4. NORMÁLNÍ POKRYTÍ

4.1. Nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je otevřené pokrytí prostoru P. Následující vlastnosti pokrytí $\{G_\alpha\}$ jsou ekvivalentní:

(1) existují otevřená pokrytí $\mathfrak{G}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ taková, že $\mathfrak{G}_0 = \{G_\alpha\}$, $\mathfrak{G}_{k+1}$ je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{G}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

(2), (3) existuje lokálně konečné (resp. σ-lokálně konečné) otevřené pokrytí $\{U_\mu\}$ jemnější než $\{G_\alpha\}$ a uzavřené množiny $F_\mu \subset U_\mu$ takové, že $\bigcup F_\mu = P$, F_μ a $P - U_\mu$ jsou normálně oddělené (pro každé μ);

(4) existuje spojitá pseudometrika ϱ v P taková, že platí: ke každému $x \in P$ existuje $\alpha \in A$ tak, že $y \in P$, $\varrho(x, y) < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in G_\alpha$;

(5) existuje spojitá pseudometrika ϱ v P taková, že platí: ke každému $x \in P$ existuje $\varepsilon > 0$ a $\alpha \in A$ tak, že $y \in P$, $\varrho(x, y) <$ $< \varepsilon \Rightarrow y \in G_\alpha$;

(6) existuje spojité zobrazení f prostoru P do vhodného metrisovatelného prostoru R a otevřené pokrytí V_μ prostoru R takové, že $\{f^{-1}(V_\mu)\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$.*)

Důkaz. I. Z (1) plyne (2) podle **2.9** a **3.10**, (3); z (2) plyne triviálně (3). — II. Dokážeme, že z (2) plyne (4). Nechť $\{U_\mu; \mu \in M\}$, $\{F_\mu; \mu \in M\}$ mají vlastnosti uvedené v (2). Ježto F_μ a $P - U_\mu$ jsou normálně oddělené, existují podle **3.10**, (1) spojité funkce f_μ takové, že $x \in P \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leqq f_\mu(x) \leqq 1$, $x \in F_\mu \Rightarrow f_\mu(x) = 1$, $x \in P - U_\mu \Rightarrow f_\mu(x) = 0$. Soubor funkcí $\{f_\mu\}$ je zřejmě lokálně konečný v P. Jestliže nyní pro $x \in P$, $y \in P$ položíme $\varrho(x, y) = \sum_{\mu \in M} |f_\mu(x) - f_\mu(y)|$, pak podle **3.4** ϱ je spojitá pseudometrika. Je-li $x \in P$, zvolme μ a α tak, aby $x \in F_\mu \subset G_\alpha$; pak

*) Srovn. práci E. MICHAELA, citovanou v poznámce na str. 421.

zřejmě $y \in P$, $\varrho(x, y) < 1 \Rightarrow x \in U_\mu \subset G_\alpha$. — III. Implikace (4) $\Rightarrow$ (5) je triviální; dokážeme, že z (3) plyne (5). Nechť $\{U_\mu; \mu \in M\}$, $\{F_\mu; \mu \in M\}$ mají vlastnosti uvedené v (3); nechť $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ a každý soubor $\{U_\mu; \mu \in M_n\}$ je lokálně konečný. Ježto F_μ a $P - U_\mu$ jsou normálně oddělené, existují podle **3.10**, (1) spojité funkce f_μ takové, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f_\mu(x) \leqq 1$, $x \in F_\mu \Rightarrow f_\mu(x) = 1$, $x \in P - U_\mu \Rightarrow f_\mu(x) = 0$. Pro každé n soubor funkcí $\{f_\mu; \mu \in M_n\}$ je lokálně konečný v P. Pro $x \in P$, $y \in P$ položíme $\varrho_n(x, y) = \sum_{\mu \in M_n} |f_\mu(x) - f_\mu(y)|$, $\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(x, y)}{1 + \varrho_n(x, y)}$.

Podle **3.4** a **3.5** ϱ je spojitá pseudometrika v P. Buď $x \in P$; zvolme μ tak, že $x \in F_\mu$; nechť $\mu \in M_n$. Zvolme ještě α tak, aby $U_\mu \subset G_\alpha$. Potom $y \in P - U_\mu \Rightarrow \varrho_n(x, y) \geqq |f_\mu(x) - f_\mu(y)| = 1$, tedy $y \in P - U_\mu \Rightarrow \Rightarrow \varrho(x, y) \geqq \frac{1}{2^{n+1}}$, tedy $\varrho(x, y) < 2^{-n-1} \Rightarrow y \in U_\mu \Rightarrow y \in G_\alpha$.

IV. Jestliže platí (5), buď R metrický prostor, příslušný k pseudometrice ϱ, a f zobrazení P na R (viz **3.2**). Ježto ϱ je spojitá, f je také spojité. Pro každé $x \in P$ zvolme $\varepsilon = \varepsilon_x$ s vlastnostmi uvedenými v (5) a označme V_x množinu těch $z \in R$, pro něž $\varrho^*(z, f(x)) < \varepsilon_x$, kde ϱ^* značí metriku v R (viz **3.2**). Potom $\{V_x; x \in P\}$ je otevřené pokrytí R a zřejmě $\{f^{-1}(V_x); x \in P\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$; tedy platí (6). — Nechť platí (6). Z **2.10** vyplývá, že existují otevřená pokrytí $\mathfrak{V}_k$ prostoru R taková, že $\mathfrak{V}_{k+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{V}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ a $\mathfrak{V}_0 = \{V_\mu\}$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ buď $\mathfrak{V}_k = \{V_\mu^k; \mu \in M_k\}$. Položme $\mathfrak{G}_k = \{f^{-1}(V_\mu^k); \mu \in M_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{G}_0 = \{G_\alpha\}$. Snadno se zjistí, že $\mathfrak{G}_k$ mají vlastnosti, uvedené v (1). Tím je celý důkaz dokončen.

4.2. Definice. Otevřené pokrytí $\{G_\alpha\}$ prostoru P nazýváme *normálním*, jestliže má některou z vlastností uvedených v **4.1**.

Z této definice a ze **4.1** je patrné, že každá z vlastností (podmínek) **4.1**, (1) až (6) je nutná a stačí k tomu, aby otevřené pokrytí bylo normální. Udáme nyní další nutné a postačující podmínky.

4.3. Aby bylo otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ prostoru P normální, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek:

(1) existují soubory $\{F_\alpha\}$, $\{U_\alpha\}$ tak, že F_α jsou uzavřené, $\bigcup_\alpha F_\alpha = P$, U_α jsou otevřené, $\{U_\alpha\}$ je lokálně konečný, a pro každé α je $F_\alpha \subset U_\alpha \subset G_\alpha$, F_α a $P - U_\alpha$ jsou normálně oddělené;

(2) existuje lokálně konečný soubor spojitých nezáporných funkcí $\{f_\alpha\}$ takový, že $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - G_\alpha$, $\Sigma_\alpha f_\alpha(x) > 0$ pro každé $x \in P$;

(3) existuje soubor spojitých nezáporných funkcí $\{f_\alpha\}$ tak, že $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - G_\alpha$ a každé α, součet $\Sigma_\alpha f_\alpha$ existuje (viz **1.20**) a je spojitou kladnou funkcí v P.

Důkaz. I. Je-li $\{G_\alpha\}$ normální, pak má vlastnost **4.1**, (2), tedy existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\mu; \mu \in M\}$ jemnější než $\{G_\alpha\}$ a uzavřené množiny $K_\mu \subset V_\mu$ takové, že $\bigcup K_\mu = P$, K_μ a $P - V_\mu$ jsou vždy oddělené. Pro každé $\mu \in M$ zvolme $\alpha = \varphi(\mu)$ tak, aby $V_\mu \subset G_\alpha$. Položme $U_\alpha = \bigcup_{\varphi(\mu)=\alpha} V_\mu$, $F_\alpha = \bigcup_{\varphi(\mu)=\alpha} K_\mu$; jestliže pro některé $\alpha \in A$ neexistuje žádné μ s $\varphi(\mu) = \alpha$, pak ovšem $U_\alpha = F_\alpha = \emptyset$. Potom F_α jsou uzavřené podle **1.13**; zřejmě $\bigcup_\alpha F_\alpha = P$. Množiny U_α jsou zřejmě otevřené; $\{U_\alpha\}$ je lokálně konečný podle **1.5.** Zřejmě $F_\alpha \subset U_\alpha \subset G_\alpha$; F_α a $P - U_\alpha$ jsou normálně oddělené podle **3.11.**

II. Nechť platí (1). Pro každé $\alpha \in A$ existuje podle **3.10** spojitá nezáporná funkce f_α v P, $f_\alpha(x) = 1$ pro $x \in F_\alpha$, $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - U_\alpha$. Zřejmě soubor $\{f_\alpha\}$ je lokálně konečný, $\Sigma f_\alpha(x) \geqq 1$ pro každé $x \in P$ (neboť $\bigcup F_\alpha = P$).

III. Jestliže platí (2), pak zřejmě (viz **1.21**) platí také (3). Nechť platí (3). Položme $f = \Sigma_\alpha f_\alpha$. Pro $\alpha \in A$, $\varepsilon > 0$ položme $H(\alpha, \varepsilon) = \overline{\mathscr{E}_x [x \in P, f_\alpha(x) > \varepsilon]}$. Dokážeme nejdříve, že každý soubor $\{H(\alpha, \varepsilon); \alpha \in A\}$ je lokálně konečný. Buď $x \in P$. Zřejmě existuje konečná množina $B \subset A$ tak, že $f(x) - \Sigma_{\alpha \in B} f_\alpha(x) < \frac{1}{4}\varepsilon$. Zvolme okolí V bodu x tak, aby $y \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, $|\Sigma_{\alpha \in B} f_\alpha(x) - \Sigma_{\alpha \in B} f_\alpha(y)| < \frac{1}{4}\varepsilon$. Potom, jak se snadno zjistí, platí $y \in V$, $\alpha \in A - B \Rightarrow f_\alpha(y) < \varepsilon$. To znamená, že $V \cap H(\alpha, \varepsilon) = \emptyset$ pro $\alpha \in A - B$. Soubor $\{H(\alpha, \varepsilon); \alpha \in A\}$ je tedy skutečně lokálně konečný. Položme nyní $U_{\alpha,n} = H\left(\alpha, \frac{1}{2n}\right)$, $F_{\alpha,n} = \overline{H\left(\alpha, \frac{1}{n}\right)}$. Snadno se zjistí, že $\{U_{\alpha,n}; \alpha \in A, n = 1, 2, \ldots\}$ je σ-lokálně konečné otevřené pokrytí a zjemňuje $\{G_\alpha\}$, $\bigcup F_{\alpha,n} = P$, $P - U_{\alpha,n}$ a $F_{\alpha,n}$ jsou normálně oddělené. Pokrytí $\{G_\alpha\}$ má tedy vlastnost **4.1**, (3), je tedy normální.

4.4. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ jsou otevřená pokrytí prostoru P, $\mathfrak{G}$ je normální, $\mathfrak{G}$ zjemňuje $\mathfrak{H}$. Potom $\mathfrak{H}$ je normální.

4.5. Nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{H_\beta; \beta \in B\}$ jsou normální otevřená pokrytí prostoru P. Potom též $\{G_\alpha \cap H_\beta; (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ je normální otevřené pokrytí P.

Důkaz. Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou spojité pseudometriky v P, ϱ_1 má vzhledem k $\{G_\alpha\}$, ϱ_2 vzhledem k $\{H_\beta\}$ vlastnosti uvedené v **4.1**, (5). Pro $(x, y) \in P \times P$ položme $\varrho(x, y) = \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y)$. Když $x \in P$, pak pro vhodná $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$ platí $\varrho_1(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow y \in G_\alpha$, $\varrho_2(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow y \in H_\beta$. Zřejmě pak $\varrho(x, y) < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow y \in G_\alpha \cap \cap H_\beta$. Z toho plyne podle **4.1**, že $\{G_\alpha \cap H_\beta\}$ je normální.

4.6. Nechť $\{G_\alpha\}$ je normální otevřené pokrytí prostoru P; nechť $S \subset P$. Potom $\{G_\alpha \cap S\}$ je normální pokrytí S. — Důkaz se provede ihned použitím **4.1**, (4).

4.7. Nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je normální otevřené pokrytí prostoru P, $\{H_\beta; \beta \in B\}$ je normální otevřené pokrytí prostoru Q. Potom $\{G_\alpha \times H_\beta; (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ je normální otevřené pokrytí prostoru $P \times Q$.

Důkaz. Použijeme vlastnosti **4.1**, (6). Nechť f je spojité zobrazení P do metrického prostoru R, g je spojité zobrazení Q do metrického prostoru S, $\{V_\mu\}$ je otevřené pokrytí R, $\{W_\nu\}$ je otevřené pokrytí S, $\{f^{-1}(V_\mu)\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$, $\{g^{-1}(W_\nu)\}$ zjemňuje $\{H_\beta\}$. Pro $(x, y) \in P \times Q$ položme $h(x, y) = (f(x), g(y)) \in R \times S$. Pak h je spojité, $\{V_\mu \times W_\nu\}$ je otevřené pokrytí $R \times S$, $\{f^{-1}(V_\mu \times W_\nu)\}$ zřejmě zjemňuje $\{G_\alpha \times H_\beta\}$.

4.8. Nechť f je spojité zobrazení prostoru P do prostoru Q. Je-li $\{G_\alpha\}$ normální otevřené pokrytí prostoru Q, pak $\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ je normální otevřené pokrytí prostoru P.

Důkaz. Nechť spojitá pseudometrika ϱ v Q má vzhledem k $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ vlastnost **4.1**, (4). Pro $(x, y) \in P \times P$ položme $\varrho^*(x, y) = \varrho(f(x),$

$f(y))$. Potom ϱ^* je spojitá pseudometrika v P a zřejmě má vzhledem k $\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ vlastnost **4.1**, (4).

4.9. Každé otevřené pokrytí metrisovatelného prostoru je normální. — Důkaz dostaneme okamžitě, použijeme-li **4.1**, (6).

4.10. Otevřené pokrytí $\mathfrak{G}$ normálního prostoru P je normální, když a jen když existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\mathfrak{H}$, které je jemnější než $\mathfrak{G}$.

Důkaz. Je-li $\mathfrak{G}$ normální, pak existenci $\mathfrak{H}$ s uvedenými vlastnostmi dostaneme z **4.1**, (2). Je-li $\mathfrak{H}$ lokálně konečné otevřené pokrytí P, pak z **2.1**, **3.12** plyne použitím vlastnosti **4.1**, (2), že $\mathfrak{H}$ je normální; je-li při tom $\mathfrak{H}$ jemnější než $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{G}$ je normální podle **4.4.**

4.11. F-prostor je normální, když a jen když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální.

Důkaz. Je-li P normální, použijeme **4.10.** Je-li P F-prostor a je-li každé konečné otevřené pokrytí P normální, pak nechť A, B jsou libovolné disjunktní uzavřené množiny v P. Ježto $(P - A) \cup \cup (P - B) = P$, existují podle **4.3** uzavřené množiny $K \subset P - A$, $L \subset P - B$ tak, že $K \cup L = P$. Potom $A \subset U = P - K$, $B \subset V = = P - L$, $U \cap V = \emptyset$, U, V jsou otevřené. Tedy P je normální.

4.12. Nechť $\mathfrak{G}$ je normální otevřené pokrytí prostoru P. Potom existují normální otevřená pokrytí $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, taková, že (1) $\mathfrak{G}_1$ zjemňuje $\mathfrak{G}$, (2) $\mathfrak{G}_{k+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, (3) každý člen souboru $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ protíná pouze konečný počet členů každého souboru $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, \ldots, k - 1$, (4) každý soubor $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, je lokálně konečný σ-diskrétní.

Důkaz. Je-li P normální, pak podle **4.10** existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\mathfrak{G}'$ jemnější než $\mathfrak{G}$; použijeme nyní věty **2.7** (s $F_\alpha = = \emptyset$). V obecném případě existuje podle **4.1**, (6) spojité zobrazení f prostoru P do metrisovatelného prostoru R a otevřené pokrytí $\mathfrak{H} = \{H_\beta\}$ prostoru R takové, že $\{f^{-1}(H_\beta)\}$ zjemňuje $\mathfrak{G}$. Prostor R je normální (**T 9.1.8**); každé jeho otevřené pokrytí je normální (podle **4.8**). Tedy, jak jsme právě ukázali, existují jeho pokrytí $\mathfrak{H}_k$, která mají (vzhledem k $\mathfrak{H}$) vlastnosti požadované ve větě. Je-li $\mathfrak{H}_k = \{H_\gamma; \gamma \in C_k\}$, položme $\mathfrak{G}_k = \{f^{-1}(H_\gamma); \gamma \in C_k\}$. Snadno se zjistí (viz **1.9**, **4.7**), že $\mathfrak{G}_k$ mají potřebné vlastnosti.

Cvičení k § 4

4.1. K tomu, aby F-prostor P byl úplně regulární, je nutné a stačí, aby každé jeho otevřené pokrytí obsahující právě dvě množiny, z nichž jedna má tvar $P - (x)$, bylo normální.

4.2. Nechť P je úplně regulární, $R = \beta(P)$. Potom ke každému konečnému normálnímu otevřenému pokrytí $\{G_k\}$ prostoru P existují otevřené v R množiny H_k takové, že $H_k \cap P \subset G_k$, $\{H_k\}$ je konečné normální otevřené pokrytí R.

4.3. Nechť R je kompaktní FH-prostor, $P \subset R$, $\overline{P} = R$. Nechť R má vzhledem k P vlastnost uvedenou v 4.2. Potom $R = \beta(P)$.

4.4. Nazveme topologický prostor P *pseudokompaktním*, lze-li z každého jeho normálního otevřeného pokrytí vybrat konečné pokrytí. Dokažte: (1) P je pseudokompaktní, když a jen když je každá spojitá funkce na P omezená; (2) spočetně kompaktní prosto je pseudokompaktní; (3) pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.

4.5. Nechť P je prostor, $S \subset P$, $\overline{S} = P$, S je pseudokompaktní. Pak též P je pseudokompaktní.

4.6. Nechť P je kompaktní, Q je pseudokompaktní. Potom $P \times Q$ je pseudokompaktní. [Nejdříve dokažte: je-li P kompaktní, Q libovolný prostor, je-li f spojitá funkce v $P \times Q$ a je-li $g(y) = \sup\limits_{x \in P} f(x, y)$ pro $y \in Q$, pak g je spojitá funkce v Q. Nástin důkazu: Nechť $y_0 \in Q$, $\varepsilon > 0$. Pro $x \in P$ nechť jsou $G(x) \subset P$, $H(x) \subset Q$ okolí x resp. y_0 a nechť platí: $(z, y) \in G(x) \times H(x) \Rightarrow |f(z, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$. Vyberme z $\{G(x)\}$ konečné pokrytí $\{G(x_i)\}$; budiž $H = \bigcap\limits_i H(x_i)$. Pak $z \in P$, $y \in H \Rightarrow |f(z, y) - f(z, y_0)| < 2\varepsilon$, tudíž $y \in H \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| \leq 2\varepsilon$].

4.7. Soustavu $\mathbf{U}$ zakrytí*) množiny P nazveme *uniformní*, jestliže $\mathbf{U} \neq \emptyset$ a platí: (1) když $\mathfrak{A} \in \mathbf{U}$, $\mathfrak{B}$ je zakrytí P, $\mathfrak{A}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$, pak $\mathfrak{B} \in \mathbf{U}$; (2) když $\mathfrak{A} \in \mathbf{U}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{U}$ a $\mathfrak{C}$ je soustava všech $A \cap B$, $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, pak $\mathfrak{C} \in \mathbf{U}$; (3) ke každému $\mathfrak{A} \in \mathbf{U}$ existuje $\mathfrak{B} \in \mathbf{U}$, které je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{A}$.

*) Pojmu zakrytí (viz **T** def. **8.1.1**) budeme nyní používat v poněkud obecnějším smyslu: zakrytím množiny P nazýváme soustavu množin, jejímž sjednocením je P.

Dokažte: je-li $\boldsymbol{U}$ uniformní soustava zakrytí množiny P, pak soustava $\mathfrak{U}^*$ všech $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}}(A \times A)$, kde $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{U}$, je basí jisté zobecněné uniformity $\mathfrak{U}$ (která je ovšem určena jednoznačně); $\mathfrak{U}$ je uniformitou tehdy a jen tehdy, když pro libovolné $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, existuje $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{U}$ takové, že pro žádné $A \in \mathfrak{A}$ není zároveň $x \in A$ a $y \in A$.

4.8. Je-li $(P, \mathfrak{U})$ zobecněný uniformní prostor, nazveme jeho zakrytí $\mathfrak{Z}$ *stejnoměrným pokrytím* (vzhledem k $\mathfrak{U}$), existuje-li $U \in \mathfrak{U}$ takové, že pro každé $x \in P$ při vhodném $Z \in \mathfrak{Z}$ platí $(x, y) \in U \Rightarrow y \in Z$. Dokažte: nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Potom (1) pro každé $\varepsilon > 0$ soustava $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ všech (ϱ, ε)-okolí bodů z P je stejnoměrným pokrytím uniformního prostoru P; (2) je-li $\mathfrak{Z}$ stejnoměrné pokrytí P, pak pro vhodné $\varepsilon > 0$ soustava $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ zjemňuje $\mathfrak{Z}$.

4.9. Nechť $(P, \mathfrak{U})$ je uniformní prostor. Soustava všech stejnoměrných pokrytí P je uniformní soustavou zakrytí a $\mathfrak{U}$ je totožné s uniformitou, která se sestrojí k této soustavě způsobem popsaným v 4.7.

4.10. Nechť $\boldsymbol{U}$ je uniformní soustava zakrytí množiny P. Nechť $\mathfrak{U}$ je zobecněná uniformita, sestrojená k $\boldsymbol{U}$ způsobem udaným v 4.7. Potom $\boldsymbol{U}$ se skládá právě ze všech stejnoměrných pokrytí zobecněného uniformního prostoru $(P, \mathfrak{U})$.

4.11. Nechť P je topologický prostor. Soustavu $\mathfrak{A}$ jeho částí nazveme *normálním pokrytím*, je-li $\mathfrak{A}$ zakrytím P a existuje normální otevřené pokrytí $\mathfrak{B}$, které zjemňuje $\mathfrak{A}$. Dokažte: je-li $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost, pak soustava $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}$ těch normálních pokrytí, k nimž existuje jemnější normální pokrytí mohutnosti $< \mathfrak{m}$, je uniformní soustavou zakrytí.

4.12. Nechť P je úplně regulární prostor, $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}$ je uniformní soustava zakrytí, popsaná v 4.11, $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}$ je příslušná uniformita (viz 4.7). Potom $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}$ souhlasí s topologií prostoru P.

4.13. Stejnoměrné pokrytí uniformního prostoru P je vždy normálním pokrytím topologického prostoru P.

4.14. Neprázdnou množinu $\mathfrak{M}$ pseudometrik na množině P nazveme *uniformní soustavou pseudometrik*, platí-li: (1) když σ je pseudometrika na P a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\varrho \in \mathfrak{M}$ a $\delta > 0$ takové, že $\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(x, y) < \varepsilon$, pak $\sigma \in \mathfrak{M}$; (2) když $\varrho_1 \in \mathfrak{M}$, $\varrho_2 \in \mathfrak{M}$, pak $\varrho_1 + \varrho_2 \in \mathfrak{M}$.

Dokažte: ke každé uniformní soustavě pseudometrik $\mathfrak{M}$ na množině $P \neq \emptyset$ existuje právě jedna zobecněná uniformita $\mathfrak{U}$ na P taková, že platí: (a) ke každému $U \in \mathfrak{U}$ existuje $\varrho \in \mathfrak{M}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $\varrho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow (x, y) \in U$; ($b$) každá $\varrho \in \mathfrak{M}$ je stejnoměrně spojitá vzhledem k $\mathfrak{U}$. [Viz 3.1, 3.2.]

4.15. Ke každé zobecněné uniformitě $\mathfrak{U}$ na množině $P \neq \emptyset$ existuje právě jedna uniformní soustava $\boldsymbol{U}$ zakrytí P taková, že (a) každé $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{U}$ je stejnoměrným pokrytím vzhledem k $\mathfrak{U}$, (b) pro každé $U \in \mathfrak{U}$ soustava všech $X \subset P$ takových, že $X \times X \subset U$, náleží do $\boldsymbol{U}$. [Za $\boldsymbol{U}$ vezmeme soustavu všech stejnoměrných pokrytí. Je-li $U \in \mathfrak{U}$, buď $\mathfrak{Z}_U$ soustava, popsaná v (*b*). Jestliže $V \in \mathfrak{U}$, $V \circ V^{-1} \subset U$, pak pro každé $x \in P$ množina těch y, pro něž $(x, y) \in V$, náleží do $\mathfrak{Z}_U$.]

4.16. Nechť $\boldsymbol{U}$ je uniformní soustava zakrytí množiny $P \neq \emptyset$. Pak existuje právě jedna uniformní soustava $\mathfrak{M}$ pseudometrik na P taková, že (*a*) pro každé $\varrho \in \mathfrak{M}$ a $\varepsilon > 0$ soustava všech $X \subset P$ takových, že $x \in X$, $y \in X \Rightarrow \varrho(x, y) < \varepsilon$, náleží do $\boldsymbol{U}$; (*b*) ke každému $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{U}$ existuje $\varrho \in \mathfrak{M}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že platí: když $\varrho(x, y) < \varepsilon$, pro vhodné $A \in \mathfrak{A}$ máme $x \in A$, $y \in A$. [Za $\mathfrak{M}$ vezmeme soustavu všech pseudometrik ϱ, splňujících (*a*) pro všechna $\varepsilon > 0$. Je-li $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{U}$, existují $\mathfrak{A}_k \in \boldsymbol{U}$, $k = 1, 2, \ldots$, taková, že $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{k+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{A}_k$. Sestrojme k $\{\mathfrak{A}_k\}$ pseudometriku ϱ podle **3.8**. Pak ϱ náleží do $\mathfrak{M}$ a splňuje (*b*).]

4.17. Nechť $\mathfrak{U}$ je zobecněná uniformita, $\boldsymbol{U}$ je uniformní soustava zakrytí, $\mathfrak{M}$ je uniformní soustava pseudometrik na množině $P \neq \emptyset$. Říkáme, že $\mathfrak{U}$ a $\boldsymbol{U}$ navzájem *souhlasí*, jsou-li splněny požadavky z **4.15**; říkáme, že $\boldsymbol{U}$ a $\mathfrak{M}$ navzájem *souhlasí*, jsou-li splněny požadavky z **4.16**; říkáme, že $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{U}$ navzájem *souhlasí*, jsou-li splněny požadavky z **4.14**. Dokažte: jsou-li dány $\mathfrak{U}$, $\boldsymbol{U}$ a $\mathfrak{M}$ a dvě z nich souhlasí s třetí, pak souhlasí též navzájem.

4.18. Nechť $\mathfrak{U}$, $\boldsymbol{U}$, $\mathfrak{M}$ mají význam z **4.17**. Nazveme-li trojici $(\mathfrak{U}, \boldsymbol{U}, \mathfrak{M})$ souhlasnou, když $\mathfrak{U}$, $\boldsymbol{U}$ a $\mathfrak{M}$ navzájem po dvou souhlasí, pak platí: každá zobecněná uniformita, každá uniformní soustava zakrytí, každá uniformní soustava pseudometrik v dané množině $P \neq \emptyset$ náleží právě do jedné souhlasné trojice.*)

4.19. Nechť $(P, \mathfrak{U})$ je zobecněný uniformní prostor. Nechť $X \subset P$, $Y \subset P$. Říkáme, že Y je *stejnoměrné okolí* množiny X (v zobecněném uniformním prostoru P), existuje-li $U \in \mathfrak{U}$ takové, že $x \in X$, $(x, y) \in U \Rightarrow y \in Y$. Dokažte: (1) je-li Y stejnoměrné okolí X, pak je též okolím X v topologickém prostoru P; (2) jsou-li Y_1, Y_2 stejnoměrná okolí X, pak též $Y_1 \cap Y_2$ je stejnoměrné okolí X; (3) je-li Y stejnoměrným okolím X, pak je též stejnoměrným okolím množiny $\bar{X}$; (4) je-li Y stejnoměrné okolí X, pak existuje $Z \subset P$ takové, že Z je stejnoměrným okolím X, Y je stejnoměrným okolím Z.

4.20. Nechť P je neprázdná množina. Každá zobecněná uniformita $\mathfrak{U}$ na P se skládá právě ze všech stejnoměrných okolí „diagonály" (tj. množiny všech $(x, x) \in P \times P$) v prostoru $(P, \mathfrak{U}) \times (P, \mathfrak{U})$. Každá uniformní soustava $\boldsymbol{U}$ zakrytí P se skládá právě ze všech stejnoměrných pokrytí zobecněného uniformního prostoru $(P, \boldsymbol{U})$ (viz poznámku k **4.18**). Každá uniformní soustava $\mathfrak{M}$ pseudometrik na P se skládá právě ze všech stejnoměrně spojitých pseudometrik na zobecněném uniformním prostoru $(P, \mathfrak{M})$ (viz poznámku k **4.18**).

---

*) Podstatný smysl uvedeného tvrzení je tento: Zobecněný uniformní prostor lze určit zcela ekvivalentně buď udáním zobecněné uniformity nebo udáním uniformní soustavy zakrytí nebo udáním uniformní soustavy pseudometrik. Můžeme proto mluvit též např. o (zobecněném) uniformním prostoru $(P, \boldsymbol{U})$ nebo $(P, \mathfrak{M})$, kde $\boldsymbol{U}$ je uniformní soustava zakrytí, $\mathfrak{M}$ je uniformní soustava pseudometrik.

4.21. Nazveme zobecněný uniformní prostor P *totálně omezeným* (*prekompaktním*), lze-li z každého jeho stejnoměrného pokrytí vybrat konečné stejnoměrné pokrytí. Dokažte: metrický prostor je totálně omezený v právě definovaném smyslu, když a jen když je totálně omezený ve smyslu **T** def. **9.1.10**.

4.22. Je-li uniformní prostor kompaktní, pak je totálně omezený.

4.23. K tomu, aby byl zobecněný uniformní prostor $(P, \mathfrak{U})$ totálně omezený, je nutná a stačí každá z těchto podmínek: (1) je-li $U \in \mathfrak{U}$, pak existuje konečná $K \subset P$ taková, že pro každé $x \in P$ jest $(x, y) \in U$ pro vhodné $y \in K$; (2) je-li $U \in \mathfrak{U}$, pak existují $X_i \subset P$, $i = 1, \ldots, n$, takové, že $\bigcup X_i = P$, $X_i \times X_i \subset U$; (3) každá stejnoměrně spojitá pseudometrika na P je omezená.

4.24. Každý podprostor totálně omezeného zobecněného uniformního prostoru je totálně omezený.

4.25. Kartézský součin totálně omezených zobecněných uniformních prostorů je totálně omezený.

4.26. Nechť P, Q jsou zobecněné uniformní prostory, f je stejnoměrně spojité zobrazení P na Q. Je-li P totálně omezený, pak též Q je totálně omezený.

4.27. Nechť P je zobecněný uniformní prostor, $X \subset P$, $Y \subset P$. Množina Y je stejnoměrným okolím X, když a jen když existuje stejnoměrně spojité zobrazení f prostoru P do $\langle 0, 1 \rangle$ takové, že $x \in X$ $f(x) = 1$, $x \in P - Y \Rightarrow f(x) = 0$. [Je-li Y stejnoměrným okolím X, existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ϱ a $\varepsilon > 0$ takové, že $x \in X$, $\varrho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in Y$. Položme

$$f(x) = \frac{\varrho(x, P - Y)}{\varrho(x, P - Y) + \varrho(x, X)} .]$$

4.28. K tomu, aby konečné zakrytí $\mathfrak{A}$ zobecněného uniformního prostoru $(P, \mathfrak{U})$ bylo stejnoměrným pokrytím, je nutná a stačí tato podmínka: skládá-li se $\mathfrak{A}$ z množin A_i, pak existují B_i takové, že A_i je stejnoměrným okolím B_i, $\bigcup B_i = P$. [Podmínka stačí: nechť $U_i \in \mathfrak{U}$ a platí $x \in B_i$, $(x, y) \in U_i \Rightarrow y \in A_i$; pak $U = \bigcap_1^n U_i$ má vlastnosti z definice v **4.8**. Podmínka je nutná: zvolme U podle **4.8** a označme B_i množinu $x \in P$ takových, že $(x, y) \in U \Rightarrow y \in A_i$.]

4.29. Nechť P je zobecněný uniformní prostor. Buď $\boldsymbol{U}^*$ soustava jeho zakrytí $\mathfrak{A}$ takových, že existuje konečné stejnoměrné pokrytí $\mathfrak{B}$ prostoru P, které je jemnější než $\mathfrak{A}$. Potom $\boldsymbol{U}^*$ je uniformní soustava zakrytí. [K důkazu podmínky (3) z **4.7** použijte **4.28** a **4.27**.]

4.30. Nechť $\mathfrak{U}$ je (zobecněná) uniformita ve množině P. Potom existuje právě jedna (zobecněná) uniformita $\mathfrak{U}^*$ hrubší než $\mathfrak{U}$ a taková, že (1) $(P, \mathfrak{U}^*)$ je totálně omezený, (2) je-li $Y \subset P$ stejnoměrným okolím X v $(P, \mathfrak{U})$, pak je stejnoměrným okolím X též v $(P, \mathfrak{U}^*)$. [Za $\mathfrak{U}^*$ vezmeme (zobecněnou) uniformitu souhlasící s uniformní soustavou zakrytí U^* sestrojenou podle 4.29. Použijeme 4.27 a k důkazu jednoznačnosti 4.28.]

4.31. Nechť P, Q jsou totálně omezené zobecněné uniformní prostory, f je zobrazení P do Q. K tomu, aby f bylo stejnoměrně spojité, je nutná a stačí tato podmínka: když Y je stejnoměrným okolím X v Q, pak $f^{-1}(Y)$ je stejnoměrným okolím $f^{-1}(X)$. [Z 4.28 vyplyne, že tvoří-li $Y_1, \ldots, Y_n$ stejnoměrné pokrytí Q, pak $f^{-1}(Y_i)$ tvoří stejnoměrné pokrytí P.]

4.32. Každý totálně omezený uniformní prostor lze vnořit právě jedním způsobem jako hustou část do kompaktního uniformního prostoru. Přesněji: Nechť $(P, \mathfrak{U})$ je totálně omezený uniformní prostor. Potom existuje uniformní prostor $(R, \mathfrak{V})$ takový, že $P \subset R$, $\mathfrak{V}_P = \mathfrak{U}$, R je kompaktní (jako topologický prostor) a $R = \overline{P}$. Má-li též prostor $(R_1, \mathfrak{V}_1)$ tyto vlastnosti, potom existuje stejnoměrně homeomorfní zobrazení R na R_1, které je identické na P. [Buď Φ množina všech stejnoměrně spojitých zobrazení P do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$; buď $\mathfrak{m}$ její mohutnost. Zobrazíme P do základního kvádru dimense $\mathfrak{m}$: pro $x \in P$ položíme $f(x) = \{\varphi(x)\} \in T$, kde φ probíhá Φ. Z 4.31 a 4.27 se odvodí, že f je stejnoměrně homeomorfní. Klademe $R = \overline{f^1(P)} \subset T$ a identifikujeme $x \in P$ s $f(x)$. Jednoznačnost vyplyne z toho, že každou stejnoměrně spojitou funkci na P lze rozšířit na R.]

4.33. Nechť P je množina. Nechť je dána jistá relace (vztah) τ mezi částmi množiny P; přesněji: je dána jistá část $\mathfrak{T}$ množiny $\exp P \times \exp P$, při čemž pro $X \subset P$, $Y \subset P$ píšeme $X \tau Y$ (a říkáme, že X a Y jsou „blízké“), právě když $(X, Y) \in \mathfrak{T}$ (neplatí-li $X \tau Y$, píšeme X non τY). Nechť relace τ splňuje tyto požadavky: (1) $X \tau Y \Rightarrow Y \tau X$; (2) $(X \cup Y) \tau Z$, když a jen když buď $X \tau Z$ nebo $Y \tau Z$; (3) pro $x \in P$, $y \in P$ platí $(x) \tau (y) \Leftrightarrow x = y$; (4) P non $\tau \emptyset$; (5) když $A \subset P$, $B \subset P$, A non τB, pak existují $C \subset P$, $D \subset P$ takové, že $C \cup D = P$, A non τC, B non τD. Potom říkáme, že τ je *δ-relace* na P. Množinu P s δ-relací τ nazýváme *δ-prostorem.**)

Dokažte: Nechť $(P, \mathfrak{U})$ je uniformní prostor. Pro $X \subset P$, $Y \subset P$ položme $X \tau Y$ právě tehdy, když pro každou $U \in \mathfrak{U}$ existují $x \in X$, $y \in Y$ takové, že $(x, y) \in U$. Potom τ je δ-relace. (O δ-relaci τ se pak říká, že je *vytvořena* uniformitou $\mathfrak{U}$).

Poznámka. Uniformní prostor budeme považovat vždy zároveň za δ-prostor (se zmíněnou δ-relací).

4.34. Nechť (P, τ) je δ-prostor. Pro každé $M \subset P$ buď $\overline{M}$ množina $x \in P$ takových, že $(x)\ \tau\ M$. Potom P s takto stanovenou topologií je FH-prostor.

---

*) V ruštině se používá též názvu „пространство близости“ „инфинитезимальное пространство“, v angličtině názvu „proximity space“. O teorii δ-prostorů viz zejména Ю. М. Смирнов, О пространствах близости, Математический сборник, 1952, *31* (*73*), 543—574, a jiné Smirnovovy práce.

Poznámka. δ-prostor budeme vždy považovat zároveň za topologický prostor (s topologií, kterou jsme teď zavedli).

4.35. Nechť P je úplně regulární topologický prostor. Pro $X \subset P$, $Y \subset P$ položme $X \tau Y$, jestliže X, Y nejsou normálně oddělené. Potom τ je δ-relace.

4.36. Nechť (P, τ) je δ-prostor. Množinu $Y \subset P$ nazveme *δ-okolím* množiny $X \subset P$, když X non τ $(P - Y)$. Konečné zakrytí $\{A_1, \ldots, A_n\}$ prostoru P nazveme *δ-stejnoměrným pokrytím,* když existují $B_i \subset A_i$ takové, že $\bigcup B_i = P, A_i$ je δ-okolí B_i.

Dokažte: soustava $\mathbf{U}$ všech zakrytí P, k nimž existuje jemnější δ-stejnoměrné konečné pokrytí, je uniformní soustavou zakrytí P. [Podmínku (3) z **4.7** dokážeme nejdříve pro zakrytí $\{A_1, A_2\}$: soustava tří množin $A_1 - B_2, B_1 \cap B_2$, $A_2 - B_1$ hvězdovitě zjemňuje $\{A_1, A_2\}$; zvolíme-li C_i tak, aby B_i non τ $(P - C_i)$, C_i non τ $(P - A_i)$, pak zmíněné množiny jsou po řadě δ-okolími množin $B_1 - C_2$, $C_1 \cap C_2$, $B_2 - C_1$, a tyto množiny zakrývají P.]

4.37. Nechť (P, τ) je δ-prostor. Pro $X \subset P$, $Y \subset P$ je $X \tau Y$, když a jen když platí: je-li $\{A_1, \ldots, A_n\}$ δ-stejnoměrné pokrytí P, pak některé A_i protíná zároveň X i Y.

4.38. Nechť τ je δ-relace na množině P. Potom existuje právě jedna uniformita $\mathfrak{U}$ na P taková, že $(P, \mathfrak{U})$ je totálně omezený a pro $X \subset P$, $Y \subset P$ platí $X \tau Y$, když a jen když $(X \times Y) \cap U \neq \emptyset$ pro každé $U \in \mathfrak{U}$. [Existence: **4.36** a **4.37**; jednoznačnost: **4.31**.]

4.39. Každý δ-prostor je úplně regulární. [To vyplývá z **4.38** a **3.17**.]

4.40. Každý δ-prostor lze vnořit právě jedním způsobem jako hustou část do kompaktního δ-prostoru. [Použijte **4.38** a **4.32**.]

4.41. Zobrazení f δ-prostoru P do δ-prostoru Q nazveme *δ-spojitým,* platí-li: když X, Y jsou blízké v P, pak $f^1(X)$, $f^1(Y)$ jsou blízké v Q. Dokažte: jsou-li (P, ϱ), (Q, σ) metrické prostory, pak zobrazení f prostoru P do Q je δ-spojité, když a jen když je stejnoměrně spojité. [Předpokládejme, že f je δ-spojité a není stejnoměrně spojité. Pak existují $x_n \in P, y_n \in P$ tak, že $\varrho(x_n, y_n) \to 0, \sigma(f(x_n), f(y_n)) > > \alpha > 0$. Lze-li zvolit rostoucí $\{k_n\}$ tak, aby $\{f(x_{k_n})\}$ byla cauchyovská, pak (pro velká p) pro množinu A všech $f(x_{k_n})$, $n > p$, a množinu B všech $f(y_{k_n})$, $n > p$, platí $\sigma(A, B) > \frac{1}{2}\alpha$; avšak $\varrho(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = 0$ vzhledem k $\varrho(x_{k_n}, y_{k_n}) \to \to 0$. Lze-li zvolit rostoucí $\{k_n\}$ a $\beta > 0$ tak, aby $\sigma(f(x_{k_m}), f(x_{k_n})) > \beta$ pro $m \neq n$, lze též zvolit rostoucí $\{k_n\}$ a $\gamma > 0$ tak, aby $\sigma(f(a), f(b)) > \gamma$, kdykoli $a = x_{k_m}$, $b = y_{k_n}$ nebo $a = x_{k_m}$, $b = x_{k_n}$, $m \neq n$, nebo $a = y_{k_m}$, $b = x_{k_n}$, $m \neq n$. Pro zmíněná A, B máme pak $\sigma(A, B) \geqq \gamma$, $\varrho(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = 0$.]