součty S byly větší než číslo kladné B; na druhém místě pak, přisoudíme-li v těch bodech neurčitosti hodnoty záporné menší než $-A$, jsou všecky součty s menší než $-B$. Jest tedy integrál z funkce $f(x)$, jejíž hodnoty nejsou dány v bodech množství délky nenulové a mohou ty hodnoty v těchto bodech libovolně býti voleny, závislý, existuje-li vůbec, na tom, jak hodnoty ty volíme, takže můžeme tvrditi tuto větu: *Nutná a postačující podmínka, aby existoval integrál z $f(x)\,dx$ v mezích a, b, kde $f(x)$ jest funkce, jež jest neurčitou v množství bodovém na (a, b) položeném a kde integrál definujeme podle definice Cauchy-Riemannovy pozměněné se zřetelem k bodům neurčitosti způsobem svrchu vyloženým, jest: Ono množství bodové* (obsahující body neurčitosti funkce $f(x)$ na (a, b)) *jest délky nulové* (*J.*). Při tom předpokládáno, že $f(x)$ jest integrace schopna v každém intervalu na (a, b) neobsahujícím body neurčitosti funkce $f(x)$.

Tímto výsledkem jest rozhodnuto úplně, v jakém rozsahu jest možno připustiti do úvah matematických integrály (resp.

horní, dolní integrály) z funkcí obsahujících body neurčitosti v intervalu integračním, a netřeba touto otázkou dále se zabývati. Budeme tedy v následujícím vyšetřovati funkce $f(x)$, jež se v bodech některých stávají *nekonečnými*, a to za *předpokladu poněkud změněného, že totiž v každém intervalu, ve kterém $f(x)$ se nestává nekonečnou, jest podle C.-R. integrace schopnou (obsahuje-li v tom intervalu body neurčitosti, ovšem ve smyslu tohoto odstavce).*

POZNÁMKA. Řešení otázky projednané by se značně zkomplikovalo, kdybychom v bodech, ve kterých $f(x)$ stává se neurčitou, zaváděli také interval neurčitosti. Kdyby ku př. stávala se $f(x)$ neurčitou v bodě c, mohli bychom stanoviti, že hodnota funkce v bodě c jest nějaké číslo (nám ovšem neznámé) intervalu (C', C''). Pro pojem neurčitosti funkce takto zúžený věta svrchu uvedená neplatí, avšak podmínka v ní svrchu uvedená a za nutnou a postačující označená změnila by se v podmínku postačující, jestliže čísla C', C'' — jež jsou funkce proměnné c — jsou konečné funkce pro množství bodové obsahující body neurčitosti funkce $f(x)$ v (a, b).

139. Nejprve vezmeme v úvahu případ jednoduchý, že *funkce integrovaná stává se nekonečnou toliko pro horní mez b, při čemž dolní mez $a < b$.*

Pak definujeme, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx; \qquad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

existuje-li ovšem tato limita, *ať ε jakkoliv konverguje k nule. Neexistuje-li ta limita, říkáme, že* symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1'}$$

nemá významu.

Definice tato jest ve shodě s rozšířením pojmu určitého integrálu provedeným na základě primitivních funkcí v odst. 61. Neboť existuje-li v (a, b) primitivní funkce $F(x)$ k $f(x)$, takže ve všech bodech intervalu (a, b) jest $F'(x) = f(x)$ vyjma v bodě b, jest

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b-\varepsilon) - F(a);$$

jestliže pak tato primitivní funkce jest v bodě b spojitou (zleva), jest $\lim_{\varepsilon=0} F(b-\varepsilon) = F(b)$ a máme tudíž v tomto případě na základě (1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\,[F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a),$$

což jest právě rovnice, na základě jejímž rozšíření pojmu integrálního v odstavci 61 bylo provedeno. Můžeme tudíž, známe-li k $f(x)$ primitivní funkci, snadno rozhodnouti, zda integrál (1') má význam.

Následkem podané svrchu definice v (1) zůstává integrál spojitou funkcí horní meze, i když horní mez nabývá hodnoty, pro kterou funkce integrovaná stává se nekonečnou; *ovšem jenom potud, pokud integrál podržuje význam.*

Nutná a postačující podmínka, aby existovala limita v (1), jest (podle věty Bolzano-Cauchyovy; DP 75), aby ke každému kladnému číslu η bylo lze nalézti číslo ε té vlastnosti, že nerovnina

$$\left|\int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx - \int_a^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right| < \eta$$

anebo (jinak psáno, viz odstavec 96, (II)) nerovnina

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right| < \eta \tag{2}$$

jest splněna pro všecka ε', ε'' hovící nerovninám $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, $0 < \varepsilon'' < \varepsilon$. Aneb, což jest v podstatě totéž, aby ke každému kladnému číslu η bylo lze nalézti kladné číslo ε té vlastnosti, že jest splněna nerovnina

$$\left|\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx\right| < \eta$$

pro všecka ε' hovící nerovnině $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

140. Z obecné podmínky (2) vyplývá nejprve, že s integrálem

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} |f(x)|\,dx, \qquad \varepsilon > 0 \tag{3}$$

má význam i integrál (1), neboť (odstavec 88 g)

$$\left|\int_{b-\varepsilon''}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx\right| \leqq \left|\int_{b-\varepsilon''}^{b-\varepsilon'} |f(x)|\,dx\right|. \tag{4}$$

V tom případě, že integrál (3) má význam, říkáme, že integrál (1) konverguje *absolutně.*

Existuje-li integrál (1), tu jest patrno, že konvergence jeho jest absolutní vždy, když $f(x)$ jest v (a, b) téhož znaménka*); anebo když aspoň od jisté hodnoty b_1 uvnitř (a, b) jest $f(x)$ téhož znaménka, neboť pro rozhodnutí o konvergenci integrálu (1) jest lhostejno, zda bereme v úvahu integrál (1) sám anebo integrál

$$\int_{b_1}^{b} f(x)\,dx, \qquad a < b_1 < b.$$

Dále jest patrno, že, je-li $f(x)$ funkce kladná v intervalu (b_1, b), integrál

$$\int_{b_1}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad b_1 < b - \varepsilon < b \tag{3}$$

s klesajícím ε stále vzrůstá a že jsou tedy jenom dva případy možné, buď že integrál ten má limitu pro $\lim \varepsilon = 0$ aneb že ten integrál s klesajícím ε roste nade všecky meze. Konečně jest zřejmo (stále za předpokladu, že $f(x)$ jest v (b_1, b) kladná), že *postačí k rozhodnutí, který z těchto dvou případů nastává, vzíti v úvahu jednu jednoduše spočetnou posloupnost čísel k nule konvergujících* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ *a vyšetřovati řadu čísel*

$$u_k = \int_{b_1}^{b-\varepsilon_k} f(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

existuje-li $\lim\limits_{k=\infty} u_k$, existuje i limita ve (3), a to ať ε jakkoliv konverguje k nule.

Pro absolutní konvergenci platí pak tyto věty (funkce $\varphi(x)$ v následujícím jest rovněž ve všech bodech intervalu (a, b) vyjma b konečnou a v každém částečném intervalu na (a, b) neobsahujícím b integrace schopnou).

Jestliže v okolí hodnoty b pro $x < b$

$$|f(x)| \leqq |\varphi(x)|$$

tu, existuje-li integrál $\int_a^b |\varphi(x)|\,dx$, existuje též $\int_a^b f(x)dx$ a konverguje tento integrál absolutně.

Neboť, je-li nerovnost předpokládaná splněna pro hodnoty mezi b_1 a b a má-li integrál z $|\varphi(x)|\,dx$ pro interval (b_1, b) význam, pak podle věty o střední hodnotě jest (při $b_1 < b - \varepsilon < b$)

*) Tu totiž nastupuje v (4) v platnost znaménko rovnosti.

$$\int_{b_1}^{b-\varepsilon} |f(x)|\, dx \leqq \int_{b_1}^{b-\varepsilon} |\varphi(x)|\, dx < \int_{b_1}^{b} |\varphi(x)|\, dx,$$

odkudž věta uvedená ihned vyplývá (neboť konverguje-li ε k nule, nemůže výraz na levé straně vzrůstati nade všecky meze).

Z věty právě dokázané vyplývá: Jestliže poměr

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \tag{6}$$

má v intervalu (b_1, b) konečnou horní hranici $\mathbf{M}$, pak konverguje-li $\int_{b_1}^{b} \varphi(x)\, dx$ absolutně, konverguje i $\int_{b_1}^{b} f(x)\, dx$ absolutně. Má-li (6) dolní hranici $\mathbf{m}$ od nuly různou, pak neexistuje-li $\int_{b_1}^{b} |\varphi(x)|\, dx$, neexistuje i $\int_{b_1}^{b} |f(x)|\, dx$. Při tom stále jest $\varphi(x)$ funkce, která stává se nekonečnou toliko v b.

Neboť jest

$$|f(x)| \leqq \mathbf{M}\, |\varphi(x)|$$

a v případě, že $\mathbf{m} > 0$

$$|\varphi(x)| \leqq \frac{1}{\mathbf{m}} |f(x)|\,,$$

odkudž podle předcházející věty věta právě uvedená následuje.

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x=b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L,$$

pak poměr $|f(x)| : |\varphi(x)|$ lze, jak známo, v intervalu (b_1, b) uzavříti ve dvě hranice

$$|L| - \eta < \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < |L| + \eta,$$

kde η můžeme si zvoliti tím menší, čím menší jest interval (b_1, b). Následkem toho vyplývá z věty posledně dokázané věta:

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x=b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L, \quad b_1 < x < b$$

pak integrál $\int_{b_1}^{b} |f(x)|\, dx$ *má význam, má-li význam integrál* $\int_{b_1}^{b} |\varphi(x)|\, dx$.

Jestliže jest L různé od nuly, pak neexistuje-li integrál $\int_{b_1}^{b} |\varphi(x)|\, dx$, *neexistuje též integrál* $\int_{b_1}^{b} |f(x)|\, dx$.

Zvolme si $\varphi(x) = \dfrac{1}{|x-b|^\alpha}$, $\alpha > 0$. Pak o funkci $f(x)$, pro niž platí

$$\lim_{x=b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=b} |x-b|^\alpha f(x) = L \tag{7}$$

při L od nuly různém, říkáme, že stává se v b *určitě nekonečnou řádu α.* Jelikož pak integrál

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\, dx$$

má tenkrát a jenom tenkrát význam, když $\alpha < 1$,*) platí věta: *Nutná a postačující podmínka, aby existoval integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, když $f(x)$ v bodě b stává se určitě nekonečnou řádu α, jest, aby $\alpha < 1$. Integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje pak* (při $\alpha < 1$) *absolutně.*

Jestliže v rovnici (7) $L = 0$, *říkáme o $f(x)$ stávající se v b nekonečnou, že stává se nekonečnou řádu nižšího než α.* V tomto případě lze vysloviti větu: *Integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, kde $f(x)$ stává se nekonečnou v b řádu nižšího než α, má jistě význam a konverguje absolutně, když $\alpha < 1$.*

POZNÁMKA. Oběma větám bychom mohli dáti širší platnost, kdybychom rčením „funkce stává se nekonečnou určitě řádu α“ resp. „nejvýše řádu α“ dávali následující obecnější význam:

Nechť výraz $|b-x|^\alpha f(x)$, když x konverguje ku b, jest stále obsažen mezi čísly L a l.

Pak jsou-li L a l od nuly různy a téhož znaménka, můžeme říkati, že funkce *stává se určitě nekonečnou řádu α.*

Jsou-li L a l různých znamének anebo jedno aspoň rovno nule, lze o $f(x)$ říkati, že $f(x)$ *stává se nekonečnou nejvýše řádu α.*

Pod číslem L resp. l můžeme v předcházejících definicích vyrozumívati též tak zvanou největší resp. nejmenší limitu výrazu $|b-x|^\alpha f(x)$, když x konverguje ku b.

Při těchto rozšířeních pojmu určité nekonečnosti resp. nekonečnosti nejvýše řádu α *obě věty svrchu uvedené a dokázané*

*) Neboť primitivní funkce k $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ při $\alpha \lessgtr 1$ jest $\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, ta pak jest v bodě $x = b$ spojitá jenom pro $\alpha < 1$. Když $\alpha = 1$, jest primitivní funkce $\log(b-x)$, jež v bodě $x = b$ jest nespojitá.

:ůstávají očividně v platnosti, nahradíme-li v druhé větě slova ,řádu nižšího než α“ slovy „nejvýše řádu α“.

141. PŘÍKLAD 1. Integrály

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}\,dx; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \cdot \quad (k^2 < 1);$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x^2+1)}}$$

ıají význam, neboť funkce integrované stávají se nekonečnými pro horní nez určitě, a to řádu po řadě $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

PŘÍKLAD 2. Symbol

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{x}\,dx$$

ıemá významu, neboť funkce integrovaná jest pro horní mez určitě neko-ıečnou řádu 1.

PŘÍKLAD 3. Integrál

$$\int_0^1 \log^3 (1-x)\,dx$$

ıá význam, neboť funkce integrovaná stává se sice nekonečnou pro horní nez, avšak řádu nižšího, než jest kterékoliv číslo mezi 0 a 1. Jest totiž

$$\lim_{x=1} |x-1|^{\alpha} \log^3 |1-x| = 0,$$

ıť jest α jakékoliv číslo reálné kladné.

PŘÍKLAD 4. Symbol

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)\log(1-x)}$$

ıztahuje se k funkci, která stává se nekonečnou řádu nižšího než 1 (ne však ırčitě nekonečnou); neboť jest

$$\lim_{x=1} (1-x)^1 \frac{1}{(1-x)\log(1-x)} = 0.$$

Kriteria dosud dokázaná nehodí se k tomuto případu. Lze však tu snadno ıozhodnouti; jest totiž při $\frac{1}{2} < a < 1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{a} \frac{dx}{(1-x)\log(1-x)} = -\Big\{\log[-\log(1-x)]\Big\}_{\frac{1}{2}}^{a} =$$

$$= +\log(\log 2) - \log\left(\log \frac{1}{1-a}\right).$$

Jelikož pak limita výrazu, který jsme obdrželi, pro ten případ, že $\lim a = 1$, ıeexistuje, nemá předložený symbol významu. Naproti tomu má integrál

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)\log^{\alpha}(1-x)}$$

význam, když $\alpha > 1$, jak snadno podobnou úvahou (pomocí primitivní funkce) se můžeme přesvědčiti.

PŘÍKLAD 5. Integrál

$$\int_{-1}^{0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{-x}}\, dx$$

má význam, jelikož pro $x = 0$ stává se funkce integrovaná nekonečnou řádu nižšího, než jest libovolné číslo $\geqq \frac{1}{2}$. Anebo, užíváme-li rčení zavedeného poznámkou, stává se funkce ta pro $x = 0$ nekonečnou nejvýše řádu $\frac{1}{2}$.

PŘÍKLAD 6. Integrál

$$\int_{-1}^{0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{-x^3}}\, dx$$

obsahuje funkci, jež se stává pro $x=0$ nekonečnou řádu nejvýše (viz svrchu poznámku) $\frac{3}{2}$. Nicméně má tento integrál význam, jakž vyplývá z následující rovnice

$$\left(\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{-x}} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{-x^3}}$$

a tedy

$$\int_{-1}^{0} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{-x^3}}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{-x}}\, dx - \lim_{\varepsilon=0}\left[\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0-\varepsilon} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{-x}}\, dx - \sin 1.$$

PŘÍKLAD 7. Integrál

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^{\alpha}}\, dx$$

má při každém α význam, důkaz přenechávám čtenáři. Tento příklad, ve kterém funkce při $\alpha > 0$ stává se nekonečnou pro dolní mez, nejsnáze řešíme, užíváme-li v intervalu $(\varepsilon, 1)$ integrace per partes. Funkci za znaménkem integračním lze totiž psáti

$$-\left[\sin e^{\frac{1}{x}}\right]' \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{\alpha-2}}.$$

142. Stává-li se $f(x)$ nekonečnou pro dolní mez integrační a, klademe definujíce (při $a < b$)

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\,; \qquad \varepsilon > 0$$

Věty právě dokázané se zřetelem ku horní mezi podrží i nyní platnost současně s důkazy příslušnými (se změnami, jež čtenář snadno doplní). Případ, že $a > b$ a $f(x)$ stává se pro horní nebo dolní mez nekonečnou, převádíme na předcházející případy na základě rovnice

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

jejíž platnost tím rozšiřujeme i pro integrály právě definované.

Stává-li se $f(x)$ současně pro horní i dolní mez a, b nekonečnou, klademe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

při čemž c jest číslo mezi a a b.

Jest tedy při $a < b$ tu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int_c^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0,\,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx.$$

Konečně stává-li se $f(x)$ v konečném počtu bodů $c_1, c_2, \dots c_\nu$ nacházejících se uvnitř integračního intervalu (a, b) nekonečnou, klademe definujíce

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{c_\nu}^b f(x)\,dx,$$

při čemž předpokládáme jenom, že řada čísel a, c_1, c_2, ..., c_ν, b jest buď řada čísel stoupajících anebo řada čísel klesajících.

143. Definice podané lze snadno rozšířiti i pro případ, že body (c), v nichž $f(x)$ stává se nekonečnou, jsou v nekonečném počtu. Pak tvoří množství bodové, jež jest uzavřené; neboť, mají-li body (c) bod zhuštění γ, stává se $f(x)$ v každém okolí toho bodu γ nekonečnou a můžeme tudíž užívajíce rčení zavedeného i říkati, že $f(x)$ stává se v γ nekonečnou; t. j. bod γ a vůbec každý bod zhuštění množství bodů (c) patří mezi body (c) a množství bodů (c) jest uzavřené. Dále jest nutno předpokládati o množství bodů (c), že jest délky nulové (*J.*), jinak by totiž definice následující neměla smyslu.

Uzavřeme nyní všecky body (c) — pokud se ovšem nacházejí v intervalu integračním (a, b) — v konečný počet intervalů, jejichž celková délka jest menší než ε a jež jsou položeny na (a, b), což jest možno, jelikož množství (c) jest délky nulové. Odejmeme-li tyto intervaly od (a, b), zbude z (a, b) jistý konečný počet intervalů $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_m, b_m)$, při čemž $a \leqq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_m < b_m \leqq b$ a při čemž $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots\ldots + (b_m - a_m) > b - a - \varepsilon$. Označíme $D = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \ldots + (a_m, b_m)$ a

$$\int_D f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx.$$

My pak stanovíme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_D f(x)\,dx \tag{A}$$

existuje-li tato limita a je-li vždy táž, ať ε *jakkoliv konverguje k nule a ať jakkoliv postupujeme při uzavření všech bodů* (c) *v intervaly, jejichž celková délka jest menší než* ε. Když ε konverguje k nule, pak příslušné číslo m může vzrůstati nade všecky meze (a je-li počet bodů c nekonečný, vskutku vzrůstá). Neexistuje-li limita vytčená, říkáme, že $\int_a^b f(x)\,dx$ nemá významu.

K této definici lze přičiniti obdobné poznámky jako k definici odstavce 139. Zejména lze tvrditi podle věty Bolzano-Cauchyovy, že nutná a postačující podmínka, aby limita v (A) existovala a tudíž integrál z $f(x)dx$ v (a, b) měl význam, jest, aby ke každému kladnému číslu η bylo lze udati číslo ε tak, že jest pro každé D'

$$\left|\int_{D'} f(x)\,dx - \int_D f(x)\,dx\right| < \eta \qquad \text{pro všecka } 0 < \varepsilon' < \varepsilon$$

Při tom jest*) $D' = (a'_1, b'_1) + (a'_2, b'_2) + \ldots + (a'_{m'}, b'_{m'})$ a $(b'_1 - a'_1) + (b'_2 - a'_2) + \ldots + (b'_{m'} - a'_{m'}) > b - a - \varepsilon'$ (samozřejmě jest také $a \leqq a'_1 < b'_1 < \ldots < b'_{m'} \leqq b$ a nehledě k těmto podmínkám a předcházející podmínce jsou a'_k, b'_k, m' libovolná).

Rovněž jest patrno, že, má-li význam integrál

$$\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

má význam i integrál

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

*) D má týž význam jako v předcházející úvaze; součet intervalů tvořících D pak stále jest $> b - a - \varepsilon$.

a říkáme pak, že *konvergence v* (*A*) *jest absolutní.* Zároveň jest

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

a lze přičiniti obdobné poznámky jako svrchu.

2. ROZŠÍŘENÍ POJMU INTEGRÁLU PRO NEKONEČNÝ INTERVAL.

144. Doposud uvažovali jsme integrál z funkce pro interval daný dvěma čísly (a, b). Intervalu takovému se zřetelem ku následujícímu rozšíření říkati budeme konečný interval.

Mějmež funkci $f(x)$, z níž integrál pro interval (a, b) při $b > a$, ať si b zvolíme jakkoliv veliké, má význam na základě definice Cauchy-Riemannovy rozšířené po případě i pro funkce stávající se v intervalu integračním neurčitými resp. nekonečnými (podle odstavců předcházejících). Jeví se z různých ohledů účelným *zavésti limitu*

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \quad \textit{již značíme krátce} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \tag{1}$$

existuje-li ovšem ta limita. Říkáme pak jí „integrál od a do nekonečna“; intervalu příslušnému *nekonečný* a značiti jej budeme (a, ∞). O funkci $f(x)$ se pak vyjadřujeme, že jest v (a, ∞) integrace schopna (existuje-li limita (1)) a že integrál z $f(x)\,dx$ má pro interval integrační (a, ∞) význam.

Jest snadno rozhodnouti, existuje-li limita (1), známe-li v (a, ∞) primitivní funkci $F(x)$ k $f(x)$. Pak očividně

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} F(b) - F(a).$$

odkudž jest patrno, že definice symbolu $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tady podaná shoduje se úplně s definicí toho symbolu na základě primitivních funkcí (viz odstavec 67, kde uvedeny některé příklady).

Pro existenci limity (1) lze učiniti podobné důsledky, jako pro existenci limity (1) odstavce 139, metoda vedoucí k jejich odvození jest stejná a jest tudíž možno v následujícím toliko stručně ji naznačiti. Nejprve jest jasno, že nutná a postačující podmínka pro existenci té limity jest, aby ke každému číslu kladnému ε bylo lze udati číslo kladné B takové, že jest

$$\int_a^{b'} f(x)\,dx - \int_a^{b''} f(x)\,dx = \left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \tag{2}$$

pro všecka $b' > B$ a pro všecka $b'' > B$.

Odtud zase následuje, že, existuje-li integrál

$$\int_a^{\infty} | f(x) | \, dx,$$

tím spíše existuje i integrál (1) a my říkáme v tomto případě, že konvergence integrálu (1) jest *absolutní.*

Je-li $f(x)$ pro všecka $x > A$ stále kladná, tu integrál

$$\int_A^b f(x)\,dx \qquad b > A$$

s rostoucím b stále roste a jsou tudíž jedině dva případy možny, buď integrál ten s rostoucím b roste nade všecky meze anebo má pro lim $b = \infty$ určitou limitu. K *rozhodnutí, který z těchto dvou případů nastává, postačí vzíti v úvahu jednu jednoduše spočetnou posloupnost čísel* b_1, b_2, $b_3, \ldots$ *rostoucích s indexem nade všecky meze a vyšetřovati řadu čísel*

$$u_k = \int_A^{b_k} f(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

existuje-li $\lim\limits_{k=\infty} u_k$, *má i* (1′) *limitu pro* lim $b = \infty$, *a to touž limitu, ať b jakkoliv roste nade všecky meze.*

POZNÁMKA. Pro případ, že existuje integrál (1), následuje z (2), necháme-li tam b'' vzrůstat nade všecky meze, přecházejíce na levé straně k limitě pro lim $b'' = \infty$,

$$\int_{b'}^{\infty} f(x)\,dx \leqq \varepsilon \quad \text{pro všecka } b' > B,$$

kteroužto nerovninu můžeme psáti též ve tvaru

$$\lim_{b'=\infty} \int_{b'}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

anebo (podle analogie) očividně též ve tvaru

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0.$$

145. Pro konvergenci absolutní pak následují z (2) věty: Jestliže, od jistého čísla A počínaje, jest stále

$$|f(x)| \leqq |\varphi(x)|, \qquad x > A$$

tu z existence integrálu $\int\limits_A^\infty |\varphi(x)|\, dx$ vyplývá existence integrálu $\int\limits_A^\infty f(x)\, dx$ a konvergence obou jest absolutní. Dále:

Jestliže poměr

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \tag{3}$$

má pro všecka $x > A$ konečnou horní hranici, pak konverguje-li $\int\limits_A^\infty \varphi(x)\, dx$ absolutně, konverguje i $\int\limits_A^\infty f(x)\, dx$ absolutně. Má-li (3) pro $x > A$ dolní hranici od nuly různou, pak neexistuje-li $\int\limits_A^\infty |\varphi(x)|\, dx$, neexistuje i $\int\limits_A^\infty |f(x)|\, dx$. Konečně z této věty následuje:

Existuje-li limita

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L,$$

pak integrál $\int\limits_A^\infty |f(x)| dx$ má význam, má-li význam integrál $\int\limits_A^\infty |\varphi(x)|\, dx$. Jestliže L jest různé od nuly, pak neexistuje-li integrál $\int\limits_A^\infty |\varphi(x)|\, dx$, neexistuje i integrál $\int\limits_A^\infty |f(x)|\, dx$.

Při předcházející větě zvolíme $\varphi(x) = \frac{1}{x^a}$, $a > 0$, $A > 0$. Pak o funkci $f(x)$, pro niž platí

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=0} x^a f(x) = L \tag{4}$$

při L od nuly různém, říkáme, že stává se pro $x = \infty$ *určitě nekonečně malou řádu a*. Jelikož pak integrál

$$\int\limits_A^\infty \frac{dx}{x^a} \qquad A > 0$$

má tenkrát a jenom tenkrát význam, když $a > 1$, a konvergence jeho jest absolutní, platí věta: *Nutná a postačující podmínka, aby existoval integrál $\int\limits_A^\infty f(x)\, dx$, ve kterém $f(x)$ stává se pro*

$x=\infty$ určitě nekonečně malou řádu α, jest, aby $\alpha>1$. Konvergence integrálu jest pak absolutní.

Jestliže v rovnici (4) $L=0$, říkáme o $f(x)$, že pro $x=\infty$ stává se nekonečně malou řádu vyššího než α. Pro tento případ lze vysloviti větu: Integrál $\int\limits_A^\infty f(x)\,dx$, kde $f(x)$ stává se pro $x=\infty$ nekonečně malou řádu vyššího než α, má význam a konverguje absolutně, když $\alpha>1$.

Obdobně lze i pro tento případ rozšířiti pojmy a tvrzení v poznámce k odstavci 140.

146. PŘÍKLAD 1. Integrál z racionálné funkce

$$\int\limits_A^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy v x a A jest tak voleno, aby v intervalu (A,∞) jmenovatel nestával se nulou, má tenkrát a jenom tenkráte význam, když stupeň jmenovatele q jest alespoň o dvě jednotky vyšší než stupeň čitatele p; t. j. když $q-p\geqq 2$. Neboť, jak snadným počtem vyplývá, jest

$$\lim_{x=\infty} x^{q-p}\,\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{p_0}{q_0},$$

kde p_0, q_0 jsou koeficienty nejvyšších mocnin proměnné x v čitateli a jmenovateli. Jest tedy zlomek $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ pro $x=\infty$ určitě nekonečně malý řádu $q-p$.

PŘÍKLAD 2. Integrál

$$\int\limits_A^\infty e^{-x}\,R(x)\,dx,$$

kde $R(x)$ jest racionálná funkce x a A vhodně voleno (viz příklad předcházející), má vždy význam. Neboť

$$\lim_{x=\infty} x^\alpha e^{-x} R(x)=0,$$

ať α jest číslo jakkoliv veliké; stává se tedy funkce $e^{-x}R(x)$ pro $x=\infty$ nekonečně malou řádu vyššího než jakékoliv kladné číslo (viz odstavec 64).

PŘÍKLAD 3. Jestliže k $f(x)$ existuje funkce primitivní $F(x)$ (t. j. $F'(x)=f(x)$) konečná v intervalu (B,∞) a $\alpha>0$, pak současně s integrálem

$$\int\limits_B^\infty \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx \text{ existuje integrál } \int\limits_B^\infty \frac{f(x)\,dx}{x^\alpha}.$$

Neboť integrací per partes máme (B buď vhodně voleno, zejména jest $B>0$, $B'>B$)

$$\int\limits_B^{B'} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx=\left[\frac{F(x)}{x^\alpha}\right]_B^{B'}+\alpha\int\limits_B^{B'} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx.$$

Jestliže $\lim B' = \infty$, pak první člen pravé strany má podle supposic za limitu $-\frac{F(B)}{B^\alpha}$; má-li tudíž i druhý člen určitou limitu, má ji i levá strana, a naopak, čímž věta jest dokázána.

Tak ku příkladu

$$\int_B^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

existuje vždy ($B > 0$) při $\alpha > 0$, neboť integrál

$$\int_B^\infty \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx$$

existuje, jelikož funkce za znaménkem integračním stává se pro $x = \infty$ nekonečně malou řádu vyššího než $1 + \alpha_0$, kde $0 < \alpha_0 \leqq \alpha$.

PŘÍKLAD 4. Podržíme-li označení i předpoklady příkladu předcházejícího, lze stejným způsobem dokázati, že současně s integrálem

$$\int_B^\infty \frac{F(x)}{x(\log x)^2} dx \quad \text{existuje integrál} \quad \int_B^\infty \frac{f(x)}{\log x} dx.$$

Tak ku příkladu integrál $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x} dx$ existuje, jelikož existuje integrál $\int_2^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ (a tím spíše integrál $\int_2^\infty \frac{\cos x}{x(\log x)^2} dx$*)).

147. Právě tak, jako jsme definovali integrál v intervalu (a, ∞), definujeme integrál v intervalu $(-\infty, b)$ rovnicí

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

a věty odvozené pro integrály v intervalu (a, ∞) přenášejí se snadno na integrály v intervalu $(-\infty, b)$. Dále definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,$$

kde c jest libovolně zvolená hodnota, a konečně

$$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^a f(x)\,dx, \qquad \int_\infty^b f(x)\,dx = -\int_b^\infty f(x)\,dx.$$

148. Integrály, při nichž funkce integrovaná v intervalu integračním stává se nekonečnou resp. neurčitou, a integrály,

*) Podle druhé věty o střední hodnotě (odstavec 104) použité na integrál $\int_{b'}^{b''} \frac{\cos x}{x(\log x)^2} dx$. Funkce $\frac{1}{(\log x)^2}$ jest funkcí klesající v intervalu $(2, \infty)$.

při nichž interval integrační jest nekonečný, zahrnují se pod společným pojmenováním **integrálů nevlastních.** *Jordan**) nazývá integrály ty *integrály zevšeobecněnými* („intégrales définies généralisées").

První přesné rozlišení integrálů na vlastní a nevlastní dáno bylo *Riemannem* v r. 1867. (Ges. Werke, str. 225.)

3. PŘEHLED ZÁKLADNÍCH VLASTNOSTÍ INTEGRÁLŮ NEVLASTNÍCH.

149. Téměř všecky základní věty odvozené v kapitole předcházející pro integrály v intervalu (a, b) konečném z funkcí v (a, b) konečných podržují platnost svoji pro integrály nevlastní, při nichž i interval integrační i funkce integrovaná stávati se může nekonečnou, ovšem s tím omezením, že výrazy resp. vztahy, k nimž jsme vedeni (na základě oněch vět), mají vůbec význam. V následujícím podán jest stručný přehled hlavních vět s příslušným omezením se zřetelem k integrálům nevlastním.

1. Rovnice

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

jsou správny i pro integrály nevlastní, neboť tvořily rovnice ty podklad definice těchto integrálů.

2. Věta, že integrál jest spojitou funkcí horní meze, rovněž tu vyplývá přímo z definice integrálů nevlastních. Obšírněji to bylo vyloženo v odstavci 139.

3. Věta o střední hodnotě platná pro funkci konečnou v intervalu (a, b) konečném a vyjádřená rovnicí

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\mu, \qquad m \leqq \mu \leqq M$$

ztrácí význam, je-li $f(x)$ v (a, b) nekonečnou, až na to, že můžeme tvrditi: Jestliže $f(x)$ jest v (a, b) stále kladná anebo rovna nule (t. j. stále $f(x) \geqq 0$), jest

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0 \quad \text{při } a < b.$$

*) Cours d'analyse II. sv., 2. vyd., odst. 50—72; 3. vyd., odst. 53—75.

při čemž $f(x)$ může býti v (a, b) nekonečnou a interval (a, b) sám rovněž může býti nekonečný.

Z tohoto tvrzení vyplývá, že, existuje-li integrál $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, je-li dále $\varphi(x)$ v (a, b) stále $\geqq 0$ a má-li $f(x)$ v (a, b) horní resp. dolní hranici M resp. m, jest při $b > a$

$$\int_a^b (M - f(x))\,\varphi(x)\,dx \geqq 0, \qquad \int_a^b (f(x) - m)\,\varphi(x)\,dx \geqq 0.$$

odkudž jako v odstavci 97

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

kdež interval (a, b) může býti nekonečný a funkce $\varphi(x)$ může stávati se v (a, b) nekonečnou.

Tak ku příkladu

$$-1\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx < 1\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

t. j.

$$-1 < \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx < 1.$$

Jest tedy věta (III.) odstavce 97

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad m \leqq \mu \leqq M$$

platna i pro integrály nevlastní, je-li $f(x)$ funkce v (a, b) konečná a má-li integrál $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ význam (při čemž jest ovšem $\varphi(x)$ funkce v (a, b) nenabývající buď hodnot záporných, buď kladných).

4. Vyjádření určitého integrálu pomocí primitivní funkce podaná v odstavci 100 a 101 jsou beze změny i tu platna, jakož následuje ihned z okolnosti, že rozšíření pojmu určitého integrálu jednak na podkladě primitivních funkcí (odstavec 61 a následující), jednak na podkladě definice Riemannovy v této kapitole podané nejsou v odporu.

5. Mají-li integrály z $f_1(x), f_2(x), \ldots$ vzaté v mezích a, b význam, jest

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_r f_r(x))\, dx =$$
$$= C_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\, dx + \ldots + C_r \int_a^b f_r(x)\, dx,$$
$$C_1,\ C_2, \ldots C_r \text{ konstanty;}$$

a to i v případě, že $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ jsou v (a, b) nekonečné, že i interval (a, b) jest nekonečný. Vyplývá to téměř bezprostředně z definice integrálů nevlastních a z příslušné vlastnosti integrálu na základě definice Riemannovy.

6. Následkem právě pod 4 a 5 uvedeného jsou i formule pro částečnou integraci (per partes) v odstavci 102 a 103 podané správny i pro integrály zevšeobecněné, nevyskytují-li se v příslušných rovnicích výrazy nemající významu. Tak ku př. z věty o integraci per partes následuje snadno (při b konečném)

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = [\log x \sin x]_0^b - \int_0^b \log x \cos x\, dx. \qquad (a)$$

Kdybychom b nechali růsti nade všecky meze (t. j. pro $\lim b = \infty$), dostali bychom na levé straně určité číslo; oba členy pravé strany pozbývají pro $\lim b = \infty$ významu a rovnice (a) smyslu.

7. Mají-li integrály z $f_1(x)$, $f_2(x)$ vzaté v mezích a, b význam, *nemusí* míti význam

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx.$$

Klademe-li ku př. $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = f_2(x)$, mají integrály z $f_1(x)$ a $f_2(x)$ v mezích 0, 1 význam, avšak integrál

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

jest bez významu.

8. Rovněž, má-li význam $\int_a^b f(x)\, dx$, nemusí míti význam $\int_a^b |f(x)|\, dx$ v tom případě, že buď $f(x)$ v intervalu (a, b) anebo interval (a, b) sám jest nekonečný. Ku příkladu z integrálů

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

první má, druhý nemá významu.

Na tuto okolnost bylo ostatně již v odstavci 140 a 144 poukázáno a nazvána byla konvergence integrálu nevlastního $\int_a^b f(x)\,dx$ v tom případě, že $\int_a^b |f(x)|\,dx$ význam má, absolutní.

9. Věta, že integrál jest funkce s variací konečnou horní (dolní) meze, neplatí pro ty integrály nevlastní, jež nekonvergují absolutně. Ku příkladu

$$\int_0^x \left(\frac{\sin \frac{1}{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x\sqrt{x}} \right) dx = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

není funkce s variací konečnou v intervalu $(0, a)$ při $a > 0$. Pro integrály konvergující absolutně platnost věty čtenář snadno rozšíří na základě důkazu ke konci odstavce 134 podaného.

10. Zavedení nových proměnných integračních se zřetelem k integrálům nevlastním bude předmětem následujících odstavců.

4. ZAVÁDĚNÍ NOVÝCH PROMĚNNÝCH SE ZŘETELEM K INTEGRÁLŮM NEVLASTNÍM.

150. Při zavádění nových proměnných do integrálu (odst. 107.)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

substitucí $x = \varphi(t)$ dospěli jsme k formuli

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (m)$$

při čemž jsme předpokládali nejprve, mění-li se t od α do β stále ve stejném smyslu, že příslušné x se mění od a do b, pak že $\varphi(t)$ v intervalu od α do β má stále derivaci a to konečnou, měnící své znaménko jenom v konečném počtu bodů intervalu (α, β) a konečně že oba integrály v (m) existují. Oba intervaly (a, b), (α, β) samozřejmě byly konečné.

Ve formuli (m) můžeme nejprve připustiti za meze $\pm\infty$ (předpokládajíce ovšem, že ostatní předpoklady jsou splněny). Neboť jestliže ku příkladu $b = \infty$, t. j. jestliže $\varphi(t)$, když t konverguje ku β, vzrůstá kladnými hodnotami nade všecky meze, můžeme nejprve klásti, předpokládajíce pro jednoduchost $\alpha < \beta_1 < \beta$, $b_1 = \varphi(\beta_1)$,

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta_1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Pravá strana rovnice za supposice, že $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ jest v (α, β) integrace schopna, jest spojitou funkcí β_1, když β_1 jest v (α, β), a nabývá určité hodnoty, když β_1 konverguje ku β; následkem toho i levá strana této rovnice, která se mění na integrál v mezích (a, ∞), má význam a jest

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Podobně, existuje-li $\varphi'(t)$ pro všecka $t > \alpha$, a jestliže t rostoucímu nade všecky meze hodnotami kladnými jest přiřaděno $x = \varphi(t)$, jež rovněž roste hodnotami kladnými nade všecky meze, jest

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\infty} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

ovšem za předpokladu dalšího, že oba integrály této rovnice mají význam. Jest jasno, že vedle právě uvedených dvou případů by bylo lze četné jiné rovněž možné vzíti v úvahu; věc to, která neposkytuje žádných potíží.

Avšak supposice, že v intervalu (α, β) existuje derivace $\varphi'(t)$ ve všech bodech, rovněž není nutná; můžeme připustiti, že v bodech množství bodového reducibilního buď derivace vůbec neexistuje aneb dokonce, že stává se v nich nekonečnou. Připusťme nejprve, že $\varphi'(t)$ jenom v okolí bodu $t = \gamma$ nacházejícím se na (α, β) jest nekonečnou; tu značíme-li $c = \varphi(\gamma)$, $c_1 = \varphi(\gamma_1)$, $c_2 = \varphi(\gamma_2)$, při čemž budiž $\alpha < \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 < \beta$, jest

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\gamma_1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = \int_{\gamma_2}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Přejdeme-li k limitám $\lim \gamma_1 = \gamma$, $\lim \gamma_2 = \gamma$, pak za supposice, *že $\varphi(t)$ jest spojitou pro $t = \gamma$*, jest $\lim c_1 = c$, $\lim c_2 = c$ a máme (jelikož existují limity integrálů na levé straně napsaných rovnic pro případ, že $\lim c_1 = c$, $\lim c_2 = c$, existují limity integrálů i na pravé straně pro $\lim \gamma_1 = \gamma$, $\lim \gamma_2 = \gamma$)

$$\int_a^{c} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\gamma} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{\gamma}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt;$$

tudíž sčítáním

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Totéž nastává, když $\varphi'(t)$ v bodech množství bodového reducibilního na intervalu (α, β) přestává existovati anebo stává se nekonečnou, jenom když $\varphi(t)$ v těch bodech jest funkcí spojitou, integrál z $f(x)$ v (a, b) existuje a funkce $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v těch částech intervalů, ve kterých $\varphi'(t)$ nestává se nekonečnou, resp. nepřestává existovati, jest integrace schopnou, jak na základě definic podaných obecnou indukcí snadno vyplývá.

Obdobné úvahy lze provésti, když $f(x)$ v intervalu integračním stává se nekonečnou, podržuje-li jenom integrál z $f(x)$ v (a, b) význam.

Jest jasno, že mohou nastati případy, kdy integrály na základě původní definice Riemannovy zavedené (při konečném $f(x)$ jakož i konečném intervalu (a, b)) jsou přiřaděny na základě substituce $x = \varphi(t)$ integrálům nevlastním, ve kterých buď $f(x)$, nebo interval (a, b), nebo obojí současně stávají se nekonečnými a naopak.

Bereme-li v úvahu tudíž integrály, jež v sebe dají se transformovati zavedením nové proměnné (rovnicí tvaru $x = \varphi(t)$), tvoří integrály vlastní a nevlastní jakýsi celek (těleso).

Co jsme v předcházejícím obecně naznačili, na příkladech podrobněji vyložíme.

151. PŘÍKLAD 1. Transformovati jest integrál

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad n > \tfrac{1}{2}$$

substitucí

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - y^2, \text{ či jinak } x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pro $x = 0$ jest $y = 0$. S rostoucím x roste y; hodnotě $x = N$ přísluší $y = \dfrac{N}{\sqrt{1+N^2}}$; tak jest

$$\int_0^N \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}} (1-y^2)^{n-\frac{3}{2}}\,dy.$$

Necháme-li tudíž N vzrůstati nade všechny meze, máme

$$\lim_{N=\infty} \int_0^N \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^1 (1-y^2)^{n-\frac{3}{2}}\,dy. \tag{1}$$

Integrál, ke kterému jsme dospěli, má význam tenkráte a jenom tenkráte, když $n > \frac{1}{2}$, stejně jako integrál daný. V tom případě, že $n \geqq \frac{3}{2}$, jest integrál výsledný integrálem v intervalu (0, 1) z funkce spojité a konečné v tom intervalu a tudíž integrálem vlastním.

PŘÍKLAD 2. Transformovati jest integrál

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a}{x}\right) dx, \qquad a > 0$$

substitucí

$$x+\frac{a}{x}=y.$$

Když x jest v intervalu $(0, \infty)$, nastane minimální hodnota y pro $x=\sqrt{a}$; když x roste od 0 ke $\sqrt{a}$, klesá y od ∞ ke $2\sqrt{a}$. Roste-li x od $\sqrt{a}$ nade všecky meze, roste y od $2\sqrt{a}$ nade všecky meze. Snadně vypočteme

$$x=\tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2-a}, \qquad \frac{dx}{dy}=\tfrac{1}{2} \pm \frac{y}{2\sqrt{y^2-4a}};$$

podle uvedeného platí v intervalu pro x $(0, \sqrt{a})$ znaménko dolní, v intervalu $(\sqrt{a}, \infty)$ znaménko horní; i jest

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a}{x}\right) dx = \int_\infty^{2\sqrt{a}} f(y)\left(\tfrac{1}{2}-\frac{y}{2\sqrt{y^2-4a}}\right) dy + \int_{2\sqrt{a}}^\infty f(y)\left(\tfrac{1}{2}+\frac{y}{2\sqrt{y^2-4a}}\right) dy =$$

$$=\int_{2\sqrt{a}}^\infty f(y)\frac{y}{\sqrt{y^2-4a}}\,dy.$$

V důsledku této rovnice jest

$$\int_0^\infty F\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right) dx = \int_0^\infty F\left[\left(x+\frac{a}{x}\right)^2-2a\right] dx = \int_{2\sqrt{a}}^\infty F(y^2-2a)\frac{y}{\sqrt{y^2-4a}}\,dy.$$

Učiníme-li ještě $y^2=4a+t^2$, máme konečně

$$\int_0^\infty F\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right) dx = \int_0^\infty F(t^2+2a)\,dt. \qquad (A)$$

Tak jest ku příkladu

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\dfrac{a^2}{x^2}+b} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+2a+b} = \frac{\pi}{2\sqrt{2a+b}},$$

ovšem za podmínky, že $2a+b > 0$, jak čtenář snadno dokáže.

Podobně

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \int_0^\infty e^{-t^2-2a}\,dt = e^{-2a}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a},$$

při čemž použili jsme hodnoty číselné v odstavci následujícím (119) pro příslušný integrál vypočtené.

Podobnými transformacemi lze odvoditi formuli obecnější dokázanou *Cauchym* (n celé a kladné)

$$\int_0^\infty x^{2n} F\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = a^n\int_0^\infty F(t^2+2a)\,dt + \binom{n+1}{2}a^{n-1}\int_0^\infty t^2 F(t^2+2a)\,dt +$$

$$+\binom{n+2}{4}a^{n-2}\int_0^\infty t^4 F(t^2+2a)\,dt + \ldots + \binom{2n}{2n}\int_0^\infty t^{2n} F(t^2+2a)\,dt,$$

což přenechávám čtenáři. (Viz Bertrand, Calcul intégral, odstavec 282.)

PŘÍKLAD 3. Při integrálu

$$P=\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\log x\,\frac{dx}{x}, \qquad a>0$$

vede ke zjednodušení substituce $x=ae^u$, kde u jest nová proměnná integrační. (Liouville v Journ. de math. z r. 1869, str. 300.) Obdržíme tu snadným počtem

$$P=\int_{-\infty}^\infty f(e^u+e^{-u})\,[\log a+u]\,du = \log a\int_{-\infty}^\infty f(e^u+e^{-u})\,du + \int_{-\infty}^\infty u\,f(e^u+e^{-u})\,du.$$

Avšak druhý z právě napsaných integrálů jest rovný nule; neboť jest to integrál z funkce liché v mezích $(-\infty, \infty)$. Jest tedy

$$P=\log a\int_{-\infty}^\infty f(e^u+e^{-u})\,du;$$

vrátíme-li se pak k původní proměnné, získáme rovnici

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\log x\,\frac{dx}{x} = \log a\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x} \qquad (C)$$

platnou za předpokladu, že oba integrály tu se vyskytující mají význam a že $a>0$.*) Tak ku př. v případě, že A a C mají stejné znaménko, jest

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{Ax^2+2Bx+C}\,dx = \int_0^\infty \frac{\log x}{\pm\sqrt{AC}\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)+2B}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$=\log a\int_0^\infty \frac{1}{\pm\sqrt{AC}\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)+2B}\cdot\frac{dx}{x} = \log a\int_0^\infty \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C};$$

*) Je-li $a<0$, zůstává očividně rovnice (C) v platnosti, píšeme-li na pravé straně $|a|$ místo a.

ve vztazích právě napsaných jest položeno $\sqrt{\frac{C}{A}} = a$ a předpokládáno, že $AC > 0$ a že rovnice $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ nemá kořenů kladných.

152. Integrál Laplaceův. Integrály příkladu 1 předcházejícího odstavce souvisí úzce s integrálem důležitým

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \tag{1}$$

t. zv. Laplaceovým. Funkce totiž

$$(1+\alpha)\,e^{-\alpha}$$

majíc derivaci $-\alpha e^{-\alpha}$, může míti maximum resp. minimum toliko v bodě $\alpha = 0$. V tom bodě má maximum, jež jest 1. I jest pro celý interval

$$(1+\alpha)\,e^{-\alpha} \leqq 1$$

t. j. klademe-li jednou $\alpha = x^2$, po druhé $\alpha = -x^2$

$$1 - x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}. \tag{2}$$

Pro Laplaceův integrál jest na základě definice

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{N=\infty} \int_0^{\sqrt{N}} e^{-x^2}\,dx, \tag{3}$$

při čemž jsme horní hranici volili ihned v účelné formě a při čemž N může probíhati libovolnou řadu čísel rostoucích nade všecky meze; zvolíme za N řadu čísel celých. Jest však následkem substituce $x = y\sqrt{N}$

$$\int_0^{\sqrt{N}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{N}\int_0^1 e^{-Ny^2}\,dy \tag{4}$$

a z nerovnin (2) vyplývá snadno (e^{-Ny^2} lze totiž psáti jako $(e^{-y^2})^N$)

$$\sqrt{N}\int_0^1 (1-y^2)^N\,dy < \sqrt{N}\int_0^1 e^{-Ny^2}\,dy < \sqrt{N}\int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2)^N} < \sqrt{N}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^N}.$$

V integrále na levém křídle tohoto řetězu nerovnin učiníme dále substituci $y = \cos x$, na pravém pak křídle substituci $y = \operatorname{cotg} x$; obdržíme

$$\sqrt{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2N+1} x\,dx < \sqrt{N}\int_0^1 e^{-Ny^2}\,dy < \sqrt{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2N-2} x\,dx. \tag{5}$$

Avšak jest

$$\lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(viz str. 162, rovn. 12)}$$

tedy i

$$\lim_{N=\infty} \sqrt{N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2N+1} x \, dx = \lim \sqrt{\frac{N}{2N+1}} \cdot \sqrt{2N+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2N+1} x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

a stejně

$$\lim \sqrt{N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2N-2} x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, .$$

Poněvadž pak obě křídla v (5) mají limitu a to touž limitu, má i prostřední článek stejnou limitu pro lim $N=\infty$ a jest (jelikož podle (4) jest ta limita rovna hodnotě integrálu (1))

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, ,$$

čímž integrál Laplaceův vypočten. Zavedeme-li do výsledku tohoto ještě proměnnou x' substitucí $x = \sqrt{A}\, x'$, kde $A > 0$, máme poněkud obecněji

$$\int_0^{\infty} e^{-Ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \, .$$