9. PRODLOUŽENÍ LOKÁLNĚ KONEČNÝCH POKRYTÍ

9.1. Nechť $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{Y_\alpha; \alpha \in A\}$ jsou soubory množin (se stejnou množinou indexů A). Pravíme, že $\{Y_\alpha\}$ je *rozšiřujícím* (popř. *zúžujícím*) *prodloužením* souboru $\{X_\alpha\}$, jestliže $Y \supset X$, kde klademe $Y = \bigcup Y_\alpha$, $X = \bigcup X_\alpha$, a pro každé $\alpha \in A$ platí $Y_\alpha \supset X_\alpha$ (popř. $Y_\alpha \cap X \subset X_\alpha$); je-li $\{Y_\alpha\}$ zároveň rozšiřujícím i zúžujícím prodloužením $\{X_\alpha\}$, tj. je-li vždy $Y_\alpha \cap X = X_\alpha$, říkáme, že $\{Y_\alpha\}$ je *přesným prodloužením* $\{X_\alpha\}$. Je-li $Y = X$, pak místo o rozšiřujícím (zúžujícím) prodloužení mluvíme někdy stručně o *rozšíření* (*zúžení*). Místo „lokálně konečný soubor (otevřených) množin, který je rozšiřujícím prodloužením souboru $\{X_\alpha\}$“ budeme říkat stručněji „lokálně konečné (otevřené) rozšiřující prodloužení souboru $\{X_\alpha\}$“ apod.

Poznamenáváme, že některé věty předcházejících paragrafů lze stručněji (a někdy výrazněji) formulovat pomocí pojmů, které jsme právě zavedli. Tak lze např. větu **5.17** formulovat takto: Každý lokálně konečný soubor uzavřených částí plně normálního prostoru má lokálně konečné otevřené rozšiřující prodloužení.

9.2. Nechť $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{Y_\alpha; \alpha \in A\}$ jsou soubory množin (se stejnou množinou indexů A). Jestliže pro každou konečnou neprázdnou $\mu \subset A$ je $\bigcap_{\alpha \in \mu} X_\alpha = \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha \in \mu} Y_\alpha = \emptyset$, říkáme, že soubory $\{X_\alpha\}$, $\{Y_\alpha\}$ jsou *kombinatoricky podobné* a píšeme $\{X_\alpha\} \cong \{Y_\alpha\}$. Prodloužení (rozšiřující nebo zúžující) $\{Y_\alpha\}$ souboru $\{X_\alpha\}$ nazveme *kombinatoricky podobným prodloužením*, jestliže $\{Y_\alpha\}$, $\{X_\alpha\}$, $\{X \cap Y_\alpha\}$, kde $X = \bigcup X_\alpha$, jsou si navzájem kombinatoricky podobné.

9.3. Nechť je prostor P normální. Potom každý nejvýš spočetný soubor $\{F_k\}$ jeho uzavřených částí, který je lokálně konečný v $S = \bigcup F_k$, má kombinatoricky podobné otevřené (v P) rozšiřující prodloužení $\{G_k\}$; přitom lze dokonce požadovat $\{\overline{G}_k\} \cong \{F_k\}$.

Důkaz. Stačí ovšem provést důkaz pro případ, že $\{F_k\}$ je nekonečný. Nechť pro jisté $n = 1, 2, \ldots$ jsou již pro každé $k < n$ sestrojeny otevřené $G_k \supset F_k$ takové, že položíme-li $Y_k = \overline{G}_k$ pro $k < n$, $Y_k = F_k$ pro $k \geqq n$, platí $\{Y_k\} \cong \{F_k\}$. Buď M množina neprázdných konečných $\mu \subset \mathbf{N}$ takových, že $n \operatorname{non} \in \mu$, $F_n \cap \bigcap_{k \in \mu} Y_k = \emptyset$ ($\mathbf{N}$ ovšem značí podle **T 2.1** množinu všech přirozených čísel); položme $T = \bigcup_{\mu \in M} \bigcap_{k \in \mu} Y_k$. Snadno se zjistí, že $F_n \cap \overline{T} = \emptyset$; tedy existuje otevřená $G_n \supset F_n$ taková, že $\overline{G}_n \cap \overline{T} = \emptyset$. Zřejmě pak platí $\{Z_k\} \cong \{Y_k\} \cong \{F_k\}$, kde $Z_k = \overline{G}_k$ pro $k < n + 1$, $Z_k = F_k$ pro $k \geqq n + 1$. Indukcí nyní vyplyne tvrzení věty.

9.4. Nechť P je normální, $S \subset P$, $F_k \subset H_k \subset S$, $k = 1, 2, \ldots$; nechť F_k jsou uzavřené v P, H_k jsou otevřené v S, $\bigcup F_k = S$, $\{F_k\}$ je lokálně konečný v S, $\{H_k\}$ je bodově konečný. Potom existuje lokálně konečný v $\bigcup G_k$ soubor $\{G_k\}$ otevřených v P množin, který je zároveň rozšiřujícím prodloužením $\{F_k\}$ a zúžujícím prodloužením $\{H_k\}$, při čemž platí $\{F_k\} \cong \{G_k \cap \cap S\} \cong \{G_k\}$.

Důkaz. Pro $p = 1, 2, \ldots$ položme $K_p = S - \bigcup_{k>p} H_k$, $U_p = S - \bigcup_{k>p} F_k$. Potom K_p jsou uzavřené v S, U_p jsou otevřené v S, $K_p \subset U_p$; z toho, že $\{H_k\}$ je bodově konečný, plyne $\bigcup K_p = S$. Ježto prostor S je podle **T 5.4.4** normální, vyplývá z toho podle **2.8**, že existuje spočetné lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\alpha; \alpha \in A\}$ prostoru S, které zjemňuje $\{U_p\}$. Podle **2.1** existují uzavřené v S množiny $T_\alpha \subset V_\alpha$ takové, že $\bigcup T_\alpha = S$. Soubor $\{X_\alpha; \alpha \in \mathbf{N} \cup A\}$, kde $X_\alpha = F_\alpha$ pro $\alpha = k \in \mathbf{N}$, $X_\alpha = T_\alpha$ pro $\alpha \in A$, je lokálně konečný v S (předpokládáme ovšem $A \cap \mathbf{N} = \emptyset$); tedy podle **9.3** existují otevřené v P množiny $G^*_\alpha \supset X_\alpha$ takové, že $\{\overline{G}^*_\alpha\} \cong \{X_\alpha\}$, kde $\alpha \in A \cup \mathbf{N}$. Ježto, jak se snadno zjistí, každé T_α protíná pouze konečně mnoho množin F_μ, protíná tedy každá G^*_α, $\alpha \in A$, pouze konečně mnoho množin G^*_α, $\alpha = k \in \mathbf{N}$. Položíme nyní $G = \bigcup_{\alpha \in A} G^*_\alpha$, $G_k = G^*_k \cap G$. Snadno se zjistí, že $G_k \supset F_k$, $\{G_k\}$ je lokálně konečný v $\bigcup G_k$, $\{\overline{G}_k\} \cong \{F_k\}$.

9.5. Nechť P je normální, $S \subset P$ je uzavřené. Potom každé nejvýš spočetné lokálně konečné otevřené pokrytí $\{H_k\}$ prostoru S má lokálně konečné otevřené (v P) kombinatoricky podobné zúžující prodloužení $\{G_k\}$; přitom lze navíc požadovat $\{H_k\} \cong \{\overline{G}_k\}$.

Důkaz. Stačí ovšem provést důkaz pro případ, že množinou indexů je $\boldsymbol{N}$. Podle **2.1** existují uzavřené $F_k^* \subset H_k$ takové, že $\bigcup F_k^* = S$. Pro každou neprázdnou konečnou $\mu \subset \boldsymbol{N}$ takovou, že $\bigcap_{k \in \mu} H_k \neq \emptyset$, zvolme neprázdnou uzavřenou $T_\mu \subset \bigcap_{k \in \mu} H_k$; položme $F_k = F_k^* \cup \bigcup_{k \in \mu} T_\mu$. Snadno se zjistí, že F_k jsou uzavřené, $F_k \subset H_k$, $\{F_k\} \cong \{H_k\}$. Podle **9.4** existují otevřené v P množiny G_k^* takové, že $F_k \subset G_k^* \cap S \subset H_k$, $\{G_k^*\}$ je lokálně konečný v $\bigcup G_k^*$, $\{F_k\} \cong \{G_k^* \cap S\} \cong \{G_k^*\}$. Zvolme nyní ještě otevřenou U takovou, že $S \subset U \subset \overline{U} \subset \bigcup G_k^*$, a položme $G_k = G_k^* \cap U$. Snadno se zjistí, že G_k mají potřebné vlastnosti.

9.6. Nechť P je normální. Nechť $F_k \subset P$, $k = 1, 2, \ldots$, jsou uzavřené, $\{F_k\}$ je lokálně konečný v $S = \bigcup F_k$ a nechť platí: je-li $M \subset \boldsymbol{N}$ nekonečná, pak existuje konečná $\mu \subset M$ taková, že $\bigcap_{k \in \mu} F_k = \emptyset$. Potom $\{F_k\}$ má kombinatoricky podobné otevřené rozšiřující prodloužení $\{G_k\}$, které je lokálně konečné v $\bigcup G_k$.

Důkaz. Podle **9.3** existují otevřené $G_k \supset F_k$ takové, že $\{G_k\} \cong \{F_k\}$; jak se snadno zjistí, z předpokladů věty vyplývá, že $\{G_k\}$ je bodově konečný. Položme nyní $H_k = S \cap G_k$ a použijme věty **9.4.**

9.7. Nechť P je spočetně plně normální. Nechť $F_k \subset P$, $k = 1, 2, \ldots$, jsou uzavřené, $\{F_k\}$ je lokálně konečný v $S = \bigcup F_k$. Potom $\{F_k\}$ má kombinatoricky podobné otevřené rozšiřující prodloužení $\{G_k\}$, které je lokálně konečné v $\bigcup G_k$.

Důkaz. Podle **8.6** je S spočetně plně normální, takže podle **8.2**, (4) existují otevřené v S množiny $H_k \supset F_k$ takové, že $\{H_k\}$ je lokálně konečný v S. Použijeme nyní **9.4.**

Poznámka. Předpokládáme-li ještě, že S je uzavřené v P, pak, jak je snadno patrné, lze požadovat, aby $\{G_k\}$ byl lokálně konečný v P. To platí obdobně též pro **9.4** a **9.6.**

9.8. Nechť P je spočetně plně normální, $S \subset P$ je uzavřené, $\{H_k\}$ je nejvýš spočetné lokálně konečné otevřené pokrytí prostoru S. Potom $\{H_k\}$ má lokálně konečné otevřené přesné prodloužení.

Důkaz. Ježto $\{\overline{H}_k\}$ je lokálně konečný v P, existují podle **8.2**, (4) otevřené v P množiny $U_k \supset \overline{H}_k$ takové, že $\{U_k\}$ je lokálně konečný. Nechť nyní V_k jsou otevřené v P, $V_k \cap S = H_k$; položme $G_k = U_k \cap V_k$. Snadno se zjistí, že $\{G_k\}$ má potřebné vlastnosti.

Poznámka. Obecně nelze požadovat (ani v případě, že P je kompaktní, $\{H_k\}$ je konečný), aby zmíněné prodloužení bylo zároveň kombinatoricky podobné.

Cvičení k § 9

9.1. Nechť P je dědičně normální. Potom každý nejvýš spočetný soubor $\{X_k\}$ jeho částí, který je lokálně konečný v $X = \bigcup X_k$, má kombinatoricky podobné otevřené (v P) rozšiřující prodloužení $\{G_k\}$. [Sestrojte nejdříve příslušné prodloužení v prostoru $P - (\overline{X} - X)$.]

9.2. Nechť P je dědičně normální, $S \subset P$. Potom každé nejvýš spočetné lokálně konečné otevřené pokrytí $\{H_k\}$ prostoru S má lokálně konečné otevřené (v P) kombinatoricky podobné zúžující prodloužení $\{G_k\}$.

9.3. Nechť P je dědičně normální, $S \subset P$. Potom každé konečné otevřené pokrytí $\{H_k\}$ prostoru S má kombinatoricky podobné otevřené (v P) přesné prodloužení. [Buď n počet množin H_k. Za předpokladu, že tvrzení platí pro n, dokážeme: je-li $\bigcap_1^{n+1} H_k = \emptyset$, pak existují otevřené $U_k \supset H_k$ takové, že $\bigcap_1^{n+1} U_k = \emptyset$. Z toho pak odvodíme, že tvrzení platí pro $n + 1$.]

9.4. Nechť je P dědičně spočetně plně normální. Jestliže $X_k \subset P$, $k = 1, 2, \ldots$, $\{X_k\}$ je lokálně konečný v $X = \bigcup X_k$, pak $\{X_k\}$ má kombinatoricky podobné otevřené (v P) rozšiřující prodloužení $\{G_k\}$, které je lokálně konečné v $\bigcup G_k$. [Sestrojte nejdříve příslušné prodloužení $\{G'_k\}$ v prostoru $P - (\overline{X} - X)$ a uvažte, že množina bodů, v nichž $\{G_k\}$ není lokálně konečný, je uzavřená a disjunktní s $\bigcup G'_k$.]

9.5. Nechť je P dědičně spočetně plně normální. Nechť $S \subset P$ a nechť $\{H_k\}$ je nejvýš spočetné lokálně konečné otevřené pokrytí prostoru S. Potom $\{H_k\}$ má kombinatoricky podobné přesné prodloužení $\{G_k\}$, které je lokálně konečné v $\bigcup G_k$.

9.6. Nechť P je normální. $F_\alpha \subset U_\alpha \subset P$, F_α jsou uzavřené, U_α jsou otevřené, $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ je lokálně konečný. Potom existují otevřené G_α takové, že $F_\alpha \subset \subset G_\alpha \subset U_\alpha$, $\{G_\alpha\} \cong \{X_\alpha\}$. [Dokážeme, že pro každé $\alpha_0 \in A$ existuje G takové, že $F_{\alpha_0} \subset G \subset U_{\alpha_0}$ a platí: když $\alpha_i \in A$, $\bigcap_{i=0}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$, pak $\overline{G} \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Vlastní důkaz se pak provede např. použitím **T 3.9.1.**]

9.7. Říkáme, že pseudometrika ϱ na množině P má *spočetný charakter*, splňuje-li metrický prostor příslušný k ϱ (viz **3.2**) druhý axiom spočetnosti. Dokažte: nechť je prostor P normální. Nechť $S \subset P$ je uzavřená a nechť spojitá pseudometrika ϱ na S má spočetný charakter. Potom existuje spojitá pseudometrika σ na P, která se na S shoduje s ϱ. [Lze použít např. **9.5** a postupovat obdobně jako u 5.4, 5.5].