ČÁST DRUHÁ.

INTEGRÁL URČITÝ NA ZÁKLADĚ DEFINICE SOUČTOVÉ (CAUCHY-RIEMANNOVY).

VI. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU.

1. DEFINICE INTEGRÁLU OMEZENÉHO. ($b > a$).

85. Součty S a s. Mějmež v konečném intervalu (a, b) dánu konečnou (t. j. ohraničenou) funkci $f(x)$. Horní hranice funkčních hodnot funkce buď M, dolní m (DP, 67). Rozdělíme daný interval na jistý počet na př. n intervalů menších prostřednictvím čísel $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, *při čemž budeme předpokládati*

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

a pod x_0 resp. x_n budeme vyrozumívati a resp. b. V intervalu (x_{k-1}, x_k) nechť má $f(x)$ horní hranici M_k, dolní hranici m_k. Očividně jest

$$m \leqq M_k \leqq M; \qquad m \leqq m_k \leqq M. \tag{1}$$

Zavedeme pak v úvahy své čísla S, s takto definovaná

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1}),$$
$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}).$$

Se zřetelem k (1) jest

$$m(b-a) \leqq S \leqq M(b-a), \qquad m(b-a) \leqq s \leqq M(b-a). \tag{2}$$

Číslo S budeme nazývati *horní součet* patřící k $f(x)$ a k intervalu (a, b) rozdělenému v intervaly (a, x_1), (x_1, x_2), … (x_{n-1}, b); číslo s pak *dolní součet* patřící k atd. Funkci $f(x)$ a interval (a, b) pokládáme za pevně dané; měníme-li rozdělení v intervaly tím, že měníme jednak čísla x_k, jednak jich počet, mění se v obecném případě součty S, s. Dostáváme tak dvě množství číselná (každé obecně o nekonečném počtu čísel), množství číselné (S)

obsahující všecky horní součty a množství číselné (s) obsahující všecky dolní součty. Vzhledem k (2) jsou obojí množství shora i zdola ohraničena a mají tudíž obě horní i dolní hranici. (DP, 24).

Pro nás má důležitost dolní hranice horních součtů, již označíme Σ, a horní hranice dolních součtů σ. Dokážeme si, že vždy $\Sigma \geqq \sigma$. K tomu cíli odvodíme si několik vět o číslech S, s. Nejprve jest jasno, že *patří-li S i s k jednomu a témuž dělení intervalu* (a, b) *v intervaly menší, že* $S \geqq s$ (věta prvá). Neboť, jak z významu čísel M_k a m_k vyplývá, jest $M_k \geqq m_k$ a jest tedy rozdíl

$$S - s = (M_1 - m_1)\,(x_1 - a) + (M_2 - m_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots$$

rovný součtu čísel buď kladných, buď z části anebo vesměs*) nule rovných. Jest tudíž vskutku $S \geqq s$.

Vycházejíce z dělení $(a, x_1, x_2, \ldots, b)$, k němuž patří součty S, s, rozdělme každý z intervalů (a, x_1), (x_1, x_2), ... na intervaly menší přibráním dalších dělících bodů. Dostaneme dělení $(a, x_{11}, x_{12}, \ldots x_{1\mu_1}, x_1, x_{21}, x_{22}, \ldots x_{2\mu_2}, x_2, \ldots b)$, k němuž nechť patří součty S_1, s_1.

Tu jest $$S_1 \leqq S, \quad s_1 \geqq s; \qquad \text{(věta druhá).} \qquad (3)$$

Neboť součet S_1 dostaneme z S, když $M_1(x_1 - a)$ nahradíme výrazem

$$M_{11}(x_{11} - a) + M_{12}(x_{12} - x_{11}) + \cdots + M_{1\mu_1+1}\,(x_1 - x_{1\mu_1}) \qquad (4)$$

a zároveň ostatní sčítance součtu S výrazy obdobně utvořenými, při čemž M_{11} jest horní hranice $f(x)$ v intervalu (a, x_{11}), M_{12} v (x_{11}, x_{12}) atd. Jelikož však jest $M_{1l} \leqq M_1$, jest i výraz (4) menší (po případě rovný) než $M_1(x_1 - a)$ — a stejně jest tomu u výrazů k (4) obdobně utvořených a jim příslušným sčítancům součtu S — a tudíž $S_1 \leqq S$. Analogicky vyplývá $s_1 \geqq s$.

Mějmež nyní dvojí různá dělení a to $(a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b)$, a $(a, x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}, b)$. K prvnímu nechť patří součty S, s; k druhému součty S', s'. Utvořme dělení třetí, k němuž použijeme současně hodnot $x_1, x_2, \ldots, x'_1, x'_2, \ldots$ předcházejících dvou dělení. (Tímto třetím dělením rozdělí se interval (a, b) obecně na $n + n' - 1$ dílů; splývají-li však některá z čísel x_k s některými čísly x'_k, bude těch dílů méně než $n + n' - 1$). K třetímu dělení nechť patří součty $\bar{S}$, $\bar{s}$. I jest, používáme-li (3) (věty druhé)

$$\bar{S} \leqq S, \quad \bar{S} \leqq S'; \qquad \bar{s} \geqq s, \quad \bar{s} \geqq s'.$$

Poněvadž pak $\bar{S} \geqq \bar{s}$ (podle věty první), můžeme psáti $S \geqq \bar{S} \geqq \bar{s} \geqq s'$, to jest

$$S \geqq s', \text{ a podobně } S' \geqq s,$$

*) Tento případ nastává jenom, když $f(x)$ jest konstanta,

t. j. *každý z horních součtů jest větší* (po případě rovný) *než každý z dolních součtů.* I musí tedy *dolní hranice horních součtů býti buď větší než horní hranice dolních součtů, buď rovna této horní hranici*; t. j.

$$\Sigma \geqq \sigma.$$

86. O číslech Σ, σ platí dále věta. *Číslo Σ jest limita horních součtů S pro ten případ, že n roste nade všecky meze a zároveň všecky rozdíly $x_k - x_{k-1}$* (délky jednotlivých intervalů) *konvergují k nule.*

Obdobně lze σ *pokládati za limitu dolních součtů s pro ten případ, že počet intervalů roste nade všecky meze a jednotlivé intervaly konvergují k nule.*

Neboť jelikož jest Σ dolní hranice horních součtů, jest podle definice dolní hranice mezi S jistě číslo, které jest menší než $\Sigma + \varepsilon$, při čemž si můžeme kladné číslo ε zvoliti jakkoliv malé. Budiž takovým číslem na př. S_0 a nechť patří k dělení $(a, y_1, y_2, \dots y_{p-1}, b)$; i jest podle předpokladu

$$\Sigma \leqq S_0 < \Sigma + \varepsilon. \tag{5}$$

Rozdělme (a, b) čísly $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ na n intervalů tak, aby délka každého byla menší než kladné číslo η. K tomuto dělení patřící horní součet označme S. Konečně čísla x_k, y_i dohromady dělí interval (a, b) třetím dělením, k němuž nechť patří součet $\overline{S}$. I jest podle věty druhé (3) $\overline{S} \leqq S_0$ a tedy podle (5) též

$$\overline{S} < \Sigma + \varepsilon. \tag{6}$$

Avšak $\overline{S}$ liší se od S jenom potud, že některý interval (x_{k-1}, x_k) patřící k S byl hodnotou (resp. hodnotami) y_i rozdělen ve dva (resp. i více) intervalů patřících pak k $\overline{S}$. Takových rozpadnutí intervalů (x_{k-1}, x_k) v menší může býti nejvýše $p-1$ (jelikož jest jenom $p-1$ hodnot y). Tím však, že se rozpadne interval (x_{k-1}, x_k) ve dva, zmenší se příslušný horní součet, avšak jistě o méně než

$$(M_k - m_k)\,(x_k - x_{k-1}) < (M - m)\,\eta.$$

Tudíž při všech rozpadnutích (v počtu nejvýše $p-1$), následkem jichž dospíváme od S k $\overline{S}$, zmenší se horní součet o méně než $(M - m)\,\eta\,.\,(p-1)$; zvolíme-li pak kladné číslo η tak malé, aby byla splněna nerovnina

$$\eta\,.\,(M - m)\,(p - 1) < \varepsilon, \tag{7}$$

jest

$$S - \overline{S} < \varepsilon \tag{8}$$

a tudíž z (6) a (8)

$$S < \Sigma + 2\varepsilon.$$

Avšak podle významu čísla Σ jest $\Sigma \leq S$ a tedy

$$| S - \Sigma | < 2\varepsilon,$$

t. j. rozdíl $S - \Sigma$ může býti učiněn co do absolutní hodnoty menším než libovolně malé číslo, zvolíme-li si jenom η dosti malé (viz (7)); čímž věta jest dokázána.

Stejně se dokáže věta, vztahující se k σ.

87. Obzvláštní význam má pro nás případ, že $\Sigma = \sigma$. Tu nazýváme číslo $\Sigma = \sigma$ **integrálem určitým z funkce $f(x)$ v mezích a, b** (aneb také v *intervalu* (a, b)). O funkci $f(x)$ pak říkáme, že jest v *intervalu (a, b) integrace schopna při Cauchy-Riemannově definici určitého integrálu* (anebo stručněji podle Cauchy-Riemanna). Vedle pojmenování vytknutých užíváme však i jiných pojmenování a rčení uvedených při definici integrálu jakožto primitivní funkce. Zvláště pak se říká určitému integrálu též omezený integrál.

Podle předcházejícího odstavce jest pak integrál určitý z funkce $f(x)$ v mezích (a, b) společnou limitou součtů

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \qquad \text{kde } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

pro ten případ, že $\lim \Delta x_k = 0$ pro $k = 1, 2 \ldots n$ a zároveň n roste nade všecky meze. Můžeme pak vysloviti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby $f(x)$ v intervalu (a, b) definovaná jakožto funkce konečná byla v intervalu (a, b) integrace schopna, jest, aby*

$$\lim \Sigma M_k \Delta x_k = \lim \Sigma m_k \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{9}$$
$$\text{pro } \lim \Delta x_k = 0, \quad \lim n = \infty.$$

Že tato podmínka jest nutna a postačitelna, jest ihned patrno z odstavce předcházejícího, podle kterého limita na levé straně jest rovna Σ, limita na pravé straně pak σ.

Větu právě uvedenou můžeme vysloviti též následovně: *Nutná a postačující podmínka, aby $f(x)$ v intervalu (a, b) definovaná jakožto funkce konečná byla v něm integrace schopna, jest, aby*

$$\lim \Sigma (M_k - m_k) \Delta x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{9'}$$
$$\text{pro } \lim \Delta x_k = 0, \quad \lim n = \infty.$$

Značme $M_k - m_k = O_k$, nazývajíce při tom číslo O_k *oscilací funkce $f(x)$ v intervalu Δx_k* (DP, 67); pak podmínku (9′) můžeme psáti ve tvaru

$$\lim \Sigma O_k \Delta x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{9''}$$

Integrál určitý takto definovaný značí se stejně jako integrál definovaný na základě primitivní funkce. Značíme — v případě, že podmínka (9) jest splněna —

$$\Sigma = \sigma = \int_a^b f(x)\, dx$$

a sluje opět *a* resp. *b* *dolní* resp. *horní mezí tohoto integrálu.*

Máme tudíž na základě nové definice pro určitý integrál toto vyjádření (stále za předpokladu, že splněna jest (9))

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \Sigma M_k \Delta x_k = \lim \Sigma m_k \Delta x_k \qquad (10)$$

$$k = 1, 2, \ldots n; \quad \text{pro } \lim \Delta x_k = 0, \quad \lim n = \infty.$$

Můžeme však též psáti (předpokládajíce stále, že podmínka (9) jest splněna a *majíce na mysli stále týž limitní proces*)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \Sigma \mu_k \Delta x_k \qquad k = 1, 2, \ldots n, \qquad (11)$$

kde μ_k jest libovolné číslo položené mezi M_k a m_k ($M_k \geqq \mu_k \geqq m_k$); neboť jest $\Sigma m_k \Delta x_k \leqq \Sigma \mu_k \Delta x_k \leqq \Sigma M_k \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \ldots n;$

speciálně můžeme klásti

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \Sigma f(\xi_k) \Delta x_k \qquad k = 1, 2, \ldots n \qquad (12)$$

a při $x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$; jest totiž $f(\xi_k)$ rovněž obsaženo mezi M_k a m_k.

Jest patrno z důkazu podmínky (9'), že *postačí ke zjištění, že některá $f(x)$ jest integrace schopna, aby ta podmínka byla splněna, když Δx_k nějakým určitým způsobem konvergují k nule.* Na př. můžeme si zvoliti všecka Δx_k ($k = 1, 2, \ldots n$) sobě rovna (*intervaly ekvidistantní*) a položiti

$$\Delta x_k = \frac{b - a}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots n \qquad (\alpha)$$

a nechati n vzrůstati nade všecky meze. Zjistíme-li v tomto případě, že (9') jest splněna, dokázali jsme již, že $f(x)$ jest integrace schopno a podobně to platí v každém jiném případě. Rovněž téměř bezprostředně jest patrno, že *podmínka* (9') *jest splněna, když limita ve* (12) *vždy existuje a jest vždy táž, ať ξ_k jest jakékoliv číslo intervalu* (x_{k-1}, x_k), *jehož délka Δx_k nějakým určitým způsobem konverguje k nule.*

Podmínce integrability, jak jest dána rovnicí (9') resp. (9''), můžeme dáti tento slovný výraz: *Nutná a postačující podmínka,* *aby funkce $f(x)$ byla v (a, b) integrace schopna jest, aby ke každé dvojici čísel kladných $[\varepsilon, \varepsilon_1]$ příslušelo kladné číslo η tak, že, rozdělíme-li interval na součet intervalů částečných, z nichž každý jest o menší délce než η, součet délek všech intervalů částečných, ve kterých oscilace funkce $f(x)$ jest větší než ε, jest menší než ε_1.*

Neboť, je-li podmínka ve výroku právě učiněném uvedená splněna, jest $\Sigma O_k \Delta x_k < (M-m)\varepsilon_1 + (b-a-\varepsilon_1)\varepsilon$ pro $\Delta x_k < \eta$. Avšak ε, ε_1 můžeme si zvoliti libovolně malé a tedy i levou stranu napsané nerovniny můžeme učiniti menší než na př. číslo ε', jsou-li jenom Δx_k menší než jisté číslo η; t. j. jest splněna (9″). Není-li pak podmínka uvedená splněna při určité dvojici čísel $[\varepsilon, \varepsilon_1]$, pak součet intervalů, v nichž oscilace jest větší než ε, jest stále větší než ε_1, ať si číslo η (horní hranici to pro délky intervalů částečných) volíme jakkoliv malé, t. j.

$$\sum_k O_k \Delta x_k > \varepsilon\varepsilon_1;$$

t. j. není splněno (9″).

POZNÁMKA 1. Volíme-li všecky intervaly částečné Δx_k o stejné délce, jak vytčeno jest rovnicí (α), máme podle (12) pro integrál z $f(x)$, o níž předpokládáme, že jest integrace schopna, tato vyjádření často užívaná

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\,dx &= \lim_{n=\infty} \delta\,[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\cdots+f(a+(n-1)\delta)]\\ &= \lim_{n=\infty} \delta\,[f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\cdots+f(a+n\delta)].\end{aligned} \tag{13}$$

Při tom jest $\delta = (b-a)/n$; čísla ξ_k ve (12) se vyskytující volena tak, že splývají s krajními body intervalů částečných.

POZNÁMKA 2. Definicí právě vyloženou vysvětluje se označení omezeného integrálu. Znaménko integrační vzniklo přeměnou ze znaménka sumačního *S*, znaménko diferenciální *dx* pak vztahuje se k vyznačení intervalů o délce, která konverguje k nule. Vyskytuje se po prvé v r. 1675 u *Leibnize*, jednoho ze zakladatelů počtu integrálního, kterýž nazýván byl jím »calculus summatorius«. Znaménko to podrženo i od následujících matematiků, zejména od *Eulera*, ač jej tento za nevhodné označení příslušného pojmu pokládal,*) jakož jest přirozeno, uváží-

*) Praví o tom Euler v „Institutiones calculi integralis“, 1. sv. (r. 1768), str. 5 (vydání z r. 1913, str. 8): „Caeterum hoc signum $\int$ vocabulo summae efferri solet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tanquam summa omnium differentialium spectatur, est natum; neque maiore iure admitti potest, quam vulgo lineae ex punctis constare concipi solent.“

me-li, že pojem integrálu jakožto limity součtu nebyl toho času s náležitou přesností stanoven a zkoumán, v popředí pak úvah byl pojem integrálu jakožto primitivní funkce.

Vyznačení mezí způsobem nyní užívaným pochází od *Fouriera* (Théorie analytique de la chaleur, r. 1822, str. 252; Oeuvres, sv. 1, str. 226); Euler udával meze obšírně v textu a stručněji též tímto způsobem
$$\int f(x)\,dx\quad \begin{bmatrix} \text{ab} & x=a \\ \text{ad} & x=b \end{bmatrix}.$$

První který podal přesnou definici integrálu jakožto limity součtu, byl *Cauchy*; ten stanovil určitý integrál z funkce spojité v intervalu (a, b) limitou součtu
$$(x_1-a)\ f(a)+(x_2-x_1)\ f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})\ f(x_{n-1})$$
a dal rovněž definici rovnicí (12), avšak též jenom pro ten případ, že $f(x)$ jest funkcí spojitou. (Viz jeho „Resumé des Leçons sur le calcul infinitésimal, r. 1823, přednáška 20, 21; Oeuvres, II. sér., sv. 4). *Riemann* rozšířil definici (12) na případ obecné funkce $f(x)$ splňující pouze podmínku (9′) a to v habilitační práci „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“ r. 1854 podané, avšak teprve po smrti autora uveřejněné. (Viz Gesammelte math. Werke, 2. vyd., str. 239 a násl.). Se zřetelem k vytčeným okolnostem sluje, jak již svrchu bylo vytknuto, definice tu podaná též *Cauchy-Riemannova* a funkce připouštějící na základě definice integrál funkce integrace schopná podle *Cauchy-Riemanna.*

POZNÁMKA 3. Není-li funkce $f(x)$ v (a, b) integrace schopna, jest $\Sigma>\sigma$. Čísla tato mají pojmenování **horní integrál** a **dolní integrál z funkce $f(x)$ v mezích** (a, b) a značí se
$$\Sigma=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx,\qquad \sigma=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Horní a dolní integrál existují vždy, když konečná funkce $f(x)$ pro všecky hodnoty intervalu (a, b) jest definována. Zavedeny pak byly tyto pojmy, které při různých obecných vyšetřováních jsou užitečny, po prvé od *Darbouxa* v r. 1874 (Annales de l'éc. normale, 2 sér., 4. sv. str. 64).

PŘÍKLAD 1. Vezměme v úvahu $f(x)=x^\alpha$ při $\alpha>0$ a buď $a\geqq 0$. Funkce daná jest s rostoucím x stále rostoucí a jest tudíž $M_k=x_k^\alpha$ a $m_k=x_{k-1}^\alpha$. I jest, zvolíme-li intervaly stejné,
$$\sum_k (M_k-m_k)\,\Delta x_k=\sum_k\left(x_k^\alpha-x_{k-1}^\alpha\right)\Delta x_k=\frac{b-a}{n}\sum_k\left(x_k^\alpha-x_{k-1}^\alpha\right)=$$
$$=\frac{(b-a)\ (b^\alpha-a^\alpha)}{n};$$

tudíž

$$\lim \sum_k O_k \Delta x_k = \lim_{n=\infty} \frac{(b-a)(b^\alpha - a^\alpha)}{n} = 0,$$

t. j. x^α jest integrace schopno (při $\alpha > 0$).

Výpočet integrálu z x^α provedeme podle (11). Podle věty o střední hodnotě počtu diferenciálního jest

$$x_k^{\alpha+1} - x_{k-1}^{\alpha+1} = (x_k - x_{k-1}) \cdot (\alpha+1)\, \xi_k^\alpha, \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

Jelikož ξ_k^α leží mezi $M_k = x_k^\alpha$ a $m_k = x_{k-1}^\alpha$, můžeme si zvoliti $\mu_k = \xi_k^\alpha$, to jest učiniti

$$\mu_k = \frac{1}{\alpha+1} \frac{x_k^{\alpha+1} - x_{k-1}^{\alpha+1}}{x_k - x_{k-1}},$$

odkudž

$$\sum_k \mu_k \Delta x_k = \frac{1}{\alpha+1} \sum (x_k^{\alpha+1} - x_{k-1}^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

a tedy

$$\int_a^b x^\alpha\, dx = \lim_{\Delta x_k = 0} \sum_k \mu_k \Delta x_k = \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

PŘÍKLAD 2. K vyšetření funkce $f(x) = 1/x$ v intervalu (a, b), $0 < a < b$, stačí na př. voliti za $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ geometrickou řadu čísel $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n = b$; máme ihned

$$S = n(q-1), \quad s = n(1-q^{-1}) \text{ aneb } S = \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) n, \quad s = -n\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Limita obou čísel pro $\lim n = \infty$ jest táž (DP 36), tedy funkce v (a, b) integrace schopna. Integrál pak v mezích a, b jest rovný $\log (b/a)$.

PŘÍKLAD 3. Při funkci e^x možno voliti intervaly ekvidistantní,

$$x_k = a + k\delta, \text{ kde } \delta = (b-a)/n.$$

I zde obdržím stejné limity při S a s pro $\lim n = \infty$ a integrál z dané funkce v mezích a, b rovný $e^b - e^a$.

PŘÍKLAD 4. Funkce $f(x)$ definovaná v intervalu $(0, 1)$ vztahy

$$f(x) = 0 \text{ pro iracionální } x \text{ a pro } x = 0, 1$$

$$f(x) = \frac{1}{q}, \text{ je-li } x = \frac{p}{q}, \; p, q \text{ celá čísla bez sp. m.,} \quad q > 1$$

jest v tom intervalu integrace schopna; integrál pak z funkce té jest roven nule (podle Pólya-Szegö, I., str. 59). Neboť, rozdělíme-li interval $(0, 1)$ na n stejných dílců, bude oscilace v jednom dílci větší než $n^{-\frac{1}{2}}$ jenom tenkráte, je-li v tom dílci obsažen zlomek p/q, kde $q < n^{\frac{1}{2}}$; zlomků však o jmenovateli q jest nejvýše $q - 1$. Jest tedy počet dílců, v nichž oscilace jest větší než $n^{-\frac{1}{2}}$ menší než $\frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} (n^{\frac{1}{2}} - 1)$. V nich však oscilace jest menší než 1. V ostatních dílcích jest oscilace menší ($\leqq$) než $n^{-\frac{1}{2}}$. I jest tedy součet na levé straně (9″) menší než

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} (n^{\frac{1}{2}} - 1) \cdot 1 + \frac{1}{n} (n - \tfrac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} (n^{\frac{1}{2}} - 1)) \cdot n^{-\frac{1}{2}}.$$

Limita tohoto výrazu však jest rovna nule pro $\lim n = \infty$ a tvrzení učiněné dokázáno. Že integrál z funkce $f(x)$ v mezích 0, 1 jest roven nule, následuje ihned z okolnosti, že stále $s = 0$.

2. O FUNKCÍCH INTEGRACE SCHOPNÝCH (podle *C.—R.*) v (a, b); $b > a$.

88. *a*) Postupu při příkladu prvním vyloženého (v prvé části) můžeme užíti při každé funkci stoupající anebo aspoň neklesající a dokázati větu, že *každá funkce v intervalu* (a, b) *stoupající anebo aspoň neklesající* (při vzrůstající neodvisle proměnné) *jest v intervalu* (a, b) *integrace schopna.* Totéž jest v platnosti pro funkci *stále v* (a, b) *klesající anebo aspoň nestoupající.*

b) Dále dokážeme, že *funkce* $f(x)$ *v intervalu* (a, b) *spojitá jest v tom intervalu integrace schopna.* Jestliže jest funkce spojitá v intervalu (a, b), lze ke každému kladnému číslu ε libovolně zvolenému udati kladné číslo η tak, aby $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, jsou-li jenom x', x'' dvě hodnoty intervalu takové, že $|x' - x''| < \eta$. Zvolme si všecka Δx_k menší než η. Pak oscilace $M_k - m_k$ podle vlastnosti spojitých funkcí právě uvedené jest menší než ε a jest tedy součet délek intervalů částečných, ve kterých oscilace jest větší než ε, roven nule. Tedy podle poslední věty o nutné a postačující podmínce, aby funkce byla integrace schopna, jest věta pokázána.

c) Můžeme větu tuto zevšeobecniti a tvrditi, že *funkce* $f(x)$ *v intervalu* (a, b) *konečná a která jest spojitá ve zbytku intervalu* (a, b) *vzniklém z* (a, b) *odnětím konečného počtu intervalů, jichž celkovou délku můžeme učiniti libovolně malou, jest v* (a, b) *integrace schopna.* Neboť i zde možno vhodnou volbou čísla η docíliti, aby součet délek intervalu, v nichž oscilace jest větší než ε, byl menší než ε_1. Při tom jsou ε, ε_1 libovolná čísla kladná.

Na př. funkce $f(x)$ definovaná vztahy $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$ jest v intervalu $(-1, 1)$ integrace schopna. Jest to funkce konečná v $(-1, 1)$ a spojitá v tomto intervalu, vyjmeme-li z něho interval $(-\alpha, \alpha)$, kde $|\alpha| < 1$ a libovolně malá.

Rovněž funkce $f(x)$ daná rovnicemi

$$f(x) = \sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} \qquad \text{pro } x \gtrless \frac{1}{k\pi},$$

$$f\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0, \quad f(0) = 0 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

jest funkce v $(-1, 1)$ integrace schopna, což dokázati přenechávám čtenáři.

POZNÁMKA. Jakožto doplněk věty v *b*) a *c*) lze dokázati větu: *Je-li funkce* $f(x)$ *v* (a, b) *podle C.—R. integrace schopna, pak body intervalu* (a, b), *v nichž* $f(x)$ *jest funkcí spojitou, tvoří množství bodové v* (a, b) *všude husté.*

Abychom tuto větu dokázali, stačí dokázati, že v každém intervalu položeném na (a, b) jest bod, ve kterém funkce jest spojitá. Dokažme to na př. pro interval (c, d), kde $a \leqq c < d \leqq b$. V intervalu (c, d) jest položen jistě interval (c_1, d_1) takový, že $d_1 - c_1 < \frac{1}{2}(d - c)$, $c < c_1 < d_1 < d$ a že oscilace funkce $f(x)$ v (c_1, d_1) jest menší než $\frac{1}{2}$ — neboť jinak by část součtu z levé strany rovn. (9″), jež vztahuje se k (c, d), byla jistě větší než $\frac{1}{2} . (d - c)$, ať zvolíme si jakékoliv rozdělení intervalu (c, d) na intervaly menší, a nemohla by limita součtu z (9″) býti rovna nule, jak podmínka (9″) to požaduje. Stejně jest na (c_1, d_1) položen interval (c_2, d_2) takový, že $d_2 - c_2 < \frac{1}{2}(d_1 - c_1) < (d - c)/2^2$, že $c_1 < c_2 < d_2 < d_1$ a že oscilace f. $f(x)$ v (c_2, d_2) jest menší než $1/2^2$, atd. do nekonečna. Řady čísel $c, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$; $d, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, z nichž prvá jest stoupající, druhá klesající mají limitu a to touž, již označíme α. V bodě α pak, jak z definice bodu toho téměř bezprostředně vyplývá, jest funkce $f(x)$ spojitá; oscilace té funkce v (c_n, d_n) — a v nitru toho intervalu jest bod α — jest menší $1/2^n$ a tedy $f(x) - f(\alpha) \mid < 1/2^n$ pro všecka x, jež jsou menší než menší z čísel $\alpha - c_n$, $d_n - \alpha$. Důkaz věty vyslovené jest tedy podán.

89. *d) Jsou-li funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ v (a, b) integrace schopny, jest v (a, b) též integrace schopný jich součet.*

Čísla M_k, m_k; M'_k, m'_k; M''_k, m''_k nechť vztahují se pořadě na funkce $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. Pak jest očividně

$$M_k \leqq M'_k + M''_k, \qquad m_k \geqq m'_k + m''_k \tag{a}$$

a tedy

$$M_k - m_k \leqq (M'_k - m'_k) + (M''_k - m''_k),$$

odkudž*)

$$\Sigma (M_k - m_k) \Delta x_k \leqq \Sigma (M'_k - m'_k) \Delta x_k + \Sigma (M''_k - m''_k) \Delta x_k.$$

Jelikož pak limita sčítanců pravé strany této nerovniny, když Δx_k konvergují k nule, jest nula (podle předpokladu), jest limita levé strany rovněž nula; t. j. funkce $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jest integrace schopna.

Jelikož pro každou hodnotu μ_k, pro kterou $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, též podle nerovnin (a) jest

$$m'_k + m''_k \leqq \mu_k \leqq M'_k + M''_k,$$

jest také

$$\Sigma m'_k \Delta x_k + \Sigma m''_k \Delta x_k \leqq \Sigma \mu_k \Delta x_k \leqq \Sigma M'_k \Delta x_k + \Sigma M''_k \Delta x_k,$$

---

*) Znaménka součtová $\sum$ vztahují se v tomto odstavci vesměs k číslu k a mají i jinak týž význam jako v odst. 87. Rovněž limity jest bráti ve významu v odst. 87 stanoveném.

anebo přejdeme-li k limitám, jest na základě předpokladů (87, (11))

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx.$$

Věta právě dokázaná rozšiřuje se ihned na libovolný počet sčítanců a máme: Jsou-li funkce $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_r(x)$ integrace schopny v intervalu (a, b), jest i jich součet tam integrace schopný a jest

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_r(x)\,dx.$$

e) Jsou-li funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ v (a, b) integrace schopny, jest v (a, b) též integrace schopný jich součin.

Věta tato nejprve jest ihned patrna pro ten případ, že jedna z funkcí na př. $f_2(x)$ jest konstanta v (a, b); jest pak, je-li A v (a, b) nezávislo na x,

$$\int_a^b A\, f(x)\,dx = A \int_a^b f(x)\,dx.$$

Abychom ji dokázali v případě obecném, označíme horní resp. dolní hranici hodnot funkce $f_1(x) \cdot f_2(x)$ v Δx_k písmenem M_k resp. m_k; *značky* M'_k, M''_k, m'_k, m''_k nechť mají význam týž jako v důkaze věty předcházející. Předpokládejme pak *nejprve, že $f_1(x)$ a $f_2(x)$ nenabývají v (a, b) hodnot záporných.* Pak jest

$$M_k \leqq M'_k\, M''_k, \qquad m_k \geqq m'_k\, m''_k$$

a tedy

$$M_k - m_k \leqq M'_k\, M''_k - m'_k\, m''_k$$
$$\leqq M'_k\,(M''_k - m''_k) + m''_k\,(M'_k - m'_k),$$

odkudž, jsou-li M', M'' horní hranice funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ v (a, b),

$$M_k - m_k \leqq M'\,(M''_k - m''_k) + M''\,(M'_k - m'_k).$$

Následkem toho a předpokladu, že $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou integrace schopny, jest pro $\lim \Delta x_k = 0$

$$\lim \sum_k (M_k - m_k)\,\Delta x_k \leqq M' \lim \sum_k (M''_k - m''_k)\,\Delta x_k$$
$$+ M'' \lim \sum_k (M'_k - m'_k)\,\Delta x_k = 0,$$

t. j. funkce $f_1(x) \cdot f_2(x)$ jest v (a, b) integrace schopna.

Nabývají-li $f_1(x)$, $f_2(x)$ v (a, b) též hodnot záporných, stačí místo nich vzíti v úvahu funkce $B + f_1(x)$, $B + f_2(x)$, kde kladné číslo B tak jest voleno, aby funkce $B + f_1(x)$, $B + f_2(x)$ nenabývaly v (a, b) hodnot záporných. Pak jest podle toho, co právě bylo dokázáno, funkce $(B+f_1(x)) . (B+f_2(x))$ integrace schopna a tudíž podle *d*) i funkce

$$f_1(x)\,f_2(x) = (B+f_1(x))(B+f_2(x)) - B\,(f_1(x)+f_2(x)+B).$$

f) *Jestliže konečně $f(x)$ jest v (a, b) integrace schopna a horní i dolní hranice $f(x)$ v (a, b) jsou téhož znaménka (od nuly různy), jest i $\frac{1}{f(x)}$ integrace schopno.*

Neboť jsou-li M_k a m_k horní a dolní hranice pro $f(x)$ v interv. Δx_k jsou za daného předpokladu $\frac{1}{m_k}$ resp. $\frac{1}{M_k}$ horní resp. dolní hranice pro $\frac{1}{f(x)}$ v tom intervalu. I jest

$$\sum_k \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k}\right) \Delta x_k = \sum_k \frac{M_k - m_k}{M_k m_k} \Delta x_k \leqq \frac{1}{\mathfrak{m}^2} \Sigma (M_k - m_k) \Delta x_k,$$

kde $\mathfrak{m}$ jest dolní hranice $|f(x)|$ v (a, b). Z nerovniny právě napsané věta uvedená snadno vyplývá.

g) Podobně dokáže se i věta: *Jestliže $f(x)$ jest v (a, b) integrace schopna, jest i $|f(x)|$ v (a, b) integrace schopna.*

Jelikož pak

$$|\Sigma f(\xi_k)\,\Delta x_k| \leqq \Sigma\,|f(\xi_k)|\,\Delta x_k, \qquad k = 1, 2, \dots n,$$

jest

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Při tom jest jenom poznamenati, že neplatí opak. Je-li totiž $|f(x)|$ integrace schopna v intervalu (a, b), nemusí býti $f(x)$ v (a, b) integrace schopna. Na př. $f(x) = +1$, když x racionální číslo intervalu (a, b) a $f(x) = -1$, když x jest iracionální číslo toho intervalu, pak $|f(x)| = 1$ v (a, b) a jest $|f(x)|$ integrace schopna. Avšak pro $f(x)$ samotnu jest $\Sigma = 1$, $\sigma = -1$.

90. Délka množství číselného. Věty o funkcích integrace schopných (a četné jiné věty integrálního počtu a analysy) získají na jednoduchosti zavedením pojmu délky množství číselného. Tato definovati se může rozmanitým způsobem, jeden prostředek k tomu nám dává integrál Cauchy-Riemannův, který nás vede k definici délky pocházející od *Jordana.*

Budiž dáno množství číselné (množství čísel reálných), jež označíme E. Definujme si funkci $e(x)$ těmito podmínkami

$$e(x) = 1 \text{ v každém bodě množství E},$$
$$e(x) = 0 \text{ v každém bodě nepatřícím k E}.$$

Tím jest funkce $e(x)$ definována pro každé x. Stanovme pak dva integrály (integrál horní a integr. dolní, viz pozn. 3. odst. 87) z funkce $e(x)$ pro interval (a, b)

$$l_z = \int_a^{\bar{b}} e(x)\,dx, \qquad l_v = \int_{\underline{a}}^{b} e(x)\,dx; \qquad a < b.$$

První sluje **délka zevnější** množství číselného E v intervalu (a, b), druhý **délka vnitřní** množství číselného E v intervalu (a, b). Jsou-li obě tyto délky stejny $l_z = l_v$, pak jest $e(x)$ v (a, b) integrace schopna a integrál z této funkce v mezích a, b sluje prostě **délka množství E** v (a, b) *a množství nazývá se* **množstvím měřitelným** v (a, b) ve smyslu Jordanově aneb krátce **měřitelným** (J). Obě čísla l_v, l_z jsou vždy $\geqq 0$ (viz odst. 85, (2)).

Podle definice horního a dolního integrálu (jakožto limit výrazů součtových) můžeme také tvrditi: *Délka zevnější množství číselného* E *v intervalu* (a, b) *jest limita součtu těch délek intervalů* Δx_k, *jež obsahují aspoň jeden bod množství* E, *délka vnitřní pak jest limita součtu těch délek intervalů* Δx_k, *jež obsahují jenom body z množství* E (a žádné jiné). Obě ty limity počítány pro ten případ, že

$$\lim \Delta x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$
$$\text{a} \quad \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = b - a.$$

Limity ty existují vždy a jsou nezávisly od způsobu, jak rozdělujeme interval (a, b) na intervaly Δx_k.

Jestliže celé množství E jest obsaženo v (a, b), pak l_z sluje prostě délka zevnější množství číselného E (a netřeba přidávati ještě slova „v (a, b)") a obdobně v ostatních případech.

Jestliže $l_z = 0$ jest i l_v (pro které $l_v \leqq l_z$) rovno nule a množství E jest v (a, b) měřitelno a jest v (a, b) délky rovné nule. Množství tato mají pro nás zvláštní důležitost a budeme jim říkati krátce množství v (a, b) **délky nulové** (J). Na základě tohoto pojmu můžeme vysloviti větu (odst. 88c) ve tvaru, že *funkce* $f(x)$ *v* (a, b) *konečná a která jest spojitá ve všech bodech toho intervalu vyjma v bodech množství* E *délky nulové* (J), jest v (a, b) integrace schopna.

Na základě pojmu právě zavedeného a definice určitého integrálu podle *C.-R.* můžeme také vysloviti — jakožto téměř bezprostředně patrnou — tuto větu: *Změníme-li u funkce* $f(x)$ *v* (a, b) *podle C.-R. integrace schopné hodnoty funkční v bodech množství délky nulové* (J), *avšak tak, aby funkce ta v* (a, b) *byla i na-*

dále konečnou, pak funkce $f_1(x)$, ke které tou změnou dospějeme, jest rovněž v (a, b) integrace schopna a integrály z $f_1(x)$ a $f(x)$ jsou si rovny.

91. Druhý pojem, který jest užitečno zavésti jest pojem **oscilace funkce** $f(x)$ **v bodě** c. Oscilace funkce $f(x)$ v bodě c — značme ji $O(c)$ — jest definována vztahem

$$O(c) = \lim_{\varepsilon = 0} \text{ oscilace funkce } f(x) \text{ v interv. } (c-\varepsilon,\ c+\varepsilon). \tag{1}$$

Oscilace funkce $f(x)$ v bodě c jest vždy $\geqq 0$.

Jelikož oscilace v intervalu Δx_k jest větší ($\geqq$) než oscilace v každém bodě toho intervalu, jest

$$0 \leqq \sum_k O(\xi_k)\, \Delta x_k \leqq \sum_k O_k\, \Delta_k x, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

kde ξ_k, O_k mají význam týž jako v odst. 87. Je-li tedy funkce $f(x)$ v (a, b) integrace schopna, vyplývá, přejdeme-li k limitě (pro $\lim \Delta x_k = 0$), z této nerovniny a z podmínky (9″) odst. 87, že i

$$\overline{\int_a^b} O(x)\, dx = 0, \tag{3}$$

což jest nutná podmínka k tomu, aby $f(x)$ v (a, b) byla integrace schopna. Avšak podmínka tato jest také podmínkou postačující. Abychom to dokázali, dokážeme napřed jednu větu pomocnou.

92. Budiž $\mathfrak{O}_k$ horní hranice funkce $O(x)$ — definované v odst. předch. — v intervale $(x_{k-1}, x_k) \equiv \Delta x_k$; M_k, m_k opět horní a dolní hranice funkce $f(x)$ v tom intervalu. Pak lze tvrditi: *Ať jsou čísla kladná ε, δ jakákoliv (jakkoliv malá), vždy lze nalézti rozdělení intervalu (a, b) v intervaly částečné Δx_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že*

$$M_k - m_k < \mathfrak{O}_k + \varepsilon, \qquad \Delta x_k < \delta. \tag{4}$$

Nejprve si dokážeme, že jest možno nalézti rozdělení intervalu (a, b) — a tedy i každého intervalu na (a, b) — v intervaly částečné hovící toliko první podmínce (4). Je-li c libovolný bod v (a, b) a značí-li $M_{c,\eta}$, $m_{c,\eta}$ a $\mathfrak{O}_{c,\eta}$ horní hranici funkce $f(x)$, dolní hranici funkce $f(x)$ a horní hranici funkce $O(x)$ vesměs v intervalu $(c-\eta, c+\eta)$, pokud tento interval jest na (a, b), pak v důsledku definice funkce $O(x)$ rovnicí (1) lze nalézti ke každému kladnému číslu ε číslo kladné η (dosti malé), aby bylo

$$M_{c,\eta} - m_{c,\eta} < O(c) + \varepsilon \leqq \mathfrak{O}_{c,\eta} + \varepsilon.$$

Tedy každý bod intervalu (a, b), jako jest právě bod c, nachází se uvnitř jistého intervalu, pro který prvá podmínka (4) jest splněna. Můžeme tedy v důsledku věty Borelovy (viz odst. 189) překrýti interval (a, b) *konečným počtem* intervalů tvaru $(c-\eta, c+\eta)$ — při čemž některé z těchto intervalů vybočiti mohou a vskutku vybočí z (a, b) — takových, že každý bod z (a, b) jest vnitřním bodem aspoň jednoho z intervalů $(c-\eta, c+\eta)$; i můžeme tudíž interval $(a. b)$ na konečný počet intervalů rozděliti, pro něž splněna první z podmínek (4).*)

---

*) Intervenují-li v onom konečném počtu intervalů překrývajících (a, b) (avšak takových, že žádný nespadá cele na jiný z nich) čísla $c_1, c_2, \ldots, c_M$,

Rozdělíme-li nyní (a, b) na intervaly částečné tak, aby byla splněna druhá z podmínek (4) a potom každý částečný interval znovu na menší intervaly (je-li toho třeba) tak, aby byla splněna v těchto menších podmínka prvá z (4), bude interval (a, b) celý rozdělen těmito menšími intervaly, pro něž jsou splněny obě podmínky. Věta celá tak jest dokázána.

93. Předpokládáme-li, že jsme provedli dělení intervalu (a, b) hovící podmínkám (4), máme v důsledku (4) (píšeme-li rovnici prvou ze (4) pro $k = 1, 2, \ldots n$, rovnice tak vzniklé násobíme čísly $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ a sčítáme) a v důsledku samozřejmého vztahu $\mathfrak{O}_k \leqq M_k - m_k$ (obdobně)

$$\Sigma\, \mathfrak{O}_k\, \Delta x_k \leqq \Sigma\, M_k\, \Delta x_k - \Sigma\, m_k\, \Delta x_k < \Sigma\, \mathfrak{O}_k\, \Delta x_k + (b-a)\,\varepsilon$$

aneb, přejdeme-li k limitě pro $\lim \delta = 0$,

$$\int_a^b O(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} O(x)\,dx + (b-a)\,\varepsilon.$$

Jelikož však ε můžeme si zvoliti libovolně malé, jest

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} O(x)\,dx. \tag{5}$$

Z rovnice této následuje ihned, že (3) nám dává **nutnou a postačující podmínku** *k tomu, aby $f(x)$ byla v (a, b) podle C.—R. integrace schopna.*

Jelikož $O(x) \geqq 0$, pak současně s (3) jest nutně též splněno.

$$\underline{\int_a^b} O(x)\,dx = 0.$$

t. j. v případě, že $f(x)$ jest integrace schopno v (a, b) podle *C.—R.*, jest v témž intervalu i $O(x)$ integrace schopno a integrál z $O(x)$ jest rovný nule.

Jako nutnou a postačující podmínku proto, aby funkce $f(x)$ byla v (a, b) integrace schopna, můžeme pak vysloviti tuto: *Množství bodové E_ε, jež obsahuje všecky body v (a, b), v nichž $O(x) > \varepsilon$, jest délky nulové (J),* ať jest ε jakékoliv číslo kladné. Neboť kdyby délka zevnější toho množství byla na př. $l > 0$, byl by každý horní součet S patřící k $O(x)$ a intervalu (a, b) větší než $l\varepsilon$ a integrál z $O(x)$ nebyl by roven nule.

Rovněž jest patrna tato vlastnost funkcí v (a, b) podle *C.— R.* integrace schopných: $O(x) = 0$ *v množství bodovém na (a, b) všude hustém* (viz poznámku k odst. 88, z níž následuje důsledek obsazený v poznámce 3 odst. 97).

94. Rozšíření pojmu určitého integrálu (podle *C.-R.*). Pojem určitého integrálu, jak jej zavádí definice *C.-R.*, lze bez dalších úvah rozšířiti i pro funkce, jež nejsou definovány v každém bodu intervalu (a, b), nýbrž jenom v bodech množství čísel-

jakožto jich středy, při čemž $c_i < c_{i+1}$, pak konečný počet intervalů, v něž rozděliti lze (a, b) tak, aby byla splněna první podmínka z (4), jest dán intervaly $(a, c'_1), (c'_1, c'_2), (c'_2, c'_3), \ldots, (c_M, b)$ Při tom jest ku př. c'_2 bod mezi c_2 a c_3, který jest zároveň v příslušném intervalu o středu c_2 a v intervalu o středu c_3 a jest předpokládáno, že $a < b$.

ného E na (a, b) všude hustého. I pro tyto funkce mají význam součty horní a dolní (S, s) jakož i všecky věty, jež jsme pro ně odvodili. Tudíž také i čísla Σ, σ a lze zavésti stejné pojmy (integrálu horního, dolního, resp. integrálu určitého v mezích a, b) stejným způsobem také pro tyto funkce.

Ovšem vztahy — jako na př. (12) odst. 87 — ve kterých se nevyskytují čísla M_k, m_k resp. μ_k, nýbrž hodnoty funkce $f(x)$ pro určitý bod intervalu Δx_k, nemají všeobecný význam. Avšak vhodným doplněním významu příslušných veličin (resp. definic) bylo by možno i v těchto případech zachovati platnost těch vztahů. Na př. v uvedené relaci (odst. 87, (12)) by postačilo požadovati, aby ξ_k v ní se vyskytující bylo bodem (libovolným) množství E nacházejícím se na Δx_k.

Obdobně by bylo lze rozšířiti i úvahy podané v odst. 91—93.

POZNÁMKA. Čtenář snadno dokáže větu: *Jsou-li dvě funkce $f(x)$, $g(x)$ obě v mezích a, b integrace schopné podle C.—R. takové, že $f(x) = g(x)$ v bodech množství bodového v (a, b) všude hustého, pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

(Důsledek rovnice (12) odst. 87). Touto větou nabývá rozšíření pojmu integrálního tu zavedené jistého odůvodnění.

3. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI INTEGRÁLU URČITÉHO.

95. Při definici integrálu z funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) jsme předpokládali $a < b$. Jestliže jest $a > b$, položíme, definujíce

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{I}$$

za předpokladu ovšem, že pravá strana má význam (že $f(x)$ jest v (b, a) integrace schopna). *Obdobně rozšiřujeme, za předpokladu $a > b$, platnost integrálu horního i dolního* (87. pozn. 2). Rovněž v platnosti zůstávají různá tvrzení o integrálu, zvláště pak lze i v případu $a > b$ klásti, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k = 0} \Sigma f(\xi_k)\,\Delta x_k; \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

kde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $a > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1}\, b$; $x_{k-1} \geqq \xi_k \geqq x_k$.

Δx_k jsou ovšem čísla záporná.

96. Abychom další vlastnost integrálu z funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) odvodili (předpokládajíce, že $f(x)$ jest tam integrace schopno), rozdělme interval (a, b) nejprve na dva pevným číslem c; interval (a, c) dělme hodnotami $y_1, y_2, \dots y_{p-1}$, interval (c, b) pak hodnotami $z_1, z_2, \dots z_{q-1}$ na intervaly menší. I jest pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta y_i = 0} \Sigma f(\eta_i)\,\Delta y_i + \lim_{\Delta z_j = 0} \Sigma f(\zeta_j)\,\Delta z_j,$$

$$i = 1, 2, \dots p; \qquad j = 1, 2, \dots q.$$

čísla $\eta_i, \zeta_j, y_0, y_p = z_0 = c, z_q$ mají jasný význam (87, (12)). Avšak limity součtů na pravé straně jsou rovněž integrály z $f(x)$ v intervalech (a, c), (c, b) a máme tudíž

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{II}$$

Tato věta však platí, i když c není mezi a a b. Buď na př. $a < b < c$. Pak jest podle (II)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

tudíž

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

aneb použijeme-li (I)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

což se shoduje s (II). Mohou tedy čísla (a, b, c) ve (II) míti jakoukoli vzájemnou polohu (jenom jest třeba, aby integrály tam se vyskytující měly vskutku význam.)

POZNÁMKA 1. Při důkaze rovnice (II) jsme mlčky předpokládali, že je-li $f(x)$ v (a, b) integrace schopno, jest také v části toho intervalu integrace schopno. Důkaz toho jest zcela snadný.

POZNÁMKA 2. Úplně stejné vztahy jako vztah (II) pro integrál určitý jsou platny i pro integrály horní a dolní.

97. Věta o střední hodnotě. Jelikož součty S i s, které tvořily podklad pro definici integrálu, jsou stále obsaženy, jestliže $a < b$, mezi $M(b-a)$ a $m(b-a)$ (viz odst. 85), jest též i číslo Σ resp. σ mezi těmito dvěma čísly obsaženo. Jestliže tedy jest $f(x)$ funkce v (a, b) integrace schopna a M. resp. m jsou její horní resp. dolní hranice v tom intervalu, jest

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a), \qquad a < b; \tag{1}$$

anebo také

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \qquad m \leqq \mu \leqq M, \qquad a \lesseqgtr b. \tag{2}$$

Jestliže $f(x)$ jest v (a, b) spojitá funkce od konstanty různá, můžeme v (1) a v druhé části (2) potlačiti znaménka rovnosti; neboť pak v součtu

$$S = \Sigma M_k \varDelta x_k,$$

zvolíme-li $\varDelta x_k$ dosti malé, jsou jistě sčítanci, ve kterých M_k jest menší než M a jest tudíž ten součet menší než $M(b-a)$ a nemůže $M(b-a)$ býti dolní hranicí součtů S. Totéž platí, když $f(x)$ jest aspoň v části intervalu spojitá od konstanty různá a obecně, když jsou v (a, b) obsaženy intervaly, ve kterých se horní resp. dolní hranice funkce $f(x)$ liší od M resp. m.

Jestliže $f(x)$ jest v celém intervalu spojitá, pak μ rovnice (2) jest jednou z hodnot funkce $f(x)$, pro x rovné jisté hodnotě ξ položené *uvnitř* intervalu (a, b). (DP., 80.) Lze tedy psáti

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi), \qquad b \neq a. \tag{2'}$$

Rovnice (1), (2), (2') jsou různé tvary věty t. zv. *o střední hodnotě.* Větu tuto lze poněkud zevšeobecniti. Budiž $\varphi(x)$ funkce, která v (a, b) nenabývá hodnot záporných; M a m horní resp. dolní hranice $f(x)$ v (a, b). Pak součin $(M - f(x)) \cdot \varphi(x)$ jest stále kladný anebo rovný nule, dolní hranice toho součinu v (a, b) jest nula i lze psáti podle (1) při $a < b$

$$\int_a^b (M - f(x))\,\varphi(x)\,dx \geqq 0, \qquad a < b.$$

Odtud (podle odst. 89)

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq M \int_a^b \varphi(x)\,dx; \qquad a < b;$$

podobně se dokáže, že

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqq m \int_a^b \varphi(x)\,dx; \qquad a < b.$$

Obě rovnice lze spojiti v jedinou a lze vysloviti tuto větu:

Jestliže $f(x)$, $\varphi(x)$ jsou funkce v (a, b) integrace schopné a $\varphi(x)$ nenabývá v (a, b) hodnot záporných, jest

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad a \neq b, \qquad \text{(III)}$$

kde μ jest určitá hodnota obsažená mezi horní a dolní hranicí $f(x)$ v (a, b): t. j. $m \leqq \mu \leqq M$. *Týž vztah* (III) *jest platný i v případě, když $\varphi(x)$ v (a, b) nenabývá hodnot kladných.*

Tato věta zpravidla se nazývá **první větou o střední hodnotě** (počtu integrálního). Jestliže součiny

$$(M - f(x))\,\varphi(x), \quad (f(x) - m)\,\varphi(x)$$

aspoň v částech intervalu (a, b) mají za dolní hranici číslo větší než nulu, můžeme psáti o μ, že $m < \mu < M$.

Je-li $f(x)$ funkce spojitá v (a, b), pak lze rovnici (III) psáti ve tvaru

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx; \qquad a \gtrless b,$$

kde ξ jest vhodná hodnota položená uvnitř intervalu (a, b).

POZNÁMKA 1. Pro absolutní hodnotu omezeného integrálu platí podle rovnic hořejších, označíme-li horní hranici absolut. hodnot $f(x)$ v (a, b) $\mathfrak{M}$,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqq \mathfrak{M}\,|b - a|, \qquad a \gtrless b; \qquad (3)$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \right| \leqq \mathfrak{M} \left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right|, \qquad b \gtrless a; \qquad (4)$$

$\varphi(x)$ nemění v (a, b) svého znaménka.

POZNÁMKA 2. Zvláště pak vytknouti jest tento důsledek věty o střední hodnotě: Jestliže $f(x)$ má za dolní hranici v (a, b) číslo buď kladné anebo nulu a v části intervalu (a, b) za dolní hranici číslo kladné, jest

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0, \qquad \text{při} \quad a < b.$$

Odkudž plyne důsledek ještě speciálnější. *Jestliže*

$$\int_a^b (F(x))^2\,dx = 0, \qquad \text{při} \quad a \gtrless b,$$

jest $F(x)$ v těch bodech intervalu (a, b), ve kterých jest funkcí spojitou, stále rovno nule.

POZNÁMKA 3. Obecněji lze tvrditi: *Jsou-li pro funkci $f(x)$ v (a, b) podle C.—R. integrace schopné splněny obě podmínky:*

$$f(x) \geqq 0 \qquad \text{pro všecka } x \text{ v } (a, b).$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

pak body, ve kterých $f(x) = 0$, tvoří v (a, b) množství v (a, b) všude husté. Neboť podle poznámky k odst. 88 tvoří body, ve kterých $f(x)$ jest v (a, b) spojitou množství v (a, b) všude husté: avšak v důsledku obou podmínek a věty o střední hodnotě jest $f(x)$ v bodech, ve kterých jest spojitou, rovna nule. Tím věta dokázána.

POZNÁMKA 4. Věty o střední hodnotě (2) a (III) zůstanou v platnosti, i když $a = b$, *stanovíme-li, že*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

a vyrozumíváme-li pro μ hodnotu $f(x)$ pro $x = a$. Toto nové stanovení jest také ve shodě s (I) odst. 95.

98. Mějmež $f(x)$, jež jest v intervalu (a_0, b_0) integrace schopna. Buďtež a, b dvě hodnoty toho intervalu $a_0 \leqq a \leqq b_0$, $a_0 \leqq b \leqq b_0$. Pak můžeme tvrditi: **Integrál**

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

jest spojitou funkcí své horní meze a jest spojitou funkcí své dolní meze.

Označme ten integrál, abychom vytkli závislost jeho na horní mezi, $\Phi(b)$ a budiž $b + \Delta b$ některá hodnota intervalu (a_0, b_0). Pak jest

$$\Phi(b + \Delta b) - \Phi(b) = \int_a^{b+\Delta b} f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx$$

anebo podle (96, (II))

$$\Phi(b + \Delta b) - \Phi(b) = \int_b^{b+\Delta b} f(x)\, dx. \tag{α}$$

Označíme-li horní hranici absolutní hodnoty $f(x)$ v (a_0, b_0) písmenem $\mathfrak{M}$, jest podle (3)

$$|\Phi(b + \Delta b) - \Phi(b)| < |\Delta b|\, \mathfrak{M}$$

a zvolíme-li si $|\Delta b| < \dfrac{\varepsilon}{\mathfrak{M}}$,

$$|\Phi(b + \Delta b) - \Phi(b)| < \varepsilon;$$

tedy $\Phi(b)$ vskutku funkcí spojitou čísla b, když b jest v (a_0, b_0).

Podobně se dokáže tvrzení věty o dolní mezi.

99. Ponecháme označení odstavce předcházejícího jakož i předpoklad, že $f(x)$ jest v (a_0, b_0) integrace schopna a dokážeme si větu: **Jestliže $f(x)$ jest v bodě $x = b'$ funkcí spojitou, jest integrál**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

funkcí horní meze b, mající v bodě $b = b'$ derivaci. Derivace ta se rovná $f(b')$. Při tom jest b' uvnitř (a_0, b_0).

Neboť užijeme-li na pravou stranu rovnice

$$\Phi(b' + \Delta b') - \Phi(b') = \int_{b'}^{b'+\Delta b'} f(x)\,dx \qquad \text{(viz rovn. } (\alpha) \text{ předch. odst.)}$$

věty o střední hodnotě (2), máme (b' i $b' + \Delta b'$ jsou v intervalu (a_0, b_0))

$$\Phi(b' + \Delta b') - \Phi(b') = \Delta b' \cdot \mu,$$

kde μ jest číslo obsažené mezi horní a dolní hranicí $f(x)$ v intervalu $(b', b' + \Delta b')$.

Jest dále
$$\frac{\Phi(b' + \Delta b') - \Phi(b')}{\Delta b'} = \mu.$$

Necháme-li $\Delta b'$ konvergovati k nule, konvergují následkem předpokladu, že $f(x)$ jest v b' funkcí spojitou, horní i dolní hranice $f(x)$ v intervalu $(b', b' + \Delta b')$ k $f(b')$ a tudíž i μ konverguje k $f(b')$ a jest tudíž

$$\lim_{\Delta b' = 0} \frac{\Phi(b' + \Delta b') - \Phi(b')}{\Delta b'} = f(b').$$

Tím jest věta dokázána.

Obdobně plyne věta: *Jestliže $f(x)$ jest v bodě $x = a'$ funkcí spojitou, jest integrál (5) funkcí dolní meze a mající v bodě $a = a'$ derivaci. Derivace ta jest $-f(a')$.*

Jestliže $f(x)$ jest v celém intervalu (a_0, b_0) funkcí spojitou, jest integrál (5) funkcí horní meze b mající stále (při $a_0 < b < b_0$) derivaci, jež jest $f(b)$. *Rovněž, pokládáme-li (5) za funkci dolní meze a, má (5) derivaci podle a, jež jest $-f(a)$.*

V bodě $b = b'$, ve kterém jest $f(x)$ spojitou pouze zprava (resp. zleva) má integrál (5) rovněž derivaci podle b pouze zprava (resp. zleva) rovnou $f(b')$. Obdobně jest doplniti i větu poslední vzhledem k bodům a_0, b_0.

100. Jelikož funkce spojitá v jistém intervalu jest v tom intervalu také integrace schopna, vidíme z věty výsledné předch. odstavce, že k dané funkci v intervalu (a_0, b_0) spojité, vždy existuje funkce, jejíž derivace se v (a_0, b_0) rovná dané funkci.

Funkci, jejíž derivace v intervalu (a_0, b_0) jest stále rovna dané funkci $f(x)$, jest *primitivní funkce* k $f(x)$ v intervalu (a_0, b_0). Primitivní funkce k $f(x)$ jest totožná, nehledíme-li k integrační konstantě, s integrálem (neurčitým) k funkci $f(x)$ podle první definice integrálu (odst. 1.). Větou právě dokázanou dospíváme tudíž k důkazu těchto vět:

1. *K funkci $f(x)$ spojité v intervalu (a_0, b_0) existuje vždy primitivní funkce.*

2. *Integrál určitý v mezích a, b z funkce $f(x)$ spojité v (a, b) daný definicí Cauchy-Riemannovou shoduje se s integrálem určitým, získaným pomocí primitivních funkcí.*

Můžeme také dokázati větu: *Jestliže k $f(x)$ existuje v (a_0, b_0) funkce primitivní $F(x)$ a $f(x)$ jest integrace schopno (podle definice Cauchy-Riemannovy), jest pro integrál z fx podle C.—R. platný vztah*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{IV}$$

V této větě ovšem $f(x)$ nemusí býti funkcí spojitou.

Neboť podle definice *C.—R.* jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k = 0} \Sigma_k f(\xi_k)\,\Delta x_k; \tag{6}$$

při tom může býti ξ_k libovolná hodnota mezi x_{k-1}, x_k položená. Zvolíme si tu, ke které nás vede rovnice (věta o střední hodnotě diferenciálního počtu)

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Dosadíme-li tento výraz do (6), máme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k = 0} [F(x_1) - F(a) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(b) - F(x_{n-1})]$$
$$= F(b) - F(a).$$

Viz příklad 1. odst. 87.

Je-li $f(x)$ integrace schopna v (a, b), jest tam zároveň schopna integrace i $f_1(x)$, která se liší od $f(x)$ toliko v bodech množství bodového v (a, b) délky nulové, a integrály z obou těch funkcí $f(x)$, $f_1(x)$ v mezích a, b jsou si rovny. Z toho následuje, že (IV) *zůstává v platnosti i tenkráte, když derivace funkce $F(x)$ existující ve všech bodech intervalu (a, b) liší se od $f(x)$ v bodech tvořících v (a, b) množství bodové délky nulové.*

Ostatně z poznámky odst. 63 následuje ihned věta ještě obecnější: Má-li funkce $F(x)$ spojitá v celém intervalu (a, b) ve všech bodech intervalu (a, b) derivaci, vyjma v bodech jistého množství reducibilního (kde derivace nemá) a je-li tato derivace rovna funkci $f(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b) s výjimkou bodů množství bodového míry nulové (a ovšem onoho dříve uvedeného množství reducibilního), kterážto funkce $f(x)$ nechť jest v (a, b) konečná a podle definice $C.-R.$ integrace schopná, pak jest platna rovnice (IV).

101. *POZNÁMKA.* Jestliže *spojitá funkce* $F(x)$ má v (a, b) za derivaci funkci $f(x)$ v (a, b) konečnou a integrace schopnou, vyjma v konečném počtu bodů $c_1, c_2, \ldots c_s$, ve kterýchž $F(x)$ derivaci nemá, můžeme psáti, užívajíce vět dokázaných na intervaly (a, c_1), $(c_1, c_2), \ldots (c_s, b)$, v nichž jest $F(x)$ funkcí primitivní k $f(x)$ pro všecky body vyjma krajní.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_s}^{b} f(x)\,dx = \tag{7}$$

$$= F(c_1) - F(a) + F(c_2) - F(c_1) + \cdots + F(b) - F(c_s) = F(b) - F(a).$$

t. j. vztah (IV) zůstává v platnosti (jakož nám ostatně již známo pro případ značně obecnější, viz předch. odst.).

Není-li však $F(x)$ spojitou funkcí, tu může míti diskontinuity jenom v bodech, kde nemá derivace, t. j. v bodech, $c_1, c_2, \ldots c_s$. Jednotlivé integrály

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx \tag{8}$$

můžeme i tu vypočítati pomocí $F(x)$. *Uvnitř* intervalu (c_{i-1}, c_i) jest totiž stále (podle předp.) $F'(x) = f(x)$. I můžeme psáti (při $a < b$, $c_{i-1} < c_i$)

$$\int_{c_{i-1}+\varepsilon}^{c_i-\varepsilon'} f(x)\,dx = F(c_i - \varepsilon') - F(c_{i-1} + \varepsilon). \tag{9}$$

Tato rovnice jest splněna pro každé kladné ε resp. ε', pro něž $c_i - c_{i-1} - \varepsilon - \varepsilon'$ jest kladné. Necháme-li na levé straně ε a pak ε' konvergovati k nule, obdržíme (8) (neboť integrál určitý podle definice Cauchy-Riemannovy jest funkce spojitá horní resp. dolní meze). Na pravé straně, *která současně s levou jí rovnou má limitu*, pak užijeme obvyklého označení při $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon'=0} F(c_i - \varepsilon') = F(c_i - 0), \quad \lim_{\varepsilon=0} F(c_{i-1} + \varepsilon) = F(c_{i-1} + 0). \tag{10}$$

Tak dostáváme z (9) při $\lim \varepsilon = 0$, $\lim \varepsilon' = 0$

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx = F(c_i - 0) - F(c_{i-1} + 0).$$

Dosadíme-li tento výsledek do (7), máme po jednoduché úpravě

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + \sum_{i=1}^{s} (F(c_i - 0) - F(c_i + 0)), \tag{11}$$

kterýž jest jisté rozšíření rovnice (IV). Tak jest dokázána věta: *Má-li funkce $F(x)$ v intervalu (a, b) za derivaci funkci $f(x)$ v (a, b) konečnou a integrace schopnou, vyjma v konečném počtu bodů $c_1, c_2, \ldots c_s$, kde nemá $F(x)$ derivaci a jest po případě i nespojita, pak existují limity* (10) *a integrál z $f(x)$ v (a, b) jest za předpokladu $a < b$ vyjádřen rovnicí* (11).

PŘÍKLAD. Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

v intervalu $(-1, 1)$. Funkce definovaná rovnicemi

$$F(x) = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \gtrless 0, \quad F(0) = 0$$

má za derivaci $f(x)$ vyjma v bodě 0, ve kterém $F(x)$ nemá derivace ani zleva ani zprava. Abychom mohli použíti formule (11), jest třeba znáti $F(+0)$ (jakž stručně píšeme místo $F(0+0)$) a $F(-0)$. Jest pak

$$F(+0) = -\lim \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{\pi}{2}, \quad F(-0) = \frac{\pi}{2}$$

a tudíž

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = -\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg}(-1) + \pi = \frac{\pi}{2},$$

k čemuž bychom ovšem snadněji přímo mohli dospěti.

102. Integrace částečná (per partes). Jsou-li u, v funkce x, u', v' pak jich derivace, pak z rovnice

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{1}$$

následuje se zřetelem k (IV) a k odst. 89 stejně jako dříve (odst. 65) i nyní na základě nové definice: *Jsou-li funkce $u'v$, uv' integrace schopny podle C.—R. v intervalu (a, b) jest*

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx. \tag{2}$$

Tento vztah zůstává v platnosti i tenkráte, když (1) jí pozbývá v bodech jistého množství bodového délky nulové, ve kterýchž bodech uv nemá derivaci, je-li jenom $u.v$ funkcí spojitou v intervalu (a, b). Není-li však $u.v$ spojitou funkcí v (a, b) majíc v konečném počtu bodů $c_1, c_2, \ldots c_s$ v intervalu (a, b) diskontinuity, jest místo (2) podle odst. 101, (11) v označení snadno srozumitelném psáti při $a < b$

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b + \sum_{i=1}^{s} [u\,.\,v]_{c_i+0}^{c_i-0} - \int_a^b uv'\,dx. \tag{2'}$$

Jest užitečno odvoditi si postupným použitím (2) formuli poněkud obecnější. Má-li funkce $f(x)$, $g(x)$ v (a, b) všecky derivace až do n-té včetně, dostáváme opětným použitím vzorce (2) snadno

$$\int_a^b f(x)\,g^{(n)}(x)\,dx = [f(x)\,g^{(n-1)}(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g^{(n-1)}(x)\,dx$$

$$= [f(x)\,g^{(n-1)}(x)]_a^b - [f'(x)\,g^{(n-2)}(x)]_a^b + \int_a^b f''(x)\,g^{(n-2)}(x)\,dx = \ldots.$$

takže po n-tém kroku dospějeme ku výsledku

$$\int_a^b f(x)\,g^{(n)}(x)\,dx = [f(x)\,g^{(n-1)}(x) - f'(x)\,g^{(n-2)}(x) + f''(x)\,g^{(n-3)}(x) - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x)\,g(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\,g(x)\,dx. \tag{3}$$

kteráž formule má četná použití.

103. Rozšíření věty o integraci částečné. Rovnici pro integraci per partes můžeme dáti na základě Riemannovy definice omezeného integrálu jisté rozšíření.

Jest totiž nasnadě, jsou-li $f(x)$, $g(x)$ funkce integrace schopné v intervalu (a, b) a jestliže

$$F(x) = \int_\alpha^x f(\xi)\,d\xi, \qquad G(x) = \int_\beta^x g(\xi)\,d\xi,$$

při čemž o číslech α, β, x vesměs předpokládáme, že jsou v intervalu (a, b), vyšetřovati platnost formule

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = [F(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx. \tag{4}$$

Formule tato, jsou-li $f(x)$, $g(x)$ funkce spojité, redukuje se v podstatě na rovnici (2), neboť pak $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Abychom vyšetřili, zda jest platna i za předpokladu obecnějšího, že $f(x)$,

$g(x)$ jsou v (a, b) toliko podle $C.-R.$ integrace schopny, položme

$$\Phi(b) = \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, G(x) - [F(x)\, G(x)]_a^b$$

a vyšetřujme výraz $\Phi(b'+\varDelta b') - \Phi(b')$, kde $b'+\varDelta b'$, b' jsou v (a, b). Jest

$$\Phi(b'+\varDelta b') - \Phi(b') = \int_{b'}^{b'+\varDelta b'} F(x)\, g(x)\, dx + \int_{b'}^{b'+\varDelta b'} f(x)\, G(x)\, dx - [F(x)\, G(x)]_{b'}^{b'+\varDelta b'}.$$

Avšak

$$[F(x)\, G(x)]_{b'}^{b'+\varDelta b'} = F(b'+\varDelta b')\,(G(b'+\varDelta b') - G(b')) + G(b')\,(F(b'+\varDelta b') - F(b'))$$

$$= F(b'+\varDelta b') \int_{b'}^{b'+\varDelta b'} g(x)\, dx + G(b') \int_{b'}^{b'+\varDelta b'} f(x)\, dx$$

a tedy

$$\begin{aligned}\Phi(b'+\varDelta b') - \Phi(b') &= \int_{b'}^{b'+\varDelta b'} (F(x) - F(b'+\varDelta b'))\, g(x)\, dx + \\ &+ \int_{b'}^{b'+\varDelta b'} (G(x) - G(b'))\, f(x)\, dx.\end{aligned} \tag{5}$$

Dělíme-li $\varDelta b'$, má pravá strana limitu rovnou 0, když $\lim \varDelta b' = 0$; neboť na př. podle věty o střední hodnotě

$$\int_{b'}^{b'+\varDelta b'} (G(x) - G(b'))\, f(x)\, dx = \varDelta b' \,.\, \varepsilon_2,$$

kde ε_2 jest číslo mezi horní a dolní hranicí funkce $(G(x) - G(b'))\, f(x)$ v intervalu $(b', b'+\varDelta b')$, tedy číslo konvergující k nule, když $\varDelta b'$ konverguje k nule. Jest totiž $G(x)$ funkce spojitá (odst. 98). Podobné tvrzení lze dokázati i o prvním sčítanci pravé strany rovnice (5).

Tak máme

$$\lim_{\varDelta b' = 0} \frac{\Phi(b'+\varDelta b') - \Phi(b')}{\varDelta b'} = 0, \text{ či jinak } \Phi'(b') = 0;$$

t. j. derivace funkce $\Phi(b')$ podle b' existuje pro všecka b' intervalu (a, b) a jest rovna nule. Jest tedy $\Phi(b')$ rovno, ať má b' jakoukoli hodnotu v (a, b), jedné a téže konstantě. Pro $b' = a$ jest $\Phi(a) = 0$, tudíž vůbec $\Phi(b') = 0$ a *formule* (4) *dokázána za předpokladu, že $f(x)$, $g(x)$ jsou funkce integrace schopné v* (a, b).

104. Druhá věta o střední hodnotě počtu integrálního. Užijeme rovnice (4) pro případ, že $g(x) = \psi_1(x)$, kde $\psi_1(x)$ jest funkce nenabývající v (a, b) hodnot kladných. Položíme-li pak

$$\psi(x) = \int_\beta^x \psi_1(x)\, dx,$$

jest $\psi(x)$ funkce s rostoucím x stále klesající anebo alespoň nerostoucí. Nadto klademe ještě ve (4) $\alpha = a$. Tak dostaneme

$$\int_a^b F(x)\,\psi_1(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = [F(x)\,\psi(x)]_a^b. \qquad (6)$$

Avšak podle věty o střední hodnotě (97. (III)) jest

$$\int_a^b F(x)\,\psi_1(x)\,dx = F(\xi)\int_a^b \psi_1(x)\,dx = [\psi(b) - \psi(a)]\,F(\xi) = [\psi(b) - \psi(a)]\int_a^\xi f(x)\,dx;$$

ξ jest v intervalu (a, b).

Dosadíme-li ještě na pravé straně (6) za

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

máme po snadné úpravě

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_a^b f(x)\,dx - [\psi(b) - \psi(a)]\int_a^\xi f(x)\,dx$$

anebo jinak

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \psi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

Tato věta sluje druhá věta o střední hodnotě a předpokládáno k jejímu důkazu, že $f(x)$ jest v (a, b) integrace schopno, že $\psi(x)$ jest funkce nerostoucí a konečně že $\psi(x)$ jest integrálem z jisté funkce. Tento poslední předpoklad jest však nepodstatný a my podáme jiný důkaz rovnice(7), při němž tento předpoklad jest vymýtěn.

105. Použijeme k tomu cíli v následujícím jedné **věty Abelovy**, jež jest užitečna i při jiných příležitostech.

Věta ta jest: *Budiž řada n čísel, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ řadou čísel kladných ($\geqq 0$) klesajících anebo alespoň nestoupajících a u_1, $u_2 \ldots, u_n$ libovolných čísel. Jsou-li všecky součty*

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad s_4 = \ldots,$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

obsaženy mezi dvěma čísly A a B ($A < B$), jest součet

$$V = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \cdots + \varepsilon_n u_n$$

obsažen mezi $A\varepsilon_1$ a $B\varepsilon_1$.

Můžeme totiž do V dosaditi

$$u_1 = s_1, \; u_2 = s_2 - s_1, \; u_3 = s_3 - s_2, \ldots, u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Tím dostaneme

$$V = \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \varepsilon_3 (s_3 - s_2) + \cdots + \varepsilon_n (s_n - s_{n-1})$$
$$= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) s_{n-1} + \varepsilon_n s_n.$$

Jelikož však čísla $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, ε_n podle předpokladu vesměs jsou kladná ($\geqq 0$) a $s_k < B$, jest

$$V < (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) B + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) B + \varepsilon_n B = \varepsilon_1 B$$

a podobně $V > \varepsilon_1 A$, čímž věta dokázána.

106. Buďtež nyní dány dvě funkce $f(x)$, $\psi(x)$ integrace schopné v intervalu (a, b), z nichž druhá jest v něm funkcí stále klesající anebo aspoň nestoupající. Předpokládejme pak prozatím, že $\psi(x)$ jest v (a, b) stále kladnou ($\geqq 0$) a $a < b$; (jest tudíž $\psi(b) \geqq 0$).

Platí pak vztah

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \mu_k \psi(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx \tag{8}$$

pro ten případ, že n roste nade všecky meze a zároveň

$$\lim (x_k - x_{k-1}) = 0; \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Při tom jest μ_k libovolné číslo mezi čísly M_k, m_k, t. j. mezi horní, resp. dolní hranicí funkce $f(x)$ v (x_{k-1}, x_k). Tento vztah plyne ihned z nerovnin (buďiž $x_{k-1} < x_k$)

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k \psi(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\psi(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{1}^{n} |\mu_k - f(x_{k-1})|\, \psi(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leqq \psi(a) \sum_{1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Zvolíme si μ_k tak, aby

$$\mu_k (x_k - x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx,$$

což jest přípustná volba podle věty o střední hodnotě, odst. 97. I jest pak podle (8)

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \lim \Sigma\, \psi(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Užijeme nyní na pravou stranu poslední rovnice pomocnou větu Abelovu nahoře dokázanou Čísla $\psi(x_k)$ jsou čísla kladná, stále klesající (anebo alespoň nestoupající); klademe $\varepsilon_k = \psi(x_{k-1})$ a dále

$$u_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

pak jest

$$s_k = \int_a^{x_k} f(x)\,dx$$

a tato čísla jsou jistě obsažena mezi největší hodnotou B a nejmenší hodnotou A integrálu $\int_a^x f(x)\,dx$, když x probíhá interval (a, b). I jest tedy

$$A\,\psi(a) \leqq \sum_{k=1}^{n} \psi\,(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \leqq B\,\psi(a)$$

anebo, přejdeme-li k limitě ($\lim n = \infty$, $\lim \Delta x_k = 0$),

$$A\,\psi(a) \leqq \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx \leqq B\,\psi(a).$$

Jelikož však jest integrál $\int_a^x f(x)\,dx$ spojitou funkcí horní meze, můžeme též psáti

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx, \tag{10}$$

kde $a \leqq \xi \leqq b$. Vývody zůstávají v platnosti i když $\psi(x) \geqq 0$.

Jestliže $\psi(x)$ jest sice funkcí v (a, b) nerostoucí, ne však stále kladnou, užijeme vztahu (10) na $\psi(x) - \psi(b)$, jež jest funkcí v (a, b) nenabývající hodnot záporných a nerostoucí, i dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,(\psi(x) - \psi(b))\,dx = (\psi(a) - \psi(b))\int_a^\xi f(x)\,dx;$$

anebo po jednoduché úpravě

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \psi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx, \qquad a \leqq \xi \leqq b. \tag{11}$$

Stejnou formuli bylo by lze psáti v tom případě, kdyby funkce $\psi(x)$ v intervalu (a, b) *stále rostla, (anebo alespoň neklesala)*.

POZNÁMKA. Hodnota integrálu se nemění, změníme-li hodnotu funkce, jež se integruje, v konečném počtu isolovaných bodů. Tak v předcházející větě můžeme funkci $\psi(x)$ v bodě a resp. v bodě b přisouditi hodnoty libovolné $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$, jenom když zachován bude základní předpoklad, že $\psi(x)$ jest funkce nerostoucí (resp. neklesající). Můžeme následkem toho větě (11) dáti též tento tvar

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \mathfrak{A}\int_a^\xi f(x)\,dx + \mathfrak{B}\int_\xi^b f(x)\,dx, \qquad \text{kde } a \leqq \xi \leqq b \tag{11'}$$

a kde při nerostoucí $\psi(x)$ jest $\mathfrak{A} \geqq \psi(a+0)$. $\mathfrak{B} \leqq \psi(b-0)$, kdežto je-li $\psi(x)$ neklesající, jest $\mathfrak{A} \leqq \psi(a+0)$. $\mathfrak{B} \geqq \psi(b-0)$ a jinak jsou $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ čísla libovolná.

Tento tvar má tu výhodu, že jsou v něm zároveň obsaženy i rovnice (10) i věta (11). Rovnici (10) dostaneme patrně, klademe-li $\mathfrak{B} = 0$.

Druhá věta o střední hodnotě byla po prvé ve tvaru (10) vyslovena a dokázána *O. Bonnetem* (Journal de math. p. et appl., sv. 14, r. 1849), kterýž provedl důkaz na základě věty Abelovy zde rovněž užité.*)

107. O zavedení nové proměnné do integrálu určitého. Z definice integrálu určitého dospěli jsme ke vztahu (za předpokladu, že $f(x)$ jest podle definice *C.—R.* integrace schopna)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k = 0} \Sigma f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{1}$$

kde ξ_k jest libovolná hodnota intervalu (x_{k-1}, x_k). Klaďme

$$x = \varphi(t), \tag{2}$$

kde o funkci $\varphi(t)$ budeme nejprve předpokládati, že s rostoucím t roste také x a to tak, že roste-li t od α do β, že x roste od a do b. Předpokládejme dále, že $\varphi(t)$ má konečnou derivaci pro všecka t od α do β. Pak jest podle věty o střední hodnotě počtu diferenciálního, označíme-li hodnoty t přiřaděné rovnicí (2) hodnotě x_k značkou t_k,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\,\varphi'(\tau_k), \tag{3}$$

kde τ_k jest určitá hodnota intervalu (t_{k-1}, t_k). Hodnoty ξ_k, které jsou libovolné v intervalech (x_{k-1}, x_k), stanovíme, volíce

$$\xi_k = \varphi(\tau_k). \tag{4}$$

Tak obdržíme, užívajíce (3) a (4)

$$\Sigma f(\xi_k)\,\Delta x_k = \Sigma f(\varphi(\tau_k))\,.\,\varphi'(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1}).$$

Poněvadž pak podle (3), když $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$ konverguje k nule, i Δx_k konverguje k nule, vidíme ihned, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta t_k = 0} \Sigma f(\varphi(\tau_k))\,\varphi'(\tau_k)\,\Delta t_k.$$

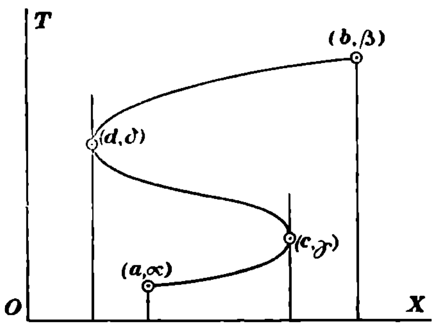
Limita na pravé straně však jest (*jestliže ovšem* $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ *jest v* (α, β) *integrace schopno*) integrál z $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v (α, β), takže jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{I}$$

*) Důkaz svrchu podaný byl zjednodušen podle návrhu p. K. Rösslera.

Platnost rovnice této se rozšiřuje bez jakékoli potíže i pro případ, že funkce $\varphi(t)$ jest funkcí neklesající v (α, β) a že jsou intervaly položené na (α, β), ve kterých $\varphi(t)$ jest konstantní a $\varphi'(t) = 0$.

K témuž výsledku bychom dospěli, kdybychom místo předpokladu, že $\varphi(t)$ s rostoucím t stále roste anebo aspoň neklesá (t. j. že $\varphi'(t) \geqq 0$), byli zavedli předpoklad, že $\varphi(t)$ s rostoucím t klesá anebo aspoň neroste (t. j. že $\varphi'(t) \leqq 0$) v intervalu (α, β).



Obr. 2.

Není však nutno předpokládati, že $x = \varphi(t)$ s rostoucím t buď stále roste anebo stále klesá. Nechť jest na př. při $\alpha < \gamma < \delta < \beta$

$$\begin{array}{llll} \text{pro} \quad \alpha \leqq t \leqq \gamma & \varphi'(t) \geqq 0, & & \varphi(\alpha) = a, \\ \gamma \leqq t \leqq \delta & \varphi'(t) \leqq 0, & \varphi(\gamma) = c, & \varphi(\delta) = d, \\ \delta \leqq t \leqq \beta & \varphi'(t) \geqq 0, & & \varphi(\beta) = b. \end{array}$$

Pak platí pro jednotlivé intervaly

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad \int_c^d f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_d^b f(x)\,dx = \int_\delta^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

a tedy sečtením

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1'}$$

což jest výsledek shodný s (1). Výsledek tento byl odvozen za předpokladu mlčky činěného, že $f(x)$ jest integrace schopno také v intervalu (a, d), předpokládáme-li, že vzájemná poloha bodů a, b, c, d jest taková, jaká naznačena na obrázku.

Za těchto suposic proběhnuty jsou některé hodnoty $x = \varphi(t)$, když t se mění od α do β, třikrát, po případě dvakrát (viz obr. 2) a jest možno výsledek poněkud zjednodušiti; označíme-li γ' tu hodnotu intervalu (δ, β), pro kterou $\varphi(t) = c$, lze pak též psáti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt + \int_{\gamma'}^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Užíváme-li výrazu analytických, jež jsou mnohoznačné, jest třeba jisté opatrnosti a bývá účelno rozděliti obor proměnné x resp. obor proměnné t na intervaly, ve kterých příslušný výraz jest jednoznačný.

PŘÍKLAD. Jest transformovati

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$$

substitucí $x = \pm\sqrt{t^3}$. Když x probíhá interval $(-1, 1)$, ubývá nejprve $t = \sqrt[3]{x^2}$ od 1 do 0, pak roste od 0 do 1. Ke každému t patří dvě hodnoty x různého znaménka, derivace $\varphi'(t)$ jest téhož znaménka jako $\varphi(t)$.

I dostáváme (interval integrační jest nutno rozděliti ve dva v $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, neboť v každém z těchto dvou intervalů má $\varphi(t)$ resp. $\varphi'(t)$ jiné vyjádření)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \tfrac{3}{2}\int_1^0 f(-\sqrt{t^3})\,.-\sqrt{t}\,dt + \tfrac{3}{2}\int_0^1 f(\sqrt{t^3})\sqrt{t}\,dt$$

$$= \tfrac{3}{2}\int_0^1 [f(\sqrt{t^3}) + f(-\sqrt{t^3})]\sqrt{t}\,dt.$$

Cvičení.

1. Dokažte, že je-li $f(x)$ v $(0, 1)$ funkcí *rostoucí* (a tedy integrace schopnou), $g(x)$ pak funkcí tam klesající, jest

$$0 < \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] - \int_0^1 f(x)\,dx < \frac{f(1) - f(0)}{n},$$

$$0 > \int_0^1 g(x)\,dx - \frac{1}{n}\left[g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] > \frac{g(1) - g(0)}{n}.$$

K důkazu stačí vypočítati v každém z obou případů pro rozdělení intervalu $(0, 1)$ na n stejných dílů součty S, s. Zevšeobecněte výroky ty pro libovolný interval.

2. Definice integrálu $C.—R.$ nám podávala integrál jakožto limitu součtu. Lze také velmi často limity počítati pomocí určitých integrálů. Na př. limitu

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] \qquad (*)$$

převésti lze na integrál z $1/(1+x)$ v intervalu $(0, 1)$. Neboť výraz v hranaté závorce lze psáti též takto

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

a tedy podle (13), odst. 87, klademe-li tam $b=1$, $a=0$, $f(x)=1/(1+x)$, dostáváme pro uvedenou limitu zmíněný integrál a hodnotu $\log 2$. Označíme-li výraz $(*)$ krátce a_n, máme dokonce podle příkladu 1

$$\frac{1}{2n} > \log 2 - a_n > 0.$$

3. Dokažte (obdobně jako v příkladě předcházejícím)

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\frac{1}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]\cdot n=\frac{1}{4}\pi,$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\pi,$$

$$\lim_{n=\infty}\left[1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha\right]\frac{1}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1},\qquad \alpha>-1$$

$$\lim\left[\frac{1}{pn}+\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+\cdots+\frac{1}{pn+Q}\right]=\log\frac{q}{p},\qquad q>p>0.$$

V posledním vztahu jest $Q=E(q-p).n$; t. j. Q jest největší celé číslo obsažené v součinu $(q-p).n$,

4. Dokažte, že, je-li $f(x)/x$ v $(0, 1)$ integrace schopna podle $C.—R.$, jest

$$\lim_{q=1-0}(1-q)\left[f(q)+f(q^2)+f(q^3)+\cdots\right]=\int_0^1\frac{f(x)}{x}\,dx.\qquad (+)$$

Návod. Interval $(0, 1)$ rozpadá se body $q, q^2, q^3, \ldots$, kde kladné číslo $q<1$, na intervaly $(1, q)$, (q, q^2), (q^2, q^3), ... V další úvaze pak opíráme se o (12) odst. (87), při čemž v $(1, q)$ volíme $\xi_1=q$, v (q, q^2) pak $\xi_2=q^2$, ... atd.

5. Jestliže $f(x)/x$ jest integrace schopna v každém intervalu $(\varepsilon, 1)$, kde ε jest libovolné číslo v $(0+0, 1-0)$, pak místo rovnice předcházejícího příkladu lze psáti

$$\lim_{q=1-0}(1-q)\left[f(q)+f(q^2)+f(q^3)+\cdots\right]=\lim_{\varepsilon=+0}\int_\varepsilon^1\frac{f(x)}{x}\,dx,\qquad (+')$$

existuje-li limita na pravé straně a je-li zároveň $f(x)/x$ v okolí bodu 0 na pravo monotonní. Rovnice $(+')$ však nabude tvaru rovnice $(+)$, zavedeme-li pojem integrálu nevlastního (jakož bylo již učiněno pro integrály určité, definované na podkladě primitivní funkce).

Návod. Důkaz proveďte nejprve za předpokladu, že $f(x)/x$ jest v celém intervalu $(0, 1-0)$ monotonní. V okolí bodu 0 na pravo jest ovšem $f(x)/x$ nekonečnou (t. j. není ohraničenou), neboť jinak by byla integrace schopna podle $C.—R.$ v $(0, 1)$.

6. Dokažte, že

$$\lim\,(1-q)\left(\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^3}{1+q^3}+\cdots\right)=\log 2.$$

(Pólya—Szegö, I, str. 41.)

Návod. Podle příkladu 4, klademe-li tam $f(x)/x=1/(1+x)$.

7. Dokažte, že

$$\lim_{q=1-0}\left[(1-q)\left(\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots\right)-\log\frac{1}{1-q}\right]=C,$$

kde

$$C=\int_0^1 dt\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\log t}\right].$$

(Pólya—Szegö, l. c.)

Návod. Plyne bezprostředně z příkladu 4, klademe-li tam $f(t)/t$ rovno hranaté závorce za integračním znaménkem. Při tom jest míti ještě jenom na paměti, že

$$\lim_{t=1-0}\frac{1-t}{\log t}=-1, \qquad (\times)$$

C jest, jak později v nauce o funkci Γ poznáme, *Eulerova konstanta* (DP, 38).

8. $$\lim_{q=1-0}(1-q)^{\alpha}\,(1^{\alpha-1}q+2^{\alpha-1}q^2+3^{\alpha-1}q^3+\cdots)=\Gamma(\alpha)$$

kde $\alpha>1$, resp. připustíme-li vůbec integrály nevlastní, $\alpha>0$ a

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^1\left[\log\frac{1}{t}\right]^{\alpha-1}dt.$$

Jestliže α celé, jest $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!\cdot$ Obecně značí $\Gamma(\alpha)$ tak zv. gammafunkci, jíž později se budeme zabývati. Jelikož, jak později seznáme, jest $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, jest specielně

$$\lim_{q=1-0}\sqrt{1-q}\left[\frac{q}{\sqrt{1}}+\frac{q^2}{\sqrt{2}}+\frac{q^3}{\sqrt{3}}+\cdots\right]=\sqrt{\pi}.$$

Návod. Použije se příkladu 5 a vztahu $(\times)$.

9. $$\lim_{q=1-0}(1-q)^{2m}\left[\frac{1^{2m-1}q}{1-q}+\frac{2^{2m-1}q^2}{1-q^2}+\frac{3^{2m-1}q^3}{1-q^3}+\cdots\right]=(2\pi)^{2m}\frac{B_m}{4m}.$$

Viz příklad 2, odst. 70.

10. Dokažte, že integrál

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)dx=-\log\frac{1}{2}\pi.$$

Návod. Integrál z dané funkce se vypočte v mezích ε, $\frac{1}{2}$ pomocí primitivních funkcí k jednotlivým sčítancům. Potom limitním přechodem ($\lim\varepsilon=0$) získá se snadno daný integrál.

11. Dokažte na základě výsledku předch. příkladu a nerovnin obdobných nerovninám př. 1. vztah

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}=$$

$$=\frac{2n}{\pi}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log\frac{1}{2}\pi\right\}+k,$$

kde k jest funkce čísla celého n shora ohraničená a jest na př. při n lichém rovno $4-\pi+2\Theta(\pi-3)$, $0<\Theta<1$.

Návod. Funkce, jež jest za integračním znaménkem příkladu předcházejícího, jest v $(0, \frac{1}{2})$ funkcí stoupající. Viz DP, str. 246, rozvoj pro cosec x ve zlomky částečné.

12. Vztahují-li se čísla M_k, m_k v obvyklém svém významu k funkci $f(x)$ (viz 85) a obdobně N_k, n_k ke $g(x)$ a je-li $g(x)$ v (a, b) integrace schopna a kladná, pak

$$\lim \sum_k M_k N_k \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \qquad \lim \sum_k m_k n_k \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Jestliže i $f(x)$ jest v (a, b) integrace schopna, pak

$$\lim \sum_k M_k N_k \Delta x_k = \lim \sum_k m_k n_k \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

(viz odst. 89, e). Důsledek poslední rovnice jest

$$\int_b^a f(x)\, g(x)\, dx = \lim \sum_k f(\xi_k)\, g(\xi'_k)\, \Delta x_k, \qquad \xi_k, \xi'_k \text{ na } (x_{k-1}, x_k).$$

Platnost rovnice poslední lze snadno rozšířiti i pro ten případ, že $g(x)$ nabývá v (a, b) hodnot kladných i záporných.

Návod. Důkaz prvého tvrzení je snadný za předpokladu, že M_k, m_k jsou hodnoty, jichž $f(x)$ vskutku v příslušných intervalech nabývá, jako jest to na př. při funkcích spojitých. Za tohoto předpokladu se nejdříve o důkaz pokuste. V případě obecném vede k cíli věta Weierstrassova (DP 68).

13. Dokažte druhou větu o střední hodnotě pro případ, že $f(x)$ jest v (a, b) stále $\geqq 0$, jakožto důsledek první věty o střední hodnotě. Jinak nechť jsou o funkcích $f(x)$, $\psi(x)$ předpoklady platné pro rovnici (11) odst. 106.

Návod. Na základě 1. věty o střední hodnotě jest

$$\int_a^b \psi(x) f(x)\, dx = \mu \int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{kde } \mu \text{ jest číslo intervalu } (\psi(a), \psi(b)).$$

Dále existuje číslo ξ takové, že

$$\mu \int_a^b f(x)\, dx = \psi(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + \psi(b) \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

neboť vždy existuje číslo kladné α menší než $\int_a^b f(x)\, dx$, pro které jest

$$\mu \int_a^b f(x)\, dx = \alpha\, \psi(a) + \left(\int_a^b f(x)\, dx - \alpha\right) \psi(b)$$

14. Dokažte, že, je-li při monotonní funkci $\psi(x)$ druhá věta o střední hodnotě platna pro intervaly (a, c), (c, b), jest platna pro interval (a, b).

Návod. Jsou-li A, B, C čísla, pro něž $A < B < C$, vždy existuje číslo x takové, aby bylo při daném v

$$Bv = Ax + C(v - x).$$

Číslo x pak jest v $(0, v)$.

15. V důsledku vět dvou předcházejících příkladů můžeme pojímati druhou větu o střední hodnotě za důsledek prvé věty pro případ, že $f(x)$ mění v (a, b) znaménko v konečném počtu bodů. Pokuste se o další rozšíření tohoto postupu ($f(x)$ mění své znaménko v nekonečném počtu bodů, jež však mají toliko jeden bod zhuštění; atd.).

16. Jestliže k funkci $f(x)$ v (a, b) existuje funkce primitivní $F(x)$, takže jest tam stále $F'(x) = f(x)$, pak jest při $b > a$ vždy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \geqq F(b) - F(a) \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Návod. V intervalu (x_{k-1}, x_k) o délce $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ existuje podle věty o střední hodnotě počtu diff. bod ξ_k takový, že $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)\,\Delta x_k$; jest tedy $M_k \Delta x_k \geqq F(x_k) - F(x_{k-1}) \geqq m_k \Delta x_k$.

16a. Dokažte, že body ve kterých funkce

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx \qquad x \text{ jest v } (a, b)$$

má derivaci, tvoří množství bodové v (a, b) všude husté. Při tom se o funkci $f(x)$ předpokládá, že jest integrace schopna podle $C.$—$R.$ v (a, b).

Návod. Důsledek vět odst. 88.

17. Jsou-li $f(x)$, $g(x)$ v (a, b) integrace schopny, pak jest

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqq \int_a^b f^2(x)\, dx \,.\int_a^b g^2(x)\, dx$$

(Schwarzova nerovnost.)

Návod. Výraz $[\lambda f(x) + \mu g(x)]^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda\mu f(x)\, g(x) + \mu^2 g^2(x)$ jest stále kladný. I jest tedy kvadratická binární forma proměnných λ, μ

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\lambda\mu \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx + \mu^2 \int_a^b g^2(x)\, dx \left(\text{rovná integrálu} \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))^2\, dx\right)$$

stále (t. j. pro všecka λ, μ) kladná ($\geqq 0$). Tudíž jest její diskriminant záporný ($\leqq 0$). Znaménko rovnosti přichází v tomto příkladě vedle $>, <$ v úvahu při spojitých funkcích jenom tenkráte, když $f(x)/g(x)$ jest v (a, b) konstantní.

18. Dokažte pomocí druhé věty o střední hodnotě, že

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \right| < \frac{2}{a}, \qquad \text{jestliže } 0 < a < b.$$

Návod. Lze užíti rovnice (11') odst. 106, při čemž volíme $\mathfrak{B} = 0$.

19. Vyčísliti jest $\lim\limits_{n=\infty} n\Delta_n$, kde

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right),$$

za předpokladu, že $f(x)$ v (a, b) má derivaci konečnou a integrace schopnou. (Pólya-Szegö, I., str. 37.)

Návod. Uvažujme na př. interval $\left(a + (k-1)\dfrac{b-a}{n},\ a + k\,\dfrac{b-a}{n}\right)$. V něm jest, značíme-li hranice tohoto intervalu pro stručnost a_{k-1}, a_k, v důsledku částečné integrace

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\, dx = (a_k - a_{k-1})\, f(a_{k-1}) - \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x - a_k)\, f'(x)\, dx.$$

Rovnici této dáme snadno tvar

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f(a_{k-1}) = -\int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_k) f'(x)\,dx.$$

Užijeme-li pak na pravou stranu větu o střední hodnotě, značíce M'_k, m'_k horní, dolní hranici této funkce $f'(x)$ v (a_{k-1}, a_k)

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 m'_k \leqq \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f(a_{k-1}) \leqq +\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M'_k, \qquad (\times)$$

ze kteréžto nerovniny (sčítáním nerovnin pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a násobením číslem n) následuje snadno

$$\lim_{n=\infty} n\Delta_n = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

20. Podle předcházejícího příkladu jest $\lim\limits_{n=\infty} n\Delta'_n = 0$, je-li (při tom stále $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$)

$$\Delta'_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)\right]$$

a existuje-li derivace $f'(x)$ v (a, b) konečná a integrace schopná. Dokažte dokonce, že, má-li $f(x)$ i druhou derivaci v (a, b) konečnou a integrace schopnou, jest

$$\lim_{n=\infty} n^2\Delta'_n = -\tfrac{1}{12}(b-a)^2[f'(b) - f'(a)].$$

Návod. Užije se po dvakráte integrace částečné, a to nejúčelněji v tomto tvaru

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx = \frac{a_k - a_{k-1}}{2}[f(a_k) + f(a_{k-1})] - \int_{a_{k-1}}^{a_k}\left(x - \frac{a_k + a_{k-1}}{2}\right) f'(x)\,dx.$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{a_{k-1}}^{a_k} (2x - a_k - a_{k-1}) f'(x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_k)(x-a_{k-1}) f''(x)\,dx =$$
$$= +\tfrac{1}{12}(a_k - a_{k-1})^3 \mu_k,$$

kde $M''_k > \mu_k > m''_k$ a M''_k, m''_k jsou horní, dolní hranice $f''(x)$ v (a_{k-1}, a_k). Ostatně postupuje se obdobně jako v příkladě předcházejícím.

21. Klademe-li

$$\Delta''_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)\right] +$$
$$+ \frac{(b-a)^2}{12n^2}[f'(b) - f'(a)],$$

pak jest podle předcházejícího příkladu $\lim\limits_{n=\infty} n^2\Delta''_n = 0$. Lze pak dokázati za předpokladu, že také existuje třetí a čtvrtá derivace funkce $f(x)$ v (a, b) — obě konečné a integrace schopné —, že

$$\lim n^4\Delta''_n = \tfrac{1}{720}(b-a)^4[f'''(b) - f'''(a)]$$

Návod. Integrál z výrazu $\frac{1}{2}(2x - a_{k-1} - a_k)f'(x)$ v mezích a_{k-1}, a_k se transformuje opět postupně integrací částečnou a to třikráte; při tom opětovnou integrací výrazu $\frac{1}{2}(2x - a_{k-1} - a_k)$ dospíváme postupně k výrazům (pro krátkost kladeno $a_k - a_{k-1} = \delta$)

$$\tfrac{1}{2}(x - a_{k-1})^2 - \tfrac{1}{2}\delta(x - a_{k-1}) + \tfrac{1}{12}\delta^2,$$

$$\tfrac{1}{6}(x - a_{k-1})^3 - \tfrac{1}{4}\delta(x - a_{k-1})^2 + \tfrac{1}{12}\delta^2(x - a_{k-1}),$$

$$\tfrac{1}{24}(x - a_{k-1})^4 - \tfrac{1}{12}\delta(x - a_{k-1})^3 + \tfrac{1}{24}\delta^2(x - a_{k-1})^2.$$

Při této postupné integraci voleny integrační konstanty tak, aby vypadly hodnoty druhé resp. třetí derivace. Ostatně se odvození výsledků shoduje s odvozením výsledku příkladu předcházejícího.

POZNÁMKA. Takovýmto způsobem jako v příkladech předch. postupujíce, dospěli bychom k číslům Δ'''_n, $\Delta^{(4)}_n$, ... a dostali bychom vztahy, jež jednodušeji (avšak také na podkladě integrace částečné) vyplývají z formule *Euler-Maclaurinovy*.

22. Dokažte, že, je-li $f'(x)$ v intervalu (a, b) funkcí monotoní,

$$|\Delta'_n| < \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 |f'(b) - f'(a)|;$$

je-li pak $f''(x)$ funkcí monotoní, že

$$|\Delta''_n| < \tfrac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 |f''(b) - f''(a)|.$$

Vztah první vyplývá snadno ze vztahu $(\times)$ př. 19) (sčítáme-li, jak v příkladě naznačeno a použijeme-li předpokladu stejným způsobem, jako v př. 2). Vztah druhý obdobně dostaneme jakožto důsledek nerovniny vyplývající z rovnic př. 20.

Obdobně jest

$$|\Delta'''| \equiv \left|\Delta''_n - \tfrac{1}{720}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 (f'''(b) - f'''(a))\right| < \tfrac{1}{720}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 |f^{(4)}(b) - f^{(4)}(a)|,$$

je-li čtvrtá derivace funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) monotoní atd.

4. NĚKTERÁ DŮLEŽITĚJŠÍ POUŽITÍ VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ A ROVNICE PRO ČÁSTEČNOU INTEGRACI.

108. Odvození rovnice Taylorovy. Klademe-li v (3) odst. 102. $g(x) = \frac{(x-b)^n}{n!}$, jest $g^{(k)}(x) = \frac{(x-b)^{n-k}}{(n-k)!}$; máme pak ihned

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)\frac{b-a}{1!} + f'(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + f''(a)\frac{(b-a)^3}{3!} + \dots$$

$$\dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\frac{(x-b)^n}{n!}\,dx.$$

Položíme-li tu ještě $f(x) = F'(x)$, jest

$$F(b) - F(a) = F'(a)\frac{b-a}{1!} + F''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + F^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + R_n;$$

to jest v podstatě formule Taylorova, při níž však zbytek R_n jest dán ve tvaru omezeného integrálu výrazem

$$R_n = \int_a^b F^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}\,dx. \qquad (\alpha)$$

Užijeme-li na tento výraz věty o střední hodnotě (odst. 97, (III)), kladouce $\varphi(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}$, máme za předpokladu, že $F^{(n+1)}(x)$ jest spojitou funkcí,

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi); \qquad \xi \text{ v intervalu } (a, b),$$

což jest *Lagrangeova* forma zbytku.

Bereme-li, užívajíce téže věty o střední hodnotě

$$\varphi(x) = \frac{(b-x)^p}{n!}, \qquad 0 \leqq p \leqq n,$$

obdržíme pro zbytek tvar za téhož předpokladu

$$R_n = \frac{(b-\xi')^{n-p}\,(b-a)^{p+1}}{n!\,(p+1)}F^{(n+1)}(\xi'); \qquad \xi' \text{ v intervalu } (a, b);$$

při $p = 0$ jest to zbytek ve tvaru *Cauchyově*. Snadno bychom pomocí (α) obdrželi i jiné tvary pro zbytek (ku př. formuli *Schlömilchovu* uvedenou v DP, str. 200, VI.).

109. O vzorci Euler-Maclaurinově. Integrace částečná nám bude dále užitečna ku odvození jiného důležitého rozvoje. Za tím účelem dokážeme nejprve některé vlastnosti **funkcí** tak zv. **Bernoulliských.**

Rozvoj

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{B_1}{2!}z^2 - \frac{B_2}{4!}z^4 + \frac{B_3}{6!}z^6 - \cdots \qquad (1)$$

definuje *čísla* t. zv. *Bernoulliská* (DP, odst. 159). Že na pravé straně členy s lichými mocninami z — vyjma člen s prvou mocninou — vymizí, vyplývá převedením členu $-\frac{z}{2}$ na levou stranu; obdržíme na levé straně

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \tfrac{1}{2}z\,\frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

což jest funkce sudá. Funkce Bernoulliské $\varphi_k(x)$ definujeme podobně rozvojem

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\,z + \varphi_2(x)\,z^2 + \varphi_3(x)\,z^3 + \cdots, \qquad (2)$$

jehož koeficienty jsou právě Bernoulliské funkce a ze kterého snadno plynou různé vlastnosti těchto funkcí. Nejprve přímým výpočtem obdržíme $\varphi_0(x) = 1$. Derivujeme-li obě strany poslední rovnice podle x, obdržíme, krátíme-li ještě z,

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x)\,z + \varphi'_3(x)\,z^2 + \cdots,$$

tedy porovnáním s (2)

$$\varphi'_k(x) = \varphi_{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

Jelikož $\varphi_0(x)$ jest konstanta, jest $\varphi_1(x)$ polynom prvého stupně, $\varphi_2(x)$ druhého stupně a obecně $\varphi_k(x)$ polynom k-tého stupně.

Dosadíme-li do (2) $x = 0$, máme na základě srovnání s (1)

$$\varphi_{2k+1}(0) = 0, \quad \varphi_{2k}(0) = (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \tag{4}$$

dosazením pak $x = 1$ máme se zřetelem k rovnici

$$\frac{ze^z}{e^z - 1} = z + \frac{z}{e^z - 1}$$

podobně

$$\varphi_{2k+1}(1) = 0, \quad \varphi_{2k}(1) = (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

Pro $\varphi_1(x)$ plyne současně

$$\varphi_1(0) = -\tfrac{1}{2}, \qquad \varphi_1(1) = \tfrac{1}{2}. \tag{6}$$

Konečně dosazením $x = \frac{1}{2}$, získáme, jelikož

$$\frac{ze^{\frac{z}{2}}}{e^z - 1} = \frac{z\left(e^{\frac{z}{2}} + 1\right)}{e^z - 1} - \frac{z}{e^z - 1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{z}{2}} - 1} - \frac{z}{e^z - 1},$$

že

$$\varphi_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = 0, \quad \varphi_{2k}(\tfrac{1}{2}) = (-1)^k \cdot \frac{B_k}{(2k)!}\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right); \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6'}$$

110. Obraťme se nyní k užití formule pro integraci per partes v intervalu $(0, 1)$, kladouce $n = 2p$, $g(x) = \varphi_{2p}(x)$; dostaneme ihned, jelikož $\varphi_{2p}^{(2p)}(x) = \varphi_0(x) = 1$ a obecněji $\varphi_{2p}^{(k)}(x) = \varphi_{2p-}\ (x)$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \Big[f(x)\,\varphi_1(x) - f'(x)\,\varphi_2(x) + f''(x)\,\varphi_3(x) - \cdots$$
$$- f^{(2p-1)}(x)\,\varphi_{2p}(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 f^{(2p)}(x)\,\varphi_{2p}(x)\,dx \tag{7}$$

aneb se zřetelem ku (4), (5), (6)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{B_1}{2!}(f'(1) - f'(0)) + \frac{B_2}{4!}(f'''(1) - f'''(0)) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)) + \overline{R_p}.$$

kde
$$R_p = +\int_0^1 f^{(2p)}(x)\,\varphi_{2p}(x)\,dx$$
a kde samozřejmě předpokládáme existenci derivací u funkce $f(x)$ v intervalu $(0, 1)$ až do řádu $2p$. Formule tato se změní, píšeme-li $f(x) = F(a + hx)$ a tedy
$$f^{(k)}(x) = h^k\,F^{(k)}(a + hx),$$
a dosadíme-li ještě v integrálu na levé straně $a + hx = y$, v rovnici
$$\int_a^{a+h} F(y)\,dy = \frac{h}{2}\,[F(a) + F(a+h)] - \frac{B_1 h^2}{2!}\,[F'(a+h) - F'(a)]$$
$$+ \frac{B_2 h^4}{4!}\,[F'''(a+h) - F'''(a)] - \cdots \tag{8}$$
$$+ (-1)^p\,\frac{B_p h^{2p}}{(2p)!}\,[F^{(2p-1)}(a+h) - F^{(2p-1)}(a)] + R_p,$$
kdež
$$R_p = h^{2p+1}\int_0^1 F^{(2p)}(a + hx)\,\varphi_{2p}(x)\,dx. \tag{8$_1$}$$
Formule tato sluje *Euler-Maclaurinova*. R_p jest zbytek, který lze odhadnouti různým způsobem. Jeden takový odhad provedeme za předpokladu, že *$F^{(2p)}(x)$ v intervalu $(a, a+h)$ jest stále téhož znaménka.* Pak jest ihned podle věty o střední hodnotě
$$R_p = h^{2p+1}\,\varphi_{2p}(\xi)\int_0^1 F^{(2p)}(a + hx)\,dx = h^{2p}\,\varphi_{2p}(\xi)\,[F^{(2p-1)}(a+h) - F^{(2p-1)}(a)].$$
Mnohočlen $\varphi_{2k+1}(x)$ má v intervalu $(0, 1)$ v bodech $0, \frac{1}{2}, 1$ tři kořeny, mimo tyto nemá v tom intervalu již jiných; neboť kdyby měl ještě jeden, tedy celkem 4, měl by polynom $\varphi_{2k}(x) = \varphi'_{2k+1}(x)$ podle Rollovy věty *uvnitř* intervalu $(0, 1)$ tři nulové body a tedy $\varphi_{2k-1}(x) = \varphi'_{2k}(x)$ měl by *uvnitř* $(0, 1)$ dva kořeny a podle (4) a (5) celkem v $(0, 1)$ 4 kořeny jako $\varphi_{2k+1}(x)$. Takto postupujíce, dospěli bychom k tomu, že $\varphi_3(x)$ má 4 nulové body v $(0, 1)$, což jest nemožno, jelikož $\varphi_3(x)$ jest mnohočlen třetího stupně od nuly různý. Tak jsme dokázali, že nulové body mnohočlenu $\varphi_{2k+1}(x)$ v intervalu $(0, 1)$ se nacházející jsou jenom $0, \frac{1}{2}, 1$. Maxima a minima funkce $\varphi_{2p}(x)$ jsou (pokud jde o interval $(0, 1)$) tudíž jenom v bodech $0, \frac{1}{2}, 1$, odkudž vyplývá, že $\varphi_{2p}(x)$ nabýti může svých největších absolutních hodnot v intervalu $(0, 1)$ jenom v bodech $0, \frac{1}{2}, 1$. Hodnoty tyto jsme svrchu vypočetli, z nich jest patrno, že pro interval $(0, 1)$ jest
$$|\,\varphi_{2p}(x)\,| < \frac{B_p}{(2p)!} \qquad 0 < x < 1$$

a tedy pro R_p následuje výsledek

$$R_p = \Theta \frac{B_p h^{2p}}{(2p)!} [F^{(2p-1)}(a+h) - F^{(2p-1)}(a)], \tag{9}$$

kde $|\Theta| < 1$, t. j. *jestliže $F^{(2p)}(x)$ jest v intervalu $(a, a+h)$ stále téhož znaménka, jest co do absolutní hodnoty zbytek menší než poslední člen rozvoje.*

Sloučíme-li zbytek R_p s předcházejícím členem, můžeme psáti vzorec (8_1) ve tvaru

$$\int_a^{a+h} F(y)\,dy = \frac{h}{2}[F(a)+F(a+h)] - \frac{B_1 h^2}{2!}[F'(a+h) - F'(a)] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1} h^{2p-2}}{(2p-2)!} [F^{(2p-3)}(a+h) - F^{(2p-3)}(a)] +$$

$$+ \vartheta (-1)^p \frac{B_p h^{2p}}{(2p)!} [F^{(2p-1)}(a+h) - F^{(2p-1)}(a)].$$

kde $0 < \vartheta < 2$; kdybychom však v rovnici této p zvětšili o 1, *předpokládajíce i existenci derivace $F^{(2p+2)}(x)$, která zároveň s $F^{(2p)}(x)$ nemění své znaménko, jež jest při obou těchto derivacích stejné,* poznali bychom, že Θ *v* (9) jest znaménka téhož jako $(-1)^{p+1}$ a tudíž, že $0 < \vartheta < 1$; *t. j. za těchto předpokladů rozvoj*

$$\frac{h}{2}[F(a)+F(a+h)] + \Sigma(-1)^k \frac{B_k h^{2k}}{2k!} [F^{(2k-1)}(a+h) - F^{(2k-1)}(a)]$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots.$$

nám dává přibližnou hodnotu integrálu $F(y)dy$ v mezích a, $a+h$, vezmeme-li z rozvoje toho prvých p členů $(k=1, 2, \ldots, p-1)$ s chybou menší v absolutní hodnotě, než jest prvý zanedbaný člen rozvoje a téhož znaménka jako tento člen.

Není-li splněn předpoklad, že $F^{(2p)}(x)$ má v intervalu $(a, a+h)$ stále stejné znaménko, můžeme postupovati takto. Integrací částečnou zjednáme si z(8_1)

$$R_p = -h^{2p+2} \int_0^1 F^{(2p+1)}(a+hx)\, \varphi_{2p+1}(x)\,dx.$$

φ_{2p+1} má v $(0, 1)$ tři jednoduché kořeny $0, \frac{1}{2}, 1$ a nemění tedy v intervalech $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ znaménka: můžeme tedy na každý z obou intervalů užiti věty o střední hodnotě takto

$$R_p = -h^{2p+2}\int_0^{\frac{1}{2}} F^{(2p+1)}(a+hx)\varphi_{2p+1}(x)\,dx - h^{2p+2}\int_{\frac{1}{2}}^1 F^{(2p+1)}(a+hx)\varphi_{2p+1}(x)\,dx =$$

$$= -h^{2p+2} F^{(2p+1)}(\xi_1)\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2p+1}(x)\,dx - h^{2p+2} F^{(2p+1)}(\xi_2)\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_{2p+1}(x)\,dx.$$

při čemž jsou ξ_1, ξ_2 položeny respektive v intervalech $\left(a, a+\frac{h}{2}\right)$ $\left(a+\frac{h}{2}, a+h\right)$. Avšak

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2p+1}(x)\,dx = \varphi_{2p+2}(\tfrac{1}{2}) - \varphi_{2p+2}(0) = (-1)^{p+1}\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}\left(2 - \frac{1}{2^{2p+1}}\right)$$

a stejně se vypočte i druhý integrál, který má až na znaménko touž hodnotu. Tak máme

$$R_p = (-1)^{p+1}\, h^{2p+2}\,[F^{(2p+1)}(\xi_2) - F^{(2p+1)}(\xi_1)]\,\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}\left(2 - \frac{1}{2^{2p+1}}\right) = \tag{10}$$

$$= (-1)^{p+1}\frac{\Theta B_{p+1}}{(2p+2)!}\left(2 - \frac{1}{2^{2p+1}}\right) h^{2p+3} F^{(2p+2)}(\xi). \qquad 0 < \Theta < 1,$$

což jest *druhá* forma zbytku *předpokládající ovšem existenci* $(2p+2)$*-hé derivace* $F(x)$ *v intervalu* $(a, a+h)$; číslo ξ jest číslo intervalu $(a, a+h)$.

111. Výpočet integrálů pomocí formule Euler-Maclaurinovy. Píšeme-li do rovnice (8) odst. předch. místo a po řadě $a+h$, $a+2h, \ldots, a+(n-1)h$, obdržíme po sečtení tak vzniklých rovnic

$$\int_a^{a+nh} F(x)\,dx = h\,[\tfrac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots$$
$$+ F(a+(n-1)h) + \tfrac{1}{2}F(a+nh)]$$
$$- \frac{B_1 h^2}{2!}[F'(a+nh) - F'(a)] + \cdots$$
$$+ (-1)^p \frac{B_p h^{2p}}{(2p)!}[F^{(2p-1)}(a+nh) - F^{(2p-1)}(a)] + \Re_p$$

aneb, značíme-li pro stručnost $a+nh = b$ a

$$S = \tfrac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(a+(n-1)h) + \tfrac{1}{2}F(b).$$

$$\int_a^b F(x)\,dx = hS + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \frac{B_k h^{2k}}{(2k)!}[F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a)] + \Re_p. \tag{11}$$

Při tom jest význam zbytku $\Re_p$ patrný: zejména jest podle výwodů dříve provedených jasno, že, *nemění-li* $F^{(2p)}(x)$ *a* $F^{(2p+2)}(x)$ *v intervalu* (a, b) *svá znaménka, jež se shodují*, platí pro $\Re_p$ tento vztah

$$\Re_p = (-1)^{p+1}\frac{\vartheta B_{p+1} h^{2p+2}}{(2p+2)!}[F^{(2p+1)}(b) - F^{(2p+1)}(a)], \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{11'}$$

Vztah (11) lze s výhodou užíti pro numerický výpočet určiých integrálů u funkcí $F(x)$, jež mají v intervalu (a, b) konečné lerivace až do jistého řádu. Zbytek $\Re_p$ lze učiniti libovolně malý, zvolíme-li si jenom h dosti malé (anebo, což jest totéž, n dosti veliké).

Má-li $F(x)$ v (a, b) derivace všech řádů, nemusí řada nekonečná

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k h^{2k}}{(2k)!} \left[F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a)\right] \tag{12}$$

býti konvergentní, i když zvolíme si n jakkoliv veliké. V každém případě však (ať jest to řada konvergentní nebo divergentní) jest to řada, při které součet s_λ prvých λ členů může vyjadřovati hledaný integrál (vlastně rozdíl $\Delta = \int_a^b F(x)\,dx - hS$) s přesností libovolně velikou; stačí k tomu cíli zvoliti n dosti veliké; při tom zároveň $n^{2\lambda+2}(\Delta - s_\lambda)$ jest číslo shora ohraničené, vzrůstá-li n nade všecky meze, platí-li tvar pro zbytek daný rovnici (11'), a obdobně tomu jest při jiných tvarech zbytků platných při jiném předpokladu o derivacích funkce F. To jest jinými slovy řada (2) *jest asymptotickým rozvojem* vzhledem ku proměnné $n = \frac{b-a}{h}$. Při praktickém užití řady (12) ku výpočtu integrálu zvolíme si nejprve n a k němu volíme vhodně λ tak, abychom příslušné $\mathfrak{R}_\lambda$ při míře přesnosti, kterou právě požadujeme, mohli zanedbati. Není-li takového λ při tom určitém n, zvolíme si n větší a opět hledáme vhodné λ k tomuto n a k míře přesnosti právě požadované atd.

ČÍSELNÝ PŘÍKLAD. Abychom postup naznačený a užitečnost formule Euler-Maclaurinovy pro výpočet integrálů také na příkladě prokázali, vypočítáme s její pomocí

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \log 2.$$

kladouce

$$F(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad a = 0, \qquad a + nh = 1.$$

Výpočet prováděti budeme za předpokladu $n = 10$ (a tedy $h = \frac{1}{10}$) na 10 míst. Nejprve jest

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{1} + \tfrac{10}{11} + \tfrac{10}{12} + \cdots + \tfrac{10}{19} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 6{\cdot}9377140318 \ldots .$$

Dále jest

$$-\frac{B_1 h^2}{2!}\left[F'(1) - F'(0)\right] = -\frac{1}{6\,.\,2} \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{16}$$

a podobně pro další čtyři členy rozvoje asymptotického máme:

$$\text{člen druhý} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{128}, \qquad \text{člen třetí} = -\frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{256},$$

$$\text{člen čtvrtý} = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{17}{4096}, \qquad \text{člen pátý} = -\frac{1}{10^{10}} \cdot \frac{31}{4096}.$$

Jest tedy (pro zbytek zde, jak snadno patrno, platí formule (11'); bude tedy chyba v rovnici následující menší než poslední zanedbaný člen)

$$\begin{aligned}\log 2 &= 0{\cdot}69377140318\ldots - 0{\cdot}000625 + 0{\cdot}00000078125 + \\ &- 0{\cdot}00000000391\ldots + 0{\cdot}00000000004\ldots - 0{\cdot}00000000000 = \\ &= 0{\cdot}69314718056\ldots,\end{aligned}$$

při čemž ovšem poslední cifra se zřetelem k tomu, že jsme počítali s neúplnými čísly, jest nespolehlivá; číslo vypočtené však se může lišiti od správné hodnoty nejvýše o $1{\cdot}5 \, . \, 10^{-11}$.

112. Použití formule Euler-Maclaurinovy jakožto sumační. Jiné velmi důležité použití formule E.-M. spočívá ve vyčíslování součtů. K tomu cíli jest dobře ji poněkud upraviti. Dosaďme do (11) předch. odstavce za a, b, p čísla $a_0 + ph$, $a_0 + qh, m$ (tedy $q - p$ za n). Pak nejprve lze psáti

$$\begin{aligned}S = [F(a_0) + F(a_0+h) + F(a_0+2h) + \cdots + F(a_0+\overline{q-1}h) + \tfrac{1}{2}F(a_0+qh)] - \\ - [F(a_0) + F(a_0+h) + \cdots + F(a_0+\overline{p-1}h) + \tfrac{1}{2}F(a_0+ph)],\end{aligned}$$

kteroužto rovnici píšeme — užívajíce jasného označení — $S = S_q - S_p$. Podržujíce předpoklady učiněné při odvozování (11) a zavádějíce nový předpoklad, že *funkce $F(x)$ jest integrace schopna v každém intervalu* (a_0, B), kde B jest libovolné číslo větší než a_0, můžeme psáti (11) po snadné úpravě ve tvaru

$$\begin{aligned}S_q - \frac{1}{h}\int_{a_0}^{a_0+qh} F(x)dx - \sum_1^m (-1)^{k-1} \frac{B_k h^{2k-1}}{(2k)!} F^{(2k-1)}(a_0+qh) + \\ + (-1)^{m+1} \frac{\delta B_{m+1} h^{2m+1}}{(2m+2)!} F^{(2m+1)}(a_0+qh) = S_p - \frac{1}{h}\int_{a_0}^{a_0+ph} F(x)dx + \\ - \sum_1^m (-1)^{k-1} \frac{B_k h^{2k-1}}{(2k)!} F^{(2k-1)}(a_0+ph) + (-1)^{m+1} \frac{\delta B_{m+1} h^{2m+1}}{(2m+2)!} F^{(2m+1)}(a_0+ph).\end{aligned}$$

Předpokládejme dále, že (při celistvém s)

$$\lim_{s=\infty} \frac{B_{m+1} h^{2m+1}}{(2m+2)!} F^{(2m+1)}(a_0+sh) = 0. \qquad (+)$$

Pak můžeme tvrditi, že levá strana základní rovnice má limitu pro $\lim q = \infty$. Označíme-li

$$u_q = S_q - \frac{1}{h}\int_{a_0}^{a_0+qh} F(x)dx - \sum_1^m (-1)^{k-1} \frac{B_k h^{2k-1}}{(2k)!} F^{(2k-1)}(a_0+qh),$$

jest tvrzení učiněné ekvivalentní (v důsledku učiněné supposice) tvrzení, že existuje $\lim u_q$ pro $\lim q = \infty$. Abychom to druhé tvrzení dokázali, označme ještě zbytkové členy na levé a pravé základní rovnice ϱ_q, ϱ_p. Pak lze v důsledku předpokladu (+) ke každému kladnému číslu ε stanoviti N tak, aby $|\varrho_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro všecka $n > N$. Z rovnice základní pak následuje

$$|u_q - u_p| < \varepsilon$$

pro všecka p, q větší než N, čímž na základě věty Bolzano-Cauchyovy (DP, 28) tvrzení, že $\lim u_q$ pro $\lim q = \infty$ existuje, jest dokázáno. Označme $\lim\limits_{q=\infty} u_q = A$ a přejděme v základní rovnici k limitě pro $\lim q = \infty$. Levá její strana má limitu rovnou právě číslu A, má ji tedy i pravá strana. Na pravé straně však toliko číslo δ závisí na q. Má tudíž i δ limitu, již označím δ_0, kde $0 \leqq \delta_0 \leqq 1$. Rovnice základní pak se změní v následující

$$F(a_0) + F(a_0+h) + F(a_0+2h) + \cdots + F(a_0+ph) = \frac{1}{h}\int_{a_0}^{a_0+ph} F(x)\,dx + \tfrac{1}{2}F(a_0+ph) + A +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{B_k h^{2k-1}}{(2k)!}F^{(2k-1)}(a_0+ph) + (-1)^m\frac{\delta_0 B_{m+1} h^{2m+1}}{(2m+2)!}F^{(2m+1)}(a_0+ph);$$

tím formule sumační jest odvozena. Z předpokladů při odvození této formule učiněných vytýkám zejména vedle předpokladu (+) předpoklad o existenci derivací až do řádu $2m+2$ v intervalu (b_0, ∞), kde b_0 pevné číslo takové, že $a_0 + ph \geqq b_0$. Číslo celé p pak může v rovnici napsané nabývati libovolné hodnoty splňující tuto nerovninu.

PŘÍKLAD 1. Odvození Stirlingovy formule pro $\log n!$ Klademe-li v sumační formuli

$$a_0 = 1,\ h = 1,\ p = n-1,\ F(x) = \log x, \text{ tedy} \int_1^n \log x\,dx = n\log n - n$$

máme ihned

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = A + (n + \tfrac{1}{2})\log n - n + \frac{B_1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n} +$$
$$-\frac{B_2}{3\,.\,4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + (-1)^m\frac{\delta_0 B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{n^{2m-1}},$$

ve kteréžto rovnici jest $0 \leqq \delta_0 \leqq 1$; zbývá pak jenom vypočítati číslo A. Jest očividně

$$A = \lim_{n=\infty}\log\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

a budeme počítati

$$\lim_{n=\infty}\varphi(n) = \alpha, \text{ kde } \varphi(n) = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}.$$

Jest také

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha, \qquad \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = 2\cdot\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2)\sqrt{2n}}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-3)(2n-1)} =$$
$$= \left(4\cdot\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\ldots(2n-2)(2n-2)2n}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ze kteréhož výsledku a formule Walisovy (str. 162, rovn. (11')) následuje ihned $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Máme tedy

$$\log(n!) = (n + \tfrac{1}{2}) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3.4} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)2m} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}} + r_m,$$

při čemž zbytek r_m v řadě na pravé straně jest menší v absolutní hodnotě než poslední člen řady a protivného znaménka. K formuli této se vrátíme později, kde podáme její zevšeobecnění, jež však také lze získati stejnou cestou.

PŘÍKLAD 2. Výpočet Eulerovy konstanty. Klaďme v summační formuli

$$a_0 = 1,\ h = 1,\ p = n - 1,\ F(x) = 1/x, \int_1^n dx/x = \log n.$$

Dostaneme

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \tfrac{1}{2}\frac{1}{n} + A - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + (-1)^m \frac{B_m}{2m} \cdot \frac{1}{n^{2m}} - r_m,$$

kde patrně

$$A = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

jest rovno Eulerově konstantě C. Dosadíme-li do rovnice odvozené C za A, dostaneme pro C tento výsledek

$$C = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) - \log n + \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{B_2}{4} \cdot \frac{1}{n^4} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m} \cdot \frac{1}{n^{2m}} + r_m;$$

pro r_m jest platno totéž tvrzení jako v příkladě předchozím.

Rozvoje tohoto lze s prospěchem užíti pro výpočet Eulerovy konstanty; vezmeme-li ku př. $m = 10$ a $n = 7$, pak jest absolutní hodnota zbytku

$$\frac{\vartheta B_7}{14 . 10^{14}} = \frac{\vartheta . 1}{12 . 10^{14}}$$

a dostaneme pomocí 7 členů tohoto rozvoje Eulerovu konstantu s chybou menší než $1 . 10^{-15}$. Jest

$$C = 0{\cdot}577215664901532 86 \ldots$$

Eulerova konstanta, po číslech e a π nejdůležitější konstanta analyse, zavedena byla poprvé *Eulerem*, který ji rovněž prvý vypočetl (na 14 desetinných míst (Petrop. Com., sv. 7, za rok 1734/5 str. 156, Petrop. Novi Comm., sv. 14, r. 1769 str. 153). Později počítal konstantu tu Mascheroni (Adnotationes ad Calculum Integralem Euleri; viz L. Euleri, Opera, řada I., sv. 12, str. 431) a vypočetl ji na 32 míst, z nichž však pouze prvých 19 bylo správno.*) Od jiných bylo C vypočteno spolehlivě až na 59 míst.

113. Jiné odvození formule Euler-Maclaurinovy. Odvození formule Euler-Maclaurinovy lze poněkud pozměniti; avšak i toto malé pozměnění jest velmi významné, neboť nám poskytuje

*) Někteří matematikové nazývají číslo C též Mascheroniova konstanta.

snadný prostředek podaný postup zevšeobecniti a odvoditi četné jiné formule formuli Euler-Maclaurinově příbuzné. Řadu polynomů $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \cdots$ dostaneme, když vycházíme od $\varphi_1(x)$ postupně integrujíce (odst. 109, (3)). Dvojitou postupnou integrací polynomu $\varphi_1(x)$ na př. dospíváme k $\varphi_3(x)$; při tom vyskytnou se dvě integrační konstanty, jež však jsou úplně určeny podmínkami $\varphi_3(0) = \varphi_3(1) = 0$. Můžeme pak obecně tvrditi: Jestliže v řadě funkcí definovaných aspoň v intervalu (0, 1)

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x),\ \ldots$$

jest

$$\varphi_1(x) = x - \tfrac{1}{2},\ \varphi'_k(x) = \varphi_{k-1}(x) \quad \text{a} \quad \varphi_{2k+1}(0) = \varphi_{2k+1}(1) = 0 \text{ při } k > 0,$$

pak polynomy $\varphi_k(x)$ shodují se s funkcemi Bernoulliskými v odst. 109 zavedenými a stejně označenými, a to aspoň v intervalu (0, 1).

Uvažujme nyní funkci

$$P_1(x) = \frac{\sin 2\pi x}{1\pi} + \frac{\sin 4\pi x}{2\pi} + \frac{\sin 6\pi x}{3\pi} + \frac{\sin 8\pi x}{4\pi} + \cdots + \frac{\sin 2k\pi x}{k\pi} + \cdots$$

Tato funkce jest (ku př. dle př. 16 odst. $18m$, viz též př. 1μ, odst. 73), když x jest v $(0+0, 1-0)$ rovna $-\varphi_1(x)$. Funkci $P_1(x)$ můžeme snadno postupně integrovati. Dostaneme řadu

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ \cdots,\ P_k(x),\ \cdots$$

kde

$$P_{2\lambda}(x) = (-1)^\lambda 2 \sum \frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2\lambda}}, \quad P_{2\lambda+1}(x) = (-1)^\lambda 2 \sum \frac{\sin 2k\pi x}{(2k\pi)^{2\lambda+1}}. \tag{X}$$

Funkce $P_k(x)$ při $k > 1$ jsou funkce spojité pro každé x a jest $P'_k(x) = P'_{k-1}(x)$. Nadto jest $P_{2k+1}(0) = P_{2k+1}(1) = 0$. Jelikož dále jest $P_1(x) = -\varphi_1(x)$, když x jest v $(0+0, 1-0)$, jest

$$P_k(x) = -\varphi_k(x) \text{ pro } x \text{ v } (0, 1).$$

Všecky funkce $P_k(x)$ jsou funkce periodické s periodou 1; jest $P_k(x+m) = P_k(x)$, jestliže m jest celé číslo. Největší však význam v úvaze naší má funkce $P_1(x)$; ta má v intervalu $(0+0, 1-0)$ derivaci v každém bodě (neboť jest tam rovna $-x+\frac{1}{2}$) rovnou -1; i má se zřetelem k periodicitě derivaci pro každé x různé od celého čísla. Pro $x = m$, kde m jest celé, má pak diskontinuitu. Neboť jest

$$P_1(m+0) = P_1(0+0) = \lim_{x=+0}(-x+\tfrac{1}{2}) = +\tfrac{1}{2},\ P_1(m-0) = P_1(1-0) = -\tfrac{1}{2};$$

i jest

$$P_1(m-0) - P_1(m+0) = -1.$$

Integrujeme-li nyní částečně součin $-1 \,.\, f(x)$ v mezích (α, β) dle formule (3) odst. 102 (majíce při tom na paměti, že $P_1(x)$, již budeme pokládati za integrál neurčitý k funkci stále rovné -1, jest nespojitá, viz (11) odst. 101), máme při náležitých předpokladech o funkci $f(x)$ ihned tento vztah ($\beta > \alpha$):

$$-\int_\alpha^\beta f(x)dx = -[f(m+1)+f(m+2)+\cdots+f(m+r)]+[f(\beta)P_1(\beta-0)-f(\alpha)P(\alpha+0)]-$$
$$-[f'(\beta)P_2(\beta)-f'(\alpha)P_2(\alpha)]+[f''(\beta)P_3(\beta)-f''(\alpha)P_3(\alpha)]+\cdots \tag{14}$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}[f^{(n-1)}(\beta)P_n(\beta)-f^{(n-1)}(\alpha)P_n(\alpha)]+(-1)^n\int_\alpha^\beta f^{(n)}(x)P_n(x)dx.$$

Při tom jsou $m+1, m+2, \ldots, m+r$ všecka čísla celá, obsažená v intervalu $(\alpha+0, \beta-0)$. Zvolíme-li si za α, β dvě čísla celá, dostaneme, použijeme-li známých nám hodnot funkcí $P_k(x)$ při x rovném celému číslu, formuli Euler-Maclaurinovu ve tvaru již svrchu zevrubně odvozeném; jenom tvar zbytku bude odchylný, vhodnější však k číselným odhadům. Při jiné volbě čísel α, β získáváme jiné tvary pro formuli Euler-Maclaurinovu. Vedle toho, že jsme získali jisté její zevšeobecnění s jiným výrazem pro zbytek, má vzorec právě podaný také tu výhodu, že můžeme v rovnici (14) snadno přejíti k limitě pro případ, že $\lim \beta = \infty$, při čemž ovšem nutno zavésti integrály nevlastní, (viz odst. 67 a později oddíl VII) a není tu třeba obratů užitých v odst. 112. *Nahradíme-li pak funkci $P_1(x)$ jinou podobně tvořenou, získáme jiné vztahy, jež rozmanitým způsobem nám mohou býti užitečny.* Objasním toto tvrzení na příkladě zcela jednoduchém.

POZNÁMKA. Dosadíme-li do (X) za $x=0$ a máme-li na zřeteli rovnici 4) odst. 109 a vztah $P_{2\lambda}(0)=-\varphi_{2\lambda}(0)$, dostaneme ihned

$$\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2\lambda}},$$

vztah nám známý již z DP, 159(h). Z něho vyplývá snadným počtem, že

$$2\sum\frac{1}{[(2k-1)\pi]^{2\lambda}}=\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!}(2^{2\lambda}-1). \tag{=}$$

114. PŘÍKLAD 1. Uvažujme funkci periodickou o periodě 2π

$$Q_1(x)=\frac{\sin\pi x}{1\pi}+\frac{\sin 3\pi x}{3\pi}+\frac{\sin 5\pi x}{5\pi}+\cdots$$

Jest (viz př. 16 ve cvič. k odst. 18m)

$$Q_1(x)=\tfrac{1}{4}, \text{ je-li } x \text{ v } (0+0, 1-0),\quad Q_1(x)=-\tfrac{1}{4} \text{ pro } x \text{ v } (1+0, 2-0).$$

Postupně utvořené primitivní funkce ke $Q_1(x)$ dávají řadu funkcí periodických o periodě 2π a spojitých v každém intervalu:

$$Q_2(x),\ Q_3(x),\ Q_4(x),\ \ldots$$

kde

$$Q_{2\lambda}(x) = (-1)^{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{[(2k-1)\pi]^{2\lambda}},\quad Q_{2\lambda+1}(x) = (-1)^{\lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\pi x}{[(2k-1)\pi]^{2\lambda+1}}.$$

Očividně jest (viz svrchu (=))

$$Q_{2\lambda+1}(m) = 0,\ Q_{2\lambda}(m) = (-1)^{m+\lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{[(2k-1)\pi]^{2\lambda}} =$$

$$= (-1)^{m+\lambda}.\tfrac{1}{2}(2^{2\lambda}-1)\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!} = \frac{(-1)^{m+\lambda}}{4}C_\lambda,$$

jelikož jest (v důsledku toho, že známe hodnotu výrazu $Q_1(x)$) za předpokladu, že $f'(x)$ jest integrace schopno a čísla p, q jsou čísla celá,

$$\int_p^{p+q} Q_1(x) f'(x)\,dx = \frac{(-1)^{p-1}}{4}S,\ \text{kde } S = f(p) - 2f(p+1) + 2f(p+2) - \cdots + (-1)^q f(p+q)$$

máme, užijeme-li na integrál vyjadřující S postupně integrace částečné, tento rozvoj pro S

$$S = -C_1[f'(p) \mp f'(p+q)] + C_2[f'''(p) \mp f'''(p+q)] - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\lambda}C_\lambda[f^{(2\lambda-1)}(p) \mp f^{(2\lambda-1)}(p+q)] + R_\lambda,$$

kde $\mp 1 = (-1)^{q-1}$ a

$$R_\lambda = (-1)^{p-1}.4\int_p^{p+q} f^{(2\lambda+1)}(x)Q_{2\lambda+1}(x)dx = (-1)^p.4\int_p^{p+q} f^{(2\lambda)}(x)Q_{2\lambda}(x)dx.$$

Pro zbytek odvodíme si snadno větu, že jest v absolutní hodnotě menší než poslední člen rozvoje pro S a znaménka protivného (než má poslední člen), předpokládáme-li, že $f^{(2\lambda)}(x)$ a $f^{(2\lambda+2)}(x)$ v intervalu uvažovaném nemění své znaménko, jež jest při obou stejné; za jiného předpokladu pak bychom o velikosti zbytku mohli odvoditi věty obdobné jako při Euler-Maclaurinově formuli.

Volíme-li na př. $f(x) = \frac{1}{x}$, $p = n$, $q = \infty$, máme po snadné úpravě tento vztah (asymptotický)

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots = (2^2-1)\frac{B_1}{2n^2} - (2^4-1)\frac{B_2}{4n^4} + (2^6-1)\frac{B_3}{6n^6} - \cdots$$

Máme tedy pro $\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ přibližné vyjádření

$$\log 2 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n} +$$
$$+ (-1)^{n-1}\left[(2^2-1)\frac{B_1}{2n^2} - (2^4-1)\frac{B_2}{4n^4} + \cdots\right],$$

který se hodí k praktickému výpočtu; odchylka pravé strany od levé jest menší v absolutní hodnotě než poslední člen podržený v hranaté závorce (aneb též první zanedbaný člen).

Učiníme-li $n = 10$ a podržíme-li v hranaté závorce 5 prvých členů, máme pro log 2 tuto hodnotu přibližnou

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{2.10}\right) - \frac{1}{4.10^2} + \frac{1}{8.10^4} - \frac{1}{4.10^6} + \frac{17}{16.10^8} - \frac{31}{4.10^{10}} =$$

$$= 0{\cdot}695634920635\ldots - 10^{-4}.25 + 10^{-7}.125 - 10^{-8}.25 + 10^{-11}.10.25 - 10^{-13}.775 =$$
$$= 0{\cdot}693\,147\,180\,485\ldots$$

kteréžto číslo jest menší než log 2 o méně než $87 \cdot 10^{-12}$ (první zanedbaný člen).

Volíme-li $f(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}}$, dostaneme obdobně

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \cdots = \sum_{k=1}^{\varrho} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1) B_k}{4k (2n+1)^{2k}} + r_\varrho,$$

kde pro r_ϱ jsou platny stejné výroky, jež učiněny byly v předcházejícím případě. Jest tedy

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2(2n+1)} + (-1)^n \sum_{1}^{\varrho} (-1)^{k-1} \frac{T_k}{4k(2n+1)^{2k}} + (-1)^n r_\varrho,$$

při tom jsou T_k čísla celá, vyskytující se v rozvoji $\operatorname{tg} x$ (DP 160), označovaná někdy pojmenováním tangentové koefficienty. Tu jest pro $n = 12$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{23} + \frac{1}{2.25} = 0{\cdot}784\,600\,691\,481\,8229,$$

$$8 \cdot 10^{-4} - 256 \cdot 10^{-8} + 2^{15} \cdot 10^{-12} - 2^{19} \cdot 17 \cdot 10^{-16} + 2^{27} \cdot 31 \cdot 10^{-20} -$$
$$- 2^{32} \cdot 691 \cdot 10^{-24} + 2^{39} \cdot 5461 \cdot 10^{-28} = 0{\cdot}000\,797\,471\,915\,6503.$$

Tedy přibližná hodnota pro $\frac{1}{4}\pi$ jest dána výrazem

$$0{\cdot}7853\,9\,16\,3397\,4832 - \Theta \cdot 3 \cdot 10^{-13},$$

kde Θ jest číslo v $(0, 1)$. Ve skutečnosti můžeme pro odchylku této přibližné hodnoty od skutečné udati číslo značně menší, vypočteme-li ještě následující (osmý) člen asymptotického rozvoje.

PŘÍKLAD 2. Abychom osvětlili vliv, který může míti volba mezí, provedeme úvahy příkladu předcházejícího, při čemž volíme místo mezí integračních $p, p+q$ čísla $p - \frac{1}{2}$, $p + q + \frac{1}{2}$. Pak jest

$$\int_{p-\frac{1}{2}}^{p+q+\frac{1}{2}} Q_1(x) f'(x)\, dx = \frac{(-1)^{p-1}}{2} [f(p) - f(p+1) + f(p+2) \ldots, + (-1)^q f(p+q)] +$$
$$+ \frac{(-1)^p}{4} f(p - \tfrac{1}{2}) + \frac{(-1)^{p+q}}{4} f(p+q+\tfrac{1}{2}).$$

Postupnou částečnou integrací dostáváme rovněž rovnost, ze které následuje vztah

$$f(p) - f(p+1) + f(p+2) - \cdots + (-1)^q f(p+q) = \tfrac{1}{2}[f(p-\tfrac{1}{2}) + (-1)^q f(p+q+\tfrac{1}{2})] +$$
$$- D_1 [f''(p-\tfrac{1}{2}) + (-1)^q f''(p+q+\tfrac{1}{2})] + D_2 [f^{(IV)}(p-\tfrac{1}{2}) + (-1)^q f^{(IV)}(p+q+\tfrac{1}{2})] + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^\lambda D_\lambda [f^{(2\lambda)}(p-\tfrac{1}{2}) + (-1)^q f^{(2\lambda)}(p+q+\tfrac{1}{2})] + R'_\lambda.$$

Tu jest

$$D_k = (-1)^k 2 Q_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{\pi^{2k+1}} \left[\frac{1}{1^{2k+1}} - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \cdots \right] = \frac{E_k}{2^{2k+1} \cdot (2k)!}, \quad \text{(DP 160)}$$

$$R'_\lambda = (-1)^{p-1} \cdot 2 \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+q+\frac{1}{2}} Q_{2\lambda+1}(x) f^{(2\lambda+1)}(x)\, dx.$$

Při tom jsou E_k t. zv. Eulerova čísla (jež jsou čísla celá) a pro zbytek lze obdobným způsobem jako při formuli Euler-Maclaurinově odvoditi stejné důsledky, zejména lze snadno dokázati, že nemění-li $f^{(2\lambda+1)}(x)$ v intervalu integračním své znaménko, zbytek jest v absolutní hodnotě menší než poslední podržený člen asymptotického rozvoje.

Aby vysvitla užitečnost i této formule, naznačím numerický výpočet čísla π na 20 desetinných míst na podkladě Leibnicovy řady pro π (DP, 139). Volíme-li opět (jako svrchu) $f(x) = 1/(x + \frac{1}{2})$ a interval integrační (n, ∞), máme asymptoticky

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{3}{2}} + \frac{1}{n+\frac{5}{2}} - \cdots = \frac{1}{2n} - \frac{E_1}{(2n)^3} + \frac{E_2}{(2n)^5} - \frac{E_3}{(2n)^7} + \cdots$$

Pro náš účel postačí voliti $n = 25$. I dostaneme

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{49}\right) - 2\left[\frac{2}{10^2} - \frac{2^3 E_1}{10^6} + \frac{2^5 E_2}{10^{10}} - \cdots\right].$$

Závorka kulatá vypočtena na 25 desetinných míst, má hodnotu

$$0{\cdot}79539\,41713\,58757\,80382\,53265.$$

Prvních jedenáct členů v závorce hranaté má po řadě hodnoty

$$0{\cdot}02 - 8\,.\,10^{-6} + 160\,.\,10^{-10} - 780\,8\,.\,10^{-14} + 70\,9120\,.\,10^{-18} - 103\,467\,008\,.\,10^{-22} +$$
$$+ (2214\,105\,088 - 653\,266\,06 + 254\,1684 - 126\,084 + 7767)\,.\,10^{-25}.$$

Při tom v posledních 5 členech, jež shrnuty jsou v závorce, podrženy jenom číslice k dalšímu počtu potřebné. Kdybychom pomocí uvedených čísel provedli výpočet čísla π, dostali bychom je s chybou menší než $2\,.\,7767\,.\,10^{-25}$, t. j. menší než dvě jednotky na 21. místě des. Avšak snadno lze s dostatečným přiblížením vypočísti i následující členy rozvoje asymptotického. Označíme-li člen $k+1$-vý krátce ξ_k, jest, je-li k již dosti veliké, tento přibližný vztah plynoucí z vyjádření čísel Eulerových nekonečnou řadou

$$\xi_{k+2} = \frac{\xi^2_{k+1}}{\xi_k} \cdot \frac{(2k+3)(2k+4)}{(2k+1)(2k+2)}(1+\varepsilon), \qquad |\,\varepsilon\,| < \frac{1}{3^{2k+1}}.$$

Z toho vyplývají pro dvanáctý a třináctý člen v hranaté závorce hodnoty $\xi_{11} = -582\,.\,10^{-25}$, $\xi_{12} = +52\,.\,10^{-25}$. Použijeme-li i těchto členů k výpočtu čísla π, dostaneme číslo, jež bude menší než π o méně než $2\,.\,52\,.\,10^{-25}$, t. j. o méně než 1 jednotku na 23. místě. Toto číslo jest

$$\pi = 3{\cdot}14159\,26535\,89793\,23846\,26422 + \eta \qquad 0 < \eta < 1\,.\,10^{-23}.$$

Vskutku lze pro η udati interval značně menší, jejž bychom obdrželi výpočtem čísla ξ_{13}. Tu bychom však musili již bráti též zřetel k chybám, jež vznikly zkrácením desetinných zlomků na 25 desetinných míst.

115. Polynomy Legendrovy. Zvolíme-li ve (3) odst. 102.

$$g(x) = (x-a)^n (x-b)^n,$$

pak, jelikož všecky derivace $g(x)$ až do $(n-1)$-vé inklusive jsou pro $x = a$ i pro $x = b$ rovny nule, jest

$$\int_a^b f(x)\, Q_n(x)\, dx = (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\,(x-a)^n (x-b)^n\, dx, \tag{1}$$

kde jsme kladli

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n (x-b)^n.$$

$Q_n(x)$ jest polynom stupně n-tého. Dosadíme-li za $f(x)$ *libovolný mnohočlen stupně n' menšího než n* — značme jej $R_{n'}(x)$ — *obdržíme*

$$\int_a^b R_{n'}(x)\, Q_n(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

Touto vlastností jest polynom $Q_n(x)$, dán-li jest koefficient při nejvyšší mocnosti x, úplně určen. Neboť kdyby byl ještě jiný polynom $\overline{Q_n}(x)$ stupně n-tého, pro který rovněž by bylo při libovolném $R_{n'}(x)$

$$\int_a^b R_{n'}(x)\, \overline{Q_n}(x)\, dx = 0, \qquad n' < n, \tag{2'}$$

tak bychom dostali z (2) a (2')

$$\int_a^b R_{n'}(x)[Q_n(x) - \lambda\overline{Q_n}(x)]\, dx = 0,$$

kdež konstantu λ zvolíme tak, aby mocnina x^n z výrazu

$$Q_n(x) - \lambda\overline{Q_n}(x)$$

vypadla; pak jest tento výraz stupně nižšího než n a my můžeme libovolný polynom $R_{n'}(x)$ učiniti rovným $Q_n(x) - \lambda\overline{Q_n}(x)$. Tím obdržíme

$$\int_a^b [Q_n(x) - \lambda\overline{Q_n}(x)]^2\, dx = 0,$$

což dle věty o střední hodnotě jest jenom tenkráte možno, když

$$Q_n(x) - \lambda\overline{Q_n}(x) = 0$$

pro všecka x (t. j. identicky); t. j. *polynomy $Q_n(x)$, $\overline{Q_n}(x)$ se liší jenom multiplikativní konstantou.*

Pro zjednodušení některých vztahů jest výhodno zavésti místo $Q_n(x)$ polynomy sice stejné základní vlastnosti (2), avšak s koefficientem

$$a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\ n} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

při x^n, t. j. položíme zavádějíce nové označení

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\, Q_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\, \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n. \tag{3}$$

Podle (2) jest

$$\int_a^b X_m X_n\, dx = 0, \qquad \text{pro } m > n; \tag{4}$$

podle (1) pak

$$\int_a^b X_n^2\, dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n\, dx = \tag{5}$$

$$= \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)} \quad \text{(odst. 66.)};$$

Rovnice $X_n = 0$ má n reálných různých kořenů, které leží uvnitř intervalu (a, b). Neboť, připustíme-li, že má buď kořeny ležící vně intervalu (a, b) nebo kořeny komplexní (sdružené) anebo kořeny mnohonásobné, můžeme vždy z výrazu X_n odloučiti reálný faktor (obsahující kořenové činitele příslušné jednak kořenům vně intervalu (a, b), jednak kořenům komplexním, a konečně kořenové činitele na sudý mocnitel povýšené a příslušné kořenům mnohonásobným), který, když x probíhá interval (a, b), znaménka svého nemění. Klaďme tedy $X_n = T \,.\, U$, kde mnohočlen T jest stupně nižšího než n a U jest stále téhož znaménka v (a, b). Užijeme-li rovnice (2), kladouce $R_n(x) = T$, máme

$$\int_a^b T^2 U \, dx = 0,$$

což jest dle věty o střední hodnotě nemožno.

116. Obyčejně se volí čísla a, b rovna -1, 1 (po případě též rovna číslům 0, 1). Učiňme $a = -1$, $b = 1$ a označme polynom, který z X_n volbou tou vzniká, $P_n(x)$; jest pak, vyrozumíváme-li pod D_x^n n-tou derivaci dle x, při $m \neq n$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \,.\, n!} D_x^n (x^2 - 1)^n, \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \, P_n(x) \, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} P_n^2(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \tag{7}$$

a dále

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} D_x^n \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right]^n$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^n D_\xi^n (\xi^2 - 1)^n, \quad \xi = \frac{x - \frac{1}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(b-a)};$$

t. j.

$$X_n = \left(\frac{b-a}{2} \right)^n P_n \left(\frac{x - \frac{1}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(b-a)} \right) \tag{8}$$

a lze tedy od specielních polynomů $P_n(x)$ přejíti snadno ku obecnějším X_n. Postačí tudíž, když v následujícím omezíme se na mnohočleny $P_n(x)$, jež zpravidla se nazývají *polynomy Legendreovy.**) Polynomy X_n nazývejme v následujícím Legendreovy mnohočleny pro interval (a, b).

117. Další věty o mnohočlenech Legendreových. *a)* Mnohočleny $P_n(x)$ jsou při sudém n sudou funkcí x, při lichém n li-

*) Legendre zabýval se jimi v pojednání „Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mém. de Mathématique et de Physique présentées à l'Académie r. des Sciences par divers savants", t. X., 1785, str. 411. Gauss a po něm i jiní nazývají tyto polynomy sférickými (také kulovými „Kugelfunktionen"). (Werke, t. VI., p. 648).

chou funkcí x. Vyplývá to bezprostředně z (6). K vůli jednoduchosti klademe $P_0(x) = 1$, čímž správnost relací (7) nedotčena i při $n = 0$.

b) Mezi mnohočleny Legendreovými jsou *rekurrentní relace*, jež můžeme následovně odvoditi. Každý mnohočlen stupně n-tého dá se lineárně pomocí koeficientů konstantních vyjádřiti mnohočleny $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, ..., $P_1(x)$, $P_0(x)$. Zvláště to platí o mnohočlenu $x P_n(x)$, který jest stupně $n+1$-vého a pro který tedy jest

$$x P_n(x) = a_{-1} P_{n+1}(x) + a_0 P_n(x) + a_1 P_{n-1}(x) + \dots + a_i P_{n-i}(x) + \dots + a_n P_0(x). \tag{9}$$

Abychom stanovili koefficient a_i, násobíme obě strany mnohočlenem $P_{n-i}(x)$ a integrujeme v mezích -1, 1. Na levé straně dostaneme

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) \,.\, x P_{n-i}(x)\, dx,$$

což jest rovno nule podle (2), je-li $n - i + 1 < n$ t. j. je-li $i > 1$. Na pravé straně integrály ze všech členů podle (7) vymizí vyjma integrál

$$a_i \int_{-1}^{1} P_{n-i}^2(x)\, dx = \frac{2a_i}{2n - 2i + 1};$$

i jest tedy $a_i = 0$ pro $i > 1$, takže relace (9) se změní v

$$x P_n(x) = a_{-1} P_{n+1}(x) + a_0 P_n(x) + a_1 P_{n-1}(x).$$

Součinitele a_{-1}, a_0, a_1 můžeme určiti stejným způsobem, jednodušeji však, porovnáme-li koeficienty mocnin x^{n+1}, x^n, x^{n-1} na obou stranách; dostaneme tak rovnici

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1)\, x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0. \tag{9'}$$

Pomocí této rovnice lze mnohočleny $P_n(x)$ postupně snadno počítati, známe-li ty mnohočleny pro dva indexy, ku př. 0, 1; dostáváme pro první indexy

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \tfrac{3}{2} x^2 - \tfrac{1}{2},\\
P_3(x) &= \tfrac{5}{2} x^3 - \tfrac{3}{2} x,\\
P_4(x) &= \tfrac{35}{8} x^4 - \tfrac{15}{4} x^2 + \tfrac{3}{8},\\
P_5(x) &= \tfrac{63}{8} x^5 - \tfrac{35}{4} x^3 + \tfrac{15}{8} x,\\
P_6(x) &= \tfrac{231}{16} x^6 - \tfrac{315}{16} x^4 + \tfrac{105}{16} x^2 - \tfrac{5}{16}, \quad \text{atd.}
\end{aligned}$$

c) Pomocí Legendreových mnohočlenů lze snadno vyjádřiti součinitele rozvoje

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots \tag{10}$$

(Viz DP, 162, příkl. 1., kde podáno jiné odvození tohoto rozvoje.) Koefficienty A_k jsou mnohočleny v x (jak snadno následuje ku př. z binomické věty) a jest $A_0 = 1$, $A_1 = x$; pro ostatní A_k odvodíme si rekurentní formuli. Označíme si funkci proměnné t, na levé straně rovnice (10) se nacházející, krátce z; máme pak snadným počtem pro derivaci té funkce dle t

$$(1 - 2tx + t^2)\, z' + (t - x)\, z = 0,$$

aneb, dosadíme-li příslušné rozvoje

$$\begin{gathered}(1 - 2tx + t^2)\,(A_1 + 2A_2 t + \ldots + (n+1) A_{n+1} t^n + \ldots) + \\ + (t - x)\,[A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n + \ldots] = 0.\end{gathered}$$

Položíme-li koefficient při t^n na levé straně rovný nule, dostaneme ihned

$$(n+1) A_{n+1} - (2n+1) x A_n + n A_{n-1} = 0,$$

kterážto relace shoduje se s (9′); poněvadž pak $A_0 = P_0(x)$, $A_1 = P_1(x)$, jest obecně $A_k = P_k(x)$ a dospíváme tak k důležitému rozvoji

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = P_0(x) + P_1(x)\, t + P_2(x)\, t^2 + \ldots \tag{10′}$$

Rozvoj tento při $|x| \leqq 1$ jest konvergentní pro $|t| < 1$, naproti tomu rozvoj platný při $t > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = P_0(x)\frac{1}{t} + P_1(x)\frac{1}{t^2} + P_2(x)\frac{1}{t^3} + \ldots, \tag{10″}$$

který plyne snadno z předcházejícího, jest za téhož předpokladu konvergentní pro $t > 1$. Z rozvoje (10′) plynou, klademe-li tam po řadě $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, tyto hodnoty

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n}.$$

d) Z př. 7a cvičení za odst. 68 následuje, klademe-li tam místo x, C, A, B čísla φ, $1 - tx$, $-t\sqrt{1 - x^2}$, 0 za předpokladu $|x| \leqq 1$, vztah

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - tx) - i\, t \cos\varphi \sqrt{1 - x^2}}.$$

Z tohoto plynou, rozvineme-li funkci na pravé straně jednak dle stoupajících mocnin proměnné t (za předpokladu $|t| < 1$ a tedy $\varepsilon = 1$), jednak dle klesajících (a záporných) mocnin (za předpokladů $t > x^{-1}$, $x > 0$ a tedy $\varepsilon = -1$) a porovnáme-li výsledky s rozvoji (10′) a (10″), tato vyjádření Legendreových mnohočlenů pomocí určitých integrálů

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2})^n\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(x+i\cos\varphi\sqrt{1-x^2})^{n+1}}.$$

V druhém integrálu jest předpokládáno $x > 0$. V obou pak lze za i klásti $-i$. Z prvého vyjádření následuje téměř bezprostředně

$$|P_n(x)| < 1, \text{ je-li } |x| < 1.$$

e) Stejně jako (9′) lze odvoditi rovnici pro derivace Legendreových mnohočlenů

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\,P_n(x). \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

118. Důkaz, že číslo *e* jest číslem transcedentním. Každé číslo α, které hoví rovnici algebraické

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou čísla racionálná celistvá, sluje číslem *algebraickým.* Ku př. číslo $\sqrt{2}$ jest číslem algebraickým, jelikož hoví rovnici

$$x^2 - 2 = 0.$$

Číslo, které nehoví žádné rovnici algebraické o koefficientech celistvých racionálných, sluje *transcendentní.* Taková čísla jsou ku př. e a π (Ludolfovské číslo). Okolnost, že číslo π jest číslem transcendentním, jest obzvláštní důležitosti pro historii mathematiky; plyne z ní (jakožto zvláštní případ), že t. zv. kvadratura kruhu jest nemožna; t. j. že jest nemožno s použitím kružítka a pravítka sestrojiti čtverec, jenž by měl stejnou plochu jako daný kruh. Neboť veškeré délky, jež lze použitím kružítka a pravítka konstruovati, hoví rovnicím algebraickým, jež mají koeficienty rac. celistvé při vhodné volbě jednotky a jež lze zároveň řešiti řetězem rovnic kvadratických (jsou tedy zvláštním případem rovnic algebr. s cel. koef.).

Důkaz, že číslo e a důkaz, že číslo π jest transcendentní, lze podati methodou stejnou, jenom s tím rozdílem, že při důkaze pro číslo e vystačíme s veličinami a proměnnými reálnými, kdežto při čísle π jest účelno bráti v úvahu funkce (jakož i jich integrály s komplexní proměnnou. Zde tedy přirozeně omezíme se na číslo e.

Vyjdeme ze vzorce, získaného částečnou integrací

$$\int_0^r e^{-x} f(x)\,dx = -[e^{-x}f(x)]_0^r + \int_0^r e^{-x} f'(x)\,dx.$$

Opětovným použitím této formule (anebo jednodušeji ještě z rovnice (3) odst. 102. při $n = N + 1$) dostáváme, jestliže $f(x)$ jest mnohočlen v x N-tého stupně

$$\int_0^r e^{-x} f(x)\,dx = -\left[e^{-x}(f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(N)}(x))\right]_0^r,$$

t. j. klademe-li pro krátkost

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(N)}(x),$$

$$\int_0^r e^{-x} f(x)\,dx = F(0) - F(r)e^{-r},$$

odkudž

$$F(r) = F(0)e^r - e^r \int_0^r e^{-x} f(x). \tag{1}$$

Dejme tomu nyní, že číslo e hoví této rovnici algebraické

$$a_0 e^n + a_1 e^{n-1} + \ldots + a_{n-1} e + a_n = 0 \tag{2}$$

s celistvými koeficienty, při čemž a_0 jest od nuly různé, ku př. $a_0 > 0$ a učiňme pro $f(x)$ tuto volbu

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p.$$

Z rovnice (1) následuje, klademe-li tam $r = n$, pak $r = n - 1$, $r = n - 2, \ldots$ $r = 0$ celkem $n + 1$ rovnic, jež po řadě násobíme čísly $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ a sečteme. Vytkneme-li na pravé straně v rovnici tak vzniklé $F(0)$, tož příslušný člen vzhledem ku (2) vymizí a dostaneme vztah

$$a_0 F(n) + a_1 F(n-1) + \ldots + a_{n-1} F(1) + a_n F(0) = -\sum_{k=0}^{n} a_k e^{n-k} \int_0^{n-k} e^{-x} f(x)\,dx. \quad (3$$

Tento vztah však jest nemožný, jak ukážeme. Dosadíme-li totiž do $f(x)$ a jeho derivací některé z čísel $1, 2, \ldots n$, dostaneme buď 0 anebo číslo celé dělitelné p, jak z výrazu $f(x)$ bezprostředně jest patrno, jest tedy $F(k)$ = číslu celému *dělitelnému* p pro $k = 1, 2, \ldots n$. Pro $x = 0$, jest $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots f^{(p-2)}(0) = 0$; dále $f^{(p-1)}(0) = (1 . 2 . 3 \ldots . n)^p$; $f^{(p)}(0)$, $f^{(p+1)}(0), \ldots$ jsou pak čísla celá, jež jsou opět dělitelna p. Je-li tedy p prvočíslo větší než n, jest $F(0)$ = číslu celému *nedělitelnému* p. Budiž zároveň p prvočíslo větší než $|a_n|$, pak jest mnohočlen

$$a_0 F(n) + a_1 F(n-1) + \ldots + a_{n-1} F(1) + a_n F(0)$$

číslo celistvé, které není dělitelno p (jelikož prvých n členů jest, poslední člen není dělitelný p) a které jest tudíž jistě od nuly různé. Pravou stranu rovnice (3) odhadneme dle věty o střední hodnotě. Jest

$$\left|\int_0^{n-k} f(x)\,e^{-x}\,dx\right| = |f(\xi)|\,(1 - e^{-n+k}) < |f(\xi)| < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}$$

takže, označíme-li

$$M = |a_0|\,e^n + |a_1|\,e^{n-1} + |a_2|\,e^{n-2} + \ldots + |a_n|\,,$$

jest pravá strana rovnice (3) menší co do absolutní hodnoty než

$$M\frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}\,. \tag{4}$$

Prvočíslo p však není vázáno než podmínkami $p > |a_n|$, $p > n$; můžeme je tudíž zvoliti libovolně veliké. Zvolíme-li si je dosti veliké, stane se výraz (4) libovolně malý, ku př. lze zvoliti p tak veliké, aby výraz (4) byl menší než 1. Učiníme-li takovou volbu, tak z rovnice (3) vyplývá, že číslo celé od nuly různé (které se tedy, pokud se absolutní hodnoty týká, aspoň 1 rovná) jest rovno číslu menšímu než jedna, což jest nemožno.

Tím jest vyvrácen předpoklad, že číslo e hoví rovnici alg. (2) a dokázáno tudíž, **že jest e číslem transcendentním.**

Prvý důkaz transcendence čísla e podal *Hermite* (Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus de l'Acad., sv. 77, 1873), později podány jiné důkazy od různých matematiků (Hilbert, Stieltjes, Hurwitz, Gordan, Mertens).

Cvičení.

1. Nejenom v rozvoji Taylorově, nýbrž i v četných jiných rozvojích a přibližných výrazech lze vypsat zbytek ve tvaru určitého integrálu vhodného k numerickým výpočtům. Příklad následující osvětluje methodu používanou:

Odvoďte rozvoj při $a > 0$, $b > 0$

$$\log\frac{b}{a} = (a+b)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{ab} - \frac{1!}{2.6}\cdot\frac{(b-a)^3}{a^2b^2} + \frac{2!}{2.6.10}\cdot\frac{(b-a)^5}{a^3b^3} - \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^m\frac{(m-2)!}{2.6.10\ldots(4m-6)}\cdot\frac{(b-a)^{2m-3}}{a^{m-1}b^{m-1}}\right] +$$
$$+ (-1)^{m+1}\frac{(m-1)!}{2.6\ldots(4m-6)}\int_1^{\frac{b}{a}}\frac{(t-1)^{2m-2}}{t^m}\,dt.$$

Návod. Vyplývá použitím rekurentního vzorce (odst. 21; (f), (a))

$$\int\frac{(t-1)^{2k-4}}{t^{k-1}}\,dt + \frac{k-1}{4k-6}\int\frac{(t-1)^{2k-2}}{t^k}\,dt = \frac{(t-1)^{2k-3}}{t^{k-1}}\cdot\frac{1+t}{4k-6}$$

v mezích 1, b/a a pro $k = 2, 3, 4, \ldots, m$.

POZNÁMKA. Omezíme-li se na prvý člen obdržíme pro přibližnou hodnotu log b/a, je-li b/a v intervalu $(3-\sqrt{8}, 3+\sqrt{8})$, výraz

$$\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{\Theta}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{a^2b^2}(a+b), \qquad 0<\Theta<1$$

pomocí něhož počítal *Napier* logarithmické tabulky (nehledě k zbytku).

2. Dokažte tato vyjádření Bernoulliských funkcí $((m)_k = \binom{m}{k})$:

$$(2r)!\,\varphi_{2r}(x) = x^{2r} - \tfrac{1}{2}(2r)_1 x^{2r-1} + B_1(2r)_2 x^{2r-2} - B_2(2r)_4 x^{2r-4} + \ldots + (-1)^{r-1} B_r (2r)_{2r},$$

$$(2r+1)!\,\varphi_{2r+1}(x) = x^{2r+1} - \tfrac{1}{2}(2r+1)_1 x^{2r} + B_1(2r+1)_2 x^{2r-1} - \ldots + (-1)^{r-1} B_r (2r+1)_{2r} x.$$

Návod. Vytvořující funkce pro Bernoulliské polynomy dá se psáti jako součin

$$\frac{z}{e^z-1}\cdot e^{xz},$$

v němž prvý činitel jest vytvořující funkce pro Bernoulliská čísla. Viz rovnice (1) a (2) odst. 109.

3. Z rovnice $\varphi_{2r+1}(1)=0$ a příkladu předcházejícího následuje tento vztah pro Bernoulliská čísla (Moivreova relace, viz DP odst. 159).

$$(2r+1)B_r - (2r+1)_3 B_{r-1} + \ldots + (-1)^{r-1}(2r+1)_{2r-1} B_1 + (-1)^r (r-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

4. Ukažte, že $\qquad \varphi_k(x+1)-\varphi_k(x) = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$

(vytvořující funkce pro Bern. polynomy).

5. Z předcházejícího příkladu, je-li x celistvé a kladné, plyne snadno

$$1^{2r}+2^{2r}+\ldots+(x-1)^{2r} = (2r)!\,\varphi_{2r+1}(x).$$

Obdobně lze vyjádřiti i součet

$$1^{2r+1}+2^{2r+1}+\ldots+(x-1)^{2r+1}.$$

6. Dokažte vztah

$$\int_0^1 \varphi_r(x)\varphi_s(x)\,dx = 0, \text{ je-li } r+s \text{ liché}$$

$$= (-1)^{\frac{r-s}{2}} \frac{B_{\frac{r+s}{2}}}{(r+s)!}, \text{ je-li } r+s \text{ sudé.}$$

Návod. Lze dokázati buď pomocí integrace per partes (viz 1. vydání JP) aneb vyjádříme-li polynomy $\varphi_k(x)$ v $(0, 1)$ řadami trigonometrickými (dle odst. 113, viz také pozn.).

7. Jest.

$$\int_0^1 \varphi_r(x)\,.\sin 2k\pi x\,.\,dx = \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{(2\pi k)^r}, \text{ je-li } r \text{ liché}$$

$$\int_0^1 \varphi_r(x)\,.\cos 2k\pi x\,.\,dx = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}+1}}{(2\pi k)^r}, \text{ je-li } r \text{ sudé.}$$

Ve zbývajících případech se integrály napsané rovnají nule. (Postupuje se stejně jako v příkladě předcházejícím.)

8. Dokažte (m jest celé kladné)

$$\varphi_k(x) + \varphi_k(x + \frac{1}{m}) + \varphi_k(x + \frac{2}{m}) + \ldots + \varphi_k(x + \frac{m-1}{m}) = m^{-k+1} \varphi_k(mx).$$

Snadno vyplývá pomocí trigonometrických rozvojů pro interval $(0, 1/m)$ a tudíž obecně.

9. Dokažte rovnice

$$\varphi_{2r}(\tfrac{1}{2}) = (-1)^r (1 - \frac{1}{2^{2r-1}}) \frac{B_r}{(2r)!},$$

$$\varphi_{2r}(\tfrac{1}{3}) = \varphi_{2r}(\tfrac{2}{3}) = (-1)^r (1 - \frac{1}{3^{2r-1}}) \frac{B_r}{2(2r)!},$$

$$\varphi_{2r}(\tfrac{1}{4}) = \varphi_{2r}(\tfrac{3}{4}) = (-1)^r (1 - \frac{1}{2^{2r-1}}) \frac{B_r}{2^{2r}(2r)!},$$

$$\varphi_{2r}(\tfrac{1}{6}) = \varphi_{2r}(\tfrac{5}{6}) = (1 - \frac{1}{2^{2r-1}})(1 - \frac{1}{3^{2r-1}}) \frac{Br}{2(2r)!}.$$

Vyplývá z rovnice příkladu předcházejícího a vztahu $\varphi_k(x) = (-1)^k \varphi_k(1-x)$. Lze také dokázati z trigonometrických rozvojů pro funkce φ.

10. Dokažte dále
$$\varphi_{2s+1}(\tfrac{1}{4}) = (-1)^{s+1} \frac{1}{2^{4s+2}} \frac{E_s}{(2s)!}.$$

(Trigonometrický rozvoj pro $\varphi_{2s+1}(x)$ a vyjádření čísel E_s pomocí nekonečných řad; DP, str. 247).

11. Odvoďte na základě předcházejícího příkladu a příkladu 2 toto vyjádření Eulerových čísel pomocí Bernoulliských:

$$E_s = 2^{4s} \frac{B_s}{1} - (2s)_2 2^{4s-4} \frac{B_{s-1}}{3} + \binom{2s}{4} 2^{4s-8} \frac{B_{s-2}}{5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{s-1} \binom{2s}{2s-2} 2^4 \frac{B_1}{2s-1} + (-1)^s . 2 + \frac{(-1)^{s+1}}{2s+1}.$$

12. Lze psáti
$$(2r)!\, \varphi_{2r+1}(x) = A_{2r+1} \binom{x}{2r+1} + A_{2r} \binom{x}{2r} + \ldots\ldots + A_2 \binom{x}{2},$$

kde A_k jsou konstanty a $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$, neboť v takovém tvaru lze vyjádřiti každý polynom stupně $2r+1$ dělitelný $x(x-1)$. Konstanty A_k jsou dány rovnicí

$$A_k = (k-1)^{2r} - \binom{k-1}{1} (k-2)^{2r} + \binom{k-1}{2} (k-3)^{2r} - \ldots, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Návod. Abychom ustanovili A_k, dosadíme do výrazu pro $\varphi_{2r+1}(x) . (2r)!$ postupně za x $k, (k-1), \ldots 2, 1, 0$ a klademe ty výrazy rovny hodnotám uvedeným v př. 5. Utvořím pak z levých i pravých stran rovnic tak vzniklých (v počtu $k+1$) k-té diference. Na levé straně dostaneme A_k, na pravé pak $(k-1)$-tou differenci z čísel $(k-1)^{2r}, (k-2)^{2r}, (k-3)^{2r}, \ldots$.

13. Dokažte, že pro číslo Bernoulliské jest platno toto vyjádření:

$$(-1)^{r-1} B_r = \sum_{\lambda=2}^{2r+1} \frac{1}{\lambda} [0^{2r} - \binom{\lambda-1}{1} 1^{2r} + \binom{\lambda-1}{2} 2^{2r} - \ldots + (-1)^{\lambda-1} \binom{\lambda-1}{\lambda-1} (\lambda-1)^{2r}].$$

Návod. Porovnáme s koeficienty při x^1 ve výraze pro $(2r)!\,\varphi_{2r+1}(x)$ daném v případě předcházejícím a ve výraze plynoucím z příkl. 2.

14. Dokažte, že lze psát

$$(-1)^r B_r = \text{celému číslu} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots,$$

kde $p_1, p_2, \dots$ jsou prvočísla (> 3) taková, že $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots$ jsou děliteli čísla $2r$.

Návod. Plyne z vyjádření čísla Bernolliova daného v příkladě předcházejícím. Sčítanec uvedený tam za znaménkem součtovým jest číslo celé, když λ není prvočíslo. Neboť závorka hranatá jest dělitelna $(\lambda - 1)!$ (viz DP, str. 250, kde číslo $\pm G_r$, jež očividně jest číslo celé, shoduje se se závorkou hranatou dělenou $(\lambda - 1)!$, klademe-li v G_r místo r, n čísla $\lambda - 1$, $2r$); tím spíše jest závorka hranatá dělitelna λ, je-li toto číslo složené a různé od 4. Je-li λ prvočíslo a dělitelem čísla $2r$, pak jest závorka dle věty Fermatovy shodna dle modulu λ s $\lambda - 1$ a tedy příslušný sčítanec rovný číslu celému zmenšenému o $1/\lambda$. Je-li λ liché prvočíslo, které nedělí $2r$, pak dle Fermatovy věty $a^{2r} \equiv a^{2r_1}$ (mod λ), kde $2r_1$ jest zbytek dělení čísla $2r$ číslem $\lambda - 1$; $(\lambda - 1)$-tá difference však $2r_1$-tých mocnin čísel celých po sobě jdoucích, kde $0 < 2r_1 < \lambda - 1$ jest rovna nule. I jest tedy sčítanec příslušný číslo celé. Případ, že $\lambda = 2$ aneb $\lambda = 4$, snadno vyšetří čtenář.

15. Dokažte že Legendrovy polynomy hoví rovnici diff. lineární druhého řádu

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

Návod. Funkce $\eta = (1 - x^2)^n$ hoví rovnici $\eta'(1 - x^2) - 2nx\eta = 0$. Derivujeme-li tuto rovnici $n+1$-kráte a klademe-li pak $\eta^{(n)} = y$, máme ihned rovnici pro Legendrovy polynomy.

16. Rovnice předcházejícího příkladu se změní, zavedeme-li místo neodvisle proměnné x proměnnou φ rovnicí $x = \sin\varphi$ a místo neznámé y funkci $u = y\sqrt{\cos\varphi}$, v rovnici pro u

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\cos^2\varphi}\right] u = 0.$$

17. Rovnice differenciální předcházejícího příkladu má dva integrály u_1, u_2 hovící rovnicím (**rovnicím integrálním**)

$$u_1(\varphi) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{1}{2(2n+1)}\int_0^{\varphi} \frac{u_1(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - \varphi)}{\cos^2 t}\, dt,$$

$$u_2(\varphi) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{1}{2(2n+1)}\int_0^{\varphi} \frac{u_2(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - \varphi)}{\cos^2 t}\, dt.$$

$$0 \leq |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Návod. Že funkce u_1, u_2 proměnné φ vyhovující těmto rovnicím splňují danou differenciální rovnici, snadno se dokáže derivováním dle φ. Tak ku příkladu máme ihned

$$u_1''(\varphi) = -(n+\tfrac{1}{2})^2 \cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{2n+1}{8}\int_0^{\varphi} \frac{u_1(t)\sin(n+\frac{1}{2})(t-\varphi)}{\cos^2 t}\,dt - \frac{1}{4}\cdot\frac{u_1(\varphi)}{\cos^2\varphi}$$

$$= -(n+\tfrac{1}{2})^2\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{2n+1}{8}[2(2n+1)u_1(\varphi) - 2(2n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi] - \frac{1}{4}\cdot\frac{u_1(\varphi)}{\cos^2\varphi}.$$

Při tom jsme ovšem užívali derivace integrálu dle parametru; to však jest přípustno, neboť při funkci spojité integrál dle definice $C.-R.$ splývá s integrálem určitým definovaným na základě primitivní funkce. Pro tyto integrály však věty příslušné jsou nám známy.

Rovněž snadno lze dospěti od rovnice differenciální k rovnicím integrálním, užívá-li se methody v elementech theorie rovnic differenciálních vykládané, t. zv. variace konstant.

18. Mezi funkcemi u_1, u_2 předcházejícího příkladu a Legendrovými polynomy jsou vztahy

$$\sqrt{\cos\varphi}\,.\,P_n(\sin\varphi) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\cdot u_1(\varphi), \quad \text{je-li } n \text{ sudé;}$$

$$\sqrt{\cos\varphi}\,.\,P_n(\sin\varphi) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n-1)}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot u_2(\varphi), \quad \text{je-li } n \text{ liché.}$$

Návod. Integrál rovnice differenciální druhu zde v úvahu přicházejícího jest jednoznačně stanoven, jsou-li dány jeho hodnota a hodnota jeho derivace v bodě $\varphi=0$ (a tedy v bodě $x=0$). Odtud lze uzavírati ihned napsané vztahy.

19. Jestliže jest M horní hranice funkcí u_1, u_2, N pak horní hranice jich derivace a to obojí pro interval $(-\varphi_0, \varphi_0)$, kde $0 < \varphi_0 < {}^1/_2\pi$, pak jest

$$M < 1/(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{2(2n+1)}), \quad N < (n+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{4} M \operatorname{tg}\varphi_0,$$

t. j.

$$N < (n+\tfrac{1}{2})/(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{2(2n+1)}).$$

Plyne snadno z rovnic integrálních pro u_1, u_2.

Bude pak značiti v následujícím rovnost

$$f(x) = O(\varphi(x)),$$

$\varphi(x)$ jest funkce stále kladná, že $|f(x)|/\varphi(x)$ jest, když x jest v jistém intervalu $(A, +\infty)$ resp. v $(-A', -\infty)$, výrazem konečným (t. j. shora ohraničeným). Rovnost pak

$$(fx) = o(\varphi(x))$$

nám praví, že

$$\lim_{x=+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

20. Na základě označení právě vyloženého můžeme psáti (základní proměnná, se zřetelem které porovnáváme dvě funkce, jest nyní n)

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

(viz str. 162) a podle příkladů předcházejících

$$P_n(x) = O(\frac{1}{\sqrt{n}}), \quad P'_n(x) = O(\sqrt{n}),$$

jestliže x jest v intervalu $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Čtenář nechť stanoví čísla A, B nezávislá na x a taková, že pro všecka x uvedeného právě intervalu jest

$$|\sqrt{n}P_n(x)| < A, \qquad |n^{-\frac{1}{2}} P'_n(x)| < B.$$

21. Označme za předpokladu, že $n > 0$

$$\int_{\pm 1}^{x} P_n(x)\,dx = P_n^{(-1)}(x), \qquad \int_{\pm 1}^{x} P_n^{(-1)}(x)\,dx = P_n^{(-2)}(x), \ldots$$

Pak jest, je-li v prvé rovnici $n > 0$, v druhé $n > 1$

$$P_n^{(-1)}(x) = \frac{1}{n(n+1)}(x^2-1)P'_n(x), \quad P_n^{(-2)}(x) = \frac{1}{n(n+1)(n-1)(n+2)}(x^2-1)^2 P''_n(x)$$

a obecně, je-li $n > r - 1$

$$P_n^{(-r)}(x) = \frac{(n-r)!}{(n+r)!}(x^2-1)^r P_n^{(r)}(x), \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

(Jacobi, Werke, VI., str. 25.)

Návod. Pro $r = 1$, pro kterýžto pouze případ vypsaný obecný vztah v následujícím upotřebíme, jest vztah důsledkem rovnice differenciální (př. 15.), jak snadno nahlédneme, píšeme-li ji ve tvaru

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

V případě obecném lze relaci danou dokázati buď úplnou indukcí aneb zcela elementárně pomocí formule Taylorovy (viz Jacobi, l. c.).

22. Ukažte, že jest identicky

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}.$$

Návod. Násobíme levou stranu $x - y$ a místo $(2k+1)P_k(x)x$ píšeme dle (9') odst. 117 $(k+1)P_{k+1}(x) + kP_{k-1}(x)$ a obdobně nahradíme i $(2k+1)P(y)y$.

23. Dokažte, že

$$-\operatorname{sign}(x-y) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)P_k(x)P_k^{(-1)}(y),$$

(označení viz v příkl. 21, $P_0^{-1}(y) = y$) aneb, jelikož dle vztahu $(2k+1)P_k(y) = P'_{k+1}(y) - P'_{k-1}(y)$ jest $(2k+1)P_k^{(-1)}(y) = P_{k+1}(y) - P_{k-1}(y)$,

$$\operatorname{sign}(x-y) = \sum_{k=0}^{\infty}[P_{k+1}(x)P_k(y) - P_{k+1}(y)P_k(x)],$$

x, y v intervale $(-1, 1)$. Pokládáme-li y za proměnnou (a x za pevnou veličinu) jest řada na pravé straně konvergentní stejnoměrně v intervalech $(-1+\varepsilon,\ x-\varepsilon)$, $(x+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$.

Návod. Integrujme identitu předcházejícího příkladu v mezích -1, y, kde $y < x$. Dostaneme (primitivní funkce dle y jednotlivých členů levé strany ustanovená v příkladě 21 jest pro dolní mez rovna 0, je-li $k > 0$; pro $k = 0$ jest primitivní funkce pro $y = -1$ rovna -1):

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k^{(-1)}(y) + 1 = (n+1)\int_{-1}^{y}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\,dy.$$

Integrací částečnou máme

$$(n+1)\int_{-1}^{y}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}dy=(n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n^{(-1)}(y)-P_n(x)P_{n+1}^{(-1)}(y)}{x-y}-$$

$$-(n+1)\int_{-1}^{y}\frac{P_{n+1}(x)P_n^{(-1)}(y)-P_n(x)P_{n+1}^{(-1)}(y)}{(x-y)^2}dy.$$

Avšak $|P_{n+1}(x)P_n^{(-1)}(y)-P_n(x)P_{n+1}^{(-1)}(y)|<\frac{A}{n^2}$ (dle příkladů 20, 21) pro všecka y intervalu $(-1+\varepsilon,\ x-\varepsilon)$, při čemž A lze ustanoviti nezávisle na y a n. Tudíž konverguje v poslední rovnici i prvý i druhý člen pravé strany (tento dle věty o střední hodnotě) pro $\lim n=\infty$ k nule a to stejnoměrně pro všechna y intervalu $(-1+\varepsilon,\ x-\varepsilon)$. Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)P_k(x)P_k^{(-1)}(y)+1=0 \quad \text{aneb} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)P_k(x)P_k^{(-1)}(y)=-1,$$

je-li $-1<y<x$. Integrací v mezích $1,\ y$, kde $y>x$, dostaneme, že součet nekonečné řady uvažované jest $+1$, je-li $1>y>x$.

5. O NUMERICKÉM POČÍTÁNÍ URČITÝCH INTEGRÁLŮ (MECHANICKÉ KVADRATUŘE).

119. Výpočet numerický určitého integrálu závisí jednak na způsobu, jakým funkce za znaménkem integračním se nacházející jest definována, jednak na míře přesnosti, s jakou integrál hledaný jest vypočísti.

Jestliže ku př. se má počítati integrál z funkce definované řadou stejnoměrně konvergentní anebo z funkce, již lze snadno takovou řadou vyjádřiti, počítáme jej dle věty odst. 69, při čemž z řady bereme jenom tolik členů, aby číslo vypočtené dávalo nám integrál hledaný s přesností žádanou.

Ještě jednodušeji lze stanoviti hodnotu integrálu, a to rovněž s přesností libovolnou, známa-li jest nám funkce primitivní k funkci za znaménkem integračním (odst. 100, věta 2). Četné příklady k tomu podány byly v části prvé.

Konečně věta Euler-Maclaurinova nám v různých svých tvarech (viz odst. 111, 113) poskytuje velmi účinný prostředek k numerickému výpočtu určitých integrálů.

Při použitích matematiky v astronomii, ve fysice a pod. bývají však funkce, jichž integrály se mají počítati, dány toliko přibližně; ku př. tím, že pro jistou řadu argumentů jsou dány (přibližné) hodnoty funkce příslušné. V takovýchto případech nelze vypočítati integrál s přesností libovolnou a úkolem počtu jest stanoviti vedle přibližné hodnoty integrálu též hranici pro chybu (t. j. hranici pro rozdíl hodnoty pro integrál vypočtené od pravé hodnoty integrálu). Metody, podle nichž se provádí tento počet, shrnují se zpravidla pod názvem **mechanické kvadratury.**

Metody mechanické kvadratury lze použíti ovšem i na výpočet integrálů z funkcí daných analyticky; touto cestou získáme si často pohodlněji potřebných výsledků než jinými prostředky (jako ku př. integrací řady) a lze mechanickou kvadraturou docíliti při funkcích daných analyticky vždy výsledků, dávajících daný integrál s přesností libovolně velikou.

V následujícím vyložím hlavní metody pro mechanickou kvadraturu.

120. Nechť běží o výpočet integrálu

$$J = \int_a^b f(x)\,dx; \qquad b > a$$

při čemž funkce $f(x)$ budiž dána pro $n+1$ hodnot, a to pro $x = a$, $x = b$ a pro hodnoty, jež interval (a, b) dělí na n stejných dílů. Jest tedy $f(x)$ dána pro hodnoty x dané řadou

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \ldots, \quad x_n = a + nh,$$

kdež $nh = b - a$. Hodnoty, jichž nabývá funkce $f(x)$ pro tyto argumenty, označíme

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n.$$

Na základě pouhé znalosti čísel $y_0, y_1, \ldots y_n$ nemůžeme ani přibližně vypočítati integrál J; jest třeba učiniti jisté předpoklady o $f(x)$. Učiňme ku př. předpoklad, že $f(x)$ jest funkcí v intervalu (a, b) *stále rostoucí*, kterýžto předpoklad jest možno při $b > a$ učiniti ovšem jenom tehdy, když $y_i > y_{i-1}$, $(i = 1, 2, \ldots n)$; z předpokladu toho již také následuje existence integrálu z $f(x)dx$. Pak jest dle věty o střední hodnotě

$$hy_0 < \int_a^{a+h} f(x)\,dx < hy_1, \quad hy_1 < \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx < hy_2, \ldots$$

a tedy sčítáním takto vzniklých nerovnin v počtu celkem n

$$h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) < \int_a^b f(x)\,dx < h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{1}$$

Tím jest hledaná hodnota integrálu uzavřena mezi dvě čísla, jež se od sebe liší o $h(y_n - y_0)$, a můžeme tudíž hodnotu integrálu položiti rovnou aritmetickému středu obou čísel, při čemž se dopouštíme chyby menší, než jest poloviční rozdíl obou čísel, t. j. než

$$\tfrac{1}{2} h(y_n - y_0);$$

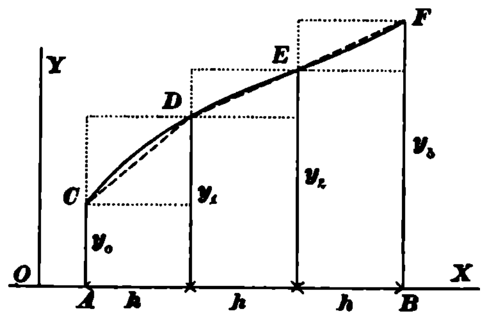
tak můžeme klásti

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + \Theta\,\frac{h}{2}(y_n - y_0), \quad |\Theta| < 1. \qquad (1')$$

$$= \frac{b-a}{n}(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + \Theta\,\frac{b-a}{2n}(y_n - y_0).$$

Stejný výsledek bychom obdrželi, kdyby $f(x)$ byla funkcí v (a, b) *stále klesající.*

Levá strana nerovniny (1) má jednoduchý geometrický význam. Jest to součet pravoúhelníků o základnách vesměs rovných h a o výškách $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$, kterýžto součet tvoří jistý mnohoúhelník, vepsaný do obrazce omezeného křivkou $y = f(x)$



Obr. 3.

a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Obdobně pravá strana nerovniny (1) jest součet pravoúhelníků, dávající jistý mnohoúhelník opsaný zmíněnému obrazci. Konečně prvý člen pravé strany rovnice (1′) jest *součet ploch lichoběžníků*, jichž rovnoběžné strany jsou dány pořadnicemi $y_0, y_1; y_1, y_2; \dots; y_{n-1}, y_n$. (Viz obr. 3, kde křivka $y = f(x)$ silně vytažena a pravoúhelníky i lichoběžníky vkresleny za předpokladu $n = 3$.) Se zřetelem ke geometrickému významu právě vytčenému sluje metoda pro výpočet integrálů opírající se o rovnici (1′) **metodou lichoběžníkovou.**

Jest patrno, že *prvý člen pravé strany rovnice* (1′) *vyjadřuje s přesností dostatečnou daný integrál, můžeme-li v jednotlivých intervalech neodvisle proměnné* $(a, a+h)$, $(a+h, a+2h)$, ... *pokládati* $f(x)$ *s dostatečnou přesností za funkci lineární;* t. j. vyjadřuje-li v intervalu $(a, a+h)$ výraz

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - a)$$

funkci $f(x)$ s přesností dostatečnou a podobně v jiných intervalech.

Jak by se výpočty v odstavci tomto naznačené prováděly za stejných předpokladů až na to, že intervaly (x_0, x_1), (x_1, x_2), ... (x_{n-1}, x_n) *nejsou stejné*, jest na snadě.

121. Ponechávajíce označení odstavce předcházejícího, klaďme $n=2m$. Jest tedy dáno $2m+1$ hodnot $y_0, y_1, \ldots, y_{2m}$ funkce $f(x)$ tak, že $y_k=f(a+kh)$, a interval (a, b) rozpadá se na m intervalů o délce $2h$, t. j. na intervaly $(a, a+2h)$, $(a+2h, a+4h)$, ... V každém z těchto intervalů jsou dány tři hodnoty $f(x)$, tak ku př. v prvním jsou dány y_0, y_1, y_2. Učiňme pak předpoklad, že $f(x)$ lze v jednotlivých intervalech o délce $2h$ pokládati s dostatečnou přesností za funkci kvadratickou proměnné x stanovenou vytčenými třemi hodnotami funkce. Lze tedy v intervalu prvém položiti za $f(x)$ výraz

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2,$$

při čemž A_0, A_1, A_2 jest tak stanoviti, aby tento výraz stával se pro $x=a$, $a+h$, $a+2h$ po řadě rovným y_0, y_1, y_2 Místo

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx$$

lze pak klásti

$$\int_a^{a+2h} (A_0+A_1x+A_2x^2)\,dx = \frac{h}{3}\,[6A_0 + A_1(6a+6h) + A_2(6a^2+12ah+8h^2)],$$

což jest rovno, jak snadným počtem lze se přesvědčiti,

$$=\frac{h}{3}\,(y_0+4y_1+y_2).$$

(Postačí ku prokázání rovnosti obou výrazů do posledního dosaditi $y_0=A_0+A_1a+A_2a^2$, $y_1=A_0+A_1(a+h)+A_2(a+h)^2$, $y_2=\ldots$). Obdobné výsledky lze odvoditi i pro ostatní intervaly; sečtením jich pak získáváme, že integrál daný lze na základě učiněného předpokladu s dostatečnou přesností klásti rovným výrazu

$$\frac{h}{3}\,[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+4y_{2m-1}+y_{2m}]. \tag{2}$$

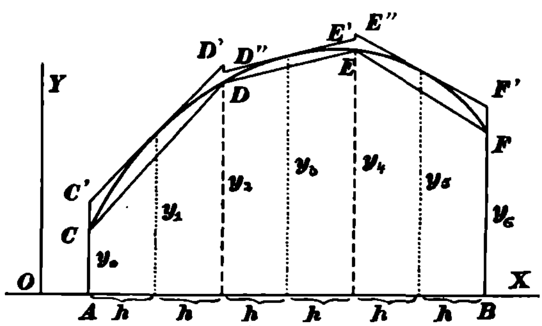
Formule tato sluje **Simpsonova.** Odvodíme si ji později na základě jiných předpokladů, při čemž zároveň bude za jistých předpokladů o funkci $f(x)$ podán odhad chyby.

Také tato formule má jednoduchý geometrický význam. Označíme-li plochu mnohoúhelníka $ABFEDC =$ **A**, plochu pak mnohoúhelníka $AC'D'D''E'E''F'B =$ **B** (viz obr. 4., kde předpokládáno $m = 3$, význam jednotlivých značek $A, B, \ldots C', D', \ldots$ patrný z obrazce), jest hoření výraz rovný číslu

$$\frac{A + 2B}{3}.$$

K tomuto výrazu snadno se dospěje, pokládají-li se oblouky CD, DE, EF křivky $y = f(x)$ za oblouky parabol o osách rovnoběžných s osou Y na základě známých vztahů pro plochu parabolického úseku. Podrobné odvození přenechávám čtenáři.

122. Výsledky odstavců předcházejících lze zevšeobecniti tím, že nahražujeme $f(x)$ mnohočlenem stupně r-tého, kterýž účelně volíme. K tomu cíli odvodíme si některé důležité věty o **interpolaci t. zv. parabolické.** Interpolace parabolická spočívá v nejjednodušším případě v tom, že sestrojujeme mnohočlen



Obr. 4.

určitého stupně r, který s danou funkcí $f(x)$ má pro $r+1$ argumentů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r$ tytéž hodnoty. To jest, značíme-li polynom onen $P_r(x)$ a $f(x_k) = y_k$, že

$$P_r(x_k) = f(x_k) = y_k; \qquad k = 0, 1, 3, \ldots r. \tag{3}$$

Polynom takový lze snadno sestrojiti; jest to výraz

$$P_r(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_r)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_r)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_0-x_r)}\,y_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})}\,y_r \tag{4}$$
$$= X_0 y_0 + X_1 y_1 + \ldots + X_r y_r,$$

kde (je-li i různo od $0, 1, 2, 3, r-1, r$) jest

$$X_i = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_r)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_r)}.$$

Že mnohočlen (4) stupně r-tého má vskutku v (3) vyznačené vlastnosti, patrno ihned, dosazujeme-li za x po řadě $x_0, x_1, x_2, \ldots x_r$.

A jest to jediný polynom stupně r-tého mající ty vlastnosti (pokládáme-li dva polynomy, jež sobě se rovnají pro každou hodnotu proměnné x, t. j. jež se sobě rovnají *identicky* a které se tudíž liší nejvýše tvarem, za tytéž polynomy); neboť kdyby byl ještě jeden mnohočlen stupně r-tého ku př. $\overline{P}_r(x)$, pak rozdíl $\overline{P}_r(x) - P_r(x)$ by byl rovný nule pro $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots r$; tedy celkem pro $r+1$ hodnot proměnné x, což jest nemožno; neboť mnohočlen r-tého stupně nemůže pro $r+1$ různých hodnot proměnné býti rovný nule, není-li roven nule identicky. Mnohočlen (4) *jest interpolační mnohočlen ve tvaru Lagrangeově;* budeme pak v následujícím k vůli stručnosti nazývati mnohočleny interpolační, jež se tomuto identicky rovnají, *polynomy interpolační Lagrangeovy.*

Rozdíl $f(x) - P_r(x)$ jest dle definice mnohočlenu $P_r(x)$ v (3) rovný nule pro $x = x_0, x_1, \dots x_r$; pro hodnotu toho rozdílu pro jiné hodnoty x lze odvoditi vztah v následujícím užitečný, zavedeme-li předpoklad, že $f(x)$ má v intervalu, ve kterém se nacházejí body $x_0, x_1, x_2, \dots x_r, x$, derivace $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r+1)}(x)$.

Učinivše tento předpoklad, vezmeme v úvahu funkci proměnné z

$$\Phi(z) = f(z) - P_r(z) - \frac{(z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_r)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_r)}(f(x) - P_r(x)).$$

Tato funkce má první, druhou, ... $(r+1)$-ní derivaci (dle předpokladu o $f(x)$); rovná se pak nule pro $z = x$ a pro $z = x_0, x_1, \dots, x_r$ (dle definice $P_r(x)$). Dle Rolleovy věty jest první derivace jistě rovna nule pro $r+1$ hodnot neodvisle proměnné z, druhá derivace pro r, třetí pro $r - 1$ hodnot, ... a $(r+1)$-vá derivace pro *jednu hodnotu proměnné z, jež nachází se v intervalu obsahujícím čísla $x, x_0, x_1, \dots, x_r$. Označme tuto hodnotu ξ.* Jest tedy

$$\Phi^{(r+1)}(\xi) = 0,$$

avšak snadným počtem plyne (stačí výraz pro $\Phi(z)$ $r+1$-kráte derivovati a pak dosaditi $z = \xi$)

$$\Phi^{(r+1)}(\xi) = f^{(r+1)}(\xi) - \frac{(x+1)!}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_r)}(f(x) - P_r(x)),$$

odkudž

$$f(x) = P_r(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_r)}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi). \tag{5}$$

Tím jest podáno vyjádření funkce $f(x)$ polynomem $P_r(x)$ a členem, jemuž budeme říkati *zbytek* příslušející k interpolačnímu polynomu $P_r(x)$. Vyjádření to má praktickou cenu jenom tehdy, známe-li aspoň přibližně průběh funkce $f^{(r+1)}(x)$.

PŘÍKLAD. Funkce $f(x)=\frac{1}{x+2}$ nabývá pro $x=0, 1, 2$ hodnoty $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Mnohočlen $\frac{1}{24}x^2-\frac{5}{24}x+\frac{1}{2}$ nabývá pro $x=0, 1, 2$ týchž hodnot; jest to tedy interpolační polynom Lagrangeův k dané funkci a hodnotám 0, 1, 2 neodvisle proměnné. Dle (5) pak jest

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{24}x^2-\frac{5}{24}x+\frac{1}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\cdot\frac{-6}{(\xi+2)^4},$$

při čemž ξ jest v intervalu obsahujícím čísla 0, 1, 2, x. Je-li $x>0$, což budeme předpokládati(jest i $\xi>0$ a $\xi+2>2$; i můžeme tudíž předcházející vztah psáti též

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{24}x^2-\frac{5}{24}x+\frac{1}{2}-\frac{\Theta}{16}x(x-1)(x-2),$$
$$x>0,\quad 0<\Theta<1,$$

čímž dáno přibližné vyjádření dané funkce polynomem druhého stupně a zbytkem, jenž nás do jisté míry orientuje o míře přiblížení.

POZNÁMKA. Označíme-li

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r),$$

lze mnohočlen $P_r(x)$ dle (4) psáti ve tvaru

$$P_r(x)=\varphi(x)\left[\frac{y_0}{\varphi'(x_0)(x-x_0)}+\frac{y_1}{\varphi'(x_1)(x-x_1)}+\ldots+\frac{y_r}{\varphi'(x_r)(x-x_r)}\right].$$

Toto vyjádření mnohočlenu interpolačního vyplývá též ihned přímo, provedeme-li na zlomek $\frac{P_r(x)}{\varphi(x)}$ rozklad ve zlomky částečné, používajíce při tom (3) a rovnice (7) odst. 13.

123. Jestliže jest počítati $\int_a^b f(x)dx$, při čemž jednak jsou známy hodnoty $y_0, y_1, \ldots y_r$, jednak víme, že $f(x)$ má derivaci $f^{(r+1)}(x)$, jejíž průběh jest přibližně znám, můžeme použíti (5) a psáti

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b P_r(x)\,dx+\int_a^b\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_r)}{(r+1)!}f^{(r+1)}(\xi)dx. \qquad (6)$$

Pro druhý člen pravé strany postačí určiti hranice, mezi nimiž jest obsažen; tím stanovíme přesnost, s jakou prvý člen udává daný integrál. Volbu čísel $x_0, x_1, \ldots, x_r$ lze učiniti způsobem různým; naznačíme v následujícím dva takové způsoby nejdůležitější.

Metoda Cotesova. Cotes klade

$$x_0=a,\quad x_1=a+h,\quad x_2=a+2h,\ldots\; x_r=a+rh=b. \qquad (7)$$

Touto volbou dostáváme dělení intervalu (a, b) na r stejných dílů (dělení *ekvidistantní*). Pak dle (4)

$$\int_a^b P_r(x)\,dx = y_0\int_a^b X_0\,dx + y_1\int_a^b X_1\,dx + \ldots + y_n\int_a^b X_n\,dx.$$

Zavedeme-li v jednotlivých integrálech na pravé straně novou proměnnou substitucí $x = a + ht$ a dosadíme-li za x_i dle (7), máme

$$\int_a^b X_i\,dx = (-1)^{r-i} h \int_0^r \frac{t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-r)}{i(i-1)\ldots\ 1\ .\ 1\ .\ 2)\ldots(r-i)}\,dt = h\,.\,C_i^{(r)}, \tag{8}$$

kde $C_i^{(r)}$ jest hodnota čistě numerická (na a a b nezávislá). Tím dostáváme

$$\int_a^b P_r(x)\,dx = h\,(C_0^{(r)} y_0 + C_1^{(r)} y_1 + \ldots + C_r^{(r)} y_r). \tag{9}$$

V druhém členu pravé strany (6) jest ξ číslo závislé na x, obsažené v (a, b) a spojitě se měnící s x, je-li $f^{(r+1)}(x)$ spojitou funkcí v (a, b). Provedeme-li i tu svrchu udanou substituci, změní se druhý člen ve výraz

$$h^{r+2}\int_0^r \frac{t(t-1)\ldots(t-r)}{(r+1)!} f^{(r+1)}(a + h\tau)\,dt, \qquad 0 < \tau < r.$$

Z výrazu pro zbytek jest patrno, že chyba, s kterou vyjadřuje výraz (9) daný integrál, blíží se k nule, když h se blíží k nule, a to jako jeho $r+2$-há mocnina, zmenšujeme-li ovšem h tím, že interval (a, b) zmenšujeme (nikoliv tím, že necháváme vzrůstati r). Říkáme zkrátka, že zbytek jest v h řádu $r+2$ (podrobnějším rozborem zbytku bylo by lze ukázati, že jest v h řádu $r+3$, je-li r sudé).

Dosadíme-li do integrálu (8) vyjadřujícího $C_i^{(r)}$ dle rovnice $t = r - t_1$, dostaneme ihned $C_i^{(r)} = C_{r-i}^{(r)}$. Jiné vztahy pro Cotesova čísla obdržíme, dosazujeme-li za $f(x)$ mnohočlen stupně r nebo nižšího, pro nějž zbytek jest roven nule a pro nějž integrál z $f(x)$ jest přesně dán výrazem (9).

Klademe-li ku př. $a = 0$, $b = r$, $h = 1$ a $f(x) = 1$, obdržíme

$$C_0^{(r)} + C_1^{(r)} + C_2^{(r)} + \ldots + C_r^{(r)} = r;$$

pro $f(x) = x(x-r)$ a $f(x) = x(x-1)\ (x-r+1)\ (x-r)$ vyplývají snadným počtem rovnice

$$1(r-1).C_1^{(r)} + 2(r-2).C_2^{(r)} + \ldots + (r-1)\ 1.C_{r-1}^{(r)} = \frac{r^3}{6},$$

$$1.2.(r-2)(r-3)C_2^{(r)} + 2.3.(r-3)(r-4)C_3^{(r)} + \ldots = \frac{r^5}{30} - \frac{r^4}{6} + \frac{r^3}{6}$$

atd. Rovnice až dosud napsané postačují pro snadný výpočet Cotesových čísel až po $r=5$. Dostáváme pro

pro $r=1$ $C_0=\frac{1}{2}$, $C_1=\frac{1}{2}$,
$r=2$ $C_0=\frac{1}{3}$, $C_1=\frac{4}{3}$, $C_2=\frac{1}{3}$, (formule Simpsonova)
$r=3$ $C_0=\frac{3}{8}$, $C_1=\frac{9}{8}$, $C_2=\frac{9}{8}$, $C_3=\frac{3}{8}$,
$r=4$ $C_0=\frac{14}{45}$, $C_1=\frac{64}{45}$, $C_2=\frac{8}{15}$, $C_3=\frac{64}{45}$, ...
$r=5$ $C_0=\frac{95}{288}$, $C_1=\frac{125}{96}$, $C_2=\frac{125}{144}$, $C_3=\frac{125}{144}$, ...

124. Druhá metoda. Abych podal snadno srozumitelný výklad jiné metody ku praktickým počtům účelnější a vskutku užívané, zvláště při výpočtech astronomických, položím při odvození jejím $r=3$; budu tedy užívati mnohočlenů interpolačních stupně třetího a předpokládati, že $f(x)$ má spojitou derivaci 4. stupně. Zavedu dále ihned pro jednoduchost $x=a+ht$ a položím

$$f(x)=f(a+ht)=F(t). \tag{10}$$

Výpočty prováděti budu nejprve pro $F(t)$. Ve shodě s předcházejícím zavedu ještě označení

$$F(0)=f(a)=y_0, \qquad F(1)=f(a+h)=y_1, \qquad F(2)=f(a+2h)=y_2, \ldots$$

K výpočtu $\int_0^1 F(t)dt$ sestrojíme pro $F(t)$ Lagrangeův interpolační mnohočlen stupně třetího, jak svrchu bylo vytčeno, při čemž provádíme interpolaci pomocí hodnot funkce pro $t=0, 1, 2, 3$; tedy pomocí hodnot, *které jsou z části vně intervalu* $(0, 1)$ a jsou rovněž *ekvidistantní* jako při metodě Cotesově. Obdržíme

$$\begin{aligned} F(t)=&\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-1\,.\,-2\,.\,-3}y_0+\frac{t(t-2)(t-3)}{1\,.\,-1\,.\,-2}y_1+\frac{t(t-1)(t-3)}{2\,.\,1\,.\,-1}y_2+\\ &+\frac{t(t-1)(t-2)}{3\,.\,2\,.\,1}y_3+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}F^{(4)}(\tau), \end{aligned} \tag{11}$$

kde $0<\tau<3$. Integrací v mezích $(0, 1)$ jest tedy

$$\int_0^1 F(t)\,dt=Ay_0+By_1+Cy_2+Dy_3+\frac{F^{(4)}(\tau_1)}{4!}\int_0^1 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt, \tag{12}$$

při čemž jsme užili u integrálu ze zbytku věty o střední hodnotě; $0<\tau_1<3$; A, B, C, D jsou numerické konstanty, jež bychom snadno mohli vypočítati na základě výrazu (11). Označíme-li poslední člen v (12) krátce z_1, můžeme psáti

$$\int_0^1 F(t)\,dt=Ay_0+By_1+Cy_2+Dy_3+z_1.$$

Této formule užijeme na $\int_0^1 F(t+1)\,dt=\int_1^2 F(t)dt$, i dostaneme

$$\int_1^2 F(t)\,dt = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4 + z_2,$$

kde

$$z_2 = \frac{F^{(4)}(\tau_2)}{4!}\int_0^1 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt; \qquad 1 < \tau_2 < 4.$$

Takto i dále postupujíce, získáme tuto řadu n rovnic (prvé dvě znova vypisuji)

$$\int_0^1 F(t)\,dt = Ay_0 + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + z_1,$$

$$\int_1^2 F(t)\,dt = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4 + z_2,$$

$$\int_2^3 F(t)\,dt = Ay_2 + By_3 + Cy_4 + Dy_5 + z_3,$$

$$\cdots$$

$$\int_{n-1}^n F(t)dt = Ay_{n-1} + By_n + Cy_{n+1} + Dy_{n+2} + z_n,$$

kde

$$z_k = \frac{F^{(4)}(\tau_k)}{4!}\int_0^1 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt, \qquad k-1 < \tau_k < k+2.$$

Sečtením levých stran těchto rovnic obdržíme $\int_0^n F(t)dt$; na pravé straně pak obdržíme sčítáním — nehledě k číslům z_k —

$$(A+B+C+D)(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) +$$
$$+ (-\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{3}{2}C + \tfrac{5}{2}D)(y_n - y_0) + (C+D)(y_{n+1} - y_1) + D(y_{n+2} - y_2).$$

Výrazu tomuto můžeme očividně dáti tento tvar

$$M(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + \alpha(y_n - y_0) + \beta(\Delta y_n - \Delta y_0) + \gamma(\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0):$$

při čemž M, α, β, γ jsou numerické konstanty (nezávislé na n) a

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n; \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0, \ldots,$$

neboť y_n, y_{n+1}, y_{n+2} dají se vyjádřiti jakožto lineární výrazy v y_n, Δy_n, $\Delta^2 y_n$ a naopak. Obdobně jest tomu mezi y_0, y_1, y_2 a y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$. Součet čísel z_k lze psáti se zřetelem k tomu, že $F^{(4)}(t)$ jest spojitou funkcí, ve tvaru

$$\sum_{k=1}^n z_k = \frac{1}{4!}\int_0^1 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt \,.\, [F^{(4)}(\tau_1) + F^{(4)}(\tau_2) + \ldots + F^{(4)}(\tau_n)] =$$

$$= \frac{nF^{(4)}(\bar{\tau})}{4!}\cdot\int_0^1 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt. \qquad 0 < \bar{\tau} < n+2;$$

tak máme celkem

$$\int_0^n F(t)dt = M(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}y_n) + \alpha(y_n - y_0) + \beta(\Delta y_n - \Delta y_0) + \gamma(\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0) +$$
$$+ \frac{nF^{(4)}(\bar{\tau})}{4!}\int_0^1 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt.$$

Zbývá jenom stanoviti numerické součinitele M, α, β, γ. K tomu účelu můžeme si zvoliti $F(t)$ a celé kladné číslo n libovolně. Zvolíme si $n = 1$; k určení M pak položíme $F(t) = 1$. I dostaneme rovnici $M = 1$. Ku výpočtu α klademe $F(t) = t$, obdržíme

$$\int_0^1 t\,dt = (\tfrac{1}{2}.0 + \tfrac{1}{2}1) + \alpha(1 - 0), \qquad \alpha = 0.$$

K určení β klademe $F(t) = t(t-1)$, tu jest $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1.2$ a $\Delta y_0 = 0$, $\Delta^2 y_0 = 2$, $\Delta y_1 = 2$, $\Delta^2 y_1 = 2$. Ku stanovení čísla γ položíme $F(t) = t(t-1)(t-2)$; získáme tak snadno

$$\beta = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{1.2}\,dt, \qquad \gamma = \int_0^1 \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\,dt.$$

Ve výpočtu předcházejícím jsme předpokládali $r = 3$, t. j. polynom interpolační stupně třetího; kdybychom byli výpočet prováděli obecně (t. j. pro interpolační polynom stupně r), dostali bychom snadno tento výsledek

$$\int_0^n F(t)\,dt = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k(\Delta^k y_n - \Delta^k y_0) + \alpha_r . nF^{(r+1)}(\bar{\tau}),$$

při čemž $\Delta^k y_r = \Delta^{k-1} y_{r+1} - \Delta^{k-1} y_r$,

$$\alpha_k = \int_0^1 \frac{t(t-1)\ldots(t-k)}{(k+1)!}\,dt, \qquad 0 < \bar{\tau} < n + r - 1, \quad 0 < n.$$

Pro funkci $f(x)$ proměnné x jest dle (10)

$$F^{(r+1)}(\bar{\tau}) = h^{r+1} f^{(r+1)}(\xi), \qquad a < \xi < a + (n + r - 1)h,$$

$$\int_0^n F(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx$$

a formule (13) změní se v následující

$$\int_a^{a+nh} f(x)dx = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + h\sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k(\Delta^k y_n - \Delta^k y_0) + nh^{r+2}\alpha_r f^{(r+1)}(\xi). \tag{14}$$

Čísla α_1, α_2, ... jsou dána pro první indexy rovnicemi

$$\alpha_1 = -\frac{1}{12}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{24}, \quad \alpha_3 = -\frac{19}{720} = -\frac{1}{36} + \frac{1}{720}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{160} = \frac{1}{80} + \frac{1}{160},$$

$$\alpha_5 = -\frac{863}{60480} = -\frac{1}{70} + \frac{1}{70 \,.\, 864}, \quad \alpha_6 = \frac{275}{24192} = \frac{1}{84} - \frac{1}{84 \,.\, 7} - \frac{1}{84 \,.\, 7 \,.\, 12},$$

$$\alpha_7 = -\frac{33\,953}{362\,88\,00}.$$

Formule právě napsaná (předpokládající existenci a spojitost derivace $f^{(r+1)}(x)$ v intervalu $(a, a+nh)$) má různé přednosti před formulí Cotesovou. Člen prvý snadno lze počítati; koefficienty číselné $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ závisí pouze na svých indexech (a nikoli na stupni mnohočlenu interpolačního právě užívaného), následkem čehož, byl-li proveden výpočet pro stupeň ku př. 4. $(r=4)$ a dosažená přesnost ještě nevyhovuje, postačí k výsledku vypočtenému přičísti člen $h\alpha_4(\Delta^4 y_n - \Delta^4 y_0)$, abychom měli výpočet pro $r=5$. Konečně člen udávající zbytek snáze se počítá než u formule Cotesovy a jest při funkcích, s nimiž se v aplikacích matematiky zpravidla setkáváme, přibližně roven $h\alpha_r(\Delta^r y_n - \Delta^r y_0)$, (což však nelze tu dokazovati), takže řada udávající integrál má s jistým přiblížením vlastnost řad asymptotických (odst 73., 111.). Naproti tomu jakožto vadu vzorce (14) jest uvésti, že ku výpočtu integrálu v mezích $(a, a+nh)$ užívá se též hodnot funkce $f(x)$ pro $x = a+(n+1)h,\ a+(n+2)h, \ldots\ a+(n+r-1)h$.

125. Vzorec (14) jest příbuzný skupině formulí, jež lze podobně odvoditi. Ku (14) jsme dospěli tím, že $\int_0^1 F(t)dt$ jsme počítali na základě interpolačního mnohočlenu stupně r, při čemž jsme používali ku sestrojení toho mnohočlenu těchto funkčních hodnot: $y_0, y_1, \ldots y_r$ (z nichž toliko první dvě leží v intervalu $(0, 1)$). Mohli bychom však užívati ku interpolaci hodnot

$$y_{-r_1},\ y_{-r_1+1}, \ \ldots\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2, \ \ldots\ y_{r_2};\ r_1 + r_2 = r, \qquad (a)$$

kde $y_{-\lambda} = F(-\lambda) = f(a - \lambda h)$. Tím bychom obdrželi výsledky ku (14) obdobné. Jelikož ve výsledných vzorcích vyskytují se difference resp. součty funkčních hodnot, jest užitečno zavésti pro funkční hodnoty, jich difference a součty zvláštní označení. Klademe nejprve místo $y_k = f(a+kh)$ symbol $(a+k, 0)$, ostatní hodnoty užívané sestavujeme ve schema, jež vysvětluje následující tabulka, sestrojená toliko pro 5 argumentů $a-2h$, $a-h$, a, $a+h$, $a+2h$.

Arg.	(—1)	(0)	(1)	(2)	(3)
$a-2h$		$(a-2,\ 0)$		$(a-2,\ 2)$	
	$(a-\frac{3}{2}, -1)$		$(a-\frac{3}{2},\ 1)$		$(a-\frac{3}{2},\ 3)$
$a-h$		$(a-1,\ 0)$		$(a-1,\ 2)$	
	$(a-\frac{1}{2}, -1)$		$(a-\frac{1}{2},\ 1)$		$(a-\frac{1}{2},\ 3)$
a		$(a,\ 0)$		$(a,\ 2)$	
	$(a+\frac{1}{2}, -1)$		$(a+\frac{1}{2},\ 1)$		$(a+\frac{1}{2},\ 3)$
$a+h$		$(a+1,\ 0)$		$(a+1,\ 2)$	
	$(a+\frac{3}{2}, -1)$		$(a+\frac{3}{2},\ 1)$		$(a+\frac{3}{2},\ 3)$
$a+2h$		$(a+2,\ 0)$		$(a+2,\ 2)$	

Ve sloupci s nadpisem (0) jsou v této tabulce zaneseny hodnoty funkce $f(x)$ pro argumenty vyznačené ve sloupci s nadpisem *Arg.* na příslušném řádku; řádky, na kterých se hodnoty funkce nacházejí, slují hlavní. Ve sloupci s nadpisem (1) jsou prvé difference dvou sousedních hodnot funkčních; jest ku př.

$$(a-\tfrac{3}{2},\ 1)=(a-1,\ 0)-(a-2,\ 0),\quad (a-\tfrac{1}{2},\ 1)=(a,\ 0)-(a-1,\ 0).$$

Každá difference nachází se na řádku ležícím mezi řádky, na nichž jsou hodnoty funkční, jichž rozdílem právě jest. Řádky, na nichž jsou prvé difference, slují vedlejší. Ve sloupci s nadpisem (2) jsou druhé difference hodnot funkčních, t. j. prvé difference z prvých differencí (vytvořené právě tak z prvých differencí, jako prvé difference z hodnot funkčních, takže jest ku př.

$$(a-1,\ 2)=(a-\tfrac{1}{2},\ 1)-(a-\tfrac{3}{2},\ 1)).$$

Umístěny jsou na řádcích hlavních a vzhledem k prvým differencím obdobně, jako byly umístěny prvé difference vzhledem k hodnotám funkce. Konečně jsou v tabulce vypsány ještě třetí difference. Ve sloupci nadepsaném (—1) jsou čísla, jichž difference jsou hodnoty funkce $f(x)$ obsažené ve sloupci (0). Jest ku př.

$$(a+1,\ 0)=(a+\tfrac{3}{2},\ -1)-(a+\tfrac{1}{2},\ -1).$$

Čísla ta nazývati budeme **součtová čísla 1. řádu** k číslům $(a+k,\ 0)$; jsou psána přirozeně na řádcích vedlejších a symbol je vyjadřující jest tvaru $(a+\frac{1}{2}\lambda,\ -1)$, kde λ jest číslo liché. Jedno z těch součtových čísel můžeme si zvoliti libovolně; ku př. $(a+\frac{1}{2}\lambda_0,\ -1)$. Píšeme-li rovnici definující čísla součtová

$$(a+k,\ 0)=(a+\frac{2k+1}{2},\ -1)-(a+\frac{2k-1}{2},\ -1)$$

pro $k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots, k_1$ a rovnice tak vzniklé sečteme, dostaneme

$$(a+\frac{2k_1+1}{2},\ -1)-(a+\frac{2k_0-1}{2},\ -1)=\sum_{k=k_0}^{k_1}(a+k,\ 0),$$

odkudž jest patrný důvod, který má pojmenování veličin ve sloupci (—1). Tabulku bychom mohli rozšířiti způsobem stejným v obojím směru a přidati ku př. sloupce (4), (5), ... (—2), ... Jsou pak jasny tyto výroky:

1. Každý sloupec dává difference po sobě následujících hodnot ve sloupci sousedním na levo položeném.

2. Každý sloupec dává součtová čísla k číslům po sobě následujícím sloupce sousedního na pravo položeného.

3. Symbol $(a+\frac{p}{2}, q)$ má význam (p, q jsou čísla celá; je-li p sudé, $p=2p'$, pak symbol ten lze nahraditi symbolem $(a+p', q)$ a naopak) tenkráte ve smyslu podaném, je-li součet $p+q$ číslo sudé (aneb, což jest totéž, jsou-li p, q čísla stejné parity).

K číslům v tabulce zavedeným připojujeme ještě aritmetické středy dvou po sobě následujících čísel jednoho sloupce. Klademe — zavádějíce pro ně označení —

$$\tfrac{1}{2}[(a+\tfrac{p}{2}, q)+(a+\tfrac{p+2}{2}, q)] = (a+\tfrac{p+1}{2}, q).$$

V důsledku tohoto označení má pak každý symbol $(a+\frac{p}{2}, q)$ význam (je-li $p+q$ sudé, jest to jedna hodnota z tabulky; je-li $p+q$ liché, jest to aritmetický střed hodnot $(a+\frac{1}{2}(p+1), q)$ $(a+\frac{1}{2}(p-1), q)$).

Jsou pak, jak snadno plyne, platny tyto vztahy

$$(a+\tfrac{p+2}{2}, q)-(a+\tfrac{p}{2}, q)=(a+\tfrac{p+1}{2}, q+1), \qquad (+)$$

$$(a+\tfrac{p_1}{2}, q)-(a+\tfrac{p_0}{2}, q)=\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p_1-p_0)}(a+\tfrac{p_0+1+2k}{2}, q+1). \qquad (\times)$$

Druhý jest ovšem jednoduchým důsledkem prvého; p_1-p_0 jest číslo sudé, kladné.

126. Na základě předeslaných označení lze úkol předložený snadno řešiti a řešení dáti jednoduchý tvar. Omezíme se však toliko na dva hlavní případy.

1. *Případ prvý.* Při počítání integrálu z $F(t)\,dt$ v intervalu (0, 1) budeme používati hodnot (α), při čemž $r_1=s$, $r_2=s+1$, t. j. těchto funkčních hodnot

$$(a-s, 0), (a-s+1, 0), \ldots, (a, 0), (a+1, 0), \ldots (a+s+1, 0). \qquad (\beta)$$

Integrál z příslušného polynomu interpolačního v mezích 0, 1 (při proměnné t; je-li integrační proměnná x, jsou meze a, $a+h$;

viz (10)) jest stejně, jako interpolační polynom sám, lineární formou hodnot (β) anebo, což jest totéž, lineární formou hodnot

$$(a+\tfrac{1}{2}, 0), (a+\tfrac{1}{2}, 1), (a+\tfrac{1}{2}, 2), \ldots, (a+\tfrac{1}{2}, 2s), (a+\tfrac{1}{2}, 2s+1) \qquad (\gamma)$$

(neboť hodnoty (γ) jsou lineárními homogenními výrazy hodnot (β) a naopak) a lze tedy psáti

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \int_0^1 F(t)\,dt = A_0(a+\tfrac{1}{2}, 0) + A_1(a+\tfrac{1}{2}, 1) + A_2(a+\tfrac{1}{2}, 2) + \ldots$$
$$\ldots + A_{2s+1}(a+\tfrac{1}{2}, 2s+1) + r_{0,1}^{(2s)}.$$

Při tom jest pro zbytek platna rovnice

$$r_{0,1}^{(2s)} = \frac{F^{(2s+2)}(\tau)}{(2s+2)!}\int_0^1 t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-s^2)(t-s-1)\,dt$$

a zbývá jenom vyšetřiti čísla A_k, nezávislá od $f(x)$. K tomu cíli nejprve vycházíme z rovnice

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \int_0^1 F(1-t)\,dt$$

a jest tedy patrno, že nahradíme-li řadu hodnot (β), které nabývá $F(t)$ pro $t = -s, -s+1, \ldots, s+1$, řadou hodnot, které nabývá $F(1-t)$ pro tytéž hodnoty argumentu, t. j. řadou

$$(a+s+1, 0), (a+s, 0), \ldots, (a+1, 0), (a, 0), \ldots, (a-s, 0), \qquad (\beta')$$

výraz podaný pro integrál z $F(t)\,dt$ v mezích 0, 1 se nezmění. Avšak řady (β) a (β') se liší pouze pořádkem; řada (β') shoduje se s řadou (β) psanou v opačném pořádku. Sestrojíme-li ku (β') příslušné differenční výrazy, stejně jako v (γ) jsou sestrojeny ku (β), dostaneme řadu, jež shodovati se bude s (γ) až na to, že místo $(a+\frac{1}{2}, 2k+1)$ bude $-(a+\frac{1}{2}, 2k+1)$. Změníme-li tedy u $A_1, A_3, A_5, \ldots$ ve výrazu pro integrál z $F(t)\,dt$ v (0,1) znaménka, nesmí se hodnota toho výrazu změniti a jsou tedy — jelikož čísla $(a+\frac{1}{2}, 2k+1)$ jsou obecně od nuly různá a libovolná — čísla $A_1, A_3, A_5, \ldots$ rovna nule a zbývá stanoviti jenom A_{2k}.

Při stanovení těchto čísel pak postupujeme takto: Stanovme ku př. A_4; volíme $F(t) = \frac{1}{4!}(t+1)\,t\,(t-1)(t-2)$, t. j. klademe $F(-2) = 1$, $F(-1) = 0$, $F(0) = 0$, $F(1) = 0$, $F(2) = 0$, $F(3) = 1$ a schema hodnot funkčních a příslušných differencí (pokud je potřebujeme) bude toto

Arg.	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$t=-2$	1					
		-1				
$t=-1$	0		1			
		0		-1		
$t=0$	0		0		1	
		0		0		0
$t=1$	0		0		1	
		0		1		
$t=2$	0		1			
		1				
$t=3$	1					

Jest tedy

$$(a+\tfrac{1}{2},0)=0,\ (a+\tfrac{1}{2},1)=0,\ (a+\tfrac{1}{2},2)=0,\ (a+\tfrac{1}{2},3)=0,\ (a+\tfrac{1}{2},4)=1,\ (a+\tfrac{1}{2},k)=0,$$

je-li $k>4$. Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu pro integrál z $F(t)dt$ v $(0, 1)$, máme ihned

$$A_4=\frac{1}{4!}\int_0^1 (t+1)t(t-1)(t-2)\,dt$$

a zcela stejně obecně

$$A_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(k-1)^2)(t-k)\,dt.$$

Na základě tohoto výsledku můžeme psáti pro zbytek

$$r_{0,1}^{(2s)}=F^{(2s+2)}(\tau)\,.\,A_{2s+2}\,.$$

Píšeme-li v rovnici získané pro $\int_a^{a+h} f(x)dx$ místo a po řadě a, $a+h$, $a+2h,\dots,a+\overline{n-1}h$ (v symbolech $(a+\frac{1}{2}, q)$ na pravé straně jest na základě významu těch symbolů klásti místo a po řadě a, $a+1$, $a+2$, ..., $a+n-1$) a sčítáme-li rovnice tak vzniklé, dostaneme, užijeme-li hned vztahu $(\times)$, tento výsledek (za A_0 klademe 1)

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)dx=[(a+n,-1)+A_2(a+n,1)+A_4(a+n,3)+\dots+A_{2s}(a+n,2s-1)]-$$
$$-[(a,-1)+A_2(a,1)+A_4(a,3)+\dots+A_{2s}(a,2s-1)]+R,$$

při čemž, předpokládáme-li, že $(2s+2)$-há derivace funkce $f(x)$ v intervalu $(a-sh, a+(n+s+1)h)$ jest funkcí spojitou, jest

$$R=h^{2s+2}f^{(2s+2)}(\xi)\,.\,nA_{2s+2},\quad a-sh<\xi<a+(n+s+1)h.$$

Veličiny, pomocí nichž jest integrál vyjádřen, jsou aritmetické středy dvou veličin po sobě následujících v jednotlivých sloupcích základní tabulky. Zvláště pak jest

$$(a+n, -1)-(a, -1)=\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\tfrac{1}{2}y_n.$$

2. *Případ druhý.* Tu počítáme integrál z $F(t)\,dt$ v intervalu integračním $(-1/_2, 1/_2)$, při čemž se používají tyto funkční hodnoty:

$$(a-s, 0), (a-s+1, 0), \ldots, (a, 0), \ldots, (a+s-1, 0), (a+s, 0). \qquad (\delta)$$

Postup při výpočtu shoduje se úplně s postupem naznačeným v případě prvém. Integrál z polynomu interpolačního jest lineární formou hodnot

$$(a, 0), (a, 1), (a, 2), \ldots, (a, 2s)$$

a opět vymizí v této lineární formě koefficienty při $(a, 2k+1)$ ze stejné příčiny jako v případě prvém. Tak dostaneme

$$\frac{1}{h}\int_{a-\frac{1}{2}h}^{a+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(t)\,dt=B_0(a, 0)+B_2(a, 2)+\ldots+B_{2s}(a, 2s)+r^{(2s+1)}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

Při výpočtu $r^{(2s+1)}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ použijeme tohoto obratu. Místo polynomu interpolačního, používajícího pouze hodnot (δ), použijeme polynomu interpolačního sestrojeného na základě (δ) a derivace v bodě $t=0$, již jako známou $(=y'_0)$ na okamžik předpokládáme. Tento nový interpolační polynom vyjádřen pomocí proměnné jest rovný původnímu polynomu interpolačnímu používajícímu pouze (δ) zvětšenému o výraz

$$t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-s^2)C,$$

kde C jest konstanta závislá na y'_0. Avšak integrál z tohoto výrazu v mezích $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ jest nula (neboť výraz ten jest funkce lichá). Jest tedy integrál z nového interpolačního polynomu týž jako z původního na základě hodnot (δ) sestrojeného. Avšak zbytek, když předpokládáme, že jsou dány (δ) a y'_0, nabude tvar*)

$$r^{(2s+1)}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}=\frac{F^{(2s+2)}(\tau)}{(2s+2)!}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-s^2)\,ds.$$

Jelikož však veličiny B_{2k} jsou dány rovnicí

$$B_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2(t^2-1^2)\ldots(t^2-(k-1)^2)\,dt,$$

můžeme rovnici pro zbytek psáti též ve tvaru

$$r^{(2s+1)}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}=B_{2s+2}\,.\,F^{(2s+2)}(\tau); \qquad -s<\tau<s.$$

---

*) Příslušná úvaha pro jiný případ (odvození Simpsonovy formule) jest provedena zevrubně v odst. násl. 127.

Z rovnice odvozené následuje stejně jako svrchu sčítáním ($B_0 = 1$)

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a-\frac{1}{2}h}^{a+\frac{2n-1}{2}h} f(x)\,dx = [(a+n-\tfrac{1}{2}, -1) + B_2(a+n-\tfrac{1}{2}, 1) + \ldots + B_{2s}(a+n-\tfrac{1}{2}, 2s-1)] -$$
$$- [(a-\tfrac{1}{2}, -1) + B_2(a-\tfrac{1}{2}, 1) + \ldots + B_{2s}(a-\tfrac{1}{2}, 2s-1)] + R',$$

kde pro R' jest

$$R' = h^{2s+2} f^{(2s+2)}(\xi)\, n B_{2s+2}, \quad a - sh < \xi < a + (n+s-1)h;$$

dále jest

$$(a+n-\tfrac{1}{2}, -1) - (a-\tfrac{1}{2}, -1) = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}.$$

Hodnoty čísel A_{2k} a B_{2k} pro první indexy jsou tyto:

$$A_2 = -\frac{1}{12}, \qquad A_4 = \frac{11}{720} = \frac{1}{72} + \frac{1}{720}, \qquad A_6 = -\frac{191}{60480} = -\frac{1}{320} - \frac{2}{320\,.\,189},$$
$$A_8 = \frac{2\,497}{3\,628\,800} = \frac{1}{1\,440} - \frac{1}{1\,440\,.\,105} + \frac{1}{1\,440\,.\,105\,.\,24},$$
$$A_{10} = -\frac{14\,797}{95\,800\,320} = -\frac{1}{6480} - \frac{1}{6480\,.\,1232} - \frac{1}{6480\,.\,1232\,.\,12}.$$

$$B_2 = \frac{1}{24}, \qquad B_4 = -\frac{17}{5760} = -\frac{1}{360} - \frac{1}{360\,.\,16},$$
$$B_6 = \frac{367}{967\,680} = \frac{1}{2688} + \frac{1}{2688\,.\,60} + \frac{1}{7688\,.\,60\,.\,6},$$
$$B_8 = -\frac{27\,859}{464\,486\,400} = -\frac{1}{16\,800} - \frac{1}{16\,800\,.\,144} - \frac{1}{16\,800\,.\,144\,.\,12} -$$
$$- \frac{1}{16\,800\,.\,144\,.\,12\,.\,8} - \frac{1}{16\,800\,.\,144\,.\,12\,.\,8\,.\,2},$$
$$B_{10} = \frac{1\,295\,803}{122\,624\,409\,600} = \frac{1}{95\,040} + \frac{1}{95\,040\,.\,240} + \frac{1}{95\,040\,.\,240\,.\,28} -$$
$$- \frac{1}{95\,040\,.\,240\,.\,28\,.\,48} - \frac{1}{95\,040\,.\,240\,.\,28\,.\,48\,.\,4}.$$

Převedeme-li výrazy pro A_k, B_k v desetinné zlomky, dostaneme tuto tabulku:

k	A_k	B_k
2	0·083333333333	0·041666666667
4	0·015277777778	0·002951388889
6	0·003158068784	0·000379257606
8	0·000688810626	0·000059978075
10	0·000154456687	0·000010567252

127. Formule Simpsonova. Mnohočleny interpolační, jichž jsme dosud užívali, byly dány hodnotami funkčními pro určité hodnoty neodvisle proměnné. Ku stanovení těch polynomů lze však užívati též jiných dat, ku př. hodnot derivací dané funkce pro některé hodnoty proměnné. Nejprve jako příklad propočítáme úkol: Sestrojiti mnohočlen třetího stupně, který nabývá týchž hodnot jako $f(x)$ pro $x=a$, $\frac{a+b}{2}$, b a jehož derivace rovná se derivaci funkce $f(x)$ pro $x=\frac{a+b}{2}$.

Označíme $f(a)=y_0$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=y_1$, $f(b)=y_2$, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=y'_1$. Mnohočlen hledaný $P(x)$ můžeme psáti ve tvaru

$$P(x)=A_0+A_1\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+A_2\left(x-\frac{a-b}{2}\right)^2+A_3\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

K určení neznámých součinitelů máme čtyři rovnice, jež jsou

$$\begin{aligned} y_0&=A_0+A_1\frac{a-b}{2}+A_2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+A_3\left(\frac{a-b}{2}\right)^3,\\ y_1&=A_0,\\ y_2&=A_0+A_1\frac{b-a}{2}+A_2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+A_3\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,\\ y'_1&=A_1.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyplývá $A_0=y_1$; sečtením prvé a třetí obdržíme

$$A_2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{y_0+y_2-2y_1}{2}.$$

Podobně vyplývá $A_1=y'_1$. $A_3\left(\frac{b-a}{2}\right)^3=\frac{y_2-y_0}{2}-y'_1\frac{b-a}{2}$, čímž všecky koefficienty stanoveny. Ku stanovení rozdílu mezi $f(x)$ a $P(x)$ zabýváme se za předpokladu existence čtvrté derivace funkce $f(x)$ podobně jako v odst. 122 funkcí

$$\Phi(z)=f(z)-P(z)-\frac{(z-a)\left(z-\frac{a+b}{2}\right)^2(z-b)}{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)}(f(x)-P(x)).$$

Tato funkce proměnné z stává se nulou pro hodnoty $z=a$, $\frac{a+b}{2}$, b, x; její derivace pak nulou pro $z=\frac{a+b}{2}$ a dle Rolleovy věty pro tři hodnoty uvnitř intervalů omezených hodnotami a, $\frac{a+b}{2}$, b, x. Stává se tedy první derivace nulou pro čtyři hodnoty a tedy čtvrtá derivace (dle Rolleovy věty) pro jednu hodnotu ξ nacházející se v intervalu obsahujícím hodnoty a, $\frac{a+b}{2}$, b, x. Utvoříme-li čtvrtou derivaci dle z a klademe-li v ní $z=\xi$, dostaneme

$$\Phi^{(4)}(\xi)=0=f^{(4)}(\xi)-\frac{4!}{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)}(f(x)-P(x)),$$

odkudž

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)}{4!} f^{(4)}(\xi),$$

čímž přibližné vyjádření funkce $f(x)$ pomocí mnohočlenu provedeno.

Užijme tohoto vyjádření na výpočet integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Nejprve máme

$$\int\limits_b^a P(x)\,dx = A_0(b-a) + \tfrac{2}{3}A_2\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \left[y_1 + \frac{y_0+y_2-2y_1}{6}\right](b-a) =$$

$$= \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2).$$

Integrál ze zbytku přeměníme dle věty o střední hodnotě:

$$\int\limits_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{1}{2}(a+b)\right)^2(x-b)}{4!} f^{(4)}(\xi)\,dx = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi')\int\limits_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx = {}^{*)}$$

$$= \frac{(b-a)^5}{4!}f^{(4)}(\xi')\int\limits_0^1 t\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2(t-1)\,dt = -\frac{(b-a)^5}{120}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi')}{4!};$$

takže jest celkem

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2) - \frac{(b-a)^5}{120}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi')}{4!}, \qquad a<\xi'<b,$$

kterážto formule (nehledíme-li ku zbytku a jinému označení) shoduje se s formulí *Simpsonovou* dříve odvozenou. Jest také tato formule (nehledě ku zbytku) zvláštním případem formulí Cotesových pro $r=2$. Nevyskytuje se v ní y'_1, jejíž znalost jsme předpokládali, a jest tedy celkem patrno, že polynomem interpolačním druhého stupně užívajícím hodnot funkčních pro $x=a$, $\frac{a+b}{2}$, b dosahujeme přibližně téhož při počítání integrálu jako polynomem interpolačním třetího stupně.

PŘÍKLAD. Užíváme-li poslední formule na výpočet integrálu

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{N+x} = \log\frac{N+1}{N},$$

dostáváme ihned

$$\log\frac{N+1}{N} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{N} + \frac{8}{2N+1} + \frac{1}{N+1}\right) - \frac{\Theta}{120\,N^5}, \qquad 0<\Theta<1;$$

---

*) Provedena tu substituce $x = a+(b-a)t$.

formule tato může býti užitečná při počítání logaritmů, jak bezprostředně jasno.

128. Budiž dán nyní úkol sestrojiti mnohočlen interpolační, který v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_r$ nabývá hodnot $y_0, y_1, \ldots, y_r$ (jako daná funkce $f(x)$) a jehož derivace v týchž bodech nabývá hodnot $y'_0, y'_1, \ldots, y'_r$ (jako derivace dané funkce $f(x)$). Jelikož jest celkem $2r+2$ hodnot dáno, můžeme předpokládati, že stupeň hledaného mnohočlenu jest $2r+1$. Označme jej $Q(x)$ a vyšetřme, zda takový polynom vždy existuje. Značí-li $P_r(x)$ interpolační mnohočlen Lagrangeův (viz odst. 122., t. j. mnohočlen r-tého stupně, který jest pro $x_0, x_1, \ldots, x_r$ rovný po řadě $y_0, y_1, \ldots, y_r$), jest patrno, že rozdíl $Q(x) - P_r(x)$ stává se nulou, dosadíme-li za x některou z hodnot $x_0, x_1, \ldots, x_r$, odkudž plyne, že rozdíl ten jest dělitelný $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_r)$. Lze tedy psáti

$$Q(x) - P_r(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_r)\,Q_r(x), \tag{19}$$

kde $Q_r(x)$ jest mnohočlen stupně r-tého. Derivujme tuto rovnici dle x a dosaďme potom $x = x_0$; obdržíme

$$Q'(x_0) - P'_r(x_0) = (x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_r)\,Q_r(x_0)$$

aneb

$$y'_0 - P'_r(x_0) = (x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_r)\,Q_r(x_0),$$

čímž jest stanoveno $Q_r(x_0)$. Stejně ustanoví se $Q_r(x_1)$, $Q_r(x_2)$, $\ldots$, $Q_r(x_r)$; vidíme tudíž, že má-li existovati polynom $Q(x)$ žádaných vlastností, musí existovati polynom $Q_r(x)$ stupně r-tého, jenž by pro $x = x_0, x_1, \ldots, x_r$ nabýval hodnot $y'_0, y'_1, \ldots, y'_r$. Takový polynom však dle interpolační formule Lagrangeovy vskutku existuje. Existuje tedy i mnohočlen $Q(x)$ za daných podmínek. Že jest jen jeden takový mnohočlen, vyplývá podobně jako obdobné tvrzení pro interpolační mnohočlen Lagrangeův (odst. 122.).

Rozdíl $f(x) - Q(x)$ a jeho první derivace stávají se nulou pro hodnoty $x_0, x_1, \ldots, x_r$ neodvisle proměnné (dle předpokladů o $Q(x)$ a $f(x)$); jest snadno hodnotu toho rozdílu stanoviti pro jiné hodnoty neodvisle proměnné způsobem při interpolačním polynomu Lagrangeově (odst. 122.) a ve zvláštním případě v odst. 127. podrobně vyloženým. Stačí vycházeti od funkce proměnné z dané vztahem

$$\Phi(z) = f(z) - Q(z) - \frac{(z-x_0)^2(z-x_1)^2\ldots(z-x_r)^2}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_r)^2}\,(f(x) - Q(x));$$

dostaneme za předpokladu, že $f(x)$ má derivaci řádu $2r+2$,

$$f(x) = Q(x) + \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_r)^2}{(2r+2)!}\,f^{(2r+2)}(\xi), \tag{20}$$

kde ξ jest hodnota nacházející se v intervalu, který obsahuje čísla $x, x_0, x_1, \ldots, x_r$.

Můžeme tuto rovnici psáti dle (19) ve tvaru

$$f(x) = P_r(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_r) Q_r(x) + \\ + \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \ldots (x - x_r)^2}{(2r+2)!} f^{(2r+2)}(\xi). \tag{21}$$

Při tom jest $P_r(x)$ interpolační mnohočlen Lagrangeův a závisí lineárně na $y_0, y_1, \ldots, y_r$; $Q_r(x)$ závisí lineárně rovněž na těchto číslech a ještě na $y'_0, y'_1, \ldots, y'_r$.

POZNÁMKA. Příslušnou formulí interpolační v projednávaném právě případě (obdobnou formuli Lagrangeově (4)) získali bychom snadno na základě (8), odst. 13. Klademe-li opětně jako v odst. 122. $\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_r)$, máme ihned dle citované formule

$$\frac{Q(x)}{\varphi^2(x)} = \sum_{k=0}^{r} \frac{y_k}{[\varphi'(x_k)]^2 (x - x_k)^2} + \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi'(x_k) y'_k - \varphi''(x_k) y_k}{[\varphi'(x_k)]^3 (x - x_k)}, \tag{21'}$$

čímž výpočet mnohočlenu $Q(x)$ proveden. V následujícím však této formule nebudeme používati.

129. Kdybychom na základě (21) počítali $\int_a^b f(x)\,dx$, dostali bychom v důsledku okolnosti, že $P_r(x)$ a $Q_r(x)$ závisí lineárně na $y_0, y_1, \ldots, y'_0, y'_1, \ldots$ z (21) tento výsledek (užívajíce na zbytek věty o střední hodnotě za předpokladu o spojitosti funkce $f^{(2r+2)}(x)$ v (a, b))

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0 y_0 + A_1 y_1 + \ldots + A_r y_r + B_0 y'_0 + B_1 y'_1 + \ldots + B_r y'_r + \frac{C f^{(2r+2)}(\xi')}{(2r+2)!}, \tag{22}$$

kde $A_0, A_1, \ldots B_0, B_1, \ldots$ jsou konstanty závislé toliko na $x_0, x_1, \ldots x_r$,

$$C = \int_a^b (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \ldots (x - x_r)^2\,dx \tag{22'}$$

a ξ' hodnota v intervalu obsahujícím čísla $a, b, x_0, x_1, \ldots x_r$.

POZNÁMKA. Jsou-li $x_0, x_1, \ldots x_r$ hodnoty dělící interval (a, b) na r stejných dílů, při čemž $a = x_0$, $b = x_r$, jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_r y_r) + h^2(\beta_0 y'_0 + \beta_1 y'_1 + \ldots + \beta_r y'_r) + \\ + \gamma h^{2r+3} \frac{f^{(2r+2)}(\xi')}{(2r+2)!};$$

tu jsou $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \beta_0, \beta_1, \ldots$ hodnoty číselné a

$$h = \frac{b-a}{r}, \qquad \gamma = \int_0^r x^2 (x-1)^2 \ldots (x-r)^2 \, dx.$$

Odůvodnění přenechávám čtenáři, jakož i výpočet součinitelů α_k, β_k pomocí integrálů podobně jako při formulích Cotesových.

130. Abychom dospěli ku **metodě Gaussově pro mechanickou kvadraturu,** položíme si otázku, zda lze voliti $x_0, x_1, \ldots x_r$ (jakožto reálná čísla od sebe různá) tak, aby v (22) čísla $B_0, B_1, \ldots B_r$ byla vesměs rovna nule, t. j. aby výraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_r(x)\,dx + \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_r)\,Q_r(x)\,dx + \frac{C f^{(2r+2)}(\xi)}{(2r+2)!}$$

nezávisel na $y'_0, y'_1, \ldots y'_r$, ať jest $f(x)$ *jakákoliv* funkce (mající $(2r+2)$-hou derivaci). Tomu bude vyhověno tenkrát a jenom tenkráte, vymizí-li z pravé strany poslední rovnice člen druhý (jedině na y'_k závislý); toho pak docílíme jenom tím, že klademe

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_r) = \frac{(r+1)!}{(2r+2)!} \cdot \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} [(x-a)(x-b)]^{r+1},$$

při čemž numerický součinitel na pravé straně jest volen tak, aby nejvyšší mocnina $x\,(r+1$-vá) na obou stranách měla stejný koefficient $(=1)$. Že tomu vskutku tak jest, snadno lze nahlédnouti; neboť $Q_r(x)$ jest libovolný mnohočlen stupně r-tého (se zřetelem k tomu, že $y'_0, y'_1, \ldots$ jsou libovolné) a mnohočlen $r+1$-vého stupně

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} (x-a)^{r+1} (x-b)^{r+1}$$

jediný má tu vlastnost, jakž dříve bylo dokázáno (odst. 115.), že integrál v mezích (a, b) z tohoto mnohočlenu násobeného libovolným mnohočlenem stupně r-tého jest rovný nule. Poněvadž pak rovnice

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} (x-a)^{r+1} (x-b)^{r+1} = 0 \tag{23}$$

má všecky kořeny reálné, mezi sebou různé a obsažené v intervalu (a, b), vidíme, že *zvolíme-li* $x_0, x_1, \ldots, x_r$ *tak, aby se po řadě rovnaly kořenům této rovnice, obdržíme*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0 y_0 + A_1 y_1 + \ldots + A_r y_r + C_{r+1} \frac{f^{(2r+2)}(\xi')}{(2r+2)!}, \tag{I}$$

kdež

$$A_k = \int_a^b \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_r)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_r)}\,dx;$$

ξ' *jest jistá hodnota intervalu* (a, b) a, jak snadným počtem z (22′) a z odst. 95., rovn. (5) plyne,

$$C_{r+1}=\frac{2}{2r+3}\cdot\left(\frac{1.2.3\ldots r+1}{1.3.5\ldots 2r+1}\right)^2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2r+3}. \tag{24}$$

Označíme-li kořeny Legendreova polynomu $P_{r+1}(x)$ (odst. 116.) značkou τ_k, $k=0, 1, 2, \ldots r$, při čemž nechť $\tau_0<\tau_1<\tau_2\ldots<\tau_r$, jsou čísla x_k (t. j. kořeny rovnice (23)) dána vztahem

$$x_k=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\tau_k. \tag{+}$$

Koefficienty $A_k=\frac{b-a}{2}J_k$, čísla τ_k a konečně numerický součinitel γ_r, jímž ve (24) násobeno jest $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2r+3}$, uvedeny jsou v následujícím pro nejnižší hodnoty čísla r.

$r=1$; $\tau_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tau_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $J_0=J_1=1$; $\gamma_1=\frac{8}{45}$.

$r=2$; $\tau_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\tau_1=0$, $\tau_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$; $J_0=J_2=\frac{5}{9}$, $J_1=\frac{8}{9}$; $\gamma_2=\frac{8}{175}$.

$r=3$; $\tau_i=\pm\sqrt{\frac{3}{7}\pm\frac{2}{35}\sqrt{30}}$; $J_i=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{36}\sqrt{30}$; $\gamma_3=\frac{128}{11025}$.

$r=4$; $\tau_2=0$, $\tau_j=\pm\sqrt{\frac{5}{9}\pm\frac{2}{63}\sqrt{70}}$; $J_2=\frac{128}{225}$, $J_j=\frac{322\mp 13\sqrt{70}}{900}$; $j\neq 2$; $\gamma_4=\frac{128}{43659}$.

POZNÁMKA. Provedeme-li ve výrazu pro A_k substituci $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ a rovněž za x_k dosadíme tam dle (+), máme ihned

$$J_k=\int_{-1}^{1}\frac{(t-\tau_0)(t-\tau_1)\ldots(t-\tau_{k-1})(t-\tau_{k+1})\ldots(t-\tau_r)}{(\tau_k-\tau_0)(\tau_k-\tau_1)\ldots(\tau_k-\tau_{k-1})(\tau_k-\tau_{k+1})\ldots(\tau_k-\tau_r)}\,dt.$$

Označíme-li funkci za integračním znaménkem $\varphi_k(t)$, můžeme v důsledku (21′)*) též psáti

$$\varphi^2(\tau_k)J_k=\int_{-1}^{1}\varphi_k^2(t)\,dt,$$

odkudž jest patrno, že $J_k>0$. Ostatně jest, jak čtenář snadno dokáže, volí-li vhodným způsobem funkci $f(x)$, $J_k=J_{r-k}$ a

$$\begin{aligned}
J_0+J_1+J_2+\ldots+J_r&=2\\
\tau_0^2J_0+\tau_1^2J_1+\tau_2^2J_2+\ldots+\tau_r^2J_r&=\tfrac{2}{3}\\
\tau_0^4J_0+\tau_1^4J_1+\tau_2^4J_2+\ldots+\tau_r^4J_r&=\tfrac{2}{5}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&
\end{aligned}$$

*) Anebo též můžeme klásti $b=1$, $a=-1$, $f(x)=\varphi_k^2(x)$ a potom užíti formule (I).

6. O FUNKCÍCH S VARIACÍ KONEČNOU.

131. Definice. Postup užitý při zavedení určitého integrálu na základě definice Riemannovy umožňuje nám jednak definovati jednoduše nový a pro pozdější úvahy důležitý druh funkcí, jednak odvoditi příslušné hlavní věty.

Zachovávajíce označení odst. 85. a násl. zavedeme součty

$$\mathfrak{V} = \sum_k (M_k - m_k), \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Při tom se čísla M_k, m_k vztahují k funkci $f(x)$ a k intervavalům vzniklým z (a, b) body $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, t. j. k intervalům (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots . (x_{n-1}, b)$, a patří tedy každý z bodů x_k ku dvěma sousedním intervalům.

Součty $\mathfrak{V}$ jsou vždy kladná čísla (není-li $f(x)$ v (a, b) konstantní, kdy rovnají se nule). Jestliže součty $\mathfrak{V}$ při dané $f(x)$ nepřevyšují určité číslo A, ať zvolíme si dělící body jakkoliv (a v jakémkoliv počtu), říkáme funkci $f(x)$ *funkce s variací konečnou v intervalu* (a, b).

Funkce s variací konečnou jsou integrace schopny. Neboť

$$\Sigma_k O_k \Delta x_k = \Sigma_k (M_k - m_k) \Delta x_k \leqq \varepsilon \Sigma_k (M_k - m_k) \leqq \varepsilon A,$$

jestliže ε jest velikost největšího z intervalů Δx_k. Jest tedy

$$\lim_{\Delta x_k = 0} \Sigma_k O_k \Delta x_k = \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon A = 0,$$

čímž věta dokázána.

PŘÍKLAD 1. Funkce stále rostoucí jest funkce s variací konečnou. Neboť tu jest

$$\mathfrak{V} = \sum_k (M_k - m_k) = \sum_k (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a),$$

tedy všecky $\mathfrak{V} = f(b) - f(a)$.

Rovněž snadno se dokáže, že rozdíl dvou funkcí $f_1(x) - f_2(x)$ stále rostoucích jest funkce s variací konečnou. Tu jest vždy

$$\mathfrak{V} < f_1(b) + f_2(b) - f_1(a) - f_2(a).$$

PŘÍKLAD 2. Funkce definovaná v intervalu $(0, 1/\pi)$ vztahy

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \qquad \text{pro } 0 < x \leqq \frac{1}{\pi},$$
$$f(0) = 0$$

není funkcí s variací konečnou. Neboť v každém z intervalů

$$\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right), \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}\right), \left(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}\right), \ldots$$

jest oscilace funkce rovna 1. Intervalů těch jest však neomezený počet. Lze tedy udati součty $\mathfrak{V}$, jež jsou větší než jakékoliv číslo předem stanovené.

Funkce však

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, \qquad 0<x\leqq\frac{1}{\pi},$$
$$f(0)=0$$

jest s variací konečnou, jak snadno čtenář dokáže.

132. Vyjádření pomocí funkcí neklesajících. Pro funkce s variací konečnou platí věta, již si odvodíme. Nejprve jest patrno, že součty $\mathfrak{V}$ při funkci $f(x)$ s variací konečnou v intervalu (a, b) tvoří množství číselné mající jistou horní hranici; označíme si ji $V(a, b)$. Rozdělme nyní interval (a, b) bodem c na dva menší intervaly (a, c), (c, b); $[a<c<b]$. Utvoříme pak jeden (libovolný) součet $\mathfrak{V}_1$ ku funkci $f(x)$ a intervalu (a, c), jakož i jeden (libovolný) součet $\mathfrak{V}_2$ ku téže funkci a intervalu (c, b). Součty $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ dohromady dávají jeden součet $\mathfrak{V}$ (patřící k intervalu (a, b)) a můžeme tudíž psáti

$$\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2\leqq V(a, b).$$

Z toho jest patrno, že i součty $\mathfrak{V}_1$ i součty $\mathfrak{V}_2$ mají svoji horní hranici (již obdobně označíme $V(a, c)$, resp. $V(c, b)$) a že

$$V(a,c)+V(c,b)\leqq V(a,b). \qquad (a)$$

Avšak přidáme-li k dělení intervalu (a, b), z něhož vznikl libovolný součet $\mathfrak{V}$, bod c, dostaneme dělení nové (není-li ovšem náhodou bod c jedním z bodů $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$) a příslušný součet k tomuto novému dělení označíme $\mathfrak{V}'$; i jest, jak patrno, $\mathfrak{V}\leqq\mathfrak{V}'$. Součet $\mathfrak{V}'$ rozpadá se však přímo ve dva součty $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ (pro interval (a, c), resp. (c, b)), takže jest také

$$\mathfrak{V}\leqq\mathfrak{V}'\leqq V(a, c)+V(c, b),$$

odkudž

$$V(a, b)\leqq V(a, c)+V(c, b). \qquad (b)$$

Ze vztahů (a) a (b) však vyplývá nutně důležitá relace

$$V(a, b)=V(a, c)+V(c, b) \qquad a<c<b.$$

Z této relace následuje snadno, že funkce

$$\varphi(x)=\frac{V(a, x)+f(x)}{2}, \qquad \psi(x)=\frac{V(a, x)-f(x)}{2}, \qquad a\leqq x\leqq b$$

jsou funkce s x stále rostoucí (anebo alespoň neklesající). Neboť

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\frac{V(a, x+h)-V(a, x)+f(x+h)-f(x)}{2}$$

a tedy dle svrchu dokázané relace jest při h *kladném*

$$=\frac{V(x, x+h)+(f(x+h)-f(x))}{2}$$

a rovněž
$$\psi(x+h)-\psi(x)=\frac{V(x, x+h)-(f(x+h)-f(x))}{2}.$$

Avšak $V(x, x+h)$ jest větší (po případě rovno) než rozdíl mezi horní a dolní hranicí hodnot funkce $f(x)$ v intervalu $(x, x+h)$; tedy jistě větší (po případě rovno) než $|f(x+h)-f(x)|$ a tudíž při h kladném
$$\varphi(x+h)-\varphi(x)\geqq 0, \qquad \psi(x+h)-\psi(x)\geqq 0;$$
jsou tedy funkce $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funkcemi neklesajícími.

Jest však dále
$$\varphi(x)-\psi(x)=f(x),$$
takže máme větu: *Každá funkce s variací konečnou dá se vyjádřiti jako rozdíl dvou funkcí stále rostoucích (anebo alespoň neklesajících).*

Z této věty opětně následuje, že funkce s variací konečnou v (a, b) jest integrace schopna v intervalu (a, b); (odst. 88., a).

133. Funkce spojité a zároveň s variací konečnou. Číslo $V(a, b)$ v odst. předcházejícím definované sluje **variace funkce** $f(x)$ **v intervalu** (a, b). Pro toto číslo platí následující věta:

Jestliže funkce $f(x)$ *s variací konečnou v intervalu* (a, b) *jest v intervalu tom* **funkcí spojitou,** *jest* $V(a, b)$ *rovno* lim $\mathfrak{v}$, *kde*
$$\mathfrak{v}=\sum_k |f(x_{k-1})-f(x_k)|, \qquad k=1, 2, \ldots, n,$$
(čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dělí interval (a, b) na n intervalů menších, $x_0=a$, $x_n=b$) *pro ten případ, že* $\lim \Delta x_k = \lim (x_k - x_{k-1}) = 0$ *a že zároveň n roste nade všechny meze.* (Věta prvá.)

A naopak: *Jestliže existuje* lim $\mathfrak{v}$ *v tom případě, že*
$$\lim \Delta x_k = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$
a že zároveň n roste nade všecky meze, a jestliže $f(x)$ *jest v* (a, b) *funkcí spojitou, jest* $f(x)$ *v* (a, b) *funkcí s variací konečnou.* (Věta druhá.)

Dokažme nejprve větu prvou. Poněvadž podle předpokladu jest $f(x)$ funkcí v (a, b) s variací konečnou, lze udati rozdělení intervalu (a, b) na N intervalů menších (a, y_1), (y_1, y_2), ..., (y_{N-1}, b) tak, aby číslo $\mathfrak{V}$ odst. předch. pro toto rozdělení sestrojené se lišilo od $V(a, b)$ o méně než $\frac{\varepsilon}{2}$.
$$V(a, b)-\mathfrak{V}=V(a, b)-\sum_j (M_j - m_j)<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad j=1, 2, \ldots, N; \qquad (c)$$
M_j resp. m_j jsou horní resp. dolní hranicí $f(x)$ v (y_{j-1}, y_j).

Jelikož $f(x)$ jest spojitá, lze tím, že učiníme $|\Delta x_k| < \eta$, kde η jest číslo kladné vhodně volené, docíliti, aby oscilace $f(x)$ v intervalu (x_{k-1}, x_k) byla menší než $\frac{\varepsilon}{4N}$.

Dále následuje za předpokladu spojitosti, že hodnot M_j, m_j funkce $f(x)$ vskutku nabývá; označme příslušné hodnoty neodvisle proměnné z_j, z'_j, takže jest $M_j = f(z_j)$, $m_j = f(z'_j)$. Přidejme k bodům x_k body z_j, z'_j; dostaneme nové dělení intervalu (a, b) v intervaly menší a k němu příslušný součet utvořený obdobně, jako jest utvořeno $\mathfrak{v}$ pro dělení intervalu (a, b) pomocí bodů x_k, pojmenujme $\mathfrak{v}'$. I jest nejprve

$$\mathfrak{v}' \geqq \mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{v}' - \mathfrak{v} < \frac{\varepsilon}{4N} \cdot 2N = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{d}$$

(Neboť přidáním bodů z_j, z'_j se nejvýše $2N$ intervalů (x_{k-1}, x_k) rozpadlo na intervaly menší; jelikož pak v (x_{k-1}, x_k) jest oscilace menší než $\frac{\varepsilon}{4N}$, jest rozdíl mezi $\mathfrak{v}'$ a $\mathfrak{v}$ menší než $\frac{\varepsilon}{4N} \cdot 2N$, jak bylo vytčeno.)

Jest však též $\quad \mathfrak{v}' \geqq \mathfrak{V}$, aneb $\mathfrak{V} - \mathfrak{v}' \leqq 0$, $\hfill (e)$

jak bezprostředně patrno. Následkem (c), (d), (e) plyne (sečtením příslušných nerovnin)

$$(V(a, b) - \mathfrak{V}) + (\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}) + (\mathfrak{V} - \mathfrak{v}') < \varepsilon,$$

aneb

$$V(a, b) - \mathfrak{v} < \varepsilon.$$

Jelikož pak $V(a, b) - \mathfrak{v} > 0$, jest tím tvrzení větou první dané dokázáno.

V důkaze podaném však také jest obsažen důkaz věty druhé. Neboť kdyby $f(x)$ nebylo s variací konečnou, bylo by lze udati součet $\mathfrak{V}$ libovolně veliký, číslo pak $\mathfrak{v}$ v předcházejícím sestrojené (a také všecka ostatní $\mathfrak{v}$ s menšími Δx_k) by dle (d), (e) bylo větší než $\mathfrak{V} - \frac{\varepsilon}{2}$; nemůže tudíž míti limitu, necháme-li Δx_k konvergovati k nule.

134. *POZNÁMKA.* Věta právě dokázaná nám dovoluje v tom případě, že $f(x)$ má derivaci v (a, b), vyjádřiti $V(a, b)$ určitým integrálem. Jest tu ihned na základě věty o střední hodnotě počtu differenciálního

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = \Delta x_k f'(\xi_k)$$

a na základě definice určitého integrálu (se zřetelem k dokázané větě)

$$V(a, b) = \left| \int_a^b | f'(x) | \, dx \right|.$$

Při tom jest ovšem třeba ještě předpokládati, že $|f'(x)|$ jest v intervalu (a, b) konečná a schopna integrace podle definice Cauchy-Riemannovy.

Obecněji následuje stejným způsobem (užitím věty o střední hodnotě, ovšem věty o s. h. počtu integrálního), jestliže $f(x)$ jest integrálem funkce $\varphi(x)$ v (a, b) integrace schopné, t. j. jestliže při $a < b$

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} \varphi(x)\,dx, \qquad a \leqq \alpha \leqq b,\ a \leqq x \leqq b \tag{f}$$

že

$$V(a, b) = \left| \int_{a}^{b} |\varphi(x)|\,dx \right|;$$

neboť integrál (f) jest funkcí spojitou. Jelikož pak s $\varphi(x)$ i $|\varphi(x)|$ jest integrace schopno, patrno jest, že *funkce (f) definovaná určitým integrálem dle C.-R. jest funkce s variací konečnou.*

Větu tuto lze však i jinak jednoduše dokázati. Neboť, je-li $f(x)$ v (a, b) integrace schopno, jest i $|f(x)|$ integrace schopno. Funkce

$$|f(x)| + f(x)$$

jest buď kladná anebo nule rovná; a jsou tedy funkce

$$\lambda(x) = \int_{a}^{x} \{|f(x)| + f(x)\}\,dx, \qquad \psi(x) = \int_{a}^{x} |f(x)|\,dx$$

s rostoucím x $(a \leqq x \leqq b)$ funkce rostoucí a tedy funkce

$$\int_{a}^{x} f(x)\,dx = \lambda(x) - \psi(x),$$

jakožto rozdíl dvou funkcí rostoucích, jest funkcí s variací konečnou.

135. Diskontinuity funkcí s variací konečnou. Avšak i jinak lze použíti věty odst. 133. K tomu cíli vyšetříme nejprve, jaké diskontinuity se mohou vyskytovati u funkcí s variací konečnou. Jelikož lze vyjádřiti každou funkci s variací konečnou jakožto rozdíl dvou funkcí rostoucích, postačí, když vyšetříme diskontinuity možné u funkcí rostoucích. Avšak otázka tato rozřešena byla již v DP, odst. 72., kde v podstatě dokázáno, že není-li $\varphi(x)$, funkce to rostoucí, resp. neklesající v (a, b), v bodě c toho intervalu spojitou, že existují limity

$$\lim_{\varepsilon=0} \varphi(c - \varepsilon) = \varphi(c - 0), \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varphi(c + \varepsilon) = \varphi(c + 0), \qquad \varepsilon > 0$$

takové, že

$$\varphi(c+0)>\varphi(c-0) \text{ a tudíž } \varphi(c+0)\geqq\varphi(c)\geqq\varphi(c-0).$$

Z toho následuje pro funkce s variací konečnou: *Funkce $f(x)$ s variací konečnou v intervalu (a, b) jest v každém bodě x_0 toho intervalu buď funkcí spojitou aneb má diskontinuitu, jež však jest taková, že existují obě limity*

$$\lim_{\varepsilon=0} f(x_0-\varepsilon)=f(x_0-0); \quad \lim_{\varepsilon=0} f(x_0+\varepsilon)=f(x_0+0). \qquad \varepsilon>0$$

při čemž tři čísla $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0)$ nejsou vesměs si rovna.

Diskontinuity v bodě x_0, při nichž existují $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$ a zároveň $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, slují *diskontinuity prvého druhu.* Existují-li $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ a je-li zároveň

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0),$$

má $f(x)$ v bodě x_0 rovněž diskontinuitu, nazývejme ji *odstranitelnou* (se zřetelem k tomu, že pozměněním hodnoty funkce $f(x)$ v bodě x_0 bychom mohli docíliti funkce spojité). Pomocí těchto pojmenování můžeme říci, že *funkce s variací konečnou, není-li v bodě x_0 spojitá, má diskontinuitu buď prvního druhu anebo odstranitelnou.*

136. Na základě předcházejících úvah lze snadno dokázati, že *funkce $V(a', b')$ jest spojitou funkcí a' i b', vztahuje-li se $V(a', b')$ ku funkci $f(x)$ v (a, b) s variací konečnou a zároveň spojité* a kde $a\leqq a'<b'\leqq b$. Dokažme to vzhledem k číslu b'. Nejprve jest $V(a', x)$ funkce neklesající s rostoucím x; tedy existuje dle předcházejícího odst. $V(a', b'-0)$. Dále jest dle odst. 133. $V(a', b')$ limitou čísel

$$v=\sum_{k=1}^{n} |f(x'_k)-f(x'_{k-1})|, \quad a'=x'_0<x'_1<x'_2<\ldots<x'_n=b'.$$

Avšak

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x'_k)-f(x'_{k-1})| \leqq V(a', x'_{n-1}) \leqq V(a', b'-0)$$

a tedy

$$v\leqq V(a', b'-0)+|f(b')-f(x'_{n-1})|;$$

tudíž limita čísel v (kterou značíme $V(a', b')$) může býti nejvýše rovna $V(a', b'-0)$ (neboť, když intervaly (x'_{k-1}, x'_k) konvergují vesměs ku nule, konverguje i $|f(b')-f(x'_{n-1})|$ vzhledem k tomu, že $f(x)$ jest spojitá, k nule). Poněvadž však zároveň $V(a', b')\geqq V(a', b'-0)$, jest nutně $V(a', b'-0)=V(a', b')$. Stejně se dokáže

$$V(a'+0, b')=V(a', b'). \qquad (j)$$

Dále jest, je-li c' též v (a, b), $\varepsilon > 0$ a $c' > b' + \varepsilon$,

$$V(a', b' + \varepsilon) = V(a', c') - V(b' + \varepsilon, c')$$

a dle (j) pro lim $\varepsilon = 0$

$$V(a', b' + 0) = V(a', c') - V(b' + 0, c') = V(a', c') - V(b', c') = V(a', b').$$

Jelikož jest i $V(a', b' - 0)$ i $V(a', b' + 0)$ rovno $V(a', b')$, jest $V(a', b')$ v bodě b' funkcí spojitou. Obdobně vyplývá, že $V(a', b')$ jest spojitou funkcí čísla a'.

Z rovnice pak identické

$$f(x) = \frac{V(a, x) + f(x)}{2} - \frac{V(a, x) - f(x)}{2},$$

následuje věta: *Funkce $f(x)$ v (a, b) s variací konečnou a spojitá jest rozdíl dvou funkcí neklesajících a spojitých.*

POZNÁMKA. Důležitý pojem funkcí s variací konečnou byl zaveden od *C. Jordana* v jeho Cours d'Analyse (2. vyd., r. 1893). Při definici jich vychází místo od součtů $\mathfrak{V}$ od součtů

$$t = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | .$$

Zavedením součtů $\mathfrak{V}$ místo t není dotčen pojem funkční, docílena však tím některá zjednodušení při příslušných výkladech.

7. ELEMENTÁRNÍ TEORIE ŘAD FOURIEROVÝCH.

136 a. Pod **řadou trigonometrickou** o periodě 2π vyrozumíváme rozvoj tvaru

$$\tfrac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$
$$+ (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \dots, \tag{1}$$

v němž $a_0, a_1, a_2, \dots$; $b_1, b_2, \dots$ jsou čísla na proměnné x nezávislá (konstanty). Jestliže tato řada jest konvergentní (pro všecka x), představuje nám součet její funkci periodickou $\varphi(x)$ o periodě 2π; t. j. platí pro funkci tu vztah

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x). \tag{2}$$

Jsou-li všecky koeficienty b_k rovny nule, nazývá se řada předložená krátce řadou *kosinusovou* a funkce příslušná jest sudá; $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Obdobný význam má pojmenování řada *sinusová*, kterážto, je-li konvergentní, má za součet funkci lichou; $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Různé problémy analytické, hlavně však úkoly fysiky matematické a aplikované matematiky vůbec, daly podnět ku řešení úkolů:

1. Vyšetřiti, zda lze danou funkci $f(x)$ rozvinouti v řadu trigonometrickou v intervalu, jehož délka jest rovna periodě 2π.

2. V případě kladném jest stanoviti koeficienty a_k, b_k té řady.

Úkol druhý řešiti jest snadno, jestliže jest známo, že danou funkci $f(x)$ lze vyjádřiti řadou trigonometrickou a že rovnice příslušná mezi $f(x)$ a řadou trigonometrickou jí rovnou

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots, \tag{3}$$

platná v intervalu o délce 2π, zůstane zachována, když jsme ji znásobili buď výrazem $\cos kx$ anebo $\sin kx$ a potom integrovali v intervalu o délce 2π, v němž rovnice (3) jest platna, při čemž na pravé straně integrujeme nekonečnou řadu člen za členem; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Nechť jest interval o délce 2π, v němž (3) jest platna, interval $(0, 2\pi)$; znásobme za předpokladu uvedeného (který jest ku př. splněn, když řada ve (3) jest v $(0, 2\pi)$ stejnoměrně konvergentní, viz odst. 69, věta 1) rovnici (3) na obou stranách $\cos kx$ a integrujme v mezích $0, 2\pi$. Pak se zřetelem ku vztahům (5), (6), (7) na str. 161 jest

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi a_k,$$

t. j.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Podobně (násobením $\sin kx$ a integrací v intervalu $(0, 2\pi)$) vyplývá

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Věta. Jestliže tedy $f(x)$ jest rozvinutelna v intervalu $(0, 2\pi)$ v řadu trigonometrickou předpokládané vlastnosti, jsou koeficienty této řady stanoveny a to jednoznačně rovnicemi (4).

Definice. Obecně budeme nazývati řadu

$$\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots, \tag{5}$$

ve které

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \tag{5'}$$

řadou Fourierovou *o periodě 2π příslušnou ku funkci $f(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$.*

O součtu řady (5) nemůžeme tvrditi, že jest roven $f(x)$ pro všecka x intervalu $(0, 2\pi)$; tvrzení to dosud učiniti můžeme dle věty odvozené jenom tehdy, když víme, že funkce $f(x)$ se dá vyjádřiti řadou trigonometrickou svrchu předpokládané vlastnosti. Následkem toho zavedeme si pro součet řady (5) zvláštní značku a budeme jej značiti $\varphi(x)$: při tom ovšem jest $\varphi(x)$ funkce proměnné x určená jenom pro ty hodnoty x, pro které řada (5) jest konvergentní.

Jestliže vztah

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots \qquad (3')$$

má vlastnost touž, kterou jsme předpokládali pro rovnici (3), abychom odvodili větu o koeficientech a_k, b_k, pak následuje ze vztahu toho stejně jako ze (3)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin kx\, dx,$$

t. j. řada (5), řada to Fourierova o periodě 2π příslušná k $f(x)$ v $(0, 2\pi)$, jest zároveň řadou Fourierovou příslušnou k $\varphi(x)$ v $(0, 2\pi)$.

Současně jest patrno, že každá řada trigonometrická o periodě 2π a o součtu $\varphi(x)$ jest řadou Fourierovou příslušnou k $\varphi(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$, má-li rovnice (3') vlastnosti svrchu pro (3) předpokládané. Při tom řada (5) nemusí býti ani konvergentní v bodech množství délky nulové (dle *J*).

POZNÁMKA 1. Řada trigonometrická o periodě l jest rozvoj tvaru

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \left(a_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{2\pi x}{l}\right) + \left(a_2 \cos\frac{4\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{4\pi x}{l}\right) + \ldots \qquad (6)$$
$$+ \left(a_k \cos\frac{2k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{l}\right) + \ldots$$

Označíme-li součet této řady $\varphi(x)$, jest očividně $\varphi(x+l) = \varphi(x)$.

Tuto řadu trigonometrickou nazýváme *řadou Fourierovou o periodě l příslušnou k funkci $f(x)$ v intervalu $(0, l)$*, jsou-li koeficienty a_k, b_k dány vztahy

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x) \cos\frac{2k\pi x}{l}\, dx, \qquad b_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x) \sin\frac{2k\pi x}{l}\, dx. \qquad (6')$$

POZNÁMKA 2. Řada Fourierova o periodě 2π příslušná k funkci $f(x)$ v intervalu $(a, a+2\pi)$ jest rozvoj (5), v němž však

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin kx\,dx. \qquad (5'')$$

Jestliže funkce $f(x)$ jest periodická s periodou 2π, jsou a_k, b_k určené rovnicemi (5′) tytéž jako hodnoty určené (5″). Viz odst. 68, rovn. (6). Shodují se tudíž řady Fourierovy o periodě 2π příslušné k periodické funkci $f(x)$ o periodě 2π, ať je sestrojíme pro kterýkoliv interval délky 2π. Není-li však $f(x)$ periodická o periodě 2π, může býti a zpravidla jest nekonečné množství různých řad Fourierových o periodě 2π příslušných k této funkci; koeficienty jsou závisly na intervalu (délky 2π), ve kterém řada přísluší k $f(x)$ jakožto řada Fourierova o periodě 2π.

Obdobná stanovení a výroky jsou platny i pro řady Fourierovy o periodě l.

POZNÁMKA 3. Řada Fourierova o periodě 2π příslušná k funkci $f(x)$ v intervalu $(-\pi, \pi)$ jest *řadou kosinusovou* (koeficienty $b_k = 0$), jestliže $f(x)$ jest *funkcí sudou*; jest řadou *sinusovou*, jestliže $f(x)$ jest lichou. Viz odst. 68, rovn. (4).

Stejně lze ukázati, že řada Fourierova o periodě 2π příslušná k funkci $f(x)$ v $(0, 2\pi)$ jest kosinusovou řadou, jestliže $f(2\pi - x) = f(x)$; sinusovou pak, jestliže $f(2\pi - x) = -f(x)$. V obojím případě pro všechna x z intervalu $(0, 2\pi)$.

POZNÁMKA 4. V úvahách podaných mlčky se předpokládá, že $f(x)$ jest funkcí v příslušném intervalu (buď v $(0, 2\pi)$ aneb v pozn. 2. v $(0, l)$ a t. d.) integrace schopnou podle C.-R. *Zvláště pak i vzhledem k následujícímu vytýkám, že $f(x)$ jest funkcí v intervalu, který právě přichází v úvahu, zdola i shora ohraničenou.*

Konečně lze poznamenati, že veškeré obecné věty, které jsou platny pro řady trigonometrické o periodě 2π, resp. pro řady Fourierovy o periodě 2π příslušné k funkci $f(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$, lze snadno rozšířiti i pro řady trigonometrické o periodě l, resp. pro řady Fourierovy o periodě l příslušné k funkci $f(x)$ v intervalu $(a, a + l)$. Rozšíření toto jest zcela snadné a budeme tudíž v následujícím zabývati se hlavně řadami Fourierovými o periodě 2π pro interval $(0, 2\pi)$.

V následujícím značí vždy, není-li nic odchylného zvláště vytčeno, řada Fourierova k funkci $f(x)$ řadu Fourierovu o periodě 2π příslušnou k funkci $f(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$.

PŘÍKLAD 1. Funkce $f(x)$ periodická o periodě 2π definovaná těmito podmínkami

$$f(x)=-f(-x),$$
$$f(x)=2x \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$=2\pi-2x \quad \text{pro} \quad \tfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \pi,$$

má v každém intervalu o délce 2π (tedy ku př. v intervalu $(0, 2\pi)$) tento Fourierův rozvoj

$$\varphi(x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right),$$

Jak vyplyne z úvah pozdějších, jest stále $f(x)=\varphi(x)$.

PŘÍKLAD 2. Fourierův rozvoj o periodě 1 k funkci $f(x)=x(1-x)$ v intervalu $(0, 1)$ jest rozvoj kosinusový; neboť v $(0, 1)$ jest $f(1-x)=f(x)$; rozvoj ten jest

$$\varphi(x)=\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{1^2}+\frac{\cos 4\pi x}{2^2}+\frac{\cos 6\pi x}{3^2}+\ldots\right).$$

I v tomto případě jest stále (jak seznáme) $f(x)=\varphi(x)$ v intervalu $(0, 1)$. Viz ostatně v odst. 113 výraz $P_2(x)$.

PŘÍKLAD 3. Řada Fourierova k funkci $f(x)=\frac{1}{8}\pi\sin\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\pi(\pi-x)\cos\frac{1}{2}x$ o periodě 2π a pro interval $(0, 2\pi)$ jest

$$\varphi(x)=\tfrac{1}{2}+\frac{\cos x}{1^2 . 3^2}+\frac{\cos 2x}{3^2 . 5^2}+\frac{\cos 3x}{5^2 . 7^2}+\ldots$$

Také tu jest $f(x)=\varphi(x)$ v $(-\pi, \pi)$; z tohoto výsledku následují pak vztahy (jednak pro $x=0$, jednak pro $x=\pi$)

$$\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1^2 . 3^2}+\frac{1}{3^2 . 5^2}+\frac{1}{5^2 . 7^2}+\ldots,$$

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1^2 . 3^2}+\frac{1}{3^2 . 5^2}-\frac{1}{5^2 . 7^2}+\ldots.$$

PŘÍKLAD 4. Řada Fourierova o periodě 2 pro interval $(-1, 1)$ k funkci $f(x)$ definované tam vztahy $f(x)=\pi^3(\frac{1}{4}-x^2)$ v $(0, \frac{1}{2})$, $f(x)=\pi^3(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})$ v $(\frac{1}{2}, 1)$, $f(-x)=f(x)$ jest

$$\varphi(x)=8\left(\frac{\cos \pi x}{1^3}-\frac{\cos 3\pi x}{3^3}+\frac{\cos 5x}{5^3}-\ldots\right).$$

Jest rovněž v $(-1, 1)$ $\varphi(x)=f(x)$. Jak byste poslední tvrzení dokázali na základě předposlední rovnice př. 16. na str. 57.

136b. Pro velmi obecnou skupinu funkcí a to pro funkce, jež pro praktické účely mají téměř výhradní zájem, dosáhneme řešení prvého úkolu v předcházejícím odst. vytčeného (totiž vyšetření, zda lze danou funkci rozvinouti v řadu trigonometrickou), když vyjdeme od jednoho specielního rozvoje trigonometrického. Rozvoj ten do jisté míry jest nám znám. Získali jsme totiž opětovně (cvičení za odst. 18*m*, př. 16; za odst. 73, př. 1μ) vztah

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin kx}{k}+\ldots; \quad 0<x<2\pi. \tag{1}$$

Rozvoj tento jest řada Fourierova příslušná k funkci $\frac{1}{2}(\pi - x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$; neboť jest, jak snadným počtem zjistíme,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\pi - x)\cos kx\,dx = 0, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\pi - x)\sin kx\,dx = \frac{1}{k}\cdot$$

Součet rozvoje jest roven v intervalu $(0, 2\pi)$ funkci k níž ten rozvoj přísluší, s výjimkou bodů 0, 2π, ve kterých součet ten jest rovný nule. Dokážeme si tuto okolnost ještě jednou novým způsobem, jednak k vůli důležitosti příkladu tohoto, jednak a to hlavně, abychom získali nové poznatky o rozvoji uvažovaném.

K tomu cíli vyjdeme od identičnosti (známé z trigonometrie*))

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \tag{2}$$

kterouž budeme integrovati v mezích π, x. Dostaneme ihned

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} + \int_\pi^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx.$$

Levou stranu této rovnice označíme krátce s_n, integrál pak na pravé straně $-R_n$ (užívajíce tak značek pro částečný součet a zbytek po n-tém členu známých z výkladu o nekonečných řadách). Vyšetřovati budeme R_n. Pro R_n máme nejdříve, omezíme-li x na interval $(\eta, 2\pi - \eta)$, kde $0 < \eta < \pi$, dle druhé věty o střední hodnotě (funkce $(\sin\frac{1}{2}x)^{-1}$ jest v intervalu integračním monotonní)**)

$$R_n = \int_x^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\int_x^\xi \sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx + \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\pi}\int_\xi^\pi \sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx =$$

$$= \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})\xi}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}x} + \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\xi}{2n+1} \tag{α}$$

a tedy, jelikož nejmenší hodnota $\sin\frac{1}{2}x$, když jest v $(\eta, 2\pi - \eta)$, jest $\sin\frac{1}{2}\eta$

$$|R_n| < \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\eta} + 1\right),$$

t. j. $|R_n| < \varepsilon$ pro *všecka* x intervalu $(\eta, 2\pi - \eta)$ a pro všecka $n > N$, kde

$$N = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\eta} + 1\right)\cdot$$

Užívajíce obvyklé terminologie, můžeme říci, že řada uvažovaná jest *stejnoměrně konvergentní pro všecka x v intervalu*

*) Vyplyne snadno, násobíme-li obě strany výrazem $2\sin\frac{1}{2}x$ a užijeme pak opětovně vztahu $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$.

**) Vyšetření to však lze snadno provésti i dle prvé věty o střední hodnotě. Viz první vydání této knihy.

$(\eta, 2\pi-\eta)$ *a má v* (1) *udaný součet.* Budeme však ještě jedné vlastnosti výrazu R_n používati, při čemž přijdou v úvahu všecka x celého intervalu $(0, 2\pi)$, tedy nejenom x z $(\eta, 2\pi-\eta)$. Za tím účelem budu integrovati identitu (2) v mezích $0, x$ při, čemž pro x se omezím na interval $(0, \pi)$. Dostanu

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{1}\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx = \int_0^x \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx. \quad (3)$$

Avšak pro integrál na pravé straně mohu psáti tento rozklad (označím pro stručnost $a_k = 2\pi k/(2n+1)$).

$$\int_0^x \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = \int_0^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \ldots + \int_{a_r}^{x}; \quad (4)$$

r jest číslo celé stanovené nerovninou $a_r < x \leqq a_{r+1}$. Dle předpokladu omezujícího x jest $r \leqq n$. Integrály na pravé straně vztahu (4) jsou čísla se střídavými znaménky (prvý kladný, druhý záporný, a t. d.) a v absolutní hodnotě stále klesají. Jest tedy součet na pravé straně číslo téhož znaménka jako prvý člen (to jest kladné) a v absolutní hodnotě menší než prvý člen. Avšak (jak snadno pomocí známých nám rozvojů pro $\sin x$ lze dokázati a jakž také ihned následuje z (2))

$$0 < \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} \leqq n + \tfrac{1}{2} \quad \text{pro} \quad 0 < x \leqq \frac{2\pi}{2n+1},$$

tedy

$$0 < \int_0^{a_1} \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx < (a_1 - 0)(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{2\pi}{2n+1}(n+\tfrac{1}{2}) = \pi.$$

I jest pro $0 < x \leqq \pi$

$$0 < \int_0^x \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx < \pi.$$

Avšak integrál v nerovnině této se vyskytující jest dle označení svrchu užitého $\frac{1}{2}\pi - R_n$ a jest tedy zbytek R_n v absolutní hodnotě nejprve pro x kladné a menší ($\leqq$) než π menší než $\frac{1}{2}\pi$. Totéž však vyplyne pro případ, že x jest v $(\pi, 2\pi)$, — nejsnáze substitucí $x = 2\pi - x'$ do výrazu pro R_n v (a) a užitím dosaženého právě výsledku pro R_n. *Jest tedy pro všecka x intervalu* $(0, 2\pi)$

$$|R_n| = \left|\frac{\pi - x}{2} - s_n\right| \leqq \tfrac{1}{2}\pi; \quad (A)$$

pro všecka pak x intervalu $(\eta, 2\pi-\eta)$ jest

$$|R_n| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N. \quad (B)$$

Při tom test v (A) znaménko rovnosti možné pouze pro $x=0, 2\pi$ a v (B) jest ε libovolné číslo kladné (jež můžeme pokládati za menší než $\frac{1}{2}\pi$) *a N svrchu pomocí ε a η stanovené číslo.*

136c. Jestliže t jest uvnitř $(0, 2\pi)$, následuje z předcházejících výsledků, že

$$\tfrac{1}{2}(\pi - x + t) = \frac{\sin(x-t)}{1} + \frac{\sin 2(x-t)}{2} + \frac{\sin 3(x-t)}{3} + \dots, \qquad (\times)$$

$$\text{pro } 0 < x - t < 2\pi, \text{ t. j. pro } t < x < 2\pi + t.$$

Avšak pro x hovící nerovninám $0 \leqq x < t$ má rozvoj právě vypsaný týž součet jako pro hodnotu $2\pi + x$ zapadající do intervalu $(t, 2\pi + t)$, v němž rovnice $(\times)$ jest platna. Můžeme tedy psáti, označíme-li

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x-t)}{1} + \frac{\sin 2(x-t)}{2} + \frac{\sin 3(x-t)}{3} + \dots, \qquad (5)$$

že v intervalu $(0, 2\pi)$ jest

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \tfrac{1}{2}(-\pi - x + t), && \text{je-li } 0 \leqq x < t, \\ &= \tfrac{1}{2}(\pi - x + t), && \text{je-li } t < x \leqq 2\pi. \end{aligned} \qquad (5')$$

Tudíž má funkce $\varphi(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$ v bodě t diskontinuitu a jest $\varphi(t+0) - \varphi(t-0) = \pi$; ve všech ostatních bodech jest to funkce spojitá.

Uvažujme konečně pro případ, že t, x jsou v $(0, 2\pi)$ rozvoj

$$\psi(x, t) = \tfrac{1}{2}t + \frac{\sin x - \sin(x-t)}{1} + \frac{\sin 2x - \sin 2(x-t)}{2} + \frac{\sin 3x - \sin 3(x-t)}{3} + \dots \qquad (-)$$

Z (1), (5), (5′) vyplývá ihned jednoduché vyjádření funkce $\psi(x, t)$. Jest

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}(\pi - x) - \tfrac{1}{2}(-\pi - x + t) = \pi && \text{pro } 0 < x < t, \\ &= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}(\pi - x) - \tfrac{1}{2}(\pi - x + t) = 0 && \text{pro } t < x < 2\pi. \end{aligned} \qquad (6)$$

Jest tedy $\psi(x, t)$ v intervalu $(0+0, t-0)$ konstantní funkcí proměnné x a rovno π, v intervalu $(t+0, 2\pi-0)$ rovněž konstantní a rovno nule. Vedle toho jest, jak snadno plyne, $\psi(0, t) = \psi(t, t) = \psi(2\pi, t) = \tfrac{1}{2}\pi$. Kdybychom vypočítali Fourierův rozvoj k $\psi(x, t)$ definované vztahy (6), seznali bychom, že shoduje se (nehledě k formě) s rozvojem v (—).

Označme pro stručnost

$$u_n = \frac{\sin nx - \sin n(x-t)}{n},$$

$$S_n = \tfrac{1}{2}t + u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \psi(x, t) = S_n + \Re_n;$$

pak dle výsledků docílených pro řadu (1) v (A) a (B), které převádějí se téměř beze změny i pro řadu (5) v podstatě s ní shodnou, máme tyto vztahy pro $\psi(x, t)$

$$|\Re_n| < \pi$$

pro všecka x v $(0, 2\pi)$,
$$|\Re_n| < \varepsilon$$
pro všecka $n > N$ a všecka x z $(0, 2\pi)$ vně intervalů $(0, \eta)$, $(2\pi - \eta, 2\pi)$, $(t - \eta, t + \eta)$, kde ε jest libovolné číslo kladné ($< 2\pi$), η číslo kladné, menší než $\frac{1}{2}\pi$ a
$$N = \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}\eta} + 1\right), \tag{7}$$
t. j. *Fourierův rozvoj příslušný k $\psi(x, t)$ konverguje stejnoměrně k této funkci pro všecka x z $(0, 2\pi)$ neležící na intervalech $(0, \eta)$, $(2\pi - \eta, 2\pi)$, $(t - \eta, t + \eta)$; zbytek pak po n-tém členu jest pro každé n a všecka x v $(0, 2\pi)$ menší v absolutní hodnotě než π.*

136*d*. Podavše vyšetření Fourierova rozvoje pro jeden jednoduchý případ funkce, můžeme snadno odvoditi součet Fourierových rozvojů pro velmi rozsáhlou skupinu funkcí a zároveň odvoditi některé důležité vlastnosti těch rozvojů.

Budeme zabývati se funkcemi, jež jsou integrály z funkcí v $(0, 2\pi)$ integrace schopných dle C.-R., jakož i rozvoji Fourierových k nim v $(0, 2\pi)$ příslušícími. Budiž $F(x)$ funkce integrace schopna dle C.-R. v $(0, 2\pi)$ a položme
$$f(x) = \int_0^x F(x)\,dx. \tag{a}$$
Pak jest $f(0) = 0$; *učiníme ještě předpoklad, že $f(2\pi) = 0$.* Není-li tento předpoklad splněn, vycházíme-li od $F(x)$, pak postačí místo $F(x)$ uvažovati $F(x) - \alpha$, kde α jest vhodně volená konstanta (totiž integrál z $F(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$ dělený číslem 2π).

Násobme rovnici
$$\psi(x, t) = S_n + \Re_n \tag{8}$$
funkcí $F(x)$ a integrujme na obou stranách v mezích $(0, 2\pi)$. Na levé straně máme (dle významu funkce ψ)
$$\int_0^{2\pi} F(x)\,\psi(x, t)\,dx = \pi \int_0^t F(x)\,dx = \pi f(t).$$
Abychom obdrželi integrál pravé strany, uvažovati budeme nejprve integrál
$$\int_0^{2\pi} F(x) u_n\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} F(x)\,[\sin nx - \sin n(x - t)]\,dx$$
$$= -\int_0^{2\pi} f(x)\,[\cos nx - \cos n(x - t)]\,dx$$

(provedli jsme integraci per partes, zavádějíce pro integrál z prvého činitele $F(x)$ značku $f(x)$; integrovaný člen odpadl, neboť $f(0) = f(2\pi) = 0$). Klademe-li

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

můžeme konečně psáti

$$\int_0^{2\pi} F(x)\,u_n\,dx = \pi\,[a_n(\cos nt - 1) + b_n \sin nt]$$

Tím jest integrace výrazu $S_n = \frac{1}{2}t + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ násobeného $F(x)$ provedena (integrál z prvého členu $\frac{1}{2}tF(x)$ jest rovný nule). Zbývá vyšetřiti integrál z $\mathfrak{R}_n F(x)$. Avšak $|\mathfrak{R}_n| < \pi$ v intervalech $(0, \eta)$, $(2\pi - \eta, 2\pi)$, $(t - \eta, t + \eta)$; celková délka těchto intervalů jest 4η, nezapadají-li intervaly do sebe, jinak jest menší než 4η. Ve zbytku intervalu $(0, 2\pi)$ jest $|\mathfrak{R}_n| < \varepsilon$. Označíme-li tedy horní hranici funkce $|F(x)|$ v $(0, 2\pi)$ $\mathfrak{M}$, máme

$$\left|\int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_n F(x)\,dx\right| < 4\eta\,.\,\pi\,.\,\mathfrak{M} + 2\pi\varepsilon\mathfrak{M};$$

číslo na pravé straně nerovniny napsané můžeme učiniti menším než kladné číslo $\pi\varepsilon_1$, volíme-li vhodně η a ε, je-li jenom $n > N$, kde N stanoveno v (7) a to nezávisle na proměnné t.

Můžeme tedy psáti konečně rovnici vznikající z (8) násobením a integrováním (jak bylo svrchu obšírně naznačeno; po provedení integrace ještě krátíme π)

$$f(t) = S_n + R_n, \text{ kde } |R_n| < \varepsilon_1 \text{ pro všecka } n > N$$

a kde

$$S_n = [a_1(\cos t - 1) + b_1 \sin t] + [a_2(\cos 2t - 1) + b_2 \sin 2t] + \ldots + [a_n(\cos nt - 1) + b_n \sin nt].$$

Jest tedy (i pro $t = 0$, 2π)

$$f(t) = [a_1(\cos t - 1) + b_1 \sin t] + [a_2(\cos 2t - 1) + b_2 \sin 2t] + \ldots \text{ in inf.},$$

kde nekonečná řada na pravé straně konverguje stejnoměrně v intervalu $(0, 2\pi)$. Integrací v intervalu $(0, 2\pi)$ máme tudíž z poslední rovnice

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = -a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n \ldots$$

Řada $a_1 + a_2 + \ldots$ jest konvergentní a součet její jest $-\frac{1}{2}a_0$, kde $\frac{1}{2}a_0$ jest konstantní člen v rozvoji Fourierovu pro $f(t)$. Máme tak celkem: *Řada Fourierova*

$$\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \ldots$$

příslušná k funkci $f(t)$ v $(0, 2\pi)$, jest stejnoměrně konvergentní a má za součet $f(t)$, jestliže $f(t)$ jest integrálem z funkce v $(0, 2\pi)$ integrace schopné a jestliže zároveň $f(0) = f(2\pi) = 0$.

POZNÁMKA. Vztah (8) bychom mohli také jinak využitkovati. Násobíme-li jej $F(x)$, kde $F(x)$ jest nyní libovolná funkce proměnné x v $(0, 2\pi)$ integrace schopná, a potom integrujeme v mezích $0, 2\pi$, máme se zřetelem k vztahu

$$\int_0^{2\pi} F(x) u_n \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} F(x) [\sin nx - \sin n(x-t)] \, dt = \frac{\pi}{n} [d_n (1 - \cos nt) + c_n \sin nt],$$

(c_n, d_n jsou koeficienty řady Fourierovy o periodě 2π příslušící v intervalu $(0, 2\pi)$ k funkci $F(x)$), tuto rovnici (když jsme ještě krátili π)

$$\int_0^t F(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [d_n (1 - \cos nt) + c_n \sin nt] + \tfrac{1}{2} t c_0.$$

Píšeme-li v této rovnici u místo t a obě rovnice pak od sebe odčítáme dostáváme

$$\int_t^u F(x) \, dx = \tfrac{1}{2}(u-t) c_0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} [-d_n (\cos nu - \cos nt) + c_n (\sin nu - \sin nt)].$$

Patří-li tedy řada trigonometrická o periodě 2π v intervalu $(0, 2\pi)$ o koeficientech c_n, d_n jednak k funkci $F(x)$, jednak k funkci $G(x)$, jest v důsledku posledního vztahu

$$\int_t^u F(x) \, dx = \int_t^u G(x) \, dx \quad \text{aneb} \quad \int_t^u (F(x) - G(x)) \, dx = 0,$$

při tom jsou t, u libovolná čísla intervalu $(0, 2\pi)$. Jsou-li tudíž obě funkce současně spojity v (c, d), kde $0 \leqq c < d \leqq 2\pi$, pak jsou obě ty funkce v (c, d) identicky sobě rovny.

Jestliže řada Fourierova patřící ku $F(x)$ má v (c, d) za součet $\varphi(x)$ a jestliže řada ta v každém intervalu na (c, d) jest integrovatelna*), jest nejprve (čísla t, u jsou na (c, d))

$$\int_t^u \varphi(x) \, dx = \tfrac{1}{2}(u-t) c_0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} [-d_n (\cos nu - \cos nt) + c_n (\sin nu - \sin nt)]$$

aneb porovnáme-li s výsledkem svrchu uvedeným

$$\int_t^u \varphi(x) \, dx = \int_t^u F(x) \, dx, \quad 0 \leqq c \leqq t < u \leqq d \leqq 2\pi;$$

*) To znamená tu, že integrál ze součtu řady v jistých mezích dostaneme, sčítáme-li řadu vzniklou z dané integrací jejich členů v těch mezích.

tudíž, je-li v bodu některém x_0 a jeho okolí řada Fourierova patřící ku $F(x)$ integrovatelna, pak jest v tom bodě součet té řady rovný $F(x_0)$, konverguje-li řada v x_0 a jsou-li $\varphi(x)$ i $F(x)$ v x_0 spojity.

136e. Výsledek, který jsme obdrželi, můžeme bez jakékoliv potíže rozšířiti. Budiž $f(x)$ nyní funkce, která jest v intervalu $(0, 2\pi)$ definovaná rovnicí

$$f(x)=\int_0^x F(x)\,dx+c, \quad c \text{ konstanta} \tag{9}$$

a která ani pro $x=0$, ani pro $x=2\pi$ nemusí býti rovna nule. Pak lze nalézti dvě konstanty p, q tak, že funkce

$$f_1(x)=f(x)-[p+\tfrac{1}{2}q(\pi-x)]$$

jest rovna nule pro $x=0$ a pro $x=2\pi$; očividně jest

$$p=\tfrac{1}{2}[f(0)+f(2\pi)], \quad q=\frac{1}{\pi}[f(0)-f(2\pi)].$$

Jelikož $f_1(x)$ lze pokládati za integrál funkce $F(x)+\frac{1}{2}q$ v intervalu $(0, x)$, můžeme dle věty právě dokázané rozvinouti $f_1(x)$ v řadu Fourierovu v intervalu $(0, 2\pi)$ a tamtéž stejnoměrně konvergentní

$$f_1(x)=\tfrac{1}{2}a'_0+(a'_1\cos x+b'_1\sin x)+(a'_2\cos 2x+b'_2\sin 2x)+\ldots$$

Avšak i funkci $p+\frac{1}{2}q(\pi-x)$ lze rozvinouti podle (1) v řadu Fourierovu v intervalu $(0+0, 2\pi-0)$

$$p+\tfrac{1}{2}q(\pi-x)=p+\frac{q}{1}\sin x+\frac{q}{2}\sin 2x+\frac{q}{3}\sin 3x+\ldots, \qquad 0<x<2\pi.$$

Tato řada jest stejnoměrně konvergentní v intervalu $(\eta, 2\pi-\eta)$, kde η jest kladné (menší než π). Sčítáme-li pak oba ty rozvoje Fourierovy, dostaneme rozvoj Fourierův pro $f(x)$ v intervalu $(0+0, 2\pi-0)$ a stejnoměrně konvergentní v $(\eta, 2\pi-\eta)$, takže máme větu: *K funkci $f(x)$, kterou lze definovati v intervalu $(0, 2\pi)$ vztahem (9), přísluší řada Fourierova*

$$\tfrac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots$$

Její součet jest v $(0+0, 2\pi-0)$ roven $f(x)$; v bodě 0, resp. 2π, jest její součet $\frac{1}{2}[f(0)+f(2\pi)]$. Řada ta jest stejnoměrně konvergentní v intervalu $(\eta, 2\pi-\eta)$. Zbytek její po členu n-tém jest pro všecka x v $(0, 2\pi)$ v absolutní hodnotě menší než $\frac{1}{2}|f(0)-f(2\pi)|+\varepsilon_n$, kde ε_n jest číslo s rostoucím n se blížící k nule.

Výroky uváděné ve větě, pokud o nich nebyla v předcházející úvaze zmínka, jsou důsledkem okolnosti, že $f(x)$ jest součtem $f_1(x)$ a výrazu $p+\frac{1}{2}q(\pi-x)$ a vztahů mezi těmito dvěma funkcemi a příslušnými rozvoji Fourierovými, jakož i vět o těchto rozvojích platných (viz zejména rovnici (A) odst. 136*b*).

136*f*. Můžeme však ještě dále zevšeobecniti výsledky docílené. Funkce definovaná vztahem (9) jest funkce spojitá. Uvažujme nyní funkci $f(x)$, jež v intervalu $(0, 2\pi)$ jest spojitá s výjimkou bodu α, ve kterém jest nespojitá, avšak tak, že existují limity $f(\alpha-0)$, $f(\alpha+0)$ a

$$f(\alpha+0)-f(\alpha-0)=d \neq 0, \qquad 0<\alpha<2\pi.$$

V intervalu $(0, \alpha)$ pak nechť lze považovati $f(x)$ za integrál z funkce integrace schopné podle vzoru rovnice (9); rovněž v intervalu $(\alpha, 2\pi)$. V tomto případě lze zavésti funkci $f_1(x)$ rovnicí

$$f(x)=f_1(x)-\frac{d}{\pi}\psi(x,\alpha) \tag{r}$$

kde $\psi(x, \alpha)$ jest funkce odst. 136*c* (rovnající se π uvnitř $(0, \alpha)$ a nule uvnitř $(\alpha, 2\pi)$). Funkce $f_1(x)$ jest funkcí spojitou v $(0, 2\pi)$*) a lze ji pokládati i v $(0, \alpha)$ i $(\alpha, 2\pi)$ za integrály z funkcí dle vzoru (9) (a to týchž funkcí jako $f(x)$ ovšem s odlišným c) a tedy vůbec za integrál z jisté funkce integrace schopné v $(0, 2\pi)$. Patří tudíž k $f_1(x)$ řada Fourierova o součtu $s_1(x)$ rovném $f_1(x)$ ve všech bodech intervalu $(0, 2\pi)$ vyjma v bodech $0, 2\pi, \alpha$, ve kterých jest

$$s_1(0)=s_1(2\pi)=\tfrac{1}{2}[f_1(+0)+f_1(2\pi-0)], \quad s_1(\alpha)=f_1(\alpha-0)=f_1(\alpha+0).$$

Poněvadž však i k $\frac{d}{\pi}\psi(x,\alpha)$ dle odst. 136*c* patří řada Fourierova o součtu $s_2(x)$ rovném tomuto výrazu v $(0, 2\pi)$; v bodech $0, 2\pi, \alpha$

$$s_2(0)=s_2(2\pi)=s_2(\alpha)=\tfrac{1}{2}d,$$

patří i k $f(x)$ dle (r) řada Fourierova (součet to řad Fourierových patřících k prvému i druhému členu pravé strany (r)), jejíž součet bude rovný $f(x)$ ve všech bodech z $(0, 2\pi)$ vyjma v bodech $0, 2\pi, \alpha$. Pro tyto body jest podle (r)

$$f(0)=f_1(+0)-d, \quad f(2\pi)=f_1(2\pi-0), \quad f(\alpha-0)=f_1(\alpha-0)-d, \quad f(\alpha+0)=f_1(\alpha+0);$$

jest tudíž součet $s(x)$ řady Fourierovy patřící k $f(x)$ v bodech $0, 2\pi, \alpha$ dán rovnicemi

$$s(0)=s(2\pi)=s_1(0)-s_2(0)=\tfrac{1}{2}[f(0)+f(2\pi)], \quad s(\alpha)=s_1(\alpha)-s_2(\alpha)=\tfrac{1}{2}[f(\alpha-0)+f(\alpha+0)].$$

*) Hodnoty $f_1(\alpha)$, $f_1(0)$, $f_1(2\pi)$ mohou ovšem vybočovati ze spojitého pořadí hodnot funkce $f_1(x)$; okolnost tato jest bezvýznamná pro Fourierův rozvoj funkce $f_1(x)$. Jest jenom nutno v následujícím místo těch hodnot uvažovati limity $f_1(\alpha-0)$, $f_1(\alpha+0)$, $f_1(+0)$, $f_1(2\pi-0)$.

Jest patrno, že ještě obecněji lze uvažovati funkce mající několik diskontinuit naznačeného druhu a lze tudíž vysloviti větu: *Budiž dána v intervalu* $(0, 2\pi)$ *funkce* $f(x)$ *mající v bodech* α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *nacházejících se v* $(0, 2\pi)$ *diskontinuity takové, že*

$$f(\alpha_k+0)-f(\alpha_k-0)=d_k \neq 0, \qquad k=1, 2, \ldots p$$

V intervalech $(0, \alpha_1)$, (α_1, α_2), $\ldots$, (α_{p-1}, α_p), $(\alpha_p, 2\pi)$ *nechť* $f(x)$ *jest vyjádřitelna integrálem z funkce integrace schopné podle vzoru* (a). *Pak k* $f(x)$ *přísluší řada Fourierova, jejíž součet* $s(x)$ *jest rovný* $f(x)$ *ve všech bodech intervalu* $(0, 2\pi)$ *s výjimkou bodů* $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, 2\pi$, *ve kterých jest*

$$s(0)=s(2\pi)=\tfrac{1}{2}[f(0)+f(2\pi)], \quad s(\alpha_k)=\tfrac{1}{2}[f(\alpha_k+0)+f(\alpha_k-0)].$$

Řada jest stejnoměrně konvergentní v intervalech $(\eta, \alpha_1-\eta)$, $(\alpha_1+\eta, \alpha_2-\eta), \ldots, (\alpha_p+\eta, 2\pi-\eta)$, *kde* η *jest číslo kladné* (*menší než polovina nejmenšího z intervalů* $(0, \alpha_1)$, $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots$). *Zbytek po n členu jest v* $O(\alpha_k, \eta)$ — *t. j. v určitém okolí bodu* α_k — *menší v absolutní hodnotě než* $\frac{1}{2}|d_k|+\varepsilon_n$, *kde* ε_n *jest číslo kladné s rostoucím n konvergující k nule.*

POZNÁMKA. Z úvah předcházejících odstavců (zejména srovnej odst. 136*d*, pozn.) následuje snadno věta: Patří-li k funkci $F(x)$ v $(0, 2\pi)$ řada Fourierova

$$\tfrac{1}{2}c_0+(c_1\cos x+d_1\sin x)+(c_2\cos 2x+d_2\sin 2x)+\ldots,$$

pak integrujeme-li člen za členem v intervalu $(0, x)$, dostaneme rozvoj v $(0, 2\pi)$ stejnoměrně konvergentní

$$\tfrac{1}{2}c_0x+\tfrac{1}{1}[c_1\sin x+d_1(1-\cos x)]+\tfrac{1}{2}[c_2\sin 2x+d_2(1-\cos 2x)]+\tfrac{1}{3}[\ldots]+\ldots$$

jehožto součet jest $\int_0^x F(x)\,dx=f(x)$. Řada

$$\tfrac{1}{1}d_1+\tfrac{1}{2}d_2+\tfrac{1}{3}d_3+\ldots$$

jest vždy konvergentní (viz obdobnou úvahu v odst. 136*d*); označíme-li součet její $+\frac{1}{2}a_0$, jest rozvoj

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}a_0+\tfrac{1}{1}(-d_1\cos x+c_1\sin x)+\tfrac{1}{2}(-d_2\cos 2x+c_2\sin 2x)+\\ +\tfrac{1}{3}(-d_3\cos 3x+c_3\sin 3x)+\ldots=f(x)-\tfrac{1}{2}c_0x\end{gathered}$$

rozvoj Fourierův patřící k $f(x)-\frac{1}{2}c_0x$, v $(0, 2\pi)$ stejnoměrně konvergentní.

Cvičení.

1. Provedeme-li rozvoj Fourierův s periodou 2π funkce $e^{\lambda x}$ v intervalu $(0, 2\pi)$, dostaneme vztah

$$\pi\frac{e^{\lambda x}}{e^{2\lambda\pi}-1}=\frac{1}{2\lambda}+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2+\lambda^2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{k\sin kx}{k^2+\lambda^2} \tag{α}$$

platný v $(0+0, 2\pi-0)$. Rozvineme-li touž funkci, avšak v intervalu $(-\pi, \pi)$, obdržíme

$$\pi \frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}} = \frac{1}{2\lambda} + \lambda \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2+\lambda^2} - \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin kx}{k^2+\lambda^2}.$$

Rovnost jest platna v $(-\pi+0, \pi-0)$.

2. Ukažte, že
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2+4k^2\pi^2}.$$

Návod. Součet řady na pravé straně rovnice (α) v předcházejícím příkladě jest, označíme-li levou stranu $g(x)$, rovný pro $x=0$ v důsledku obecných vět (viz odst. 136*e*) výrazu $\frac{1}{2}[g(0)+g(2\pi)]$. Píšeme-li v rovnici tak vzniklé $2\lambda\pi = z$, máme ihned žádanou relaci.

3. Provedete-li rozvoj funkce $e^{\lambda x}$ v řadu kosinusovou o periodě 2π platný v intervalu $(0, \pi)$, dostanete vztah $(0<x<\pi)$:

$$e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda\pi}-1}{\pi\lambda} + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+4k^2} \cos 2kx - \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{\lambda\pi}+1}{\lambda^2+(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Návod. Pravá strana jest řada Fourierova s periodou 2π patřící v intervalu $(0, 2\pi)$ k funkci $f(x)$ definované rovnicemi

$$f(x) = e^{\lambda x}, \text{ když } 0 \leqq x \leqq \pi; \quad f(2\pi - x) = f(x) \text{ pro } \pi \leqq x < 2\pi;$$

aneb řada Fourierova s periodou 2π, pro interval $(-\pi, \pi)$ a definované vztahy $f(-x) = f(x)$ a $f(x) = e^{\lambda x}$ při $0 \leqq x \leqq \pi$.

4. Stejně jako vztah předcházejícího příkladu plynou i tyto rozvoje

$$e^{\lambda x} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\lambda^2+k^2} (1-(-1)^k e^{\lambda\pi}) \sin kx, \qquad 0<x<\pi,$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda\pi} = \frac{\sin x}{1^2-\lambda^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2-\lambda^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2-\lambda^2} - \ldots \qquad 0 \leqq |x| < \pi,$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda\pi} = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda \cos x}{1^2-\lambda^2} - \frac{\lambda \cos 2x}{2^2-\lambda^2} + \ldots \qquad 0 \leqq |x| \leqq \pi.$$

Odvoďte vztahy poslední z druhé rovnice příkl. 1. tím, že tam místo λ dosadíte λi, i imag. jednotka.

5. Pro všecka x intervalu $(0, 1)$, jež nedají se psáti jako podíl a/q, kde a, q jsou čísla celá kladná a q pevně dáno, jest

$$E(qx) = \tfrac{1}{2}(q-1) - \frac{1}{\pi} \sum_{k} \frac{1}{k} (q \sin 2k\pi x - \sin 2\pi kqx), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Návod. Dokáže se ku př. tím, že se sestrojí řada Fourierova o periodě 1 příslušná v $(0, 1)$ k funkci, jež jest v $(0, 1/q)$ rovna nule, v $(1/q, 2/q)$ rovna 1, a t. d. Aneb lze vyjíti od řady $\frac{1}{1} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \ldots$. Symbol $E(z)$ značí největší celé číslo obsažené v z.

6. V intervalu $(0, 2\pi)$ jest

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \log (2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi) + \tfrac{3}{4} \cos \varphi - \tfrac{1}{2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{(k-1)\,k\,(k+1)},$$

$$(\varphi - \pi) \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{3}{4} \sin \varphi = \sum_{2}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{(k-1)\,k\,(k+1)};$$

v intervalu $(0, \pi)$ pak

$$(\varphi - \pi) \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2k\varphi}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)}.$$

7. Obecněji jest pro ν celistvé v intervalu $(0, 2\pi)$ — pro stručnost značí $n = 2\nu$ —

$$(2\nu)! \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k\,(k^2 - 1^2) \ldots (k^2 - \nu^2)} = (-1)^{\nu+1}\, 2^n \sin^n \tfrac{1}{2}\varphi \log (2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi) + c_n \cos \nu\varphi +$$
$$+ (c_{n-1} + c_1) \cos (\nu - 1)\varphi + \ldots + (c_{\nu+1} + c_{\nu-1}) \cos \varphi + c_\nu.$$

$$(2\nu)! \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k\,(k^2 - 1^2) \ldots (k^2 - \nu^2)} = (-1)^{\nu} (\pi - \varphi)\, 2^{n-1} \sin^n \tfrac{1}{2}\varphi + c_n \sin \nu\varphi +$$
$$+ (c_{n-1} - c_1) \sin (\nu - 1)\varphi + \ldots + (c_{\nu+1} - c_{\nu-1}) \sin \varphi,$$

kde

$$c_k = (-1)^{n-k} \left[\tfrac{1}{1} \binom{n-1}{k-1} + \tfrac{1}{2} \binom{n-2}{k-2} + \tfrac{1}{3} \binom{n-3}{k-3} + \ldots \right].$$

8. Jestliže m jest celé kladné číslo, jest

$$|\cos^{2m} x| = 2\, \frac{1.3.5 \ldots (2m-1)}{2.4.6 \ldots 2m} \left\{ \tfrac{1}{2} + \frac{m}{m+1} \cos 2x + \frac{m\,(m-1)}{(m+1)\,(m+2)} \cos 4x + \right.$$
$$\left. + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)} \cos 6x + \ldots \right\}$$

$$|\cos^{2m-1} x| = \frac{4}{\pi}\, \frac{2.4.6 \ldots (2m-2)}{3.5.7 \ldots (2m-1)} \left\{ \tfrac{1}{2} + \frac{2m-1}{2m+1} \cos 2x + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+1)(2m+3)} \cos 4x + \ldots \right\}$$

(Whittaker-Watson.)

Návod. Prvou rovnici, kde v závorce pravé strany jest konečný počet členů, můžeme dostati snadno umocněním výrazu $\tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ na $2m$. Obě rovnice pak vyplývají rovněž snadno jakožto Fourierovy řady s periodou π pro funkce sudé v intervalu $(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$. Jediná potíž, která se při tom vyskytne, jest výpočet integrálů

$$I_{a,b} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^a x \cos 2bx\, dx.$$

Pro tyto integrály lze však odvoditi rekurentní relaci $I_{a,\,b+1} = \dfrac{a - 2b}{a + 2b + 2}\, I_{a,\,b}$. Jelikož pak jest znám $I_{a,0}$ (str. 161; (8), (9)), jsou touto relací stanoveny $I_{a,b}$ obecně.

9. Obecně jest (při $a > 0$)

$$|\cos x|^a = c \left\{ \tfrac{1}{2} + \frac{a}{a+2} \cos 2x + \frac{a\,(a-2)}{(a+2)(a+4)} \cos 4x + \right.$$
$$\left. + \frac{a\,(a-2)\,(a-4)}{(a+2)\,(a+4)\,(a+6)} \cos 6x + \ldots \right\},$$

kde

$$c=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^a x\,dx. \qquad a>0$$

(Viz příkl. předcházející. Zavedením nevlastních integrálů se výsledek vypsaný dá rozšířiti pro všechna $a>-1$).

10. Odvoditi jest rozvoj Fourierův s periodou 2π k funkci $\varphi(x,\delta)$ proměnné x definované vztahy

$$\begin{aligned}
\varphi(x+2\pi,\delta)&=\varphi(x,\delta), &&\text{pro všechna } x\\
\varphi(x,\delta)&=\frac{x-t+\delta}{\delta^2}, &&\text{pro } t-\delta\leqq x\leqq t,\\
&=-\frac{x-t-\delta}{\delta^2}, &&\text{pro } t\leqq x<t+\delta,
\end{aligned}$$

Ve všech ostatních bodech, pro které $\varphi(x,\delta)$ těmito vztahy není definováno, budiž $\varphi(x,\delta)=0$. Při tom jest δ číslo kladné menší než π.

Rozvoj ten jest

$$\varphi(x,\delta)=\frac{1}{2\pi}+\frac{4}{\pi\delta^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}k\delta}{k^2}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)$$

a jest stejnoměrně konvergentní pro všecka x.

11. Značme

$$\beta_k=\frac{\sin^2 k\delta}{k^2\delta^2},\ \text{pro } k=1,2,3,\ldots,\ \beta_0=1.$$

Pak součet nekonečné řady

$$|\beta_0-\beta_1|+|\beta_1-\beta_2|+|\beta_2-\beta_3|+\ldots+|\beta_{n-1}-\beta_n|+\ldots<\frac{4}{3}.$$

Návod. Důkaz tvrzení tohoto stačí provésti pro δ dosti malé a budeme tedy hned k vůli zjednodušení předpokládati $0<\delta<1$. Členové po sobě následující, ve kterých $\beta_{k-1}-\beta_k$ má totéž znaménko, dají se jednoduše sčítat; tak ku př. je-li $\beta_l-\beta_{l+1}$ prvý z rozdílů, jenž jest záporný, jest

$$|\beta_0-\beta_1|+|\beta_1-\beta_2|+|\beta_2-\beta_3|+\ldots+|\beta_{l-1}-\beta_l|=|\beta_0-\beta_l|$$

atd. Rozdíl však $\beta_{k-1}-\beta_k$ má protivné znaménko znaménku rozdílu $\beta_k-\beta_{k+1}$ jenom tenkrát, je-li v intervalu $((k-1)\delta,\ (k+1)\delta)$ bod, pro který $\sin^2 x/x^2$ má relativní extrém. Atd.

12. K nekonečné řadě

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots \qquad (\alpha)$$

přiřaďme řadu

$$A_0+A_1\frac{\sin^2\delta}{1^2\delta^2}+A_2\frac{\sin^2 2\delta}{2^2\delta^2}+\ldots+A_n\frac{\sin^2 n\delta}{n^2\delta^2}+\ldots; \qquad (\beta)$$

budiž tato konvergentní pro každé $\delta>0$ a označme její součet s_δ. Existuje-li $\lim\limits_{\delta=0} s_\delta$, potom limita ta jest rovna součtu řady (α), je-li (α) konvergentní *(není-li pak (α) konvergentní, budeme limitu onu, existuje-li, nazývati* **součtem řady** *(α)* **sčítané podle Riemanna).**

Návod. Předpokládejme, že (α) konverguje a má součet s, označme ještě částečné součty řady (α) podle známého způsobu $s_0, s_1, s_2, \ldots$ Pak lze řadu (β) psáti ve tvaru (označení viz v příkl. předch.)

$$s_0\beta_0+(s_1-s_0)\beta_1+(s_2-s_1)\beta_2+\ldots=s_0(\beta_0-\beta_1)+s_1(\beta_1-\beta_2)+s_2(\beta_2-\beta_3)+\ldots$$

aneb konečně ve tvaru

$$s+(s_0-s)(\beta_0-\beta_1)+(s_1-s)(\beta_1-\beta_2)+(s_2-s)(\beta_2-\beta_3)+\ldots \qquad (\beta')$$

Zvolme si celé číslo N tak veliké, aby $|s_n-s|<\varepsilon$ pro všecka $n>N$ a dále η tak malé, aby

$$|(s_0-s)(\beta_0-\beta_1)+(s_1-s)(\beta_1-\beta_2)+\ldots+(s_N-s)(\beta_N-\beta_{N+1})|<\varepsilon$$

pro všecka kladná $\delta<\eta$; pak jest nejprve

$$\begin{aligned}&|(s_{N+1}-s)(\beta_{N+1}-\beta_{N+2})+(s_{N+2}-s)(\beta_{N+2}-\beta_{N+3})+\ldots\\&+\ldots|<\varepsilon(|\beta_{N+1}-\beta_{N+2}|+|\beta_{N+2}-\ldots|+\ldots)\\&\qquad<\frac{4\varepsilon}{3}\ \text{(viz příkl. předch.)}\end{aligned}$$

a jest tedy pro všecka kladná $\delta<\eta$ výraz (β') rovný $s+\Theta\varepsilon(1+\frac{4}{3})$, kde $|\Theta|<1$.

13. Je-li $f(t)$ funkce periodická s periodou 2π, integrace schopná v $(0, 2\pi)$, k níž patří řada Fourierova

$$A_0+A_1+A_2+\ldots,$$

kde $A_0=\frac{1}{2}a_0$, $A_k=a_k\cos kt+b_k\sin kt$, pak (označení viz ve třech příkl. předch. pouze v číslech β_k místo δ jest dosaditi $\frac{1}{2}\delta$) jest

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\varphi(x,\delta)\,dx=A_0+A_1\beta_1+A_2\beta_2+\ldots+A_k\beta_k+\ldots$$

Návod. Stačí násobiti rozvoj pro $\varphi(x,\delta)$ funkcí $f(x)$ a integrovati v mezích $0, 2\pi$.

14. *Je-li řada Fourierova příslušná k $f(x)$ periodické s periodou 2π*

$$\tfrac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots$$

konvergentní pro $x=t$, pak její součet jest dán limitou

$$\lim_{\delta=0}\int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\varphi(x,\delta)\,dx. \qquad (+)$$

Limita tato jest dána (podle věty o střední hodnotě; funkce $\varphi(x,\delta)$ jest kladná) *výrazem*

$$\tfrac{1}{2}f(t-0)+\tfrac{1}{2}f(t+0),$$

existují-li limity ve výraze tom se vyskytující.

Návod. Plyne ihned z příkladů předcházejících. Při užití věty o střední hodnotě (viz str. 231, rovn. (III)*)) jest rozděliti interval integrační bodem t na dva stejné intervaly integrační a větu o střední hodnotě použíti pro každý interval zvláště.

---

*) Při užití rovnice té jest nutno, abychom k výsledku vytčenému dospěli, předpokládati, že M a m jsou horní resp. dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $(t-\delta, t-0)$, resp. $(t+0, t+\delta)$.

15. Obecněji lze tvrditi: *Řada Fourierova o periodě 2π příslušná k $f(x)$ periodické s periodou 2π jest vždy sčitatelna podle Riemanna, existuje-li limita* (+). *Zvláště pak jest sčitatelna řada ta v bodech t, ve kterých funkce jest spojita a v bodech, ve kterých existují limity $f(t-0)$, $f(t+0)$. V těchto případech součet řady Fourierovy (sčítané podle Riemanna) jest vždy*

$$f(t), \text{ je-li } f(x) \text{ v bodě } t \text{ spojita; } \tfrac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)],$$

existují-li vypsané limity. Věta jest důsledek příkladů předch.

16. Řada Fourierova o periodě 2π příslušná k $f(x)$ periodické s periodou 2π není konvergentní v bodě t, ve kterém neexistuje limita (+).

V tomto případě totiž není sčitatelna ani podle Riemanna v bodě t.

17. Dokažte, že limita (+) jest rovna limitě

$$\lim_{\delta=0}\frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta}f(x)\,dx, \text{ resp. limitě } \lim_{\delta=0}\tfrac{1}{2}[f(t+\delta)+f(t-\delta)],$$

existuje-li první resp. druhá limita.

O první limitě to plyne z 2. věty odst. 165 v DP. O druhé to vyplyne z první na základě věty o střední hodnotě.

18. Ukažte, že podíl

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2}, \text{ kde } \Delta^2 f=f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$$

má za limitu $f''(x)$ pro $\lim h=0$, jestliže ovšem $f''(x)$ existuje.

Návod. Podle věty Cauchyovy (DP, str. 150, rovn. (II)) jest, označíme-li $f(x+h)+f(x-h)=g(h)$ (existuje prvá derivace funkce $f(x)$ v okolí bodu x, neboť se předpokládá existence druhé derivace v bodě x)

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2}=\frac{g(h)-g(0)}{h^2-0^2}=\frac{g'(\Theta h)}{2\Theta h}=\frac{f'(x+\Theta h)-f'(x-\Theta h)}{2\Theta h}$$

$0<\Theta<1$. Poslední podíl má pak pro $\lim h=0$ za limitu $f''(x)$.

Definice. Existuje-li limita

$$\lim_{h=0}\frac{\Delta^2 f}{h^2}$$

sluje tato limita **zobecněná druhá derivace.**

19. Věta Schwarzova. Funkce, jejíž druhá zobecněná derivace v intervalu (a, b) existuje a jest stále rovna nule, jest lineární funkcí v tom intervalu. Podejte důkaz.

Návod. V bodech, kde $f(x)$ má relativní maximum, jest zobecněná druhá derivace $\leqq 0$, při relat. minimu pak $\geqq 0$. Nemůže tudíž $f(x)$ míti maximum v (a, b) je-li druhá derivace zevšeob. tam stále >0; ani minimum, je-li <0.

Buďiž nyní $f(x)$, jejíž druhá derivace zevšeobecněná jest v (a, b) stále rovna nule a nechť jest nejprve $f(a)=f(b)=0$; pak i $g(a)=g(b)=0$, je-li $g(x)=f(x)\pm \pm\varepsilon(x-a)(b-x)$ a druhá zevšeob. derivace funkce $g(x)$ jest $\mp 2\varepsilon$. Je-li tedy ε kladné a volíme-li horní znaménko, jest ta derivace záporná a funkce $g(x)$ nemůže míti v (a, b) minimum a nabývá tudíž v (a, b) jenom hodnot $\geqq 0$, t. j.

$$g(x)\geqq 0 \qquad \text{aneb} \qquad f(x)\geqq -\varepsilon(x-a)(b-x).$$

Volíme-li znaménko dolní, obdržíme, že $f(x) \leq \varepsilon(x-a)(b-x)$ a tedy v celku

$$\varepsilon(x-a)(b-x) \geqq f(x) \geqq -\varepsilon(x-a)(b-x),$$

odkudž následuje známým způsobem, že $f(x)=0$ v (a, b).

Není-li $f(a)=f(b)=0$ uvažujeme místo $f(x)$ funkci $f_1(x)=f(x)-(px+q)$, kde konstanty p, q jsou tak voleny, aby $f_1(a)=f_1(b)=0$; tu dostaneme $f_1(x)=0$ v (a, b) a $f(x)=px+q$.

20. Budiž dána řada trigonometrická s periodou 2π

$$\tfrac{1}{2}a_0+(\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x)+(\alpha_2\cos 2x+\beta_2\sin 2x)+\ldots$$

sčitatelná v $(0, 2\pi)$ podle Riemanna a pro niž $\lim \alpha_n=\lim \beta_n=0$, když $\lim n=\infty$. Pak jest součet její (podle Riemanna) roven druhé zevšeobecněné derivaci funkce dané řadou trigonometrickou

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2-\frac{1}{1^2}(\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x)-\frac{1}{2^2}(\alpha_2\cos 2x+\beta_2\sin 2x)-$$
$$-\frac{1}{3^2}(\alpha_3\cos 3x+\beta_3\sin 3x)-\ldots$$

Návod. Řada dávající $F(x)$ jest konvergentní pro každé x v důsledku předpokladu o α_n, β_n. Utvoříme-li Δ^2F/h^2 máme po snadném počtu

$$\frac{\Delta^2F}{h^2}=\tfrac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\,\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}kh}{(\tfrac{1}{2}kh)^2} \qquad (=)$$

a limita tohoto výrazu pro $\lim h=0$ existuje a jest to součet dané trigonometrické řady sčítané podle Riemanna.

21. Jestliže součet (podle Riemanna) řady trigonometrické dané v příkladu předcházejícím jest funkce integrace schopná — označme ji $g(x)$ —, pak funkce

$$G(t)=-\int_0^t g(x)\,(x-t)\,dx$$

má druhou derivaci zevšeobecněnou rovnou $g(t)$ ve všech bodech t, ve kterých $g(t)$ jest spojitou, anebo aspoň ve kterých

$$g(t)=\tfrac{1}{2}\lim_{h=0}\,[g(t+h)+g(t-h)]. \qquad (\times)$$

Návod. Jest, jak snadným počtem plyne,

$$\frac{1}{\delta^2}\,[G(t+\delta)+G(t-\delta)-2\,G(t)]=\int_{t-\delta}^{t+\delta}g(x)\,\varphi(x,\delta)\,dx,$$

kde $\varphi(x,\delta)$ jest funkce příkladu 10. Odtud snadnou úvahou (viz návod k příkl. 17) učiněné tvrzení.

22. Řada trigonometrická, jejíž koeficienty s rostoucím indexem konvergují k nule a jejíž součet podle Riemanna existuje ve všech bodech a dává funkci $g(x)$ v $(0, 2\pi)$ integrace schopnou a to buď spojitou aneb aspoň hovící podmínce $(\times)$, jest řadou Fourierovou pro funkci $g(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$.

Návod. V důsledku příkladů 20 a 21 máme dvě funkce mající obě v $(0, 2\pi)$ druhé derivace zevšeobecněné rovné $g(t)$, t. j. funkci $F(t)$ v příkladu 20 a funkci $G(t)$ v příkladu 21. Následkem toho podle věty Schwarzovy liší se tyto funkce v $(0, 2\pi)$ o lineární výraz v t a jsou tudíž $\Delta^2 F$ a $\Delta^2 G$ (při stejné proměnné a stejném přírůstku δ) sobě identicky rovny. To jest:

$$\tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \frac{\sin^2 \frac{1}{2}k\delta}{(\frac{1}{2}k\delta)^2} = \int_{t-\delta}^{t+\delta} g(x)\,\varphi(x, \delta)\,dx = A_0 + \Sigma A_k \frac{\sin^2 \frac{1}{2}k\delta}{(\frac{1}{2}k\delta)^2},$$

podle příkl. 13, kde $A_k = a_k \cos kt + b_k \sin kt$.

Při tom jsou a_k, b_k součinitelé řady Fourierovy patřící v $(0, 2\pi)$ ke $g(x)$. Z té rovnice identické však ihned plyne $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$; neboť běží o řady, jejíž členové jsou funkce proměnné t a jež jsou stejnoměrně konvergentní v $(0, 2\pi)$.

23. Budiž dána funkce $\psi(x)$ spojitá v bodě x_0, jež v okolí bodu x_0 na pravo jest dána výrazem lineárním tvaru $c(x - x_0) + d$, v okolí zleva pak výrazem $c'(x - x_0) + d$. Pak výraz $\Delta^2\psi/h^2$ roste v bodě x_0 v absolutní hodnotě nade všecky meze, když h konverguje k nule a $c \neq c'$. Důkaz bezprostřední.

24. Budiž dána řada trigonometrická o periodě 2π, jejíž koeficienty s rostoucím indexem konvergují k nule, o níž předpokládáme dále, že

1. její součet podle Riemanna existuje ve všech bodech intervalu $(0, 2\pi)$ s výjimkou bodů přináležících jistému množství číselnému reducibilnímu M_1,
2. v bodech, v nichž řada není sčitatelna podle Riemanna, jest výraz (=) v okolí bodu $h = 0$ shora i zdola ohraničen,
3. součet dané řady (podle Riemanna) dává funkci $g(x)$ shora i zdola ohraničenou a spojitou ve všech bodech intervalu $(0, 2\pi)$ s výjimkou bodů přináležejících množství číselnému reducibilnímu M_2 (jest tedy $g(x)$ integrace schopno, neboť reducibilní množství jest množství míry nulové podle J.)

Pak můžeme tvrditi: Daná řada trigonometrická shoduje se s řadou Fourierovou o periodě 2π patřící ke $g(x)$. V bodech množství $M_2 - M_1$ pak jest

$$g(x) = \lim_{\delta=0} \int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\,\varphi(t, \delta)\,dt,$$

existuje-li tato limita.

Návod. Máme opět jako v příkladě 22 dvě funkce $F(t)$, $G(t)$, jichž druhé derivace zevšeobecněné jsou si rovny ve všech bodech intervalu $(0, 2\pi)$ s výjimkou nejvýše bodů, jež jsou obsaženy množstvích reducibilních M_1, M_2 (a které tudíž tvoří množství M opět reducibilní). Podle věty Schwarzovy jest $F(t) - G(t)$ rovno lineární funkci proměnné t v každém intervalu, ve kterém není žádný z bodů množství M, rovnice pak $y = F(t) - G(t)$ jest rovnicí lomené čáry (t. j. čáry skládající se z úseček přímky). Zlomy té čáry mohou býti jenom v bodech množství M. Avšak v isolovaných bodech množství M zlomy býti nemohou (v důsledku věty příkladu předcházejícího a předpokladů učiněných). Mohou býti tudíž zlomy ty pouze v bodech prvé derivace množství M; avšak ani v isolovaných bodech množství M' zlomy býti nemohou a mohou býti jenom v bodech množství M'' a t. d. Jest tedy $F(t) - G(t)$ jedna lineární funkce v celém intervalu $(0, 2\pi)$ a tudíž jako v příkladu předcházejícím jest daná trigonometrická řada řadou Fourierovou příslušnou k svému součtu.

25. Jedna a táž funkce $f(x)$ v $(0, 2\pi)$ integrace schopná (podle Riemanna a tedy ohraničená) nedá se rozvinout dvojím různým způsobem v intervalu

$(0, 2\pi)$ v řadu trigonometrickou tak, aby obě řady byly v $(0, 2\pi)$ sčitatelny podle Riemanna a měly týž součet, obojí ve všech bodech intervalu $(0, 2\pi)$ s výjimkou bodů obsažených v reducibilním množství bodovém, v nichž však výraz $(=)$ v okolí bodu $h = 0$ jest ohraničen.*)

Návod. Rozdíl obou rozvojů by byla řada trigonometrická o součtu rovném nule ve všech bodech intervalu $(0, 2\pi)$ s výjimkou nejvýše ve větě vytčeného množství. Avšak podle věty předcházející jest řada trigonometrická mající tuto vlastnost jen jedna (všecky její koeficienty jsou rovny nule).

26. Dána-li funkce komplexní $f(x)$ reálné proměnné x (která podle definice funkce komplexní reál. pr. dá se psáti ve tvaru $f(x) = P(x) + iQ(x)$, kde P, Q jsou reálné funkce proměnné x), pak rozvoj Fourierův pro funkci $f(x)$ s periodou 2π pro interval $(0, 2\pi)$ lze psáti ve tvaru

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx},$$

při čemž

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Snadný důsledek definice řady Fourierovy (pro funkce $P(x)$ $Q(x)$). Předpokládá se mlčky, že $P(x)$, $Q(x)$ — a v důsledku toho i $f(x)$ — jsou v $(0, 2\pi)$ integrace schopny podle C.-R. Součinitelé a_n jsou obecně čísla komplexní.

27. Rozvoj Fourierův o periodě 1 k funkci $e^{-2\pi i x^2}$ v intervalu $(0, 1)$ má součinitele

$$a_n = \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-2\pi i x^2}\, e^{-2\pi i n x}\, dx.$$

Lze psáti

$$a_n = e^{\frac{1}{2}\pi i n^2}\int_0^1 e^{-2\pi i (x + \frac{1}{2}n)^2} dx = e^{\frac{1}{2}\pi i n^2}\int_{\frac{1}{2}n}^{\frac{1}{2}(n+2)} e^{-2\pi i x^2}\, dx.$$

Dosadíme-li do rozvoje Fourierova za x nulu, bude rozvoj konvergentní a součet bude roven $\frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = 1$; tím dostaneme, rozložíme-li řadu nekonečnou po dosazení vzniklou ve dvě,

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{2k} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_{2k+1}$$

aneb ($n^2 \equiv 1 \pmod 4$, je-li n liché; $n \equiv 0 \pmod 4$, je-li n sudé)

$$1 = \lim_{N=\infty}\left[\int_{-N}^{N} e^{-2\pi i x^2}\, dx + i\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{-2\pi i x^2}\, dx\right], \ N \text{ celé}$$

a konečně, užíváme-li označení zavedeného při integrálech nevlastních definovaných pomocí primitivní funkce,**)

*) Mlčky tu předpokládána věta, že koeficienty řady Fourierovy s rostoucím indexem konvergují k nule; věta ta později bude dokázána.

**) Jelikož N jest číslo celé, jest na čtenáři, aby přechod vykonaný k integrálům nevlastním zevrubněji odůvodnil. Ostatně budeme se později integrály nevlastními podrobně zabývati.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x^2}\,dx,$$

odkud následuje

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x^2}\,dx=\frac{1-i}{2}$$

(integrál Fresnelův).

Dosadíme-li do tohoto integrálu $x=\frac{1}{2}\sqrt{a}\,x'$, kde a jest kladné číslo, máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\pi i a x^2}\,dx=\frac{1-i}{\sqrt{a}}.$$

28. Gaussovy součty. Abychom úvahy předch. příkl. zevšeobecnili, uvažujme řadu Fourierovu k funkci $e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}$ kde q jest celé kladné číslo; řada Fourierova pak nechť jest o periodě 1 a nejprve pro interval (0, 1). Její koeficienty jsou

$$a_n=\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}e^{-2\pi i n x}\,dx=e^{\frac{2\pi i n^2}{q}}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\pi i q\left(x+\frac{2n}{q}\right)^2}\,dx=e^{\frac{2\pi i n^2}{q}}\int_{\frac{2n}{q}}^{\frac{2n}{q}+1} e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}\,dx.$$

Vedle této řady budeme uvažovati druhou řadu Fourierovu pro touž funkci a touž periodu, avšak pro interval (1, 2). Součinitelé této řady jsou

$$a'_n=e^{\frac{2\pi i n^2}{q}}\int_{\frac{2n}{q}+1}^{\frac{2n}{q}+2} e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}\,dx.$$

Součet koeficientů prvé řady (= součtu pro $x=0$ aneb $x=1$) jest $\frac{1}{2}(1+e^{-\frac{1}{2}\pi i q})$; součet koeficientů druhé řady jest týž a tak jest

$$1+e^{-\frac{1}{2}\pi i q}=\sum_{-\infty}^{\infty}(a_n+a'_n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i n^2}{q}}\int_{\frac{2n}{q}}^{\frac{2n}{q}+2} e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}\,dx.$$

Sloučíme-li za znaménkem součtovým všechny členy, při nichž n dává podle q týž nejmenší kladný zbytek (pro takové dva členy, mají-li indexy n', n'', jest $e^{\frac{2\pi i n'^2}{q}}=e^{\frac{2\pi i n''^2}{q}}$, $n'\equiv n''\pmod q$), dostaneme úvahou provedenou v příkladě předcházejícím

$$1+e^{-\frac{1}{2}\pi i q}=\left(1+e^{\frac{2\pi i 1^2}{q}}+e^{\frac{2\pi i 2^2}{q}}+\ldots+e^{\frac{2\pi i (q-1)^2}{q}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}\,dx,$$

odkuž podle závěrečné rovnice přecházejícího příkladu následuje ihned

$$1+e^{\frac{2\pi i 1^2}{q}}+e^{\frac{2\pi i 2^2}{q}}+\ldots+e^{\frac{2\pi i (q-1)^2}{q}}=\frac{1+e^{-\frac{1}{2}\pi i q}}{1-i}\sqrt{q}.$$

29. Uvažujeme-li místo funkce $e^{-\frac{1}{2}\pi i q x^2}$ funkci $e^{-\frac{1}{2}\pi i \frac{q}{p} x^2}$, kde p, q jsou čísla celá kladná, a příslušné řady Fourierovy o periodě 1 a pro intervaly postupně $(0, 1)$ $(1, 2), \ldots (2p-1, 2p)$, dostaneme, utvoříme-li součet všech koeficientů těchto řad (stejně jako v příkl. předch.), tento vztah

$$1+e^{-\frac{2\pi i q \cdot 1^2}{4p}}+e^{-\frac{2\pi i q \cdot 2^2}{4p}}+\ldots+e^{-\frac{2\pi i q \cdot (2p-1)^2}{4p}}$$

$$=(1+e^{\frac{2\pi i p \cdot 1^2}{q}}+e^{\frac{2\pi i p \cdot 2^2}{q}}+\ldots+e^{\frac{2\pi i p \cdot (q-1)^2}{q}})\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i q x^2}{2p}}\, dx$$

Označíme-li Gaussův součet

$$1+e^{\frac{2\pi i p \cdot 1^2}{q}}+\ldots+e^{\frac{2\pi i p \cdot (|q|-1)^2}{q}} \quad \text{znakem } G\left(\frac{p}{q}\right),$$

lze poslední rovnici psáti ve tvaru (exponenciální funkce pro argumenty $2\pi i q k^2/4p$, $2\pi i q(4p-k)^2/4p$ má touž hodnotu)

$$G\left(-\frac{q}{4p}\right)=G\left(\frac{p}{q}\right)\frac{2(1-i)\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

Jelikož v této rovnici můžeme zaměniti $-i$ za $+i$, jest platný pro každou dvojici celých čísel $[p, q]$ různých od nuly vztah

$$G\left(-\frac{q}{4p}\right)=G\left(\frac{p}{q}\right)\frac{2(1-i\operatorname{sign} pq)\sqrt{|p|}}{\sqrt{|q|}}.$$

136g. Některá použití odvozených vět. Budeme nejprve předpokládat, že $f(x)$ *jest spojitou funkcí v intervalu* $(0, 2\pi)$; k vůli zjednodušení úvahy učiníme zatímní předpoklad, že $f(0)=f(2\pi)$. Jelikož jest $f(x)$ spojita v $(0, 2\pi)$, lze, jak známo, ke každému číslu ε stanoviti η tak, že

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \text{ pro všecka } x', x'' \text{ z } (0, 2\pi), \text{ pro něž } |x'-x''|<\eta. \qquad (\alpha)$$

Rozdělme interval $(0, 2\pi)$ na intervaly menší body x_k, $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, takže $0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<2\pi$ a že délka každého z intervalů $(x_{k-1}, x_k)<\eta$. Sestrojme dále polygonální čáru spojující body $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, při čemž A_k jest bod $[x_k, f(x_k)]$, A_0 bod $[0, f(0)]$ a A_n bod $[2\pi, f(2\pi)]$. Rovnice této polygonální čáry nechť jest v pravoúhlých souřadnicích $y=\psi(x)$, při tom jest

$$\psi(x)=y_{k-1}+\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1}) \text{ pro } x_{k-1}\leqq x\leqq x_k,\ y_k=f(x_k);$$

$\psi(x)$ jest pak funkcí spojitou (na každém z intervalů (x_{k-1}, x_k) lineární) proměnné x. Vyšetřujme rozdíl $f(x)-\psi(x)$; když x jest na (x_{k-1}, x_k), pak jest podle (α)

$$|f(x)-f(x_{k-1})|<\varepsilon,$$

$$|f(x)-f(x_k)|<\varepsilon \text{ a dále } \psi(x) \text{ jest číslo v intervalu } (f(x_{k-1}), f(x_k));$$

tedy

$$| f(x) - \psi(x) | < \varepsilon, \tag{β}$$

ať jest x na kterémkoli z intervalů (x_{k-1}, x_k), t. j. ať jest x kterákoliv hodnota z intervalu $(0, 2\pi)$. Funkci $\psi(x)$ můžeme však v $(0, 2\pi)$ rozvinouti v řadu Fourierovu v tom intervalu stejnoměrně konvergentní (odst. 136d). Prvých $(m+1)$ členů té řady označíme $\psi_m(x)$ a jest tedy

$$\psi_m(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + (\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x) + (\alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x) + \ldots + (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

Že stejnoměrné konvergence řady Fourierovy následuje, že k číslu ε lze nalézti číslo M takové, že

$$| \psi(x) - \psi_m(x) | < \varepsilon \quad \text{pro všecka } m > M \tag{γ}$$

a pro všecka x intervalu $(0, 2\pi)$. Z (β) a (γ) však plyne

$$| f(x) - \psi_m(x) | < 2\varepsilon \quad \text{pro } m > M \text{ a pro všecka } x \text{ z } (0, 2\pi).$$

$\psi_m(x)$ budeme nazývati **polynomem trigonometrickým** m**-tého stupně**; lze jej vyjádřiti ve tvaru $P_m(\cos x) + \sin x Q_{m-1}(\cos x)$, kde P_m, Q_{m-1} jsou polynomy prvý stupně m, druhý $m-1$ v svém argumentu. Ke každému ε lze tedy sestrojiti polynom jistého stupně $\psi(x)$ (takových polynomů jest dokonce nekonečné množství) takový, že $| f(x) - \psi(x) | < 2\varepsilon$. Sestrojme si nyní řadu čísel kladných, klesajících a konvergujících k nule $\frac{1}{2}\varepsilon_1, \frac{1}{2}\varepsilon_2, \frac{1}{2}\varepsilon_3, \ldots, \frac{1}{2}\varepsilon_r, \ldots$; příslušné k nim polynomy ψ označíme $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, $\psi^{(3)}(x), \ldots, \psi^{(r)}(x), \ldots$. Pak

$$| f(x) - \psi^{(n)}(x) | < \varepsilon_n$$

pro všecka x intervalu $(0, 2\pi)$. Lze tudíž ke každému číslu δ nalézti číslo celé N tak, že nerovnina

$$| f(x) - \psi^{(k)}(x) | < \delta$$

jest splněna pro všecka $k > N$ a pro všecka x intervalu $(0, 2\pi)$*); t. j. *řada polynomů trigonometrických* $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, $\psi^{(3)}(x), \ldots$ *konverguje s rostoucím indexem k funkci* $f(x)$ *a to stejnoměrně pro všecka* x *z intervalu* $(0, 2\pi)$.

136h. Weierstrassova věta o polynomech. Nechť jest $g(x)$ libovolná funkce spojitá v intervalu $(0, \pi)$ a definujme funkci $f(x)$ v $(0, 2\pi)$ vztahy

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) && \text{pro } 0 \leqq x \leqq \pi, \\ f(x) &= g(2\pi - x) && \text{pro } \pi \leqq x \leqq 2\pi; \end{aligned}$$

pak funkce $f(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$ hoví podmínce $f(2\pi - x) = f(x)$ a přímka $x = \pi$ jest osou symetrie pro čáru $y = f(x)$, kde x pro-

*) Stačí N stanoviti tak, aby $\varepsilon_N < \delta$.

bíhá interval $(0, 2\pi)$. Body $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ odstavce předcházejícího lze na čáře $y = f(x)$ tak voliti, aby i polygonální čára $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ byla symetrickou vzhledem k přímce $x = \pi$. Stačí k tomu cíli x_k tak voliti, aby $x_{n-k} = 2\pi - x_k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Avšak potom má funkce $\psi(x)$ vyskytující se v rovnici polygonální čáry $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tuto vlastnost

$$\psi(2\pi - x) = \psi(x)$$

a řada Fourierova příslušná k $\psi(x)$ jest řadou kosinusovou (odst. 136*a*, pozn. 3).

Sestrojíme-li pak na podkladě takovýchto funkcí $\psi(x)$, jak právě byly definovány, řadu polynomů trigonometrických $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x), \ldots$, odstavce předcházejícího, budou i tyto polynomy polynomy v $\cos\varphi$; označíme je $P^{(1)}(\cos\varphi)$, $P^{(2)}(\cos\varphi), \ldots$.

Budiž nyní $F(y)$ libovolná spojitá funkce proměnné y, definovaná v intervalu $(-1, 1)$. Klaďme $y = \cos x$; pak jest $F(\cos x) = f(x)$, kde $f(x)$ jest funkce definovaná v $(0, 2\pi)$, tam spojitá a hovící podmínce $f(2\pi - x) = f(x)$ pro všecka x z $(0, 2\pi)$. Jest to tedy funkce, jakou právě jsme uvažovali a my můžeme sestrojiti nekonečnou řadu polynomů $P^{(1)}(\cos x)$, $P^{(2)}(\cos x), \ldots$ takových, že ke každému δ lze nalézti číslo N tak, že

$$| F(\cos x) - P^{(k)}(\cos x) | < \delta \quad \text{pro všecka } k > N$$

a pro všecka x v $(0, \pi)$. To jest jinými slovy (zavedeme-li zase místo $\cos x$ původní proměnnou y): *Ke každé funkci spojité $F(y)$ v intervalu $(-1, 1)$ lze sestrojiti řadu mnohočlenů $P^{(1)}(y)$, $P^{(2)}(y)$, $P^{(3)}(y), \ldots$ takovou, že*

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(y) = F(y)$$

a konvergence k limitě $P(y)$ jest stejnoměrná (pro všecka y v intervalu $(-1, 1)$).

PŘÍKLAD. Nechť jest $F(t) = |t|$ v $(-1, 1)$; najděme příslušnou řadu polynomů. Případ tento jest zcela jednoduchý, neboť existuje řada Fourierova k funkci $f(x) = |\cos x|$ a v intervalu $(0, 2\pi)$. Jest to řada kosinusová; její součinitele jsou dány vztahy

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x| \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos kx\, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos kx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} (1 + (-1)^k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos kx\, dx.$$

Tedy $a_{2k+1} = 0$ a pro $k > 0$

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(2k+1)x + \cos(2k-1)x]\,dx =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi}\,\frac{4}{4k^2-1},$$

$a_0 = \frac{4}{\pi}$. Jest tedy

$$|\cos x| = \frac{4}{\pi}\left[\tfrac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} - \frac{\cos 8x}{7.9} + \ldots\right], \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Označíme-li s_n součet prvých n členů v hranaté závorce násobený číslem $4/\pi$, jest patrně

$$|\cos x - s_n| < \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1} \quad \text{pro všecka } x.$$

Hledané polynomy dostaneme, když v s_n nahradíme $\cos x$ proměnnou t; dostaneme za s_n polynom $2n$-tého stupně v t; pro $n = 0, 1, 2$ dostáváme tyto polynomy

$$P^{(0)}(t) = \frac{2}{\pi}, \qquad P^{(1)}(t) = \frac{2}{3\pi}(4t^2+1), \qquad P^{(2)}(t) = \frac{2}{15\pi}(-16t^4+36t^2+3),$$

které se liší od $|t|$ o méně než $4/1\pi$, $4/3\pi$, $4/5\pi$ v celém intervalu $(-1, 1)$.

136*i*. Budiž nyní $f(x)$ pouze funkce integrace schopná podle C.-R. v intervalu $(0, 2\pi)$ — nepožadujeme tedy již spojitost. Rozdělíme interval $(0, 2\pi)$ opět jako v odst. 136*g* na n intervalů body $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, kde $0 < x_1 < x_2 < \ldots < 2\pi$ a vezmeme zase v úvahu lomenou čáru $A_0, A_1, \ldots A_n$ (označení viz v citovaném odstavci). Délky intervalů (x_{k-1}, x_k) nechť jsou menší vesměs než η; η pak volíme tak, aby součet délek všech těch intervalů, ve kterých jest oscilace funkce $f(x)$ větší než $\varepsilon/2$, byl menší než ε_1. Čísla $\varepsilon, \varepsilon_1$, jsou čísla kladná (libovolně malá, viz odst. 87, viz větu na str. 217 dole a 218 nahoře), o ε hned předpokládáme, že jest menší než 1. Na intervalu (x_{k-1}, x_k) jest

$$|f(x) - \psi(x)| \leqq O_k;$$

O_k jest oscilace funkce $f(x)$ v (x_{k-1}, x_k). Předpokládejme prozatím, že $f(0) = f(2\pi)$; pak i $\psi(0) = \psi(2\pi)$ a funkce $\psi(x)$ jest rozvinutelna v řadu Fourierovu v $(0, 2\pi)$ stejnoměrně konvergentní; i jest pro všecka x na $(0, 2\pi)$

$$|\psi(x) - \psi_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro všecka } m > M,$$

kde je $\psi_m(x)$ součet prvých $(m+1)$ členů řady Fourierovy pro $\psi(x)$ a M číslo vhodně k $\varepsilon/2$ volené. Tedy jest na (x_{k-1}, x_k)

$$|f(x) - \psi_m(x)| < O_k + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

a může míti tedy rozdíl $f(x) - \psi_m(x)$ se zřetelem k tomu, jak jsme volili intervaly, absolutní hodnotu větší než ε toliko na intervalech (x_{k-1}, x_k), jichž celková délka nepřevyšuje ε_1. Odtud máme následující odhad pro integrál v následujícím důležitý (M, m jest horní, dolní hranice $f(x)$ v $(0, 2\pi)$)

$$0 < \int_0^{2\pi} [f(x) - \psi_m(x)]^2 \, dx < 2\pi\varepsilon^2 + \varepsilon_1 (M - m + \tfrac{1}{2}\varepsilon)^2.$$

Pravá strana této nerovniny může býti učiněna libovolně malou s $\varepsilon, \varepsilon_1$; následuje z toho *existence polynomů trigonometrických* $\psi_m(x)$ *takových, že*

$$0 < \int_0^{2\pi} [f(x) - \psi_m(x)]^2 \, dx < \delta, \tag{δ}$$

kde δ jest číslo kladné, libovolně malé a $f(x)$ jest funkce integrace schopná v $(0, 2\pi)$. Předpoklad, který jsme zavedli, že $f(0) = f(2\pi)$, jest nepodstatný. Není-li totiž tento předpoklad splněn, sestrojíme funkci $f_1(x)$, pro kterou $f_1(x) = f(x)$ pro x z $(0, 2\pi - 0)$, $f_1(2\pi) = f_1(0)$. Pro tuto funkci sestrojíme polynomy $\psi_m(x)$ splňující (δ) vzhledem k $f_1(x)$; poněvadž však

$$\int_0^{2\pi} [f_1(x) - \psi_m(x)]^2 \, dx = \int_0^{2\pi} [f(x) - \psi_m(x)]^2 \, dx,$$

budou tyto polynomy splňovati (δ) i vzhledem k $f(x)$.

POZNÁMKA. Jako v odst. 136*h* jsme polynomy trigonometrické v intervalu $(0, 2\pi)$ nahradili polynomy v proměnné pro interval $(-1, 1)$, můžeme stejnou cestou i tu dospěti k větě: *Je-li $f(x)$ funkce v $(-1, 1)$ integrace schopná podle C.-R., pak ke každému δ lze sestrojiti polynom $P_m(x)$* — m značí stupeň toho polynomu a jest to číslo závislé na δ — *že*

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - P_m(x)]^2 \, dx < \delta.$$

Takových polynomů $P_n(x)$ jest ovšem nekonečné množství.

136*j*. Střední chyba (odchylka). Jestliže nějaká proměnná veličina nabývá v n případech hodnot*) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, my však z neznalosti těch hodnot anebo z jiné příčiny užíváme místo nich hodnoty $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (které jsme získali ku př. přibližným počtem aneb měřením), pak jakožto měřítko chyby (odchylky)

*) Ku př. teplota v n různých bodech prostoru.

tím učiněné zavádíme (vedle jiných čísel) též číslo μ, jež jest dáno rovnicí

$$n \,.\, \mu^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2.$$

Tomuto číslu se říká *střední chyba (odchylka).* Pojem střední odchylky dá se rozšířiti pro veličiny proměnné definované ve všech bodech jistého intervalu (a, b). Budiž dána veličina jakožto funkce proměnné x v intervalu (a, b); označme ji $f(x)$. Nahradíme-li v (a, b) veličinu $f(x)$ jinou rovněž ve všech bodech intervalu (a, b) definovanou, ku př. funkcí $P(x)$, *bude střední odchylka (chyba) tím způsobená dána rovnicí*

$$(b - a)\, \mu^2 = \int_a^b [f(x) - P(x)]^2\, dx. \qquad (p)$$

Zavádějíce tuto definici střední odchylky, pokládáme všecky body intervalu (a, b) za stejně významné. Může se však státi při některých vyšetřováních, že některé body intervalu (a, b) častěji přicházejí v úvahu a že tudíž jeví se pro míru střední úchylky zavésti pojem t. zv. *váhy* $w(x)$, což jest funkce kladná ($\geqq 0$) úměrná ku př. pravděpodobnosti, s jakou jistý bod (resp. jeho okolí o délce ε, kde ε jest dosti malé) při užívání náhradní funkce $P(x)$ se bude vyskytovati. V tomto případě za střední chybu můžeme pokládati číslo dané vztahem

$$\mu^2 \int_a^b w(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, [f(x) - P(x)]^2\, dx, \qquad (q)$$

kterýž jest zevšeobecněním vztahu předcházejícího.

136 *k*. Mnohočleny mající nejmenší střední odchylku. Na základě pojmu v odstavci předcházejícím zavedeného můžeme řešiti úkol: Vyhledati polynom n-tého stupně, aby střední odchylka od funkce $f(x)$ definované v intervalu $(-1, 1)$ byla v tomto intervalu minimální. Při tom budeme předpokládati, že $f(x)$ jest v $(-1, 1)$ integrace schopna a že všecky body z $(-1, 1)$ jsou stejné váhy. Na základě rovnice (p) jedná se o to ustanoviti koeficienty polynomu n-tého stupně (jichž jest $n + 1$) a který označíme $P(x)$, aby výraz

$$z = \int_{-1}^{1} [f(x) - P(x)]^2\, dx$$

byl absolutním minimem. Pro řešení tohoto úkolu jest účelno vyjádřiti polynom $P(x)$ pomocí Legendreových polynomů. Obecný polynom n-tého stupně lze psáti pomocí Legendreových polynomů ve tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_n P_n(x),$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou libovolná (na sobě nezávislá) čísla. Dosadíme-li podle této rovnice do výrazu pro z, obdržíme se zřetelem k rovnicím

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}, \qquad m \quad n$$

ihned (po umocnění a rozkladu)

$$z = \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} P_k(x) f(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{2a_k^2}{2k+1}$$

a máme vyhledati pro $|a_0, a_1, \ldots, a_n|$ takové hodnoty, aby výraz tento byl minimem. K tomu jest především nutno, aby derivace částečné podle všech a_k byly rovny nule; tím obdržíme rovnice (pro $k = 0, 1, \ldots, n$)

$$2a_k \cdot \frac{2}{2k+1} - 2\int_{-1}^{1} P_k(x) f(x)\, dx = 0, \quad \text{aneb} \quad a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x) f(x)\, dx, \tag{1}$$

čímž koeficienty jsou jednoznačně stanoveny. Jelikož pak druhý diferenciál výrazu z podle proměnných a_k jest forma kvadratická definitní a kladná, vzniká pro ty hodnoty a_k minimum a to absolutní. Dosadíme-li do výrazu pro z za integrál $\int_{-1}^{1} P_k(x) f(x)\, dx$ podle poslední rovnice, obdržíme pro minimum, jejž budeme značiti m_n, vyjádření

$$m_n = \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{2a_k^2}{2k+1}. \tag{2}$$

Jelikož m_n jest stále (pro všecka n) kladné ($\geqq 0$) a součet na pravé straně rovnice (2) se nacházející jest číslo s n rostoucí, jest patrno, že *nekonečná řada*

$$a_0^2 + \frac{a_1^2}{3} + \frac{a_2^2}{5} + \ldots + \frac{a_k^2}{2k+1} + \ldots, \tag{3}$$

kde a_k jsou určeny rovnicí (1), *jest řadou konvergentní.* Řada nekonečná

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_k P_k(x) + \ldots, \tag{4}$$

při níž a_k jsou rovněž dány rovnicí (1), sluje **rozvoj podle Legendreových polynomů příslušný k funkci $f(x)$**, a_k jsou *koefi-*

cienty toho rozvoje, $a_k P_k(x)$ pak *členy*. Máme tak větu: *Součet prvých* $n+1$ *členů rozvoje podle Legendreových polynomů příslušného k funkci* $f(x)$ *dává mnohočlen stupně (nejvýše) n-tého, jehožto střední odchylka od* $f(x)$ *v intervalu* $(-1, 1)$ *jest menší než střední odchylka každého jiného polynomu nejvýše stupně n-tého.*

Z této věty a věty odstavce 136*i* (poznámka) následuje: *Je-li* $f(x)$ *funkce v* $(-1, 1)$ *integrace schopná (podle C.-R.), pak s rostoucím* n *nade všecky meze číslo* m_n *blíží se k nule a tedy limita střední úchylky u mnohočlenů získaných rozvojem podle Legendreových polynomů jest rovna nule, roste-li stupeň mnohočlenu nade všechny meze.* Pro takové funkce jest tudíž podle (2)

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2\,dx = 2(a_0^2 + \tfrac{1}{3}a_1^2 + \tfrac{1}{5}a_2^2 + \tfrac{1}{7}a_3^2 + \ldots)$$

136*l*. Možno však ještě jiné vztahy získati mezi funkcí $f(x)$ a rozvojem podle Legendreových polynomů k ní příslušným. Dokázali jsme totiž (označíme pro krátkost součet prvých n členů rozvoje (4) znakem σ_n), že

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{1}[f(x)-\sigma_n]^2\,dx = 0, \quad \text{tím spíše jest} \quad \lim_{n=\infty}\int_{a}^{b}[f(x)-\sigma_n]^2\,dx = 0.$$

jsou-li a, b dvě čísla v $(-1, 1)$ a je-li $f(x)$ v $(-1, 1)$ integrace schopnou. Jestliže však řada (4) konverguje stejnoměrně v (a, b) ku $\sigma(x)$, jest podle odstavce 70 (poznámka 2)

$$\lim_{n=\infty}\int_{a}^{b}[f(x)-\sigma_n]^2\,dx = \int_{a}^{b}[f(x)-\sigma(x)]^2\,dx \quad \text{a tedy} \quad \int_{a}^{b}[f(x)-\sigma(x)]^2\,dx = 0.$$

Jelikož pak $\sigma(x)$ *jest v* (a, b) *funkce spojitá, jest* $f(x)=\sigma(x)$ *ve všech bodech intervalu* (a, b), *kde také* $f(x)$ *jest funkce spojitá* (odstavec 97, (poznámka 2)). Tím získali jsme prostředek, který v četných případech nás orientuje o součtu rozvoje podle Legendreových polynomů příslušného k funkci $f(x)$.

136*m*. PŘÍKLAD. O přibližném vyjádření eliptických integrálů pomocí polynomů v modulu. Nejprve uvažovati budeme integrál

$$F(x) = \int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi}} \qquad -1 \leqq x \leqq 1; \quad 0 \leqq \Phi < \tfrac{1}{2}\pi,$$

ve kterém modul $k^2 = \frac{1}{2}(x+1)$ tak volen, aby příslušná proměnná x probíhala interval $(-1, 1)$. Budeme počítati

$$\int_{-1}^{1} F(x) \frac{dx}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \int_{-1}^{1} dx \left[\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi}} \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}\right]. \qquad (\lambda)$$

Součinitel při r^n, rozvineme-li tento výraz v potenční řadu podle proměnné r, jest podle odstavce 117c a podle vět o integraci nekonečných řad právě integrál

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, F(x)\, dx,$$

který třeba znáti k odvození rozvoje funkce $F(x)$ podle Legendreových polynomů. Pořad integrační ve dvojnásobném integrálu (λ) lze zaměniti (jak později v obecném případě bude odvozeno), i vypočteme nejprve za předpokladu, že r jest kladné a dosti malé

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi}\,\sqrt{1\,2-rx+r^2}} = \frac{2}{\sin\varphi\sqrt{r}} \log \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi+\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi-\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}\varphi} =$$

$$= 2\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{1}{3} r \frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos^4\frac{1}{2}\varphi} + \frac{1}{5} r^2 \frac{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}{\cos^6\frac{1}{2}\varphi} + \dots\right\}, \qquad \text{DP 137, (2).}$$

Řadu tuto stačí integrovati podle φ v mezích 0, Φ a máme ihned

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, F(x)\, dx = \frac{4}{(2n+1)^2} \operatorname{tg}^{2n+1} \tfrac{1}{2}\Phi.$$

I jest rozvoj podle Legendreových polynomů příslušný k $F(x)$ — viz rovnice (4), (1) odstavce 136k —

$$F(x) = 2[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\Phi \,.\, P_1(x) + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5\tfrac{1}{2}\Phi \,.\, P_2(x) + \dots], \qquad 0 \leqq \Phi < \frac{\pi}{2}; \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Psali jsme hned rovnost mezi $F(x)$ a tím rozvojem; neboť, jelikož $|P_k(x)| \leqq 1$ a $|\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Phi| < 1$, jest rozvoj stejnoměrně konvergentní v $(-1, 1)$ a v důsledku odstavce předcházejícího jest rozvoj roven příslušné funkci $F(x)$.

Docela stejným způsobem vyplývá rozvoj pro eliptický integrál druhého druhu

$$G(x) = \int_0^{\Phi} d\varphi \sqrt{1-\tfrac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi}.$$

Tu jde především o vyčíslení integrálu

$$\int_{-1}^{1} dx \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi}{1-2rx+r^2}} =$$

$$= \frac{1+r}{2r} - \frac{1-r}{2r}\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{r}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{(1+r)^2}{4r}\right) \log\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi+\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi-\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}\varphi} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+3}\,\frac{\sin^{2n+4}\frac{1}{2}\varphi}{\cos^{2n+2}\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{2n-1}\,\frac{\sin^{2n}\frac{1}{2}\varphi}{\cos^{2n-2}\frac{1}{2}\varphi}\right\},$$

z kteréžto řady integrací podle φ v mezích 0, Φ stejně jako svrchu vyplývá nejprve

$$\int_{-1}^{1} G(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{4}{(2n+1)^2}\left\{\frac{1}{2n+3}\,\frac{\sin^{2n+3}\frac{1}{2}\Phi}{\cos^{2n+1}\frac{1}{2}\Phi} - \frac{1}{2n-1}\,\frac{\sin^{2n+1}\frac{1}{2}\Phi}{\cos^{2n-1}\frac{1}{2}\Phi}\right\}.$$

a tedy na základě obecných rovnic

$$\int_0^{\Phi} d\varphi\,\sqrt{1-\tfrac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{2n+1}\,\operatorname{tg}^{2n+1}\tfrac{1}{2}\Phi\left\{\frac{\sin^2\frac{1}{2}\Phi}{2n+3} - \frac{\cos^2\frac{1}{2}\Phi}{2n-1}\right\}.$$

Specielně máme pro kompletní integrál druhého druhu tento rozvoj podle Legendreových polynomů (dosadíme $\Phi = \frac{1}{2}\pi$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sqrt{1-\tfrac{1}{2}(x+1)\sin^2\varphi} = \tfrac{4}{3} - 4\left(\frac{P_1(x)}{1.3.5} + \frac{P_2(x)}{3.5.7} + \frac{P_3(x)}{5.7.9} + \ldots\right).$$

Praktický užitek formulí odvozených jest na snadě; abych jej ještě zřetelněji objasnil, uvedu přibližné vzorce, vyplývající z poslední rovnice pro *délku oblouku kvadrantu elipsy* (omezeného koncovými body hlavních poloos). Stačí pravou stranu násobiti a a klásti $x = 1 - 2b^2/a^2$, kde a, b jsou délky poloos elipsy. Dostaneme, podržíme-li 1, 2, 3, 4, 5 prvých členů v příslušném rozvoji, tyto výrazy (v nich místo b^2/a^2 kladeno ξ):

$$\tfrac{4}{3}a,\quad \tfrac{8}{15}a(2+\xi),\quad \tfrac{4}{105}a(27+20\xi-6\xi^2),\quad \tfrac{4}{315}a(80+72\xi-48\xi^2+20\xi^3),$$
$$\tfrac{4}{3465}a(875+892\xi-978\xi^2+920\xi^3-350\xi^4).$$

Jsou to výrazy nultého až 4. stupně v ξ, jejichž střední odchylka od pravé hodnoty jest menší než u jakýchkoli jiných mnohočlenů stejného stupně v ξ a to pro interval (0, 1).

136*n*. Mnohočleny trigonometrické mající nejmenší střední odchylku od dané funkce. Stejně jednoduše jako jsme odvodili mnohočleny rac. celistvé o nejmenší střední odchylce, můžeme dospěti k mnohočlenům trigonometrickým tvaru

$$P(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

takovým, že výraz

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2\,dx$$

jest menší při tom určitém polynomu než u polynomu stejného tvaru, kde však součinitele $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ mají jiné hodnoty. Dostaneme — za předpokladu, že $f(x)$ *jest v* $(0, 2\pi)$ *integrace schopna* — úplně týmž postupem (viz příklad 5*a* za odstavcem 68) tyto hodnoty pro a_k, b_k

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

a tyto věty: *Součet prvých $n+1$ členů řady Fourierovy o periodě 2π příslušné k funkci $f(x)$ v intervalu $(0, 2\pi)$ dává mnohočlen trigonometrický stupně nejvýše n-tého, jehožto střední odchylka v intervalu $(0, 2\pi)$ jest menší než střední odchylka každého jiného polynomu trigonometrického stupně nejvýše n-tého.*

Pro součinitele a_k, b_k v řadě Fourierově pak následuje, že řada

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + \ldots + (a_n^2 + b_n^2) + \ldots$$

jest konvergentní. Jest tedy $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$ *aneb*

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \tag{α}$$

a dále lze psáti v důsledku věty odstavce 136*i*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \tfrac{1}{2}a_0^2 + (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + \ldots + (a_n^2 + b_n^2) + \ldots \tag{β}$$

POZNÁMKA 1. Jsou-li obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ v $(0, 2\pi)$ integrace schopné podle C.-R. a označíme-li koeficienty v řadách Fourierových o periodě 2π v intervalu $(0, 2\pi)$ k nim příslušných a_k, b_k a c_k, d_k, pak lze psáti

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}a_0c_0 + (a_1c_1 + b_1d_1) + (a_2c_2 + b_2d_2) + \ldots, \tag{γ}$$

což jest jisté zevšeobecnění rovnice (β). Rovnice tato jest prostý důsledek rovnice (β); napíšeme-li totiž (β) jednak pro funkci $f(x) + g(x)$ a pak pro funkce $f(x)$, $g(x)$, dostaneme z těchto tří vztahů snadno (γ).

POZNÁMKA 2. Místo rovnic (α) lze psáti obecněji

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \lim_{n=\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$$

za předpokladu, že $f(x)$ jest v (a, b) integrace schopno; při tom jest nejprve $0 < a < b < 2\pi$. Abychom správnost těchto obecnějších rovnic nahlédli, stačí dosaditi do (α) za $f(x)$ funkci $\varphi(x)$ takto definovanou

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 && \text{v intervalech } (0, a-0),\ (b+0, 2\pi). \\ \varphi(x) &= f(x) && \text{v intervalu } (a, b). \end{aligned}$$

Rozšířiti platnost rovnic napsaných pro všecky hodnoty a, b (dosud bylo o nich předpokládáno, že jsou ve vnitru intervalu $(0, 2\pi)$) jest na snadě.

POZNÁMKA 3. Rovnice (α) lze zcela jednoduše dokázat přímo. Dokažme to ku příkladu pro druhý integrál. Jest

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x) \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \ldots + \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{3\pi}{n}} \ldots + \ldots + \int_{2\pi - \frac{\pi}{n}}^{2\pi} \ldots$$

V každém z integrálu na pravo má $\sin nx$ stále totéž znaménko; užijeme-li tudíž věty o střední hodnotě pro prvé dva integrály, vidíme ihned, že jsou rovny výrazům

$$f(\xi_1) \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx + f(\xi_2) \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \sin nx \, dx = \frac{2}{n} [f(\xi_1) - f(\xi_2)],$$

což jest menší ($\leqq$) v absolutní hodnotě než $2\,O_1/n$; kde O_1 jest oscilace funkce $f(x)$ v intervalu $(0, 2\pi/n)$. Obdobné tvrzení plyne i pro další dvojice integrálu na pravé straně. Tedy jest (označení jest na snadě)

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \right| \leqq \frac{2}{n} (O_1 + O_2 + \ldots + O_n) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} O_k \Delta x_k, \qquad \Delta x_k = \frac{2\pi}{n},$$

$x_0 = 1$, $x_n = n$. Výraz na pravé straně má pro $\lim n = \infty$ za limitu nulu (odstavec 87, (9″)). Tím pak jest tvrzení v (α) přímo dokázáno. Je-li $f(x)$ funkcí v $(0, 2\pi)$ s variací konečnou a rovnou $V(0, 2\pi)$, můžeme, jelikož $O_1 + O_2 + \ldots + O_n \leqq V(0, 2\pi)$, psáti

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \right| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > \frac{2\,V(0, 2\pi)}{\varepsilon}.$$

PŘÍKLAD. Rovnice (γ) odst. 136*n* sluje **Parsevalův teorem** (vyslovený již r. 1805 za předpokladů ovšem odchylných) a má četná použití, jednak při výpočtu určitých integrálů pomocí nekonečných řad, jednak při výpočtu nekonečných řad pomocí určitých integrálů. Několik příkladů k tomuto teoremu — aniž jsme ho explicitně používali — jsme ve skutečnosti již podali ve cvičení za odstavcem 73; nyní podáme ještě jeden příklad. Budeme při tom vycházeti z rovnice (2) příkladu 8 ve cvičení za odstavcem 136*f*. Klademe-li v ní $x = \frac{1}{2}\pi - x'$, dostaneme ještě rozvoj pro $|\sin^{2m-1} x|$, takže celkem máme rozvoje (m, n celá čísla):

$$|\sin^{2m-1} x| = \frac{4}{\pi} \frac{2.4 \ldots (2m-2)}{3.5 \ldots (2m-1)} \left[\frac{1}{2} - \frac{2m-1}{2m+1} \cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+1)(2m+3)} \cos 4x - \ldots \right], \tag{a}$$

$$|\cos^{2n-1} x| = \frac{4}{\pi} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} \left[\frac{1}{2} + \frac{2n-1}{2n+1} \cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n+1)(2n+3)} \cos 4x + \ldots \right], \tag{b}$$

platné pro každé x.

Užijeme-li na tyto vztahy Parsevalovy věty, máme ihned

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin^{2m-1} x \,.\, \cos^{2n-1} x|\, dx =$$

$$= \frac{4^2}{\pi^2} \frac{2.4\ldots(2m-2)}{3.5\ldots(2m-1)} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} \left[\frac{1}{2} - \frac{(2m-1)(2n-1)}{(2m+1)(2n+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)(2n-1)(2n-3)}{(2m+1)(2m+3)(2n+1)(2n+3)} - \ldots \right].$$

Jelikož však (viz str. 163)

$$\int_0^{2\pi} |\sin^{2m-1} x \,.\, \cos^{2n-1} x|\, dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m-1} x \,.\, \cos^{2n-1} x\, dx =$$

$$= \frac{2}{m+n-1} \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-2)!},$$

obdržíme po snadné úpravě rovnost

$$\pi = 2^{2m+2n-1} \frac{(m+n-1)!\,(m-1)!\,(n-1)!}{(2m-1)!\,(2n-1)!} \left[\frac{1}{2} - \frac{(2m-1)(2n-1)}{(2m+1)(2n+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)(2n-1)(2n-3)}{(2m+1)(2m+3)(2n+1)(2n+3)} - \ldots \right].$$

Vztah tento jest vhodný k přesnému výpočtu čísla π; volíme-li ku příkladu $m = n = 10$, jest 21. člen řady se střídavými znaménky na pravé straně se nalézající

$$\frac{2^{80} \,.\, (20!)^5 \,.\, (30!)^2}{(10!)^4 \,.\, (60!)^2} = 10^{-22} \,.\, 2{\cdot}8\ldots$$

a následující jest skoro 9-krát menší.

Obdobně máme

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2m-1} x \,.\, \sin^{2n-1} x\, dx =$$

$$= \frac{4^2}{\pi^2} \frac{2.4\ldots(2m-2)}{3.5\ldots(2n-1)} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} \left[\frac{1}{2} + \frac{(2m-1)(2n-1)}{(2m+1)(2n+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)(2n-1)(2n-3)}{(2m+1)(2m+3)(2n+1)(2n+3)} + \ldots \right],$$

z kteréhož vztahu následuje (viz str. 161, rovnice (8)) po malé úpravě

$$\pi^2 = 2^{4m+4n-1} \frac{[(m-1)!\,(n-1)!\,(m+n-1)!]^2}{(2m-1)!\,(2n-1)!\,(2m+2n-2)!} \left[\frac{1}{2} + \frac{(2m-1)(2n-1)}{(2m+1)(2n+1)} + \ldots \right].$$

Z tohoto rozvoje máme pro $\lim m = \infty$ snadnou úvahou, při které používáme rovnice (b) při $x = 0$,

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m=\infty}\frac{2.4\ldots(2m-2).2.4\ldots(2m+2n-2)}{3.5\ldots(2m-1).1.3\ldots(2m+2n-3)},$$

což jest známá *Wallisova* formule pro π psaná ve tvaru poněkud odchylném (zdánlivě obecnějším).

Kdybychom používali místo rovnice příkl. 8 (za odst. 136*f*) rovnice příkl. 9, dostali bychom výsledky obecnější. Integrály, jež se tu vyskytnou, dají se, jak později seznáme, vyjádřiti pomocí funkce gamma. Předpokládáme-li toto vyjádření, obdržíme cestou úplně stejnou jako svrchu tento vztah

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{2\,(a+b)}{ab}\left[\frac{1}{2}-\frac{ab}{(a+1)(b+1)}+\frac{a(a-1)\,b\,(b-1)}{(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}-\ldots\right].$$