2. LOKÁLNĚ KONEČNÁ POKRYTÍ

Pojem pokrytí atd. je definován pro soubory podle pravidla **1.1** A na základě definice **T 8.1.1.** Pokrytí nazýváme *otevřeným* (*uzavřeným*), skládá-li se z otevřených (uzavřených) množin.

2.1. Nechť P je normální prostor, $\{G_\alpha\}$ je jeho bodově konečné otevřené pokrytí. Potom existuje otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}$ takové, že $\overline{U}_\alpha \subset G_\alpha$ pro každý index α.*)

Důkaz. I. Buď $\mathbf{S}$ soustava všech souborů $\{X_\alpha\}$ takových, že $X_\alpha \subset P$ jsou otevřené, $\bigcup_\alpha X_\alpha = P$ a pro každé α buď $\overline{X}_\alpha \subset G_\alpha$ anebo $X_\alpha = G_\alpha$. V soustavě $\mathbf{S}$ zavedeme částečné uspořádání: $\{X_\alpha\} \in \mathbf{S}$ je před $\{Y_\alpha\} \in \mathbf{S}$, když a jen když $\{X_\alpha\} \neq \{Y_\alpha\}$, $X_\alpha \supset Y_\alpha$ pro každé α a $X_\alpha = Y_\alpha$, kdykoli $\overline{X}_\alpha \subset G_\alpha$.

II. Nechť $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ je (vzhledem k právě zavedenému částečnému uspořádání) monotónní, tj. platí: když $\{X_\alpha\} \in \mathbf{M}$, $\{Y_\alpha\} \in \mathbf{M}$, pak buď $\{X_\alpha\} = \{Y_\alpha\}$, nebo $\{X_\alpha\}$ je před $\{Y_\alpha\}$ anebo $\{Y_\alpha\}$ je před $\{X_\alpha\}$. Pro každý index α označme $\mathfrak{M}_\alpha$ soustavu množin M takových, že pro některý soubor $\{X_\alpha\} \in \mathbf{M}$ je $M = X_\alpha$. Buď Z_α průnik všech množin ze soustavy $\mathfrak{M}_\alpha$. Dokážeme, že $\{Z_\alpha\} \in \mathbf{S}$. Nechť $x \in P$. Předpokládejme, že x non $\in \bigcup_\alpha Z_\alpha$. Ježto soubor $\{G_\alpha\}$ je bodově konečný, existují indexy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tak, že je-li α index různý od všech α_i, pak x non $\in G_\alpha$. Ježto x non $\in Z_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$, existují soubory $\{X^i_\alpha\} \in \mathbf{M}$, $i = 1, \ldots, n$ tak, že x non $\in X^i_{\alpha_i}$. Ježto $\mathbf{M}$ je monotónní, existuje i_0 tak, že všechny soubory $\{X^i_\alpha\}$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq i_0$, jsou v $\mathbf{S}$ před $\{X^{i_0}_\alpha\}$. Máme pak pro každé α a každé $i = 1, \ldots, n$ inklusi $X^i_\alpha \supset X^{i_0}_\alpha$. Z toho plyne, že x non $\in \bigcup_{i=1}^{n} X^{i_0}_{\alpha_i}$, x non $\in \bigcup_\alpha X^{i_0}_\alpha$. To však je spor, neboť $\{X^{i_0}_\alpha\} \in \mathbf{M} \subset \mathbf{S}$. Tedy musí být $x \in \bigcup_\alpha Z_\alpha$, a protože $x \in P$ bylo libovolné, máme $\bigcup_\alpha Z_\alpha = P$.

*) Viz J. Dieudonné, Une généralisation des espaces compacts, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1944, (9), *23*, 65—76.

Zvolme libovolně index α_0. Jestliže pro každý soubor $\{X_\alpha\} \in \boldsymbol{M}$ je $X_{\alpha_0} = G_{\alpha_0}$, pak $Z_{\alpha_0} = G_{\alpha_0}$. Jestliže existuje soubor $\{Y_\alpha\} \in \boldsymbol{M}$ tak, že $\overline{Y}_{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0}$, pak pro libovolný soubor $\{X_\alpha\} \in \boldsymbol{M}$ buď $\{X_\alpha\}$ je před $\{Y_\alpha\}$, a pak $X_{\alpha_0} \supset Y_{\alpha_0}$ anebo $\{Y_\alpha\}$ je před $\{X_\alpha\}$, popř. $\{Y_\alpha\} = \{X_\alpha\}$, a pak $X_{\alpha_0} = Y_{\alpha_0}$; z toho plyne, že $Z_{\alpha_0} = Y_{\alpha_0}$. Množina Z_{α_0} je tedy vždy otevřená a buď $\overline{Z}_{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0}$ anebo $Z_{\alpha_0} = G_{\alpha_0}$.

Dokázali jsme takto, že $\{Z_\alpha\} \in \boldsymbol{S}$. Zřejmě každý soubor $\{X_\alpha\} \in \boldsymbol{M}$, různý od $\{Z_\alpha\}$, je před $\{Z_\alpha\}$. Platí tedy: je-li $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ monotónní, pak existuje $\{X_\alpha\} \in \boldsymbol{S}$ tak, že každý soubor, který náleží do $\boldsymbol{M}$ a je různý od $\{X_\alpha\}$, je před $\{X_\alpha\}$. Z toho plyne podle **T 3.9.1**: existuje soubor $\{U_\alpha\} \in \boldsymbol{S}$, který je v $\boldsymbol{S}$ „maximální", tj. platí: je-li $\{X_\alpha\} \in \boldsymbol{S}$, pak $\{U_\alpha\}$ není před $\{X_\alpha\}$.

III. Dokážeme, že pro každé α je $\overline{U}_\alpha \subset G_\alpha$. Předpokládejme opak; pak vzhledem k $\{U_\alpha\} \in \boldsymbol{S}$ existuje index α_0 takový, že $U_{\alpha_0} = G_{\alpha_0}$, není však $\overline{U}_{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0}$. Buď V sjednocení všech U_α, $\alpha \neq \alpha_0$. Ježto $U_{\alpha_0} \cup V = P$, P je normální, existuje otevřené W takové, že $\overline{W} \subset U_{\alpha_0}$, $W \cup V = P$. Položme $W_{\alpha_0} = W$, $W_\alpha = U_\alpha$ pro každý index $\alpha \neq \alpha_0$. Potom zřejmě $\{W_\alpha\} \in \boldsymbol{S}$, $\{U_\alpha\}$ je před $\{W_\alpha\}$, což je spor.

2.2. Definice. Nechť $\{X_\alpha; \alpha \in A\}, \{Y_\beta; \beta \in B\}$ jsou soubory množin. Soubor $\{X_\alpha\}$ je *jemnější* než $\{Y_\beta\}$, jestliže ke každému α existuje β tak, že $X_\alpha \subset Y_\beta$. Soubor $\{Y_\alpha\}$ je *hvězdovitě jemnější* než $\{Y_\beta\}$, jestliže ke každému $x \in \bigcup_\alpha X_\alpha$ existuje β tak, že $x \in X_\alpha \Rightarrow X_\alpha \subset Y_\beta$. Je-li $\{X_\alpha\}$ (hvězdovitě) jemnější než $\{Y_\alpha\}$, říkáme někdy také, že $\{X_\alpha\}$ je (*hvězdovitým*) *zjemněním* souboru $\{Y_\beta\}$ nebo že (*hvězdovitě*) *zjemňuje* $\{Y_\beta\}$ apod.*)

2.3. Je-li $\{X_\alpha\}$ hvězdovitě jemnější než $\{Y_\beta\}$, pak je jemnější než $\{Y_\beta\}$. Je-li $\{X_\alpha\}$ jemnější než $\{Y_\beta\}$, $\{Y_\beta\}$ jemnější než $\{Z_\gamma\}$, pak $\{X_\alpha\}$ je jemnější než $\{Z_\gamma\}$; jestliže přitom buď $\{X_\alpha\}$ je hvězdovitě jemnější než $\{Y_\beta\}$ nebo $\{Y_\beta\}$ je hvězdovitě jemnější než $\{Z_\gamma\}$, pak též $\{X_\alpha\}$ je hvězdovitě jemnější než $\{Z_\gamma\}$.

*) Někteří autoři používají výrazu „hvězdovitě jemnější" apod. v jiném (ač příbuzném) smyslu, totiž tak, že $\{X_\alpha\}$ hvězdovitě zjemňuje $\{Y_\beta\}$, jestliže ke každému $\alpha \in A$ existuje $\beta \in B$ takové, že platí: je-li $\alpha' \in A$, $X_{\alpha'} \cap X_\alpha \neq \emptyset$, pak $X_{\alpha'} \subset Y_\beta$.

2.4. Definice. Soubor $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ částí prostoru P je *diskrétní* v P, jestliže je lokálně konečný v P a soubor $\{\overline{X}_\alpha\}$ je disjunktní; je *σ-diskrétní* v P, jestliže existují $A_n \subset A$ tak, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a soubory $\{X_\alpha; \alpha \in A_n\}$ jsou diskrétní.

2.5. Jestliže soubory $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{Y_\beta; \beta \in B\}$ částí prostoru P jsou σ-diskrétní, pak též soubor $\{X_\alpha \cap Y_\beta; (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ je σ-diskrétní.

2.6. Nechť $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí normálního prostoru P; nechť $C_\alpha \subset G_\alpha$, C_α jsou uzavřené. Potom existuje lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí $\{U_\mu\}$, pro něž platí (1) $\{U_\mu\}$ je hvězdovitě jemnější než $\{G_\alpha\}$; (2) existují otevřené množiny H_α takové, že $C_\alpha \subset H_\alpha \subset G_\alpha$, $\bigcup_\alpha H_\alpha = P$, každé U_μ protíná pouze konečně mnoho množin H_α.*)

Důkaz. I. Nechť je dáno lokálně konečné otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$. Podle **2.1** existují otevřené G^*_α tak, že $\bigcup_\alpha G^*_\alpha = P$ a pro každé α je $\overline{G}^*_\alpha \subset G_\alpha$. Z normality P plyne snadno indukcí, že existují otevřené množiny G^k_α, $\alpha \in A$, $k = 1, 2, \ldots$, tak, že $C_\alpha \cup \overline{G}^*_\alpha \subset G^1_\alpha$, $\overline{G}^k_\alpha \subset G^{k+1}_\alpha$, $\overline{G}^k_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in A$, $k = 1, 2, \ldots$ Označme B soustavu všech neprázdných konečných částí množiny indexů A. Pro $\mu \in B$ buď $n(\mu)$ počet prvků množiny μ. Pro $n = 1, 2, \ldots$ označme F_n uzávěr množiny těch $x \in P$, které leží ve více než n množinách G^n_α. Položme nyní $V_\mu = \bigcap_{\alpha\in\mu} G^{n(\mu)}_\alpha - F_{n(\mu)}$ pro $\mu \in B$.

II. Dokážeme, že $\{V_\mu\}$ je lokálně konečné σ-disjunktní otevřené pokrytí P a je hvězdovitě jemnější než $\{G_\alpha\}$.

Nejdříve dokážeme, že $\bigcup_{\mu\in B} V_\mu = P$. Buď $x \in P$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ buď a_k počet těch $\alpha \in A$, pro něž $x \in G^k_\alpha$, a buď b_k počet těch $\alpha \in A$, pro něž $x \in \overline{G}^k_\alpha$. Zřejmě $1 \leqq a_k \leqq b_k \leqq a_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$; posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou omezené. Snadno se zjistí, že existuje p takové, že $p = a_p = b_p$. Buď μ množina těch $\alpha \in A$, pro něž $x \in G^p_\alpha$; máme $n(\mu) =$

---

*) Srovn. práce: A. H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bulletin of the American Mathematical Society, 1948, *54*, 977—982 (v této práci se v podstatě dokazuje existence otevřeného pokrytí $\{U_\mu\}$ hvězdovitě jemnějšího než $\{G_\alpha\}$); E. Michael, Local properties of topological spaces, Duke Mathematical Journal, *21*, 163 až 171.

$= a_p = p$. Tvrdím, že $x \in V_\mu$. Ježto zřejmě $x \in \bigcap_{\alpha \in \mu} G_\alpha^{n(\mu)}$, stačí dokázat, že x non $\in F_p$. Z rovnosti $a_p = b_p$ plyne ihned, že μ je právě množina $\alpha \in A$ takových, že $x \in \overline{G}_\alpha^p$. Buď K sjednocení $\overline{G}_\alpha^p$ pro α z množiny $A - \mu$. Podle **1.13** K je uzavřené; x non $\in K$, tedy $P - K$ je okolí x. Zřejmě platí: když $y \in P - K$, $y \in G_\alpha^p$, pak $\alpha \in \mu$. Tedy žádné $y \in P - K$ neleží ve více než $n(\mu) = p$ množinách G_α^p, a tedy x non $\in F_p$. Dokázali jsme tedy, že $\bigcup_{\mu \in B} V_\mu = P$. Zřejmě V_μ jsou otevřené, tedy $\{V_\mu; \mu \in B\}$ je otevřené pokrytí P.

Dokážeme, že $\{V_\mu\}$ je lokálně konečný. Buď $x \in P$. Ježto $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečný, existuje okolí W bodu x a konečná $\mu_0 \subset A$ tak, že pro $\alpha \in A - \mu_0$ je $W \cap G_\alpha = \emptyset$. Je-li $W \cap V_\mu \neq \emptyset$, pak tím spíše $W \cap G_\alpha \neq \emptyset$ pro každé $\alpha \in \mu$, tedy $\mu \subset \mu_0$. Okolí W bodu x protíná tedy V_μ pouze pro konečně mnoho $\mu \in B$.

Dokážeme, že $\{V_\mu\}$ je hvězdovitým zjemněním souboru $\{G_\alpha\}$. Buď $x \in P$. Nechť $x \in V_{\mu_0}$ a je-li $x \in V_\mu$, je vždy $n(\mu_0) \leqq n(\mu)$. Tvrdím, že pak platí: $x \in V_\mu \Rightarrow \mu_0 \subset \mu$. Skutečně, kdyby $x \in V_\mu$, $\alpha_0 \in \mu_0 - \mu$, pak $x \in G_{\alpha_0}^{n(\mu_0)} \subset G_{\alpha_0}^{n(\mu)}$, $x \in G_\alpha^{n(\mu)}$ pro $\alpha \in \mu$, tedy $x \in G_\alpha$ pro aspoň $n(\mu) + 1$ indexů α, tedy $x \in F_{n(\mu)}$, x non $\in V_\mu$, což je spor. Zvolme nyní určité $\alpha_1 \in \mu_0$. Zřejmě pak $x \in V_\mu \Rightarrow V_\mu \subset G_{\alpha_1}$.

Dokážeme konečně, že V_μ je σ-disjunktní. Pro $n = 1, 2, \ldots$ buď B_n množina těch $\mu \in B$, pro něž $n(\mu) = n$. Stačí nyní dokázat pro každé n, že soubor $\{V_\mu; \mu \in B_n\}$ je disjunktní. Předpokládejme, že $x \in V_\mu$, $x \in V_{\mu'}$, $\mu \neq \mu'$, $n(\mu) = n(\mu') = n$. Potom však $x \in G_\alpha^n$ pro každé $\alpha \in \mu \cup \mu'$, tj. aspoň pro $n + 1$ indexů α, takže $x \in F_n$, což je spor.

III. Položme $H_\alpha = G_\alpha^1$ a dokažme: Jestliže $V_\mu \cap H_\alpha \neq \emptyset$, pak $\alpha \in \mu$. Předpokládejme opak; nechť $V_\mu \cap H_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha_0 \in A - \mu$. Buď $n = n(\mu)$. Jestliže $x \in V_\mu \cap H_\alpha$, pak $x \in G_\alpha^n$ pro $\alpha \in \mu$ a $x \in H_{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0}^n$, tedy x leží aspoň v $n + 1$ množinách G_α^n, tedy $x \in F_n$, x non $\in V_\mu$, což je spor. Tím je dokázáno, že každé V_μ protíná H_α pouze pro konečně mnoho α.

IV. Podle **2.4** existují otevřené množiny U_μ tak, že $\overline{U}_\mu \subset V_\mu$, $\bigcup_\mu U_\mu = P$. Snadno se zjistí, že $\{U_\mu\}$ má všechny požadované vlastnosti.

2.7. Nechť $\mathfrak{G} = \{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí normálního prostoru P; nechť F_α jsou uzavřené, $F_\alpha \subset G_\alpha$. Potom existují soubory $\mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ tak, že (1) $\mathfrak{H}_1 =$

$= \{H_\alpha; \alpha \in A\}$, $F_\alpha \subset H_\alpha \subset G_\alpha$ pro každé $\alpha \in A$; (2) pro $k = 1, 2, \ldots$ platí: soubory $\mathfrak{H}_k$ jsou lokálně konečná σ-diskrétní pokrytí, $\mathfrak{H}_{k+1}$ je hvězdovitým zjemněním $\mathfrak{H}_k$, každý člen souboru $\mathfrak{H}_k$ protíná pouze konečný počet členů každého souboru $\mathfrak{H}_i$, $i = 1, \ldots, k - 1$.

Důkaz. I. Podle **2.6** existují otevřené množiny H_α a lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí $\{U_\beta\}$ tak, že $\bigcup_\alpha H_\alpha = P$, pro každé α je $F_\alpha \subset H_\alpha \subset G_\alpha$, $\{U_\beta\}$ je jemnější než $\{G_\alpha\}$, každé U_β protíná H_α pouze pro konečně mnoho α. Položíme $\mathfrak{H}_1 = \{H_\alpha\}$. Podle **2.6** (s H_α místo G_α) existuje lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí $\{V_\gamma\}$, které je hvězdovitě jemnější než $\{H_\alpha\}$. Soubor $\{U_\beta \cap V_\gamma\}$ je zřejmě otevřeným pokrytím; podle **1.7** a **2.5** je lokálně konečný a σ-diskrétní; zřejmě je hvězdovitě jemnější než $\{H_\alpha\}$ a každý jeho člen protíná pouze konečně mnoho H_α. Položíme $\mathfrak{H}_2 = \{U_\beta \cap V_\gamma\}$.

II. Nechť pro jisté $k = 1, 2, \ldots$ jsou již sestrojeny soubory $\mathfrak{H}_i$ pro $i = 1, \ldots, k$, při čemž (1) $\mathfrak{H}_1 = \{H_\alpha\}$, $F_\alpha \subset H_\alpha \subset G_\alpha$, (2) každý soubor $\mathfrak{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$ je lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí prostoru P, (3) je-li $1 \leqq i < k$, pak $\mathfrak{H}_{i+1}$ je hvězdovitým zjemněním $\mathfrak{H}_i$ a každý člen $\mathfrak{H}_{i+1}$ protíná pouze konečný počet členů $\mathfrak{H}_i$, (4) existuje lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí prostoru P, které je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{H}_k$ a jehož každý člen protíná pouze konečný počet členů $\mathfrak{H}_k$.

Sestrojíme nyní $\mathfrak{H}_{k+1}$ tak, aby podmínky (1) až (4) platily s $k + 1$ místo k. Nechť má soubor $\mathfrak{W} = \{W_\delta\}$ vzhledem k $\mathfrak{H}$ vlastnosti uvedené v (4). Podle **2.6** existují otevřené $W^*_\delta \subset W_\delta$ a lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí $\{X_\varepsilon\}$ tak, že $\bigcup_\delta W^*_\delta = P$, $\{X_\varepsilon\}$ je hvězdovitě jemnější než $\{W_\delta\}$ a každé X_ε protíná pouze konečný počet W^*_δ. Dále existuje rovněž podle **2.6** lokálně konečné σ-diskrétní pokrytí $\{Y_\zeta\}$, které je hvězdovitě jemnější než $\{W^*_\delta\}$. Položme $\mathfrak{H}_{k+1} = \{W^*_\delta\}$. Pak zřejmě $\mathfrak{H}_{k+1}$ je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{H}_k$, každý člen $\mathfrak{H}_{k+1}$ protíná pouze konečně mnoho členů $\mathfrak{H}_k$, soubor $\{X_\varepsilon \cap Y_\zeta\}$ má vzhledem k $\mathfrak{H}_{k+1}$ vlastnosti uvedené v (4).

Ježto (1) až (4) skutečně platí podle I pro $k = 1$, plyne nyní úplnou indukcí existence posloupnosti souborů $\mathfrak{H}_k$ s požadovanými vlastnostmi.

2.8. Nechť $\{G_k\}$ je nejvýš spočetné otevřené pokrytí normálního prostoru P. Nechť existují F_σ-množiny $X_k \subset G_k$ takové, že $\bigcup_k X_k = P$. Potom existuje nejvýš spočetné otevřené pokrytí $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ prostoru P, které je jemnější než $\{G_k\}$, je lokálně konečné a dokonce má tu vlastnost,*) že pro každé $\alpha_0 \in A$ je $U_{\alpha_0} \cap U_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečný počet indexů α.

Důkaz. Je-li $\{G_k\}$ konečné, je věta zřejmá; předpokládáme tedy, že $k = 1, 2, \ldots$ Nechť $X_k = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_k^h$, F_k^h jsou uzavřené. Z normality P plyne ihned indukcí, že existují (pro $h, k = 1, 2, \ldots$) otevřené množiny H_k^h takové, že $H_k^h \subset G_k$, $\overline{H_k^h} \subset H_k^{h+1}$, $F_k^h \subset H_k^h$. Zřejmě pak $X_k \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} H_k^h$, $P = \bigcup_{h,k} H_k^h$. Pro $h, k = 1, 2, \ldots, h \geqq k$ položme $U_k^h = H_k^h - \bigcup_{j \leqq h-2}^{\infty} \overline{H}_j^{h-2}$ pro $h > 2$, $U_k^h = H_k^h$ pro $h \leqq 2$. Množiny U_k^h jsou zřejmě otevřené, $U_k^h \subset G_k$. Nechť $x \in P$. Označme r nejmenší h, pro které $x \in \bigcup_{k=1}^{h} H_k^h$; takové h existuje, neboť $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{h} H_k^h = \bigcup_{k \leqq h} H_k^h = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{h \geqq k} H_k^h = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{\infty} H_k^h = P$. Zvolme nyní $k \leqq r$ tak, aby $x \in H_k^r$; pak $x \in U_k^r$, neboť jinak by pro vhodné $j \leqq$ $\leqq r - 2$ bylo $x \in \overline{H}_j^{r-2}$, tedy $x \in H_j^{r-1} \subset \bigcup_{i=1}^{r-1} H_i^{r-1}$, což podle volby r není možné. Tedy $\{U_k^h; h, k = 1, 2, \ldots, h \geqq k\}$ je skutečně spočetné otevřené pokrytí P.

Snadno se zjistí, že $U_j^m \cap U_k^n = \emptyset$, je-li $m \leqq n + 2$. Z toho ihned plyne, že každý člen souboru $\{U_k^h; h, k = 1, 2, \ldots, h \geqq k\}$ protíná pouze konečný počet členů tohoto souboru; tím spíše pak je tento soubor lokálně konečný.

Poznámka. 1. Není známo, zda věta **2.8** platí bez předpokladu existence F_σ-množin $X_k \subset G_k$ s $\bigcup X_k = P$. 2. Je zřejmé, že tento předpoklad je vždy splněn např., je-li P dokonale normální.

2.9. Nechť $\mathfrak{G}_0 = \{G_\alpha; \alpha \in A\}$, $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ jsou otevřená pokrytí prostoru P; nechť $\mathfrak{G}_{k+1}$ je hvězdovitě jemnější než

*) Soubor s touto vlastností nazýváme *hvězdovitě konečným* nebo *kombinatoricky konečným*.

$\mathfrak{G}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Potom existují soubory $\{U_\mu\}$, $\{F_\mu\}$ takové, že $\{U_\mu\}$ je lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí prostoru P, $\{U_\mu\}$ je jemnější než $\mathfrak{G}_0$, množiny F_μ jsou uzavřené, $F_\mu \subset U_\mu$, $\bigcup F_\mu = P$, ke každému μ existuje k takové, že žádný člen souboru $\mathfrak{G}_k$ neprotíná zároveň F_μ i $P - U_\mu$.*)

Důkaz. I. Pro $\alpha \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ označme $H(\alpha, n)$ množinu $x \in P$ takových, že pro vhodné V ze souboru $\mathfrak{G}_n$ platí: (1) $x \in V$; (2) když W je člen souboru $\mathfrak{G}_n$, $V \cap W \neq \emptyset$, pak $W \subset G_\alpha$. Je zřejmé, že $H(\alpha, n)$ jsou otevřené. Dokážeme, že $\bigcup_\alpha H(\alpha, 2) = P$. Nechť $x \in P$; zvolme V ze souboru $\mathfrak{G}_2$ tak, aby $x \in V$. Ježto $\mathfrak{G}_1$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{G}_0$, existuje α takové, že platí: je-li U člen souboru $\mathfrak{G}_1$, $x \in U$, pak $U \subset G_\alpha$. Nechť nyní W je člen souboru $\mathfrak{G}_2$, $V \cap W \neq \emptyset$; ježto $\mathfrak{G}_2$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{G}_1$, existuje množina U ze souboru $\mathfrak{G}_1$ taková, že $V \cup W \subset U$; máme pak $x \in U$, tedy $U \subset G_\alpha$, tedy $W \subset G_\alpha$. Z toho plyne, že $x \in H(\alpha, 2)$. Tedy skutečně $\bigcup_\alpha H(\alpha, 2) = P$.

Dokážeme, že platí

(*) když W je člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m > n$, $W \cap H(\alpha, n) \neq \emptyset$, pak $W \subset H(\alpha, n + 1)$.

Skutečně, nechť W má uvedené vlastnosti; pak existuje W' ze souboru $\mathfrak{G}_{n+1}$ tak, že $W \subset W'$. Je-li W_1 další člen souboru $\mathfrak{G}_{n+1}$, $W_1 \cap W' \neq \emptyset$, pak existuje (neboť $\mathfrak{G}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{G}_n$) množina W^* z $\mathfrak{G}_n$ taková, že $W_1 \cup W' \subset W^*$. Z toho, že $W^* \cap H(\alpha, n) \neq \emptyset$, plyne nyní ihned, že $W^* \subset G_\alpha$, a tím spíše $W_1 \subset G_\alpha$. Platí tedy: je-li W_1 z $\mathfrak{G}_{n+1}$, $W_1 \cap W' \neq \emptyset$, pak $W_1 \subset G_\alpha$. Z toho vyplývá, že $W' \subset H(\alpha, n + 1)$ a tím spíše $W \subset H(\alpha, n + 1)$.

Z tvrzení (*) plyne dále ihned

$$(**) \qquad \overline{\bigcup_{\alpha \in B} H(\alpha, n)} \subset \bigcup_{\alpha \in B} H(\alpha, n + 1)$$

pro libovolné $B \subset A$ a $n = 1, 2, \ldots$

II. Zvolme určité dobré uspořádání množiny A; je-li v tomto uspořádání $\alpha \in A$ před $\beta \in A$, pišme $\alpha < \beta$. Označme M množinu všech (α, n), $\alpha \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ Pro $\mu = (\alpha, n) \in M$ položme $V_\mu = V(\alpha, n) = H(\alpha, n) - \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} H(\beta, n + 1)}$, $V'_\mu = V'(\alpha, n) = H(\alpha, n - 1) -$

*) Viz A. H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bulletin of the American Mathematical Society, 1948, *54*, 977—982.

$-\overline{\bigcup_{\beta<\alpha}H(\beta, n+2)}$, $V''_\mu = V''(\alpha, n) = H(\alpha, n-2) - \overline{\bigcup_{\beta<\alpha}H(\beta, n+3)}$; klademe zde ovšem $H(\alpha, 0) = H(\alpha, -1) = \emptyset$. Z (**) plyne ihned, že je vždy $\overline{V''_\mu} \subset V'_\mu \subset \overline{V'_\mu} \subset V_\mu$; je zřejmé, že V_μ, V'_μ, V''_μ jsou otevřené. Když $x \in P$, zvolme nejmenší α_0 s $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H(\alpha_0, n)$ (to je možné, neboť $\bigcup_\alpha H(\alpha, 2) = P$, a tedy tím spíše každé x leží v některé množině $\bigcup_{n=1}^{\infty} H(\alpha, n)$) a pak zvolme nejmenší n_0, pro něž $x \in H(\alpha_0, n_0)$; snadno se zjistí, že $x \in V''(\alpha_0, n_0 + 2)$. Platí tedy $\bigcup_\mu V''_\mu = P$ a tím spíše $\bigcup_\mu V'_\mu = \bigcup_\mu V_\mu = P$.

Nechť je W člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m > n$. Když $W \cap V(\alpha, n) \neq \emptyset$, pak podle (*) je $W \subset H(\alpha, n+1)$, takže $W \cap V(\gamma, n) = \emptyset$ pro $\gamma > \alpha$. Platí tedy: je-li $m > n$, pak každý člen souboru $\mathfrak{G}_m$ protíná $V(\alpha, n)$ nejvýše pro jedno α. Každý soubor $\{V(\alpha, n); \alpha \in A\}$ je tedy lokálně konečný diskrétní. Nechť je W člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 2$. Když $W \cap V'(\alpha, n) \neq \emptyset$, pak $W \cap H(\alpha, n-1) \neq \emptyset$, podle (*) je tedy $W \subset H(\alpha, n)$; kdyby $W \cap \overline{\bigcup_{\beta<\alpha}H(\beta, n+1)} \neq \emptyset$, pak by pro jisté $\beta < \alpha$ bylo $W \cap H(\beta, n+1) \neq \emptyset$, tedy podle (*) $W \subset H(\beta, n+2)$, tudíž $W \cap V'(\alpha, n) = \emptyset$, což je spor; platí tedy $W \subset V(\alpha, n)$. To znamená, že platí: žádný člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 2$, neprotíná zároveň $V'(\alpha, n)$ a $P - V(\alpha, n)$; analogicky se dokáže, že žádný člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 3$, neprotíná zároveň $V''(\alpha, n)$ a $P - V'(\alpha, n)$.

III. Pro $n = 1, 2, \ldots$ položme $V'_n = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_\alpha V'(\alpha, k)$, $V''_n = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_\alpha V''(\alpha, k)$. Zřejmě $\bigcup_{n=1}^{\infty} V'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} V''_n = P$. Snadno se zjistí (na základě tvrzení na konci předcházející části důkazu), že žádný člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 3$, neprotíná zároveň V''_n a $P - V'_n$. Pro $\mu = (\alpha, n) \in M$ položme nyní $U_\mu = U(\alpha, n) = V(\alpha, n) - \overline{V''_{n-1}}$, $F_\mu = F(\alpha, n) = \overline{V''(\alpha, n)} - V'_{n-1}$. Potom U_μ jsou otevřené, F_μ jsou uzavřené, $F_\mu \subset U_\mu$. Když $x \in P$, zvolme nejmenší n takové, že $x \in \dot{\bigcup}_\alpha V''(\alpha, n)$; potom $x \operatorname{non} \in V'_{n-1}$, takže $x \in \bigcup_\alpha F(\alpha, n)$. Tedy $\bigcup_\mu F_\mu = P$. Nechť je W člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 3$, předpokládejme, že pro některé α platí $W - U(\alpha, n) \neq \emptyset$, $W \cap F(\alpha, n) \neq \emptyset$, a odvoďme spor. Z $W \cap F(\alpha, n) \neq \emptyset$ vyplývá $W \cap \overline{V''(\alpha, n)} \neq \emptyset$, tudíž $W \cap V'(\alpha, n) \neq \emptyset$, takže (viz konec části II důkazu) množiny W a $P - V(\alpha, n)$ jsou disjunktní. Z toho nyní plyne

$W \subset V(\alpha, n)$; vzhledem k $U(\alpha, n) = V(\alpha, n) - \overline{V''_{n-1}}$, $W - U(\alpha, n) \neq \emptyset$, platí tudíž $W \cap \overline{V''_{n-1}} \neq \emptyset$, tedy také $W \cap V''_{n-1} \neq \emptyset$. Avšak, jak již bylo uvedeno, žádný člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 3$, neprotíná zároveň V''_n a $P - V'_n$, a to platí ovšem také s $n - 1$ místo n. Máme tedy $W \subset V'_{n-1}$. To však je spor s předpokladem $W \cap F(\alpha, n) \neq \emptyset$, neboť V'_{n-1} a $F(\alpha, n)$ jsou disjunktní. Dokázali jsme tedy, že žádný člen souboru $\mathfrak{G}_m$, $m \geqq n + 3$, neprotíná pro $\mu = (\alpha, n)$ zároveň F_μ i $P - U_\mu$.

Zbývá dokázat, že $\{U_\mu\}$ je lokálně konečný. Buď $x \in P$. Zvolme p tak, aby $x \in V''_p$. Zřejmě $U(\alpha, n) \cap V''_p = \emptyset$ pro $n > p$. Ježto soubory $\{V(\alpha, n); \alpha \in A\}$ jsou, jak jsme dokázali v II, lokálně konečné a $U(\alpha, n) \subset V(\alpha, n)$, je soubor $\{U(\alpha, n); \alpha \in A, n \leqq p\}$ zřejmě lokálně konečný. Z toho plyne nyní ihned, že vhodné okolí bodu x protíná U_μ pouze pro konečně mnoho μ.

2.10. Nechť P je metrisovatelný prostor; nechť $\{G_\alpha\}$ je jeho otevřené pokrytí. Potom existuje otevřené pokrytí $\{U_\beta\}$, které je hvězdovitě jemnější než $\{G_\alpha\}$.

Důkaz. Zvolme určitou vytvářející metriku ϱ prostoru P. Je-li $x \in P$, $\varepsilon > 0$, nechť $S(x, \varepsilon)$ značí (ϱ, ε)-okolí bodu x, tj. množinu těch $y \in P$, pro něž $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Pro každé $x \in P$ zvolme nyní kladné $\varepsilon_x < 1$ tak, aby $S(x, \varepsilon_x) \subset G_\alpha$ pro vhodné α a položme $U_x = S(x, \delta_x)$, kde $\delta_x = \frac{1}{4}\varepsilon_x$. Zřejmě $\{U_x; x \in P\}$ je otevřené pokrytí P. Nechť $x \in P$. Označme Y množinu $y \in P$ takových, že $x \in U_y$; buď ε' supremum čísel ε_y, $y \in Y$. Zvolme $y_0 \in Y$ tak, aby $\varepsilon_{y_0} > \frac{2}{3}\varepsilon'$. Nechť nyní $y \in Y$, $z \in U_y$. Potom $x \in U_{y_0}$, $x \in U_y$, $z \in U_y$, tedy $\varrho(y_0, x) < \delta_{y_0}$, $\varrho(y, x) < \delta_y$, $\varrho(y, z) < < \delta_y$, $\varrho(y_0, z) < \delta_{y_0} + 2\delta_y$. Máme $\varepsilon_y \leqq \varepsilon' < \frac{3}{2}\varepsilon_{y_0}$, tedy $\delta_y < \frac{3}{2}\delta_{y_0}$, takže $\varrho(y_0, z) < 4\delta_{y_0} = \varepsilon_{y_0}$. Platí proto $z \in U_y$, $y \in Y \Rightarrow z \in S(y_0, \varepsilon_{y_0})$. Podle předpokladu existuje α tak, že $S(y_0, \varepsilon_{y_0}) \subset G_\alpha$. Z toho vyplývá $x \in U_y \Rightarrow \Rightarrow U_y \subset G_\alpha$; tedy $\{U_x\}$ hvězdovitě zjemňuje $\{G_\alpha\}$.

Cvičení k § 2

2.1. Nechť $\{G_\alpha\}$ je bodově konečné otevřené pokrytí normálního prostoru P. Potom existují dokonale otevřené U_α takové, že $\overline{U}_\alpha \subset G_\alpha$, $\bigcup U_\alpha = P$.

2.2. Nechť $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ je soubor množin. K tomu, aby $\{X_\alpha\}$ byl hvězdovitě jemnější než $\{X_\alpha\}$, je nutné a stačí, aby existovala množina $A' \subset A$ taková, že soubor $\{X_\alpha; \alpha \in A'\}$ je disjunktní, $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ zjemňuje $\{X_\alpha; \alpha \in A'\}$.

2.3. Zakrytí $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ prostoru P nazveme *ireducibilním*, jestliže pro $B \subset A$, $B \neq A$ máme vždy $\bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha \neq P$. Dokažte: je-li $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ bodově konečné zakrytí prostoru P, pak existuje $A' \subset A$ tak, že $\{X_\alpha; \alpha \in A'\}$ je ireducibilní zakrytí P.*)

2.4. Aby prostor P byl spočetně kompaktní, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek: (1) každé ireducibilní otevřené pokrytí P je konečné, (2) každé ireducibilní nejvýš spočetně otevřené pokrytí P je konečné.

2.5. Nazveme prostor P *σ-diskrétním*, jestliže soubor $\{(x); x \in P\}$ je σ-diskrétní. Dokažte: v σ-diskrétním prostoru každá množina je zároveň F_σ-množinou a G_δ-množinou.

2.6. Každý metrisovatelný prostor obsahuje hustý σ-diskrétní podprostor.

2.7. Dokažte: ve větě **2.6** lze volit pokrytí $\{U_\mu\}$ tak, aby bylo konečné, je-li soubor $\{G_\alpha\}$ konečný, a mělo stejnou mohutnost jako $\{G_\alpha\}$, je-li tento soubor nekonečný.

2.8. Nechť $\{G_k\}$ je bodově konečné nejvýš spočetné pokrytí normálního prostoru P. Potom existují otevřené $U_k \subset G_k$ takové, že $\{U_k\}$ je lokálně konečný, $\bigcup U_k = P$.

2.9. Z vět **2.9** a **2.10** plyne okamžitě: ke každému otevřenému pokrytí metrisovatelného prostoru P existuje jemnější lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí. Dokažte toto tvrzení přímo. [Nechť P má metriku ϱ; nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je jeho otevřené pokrytí; předpokládáme, že A je dobře uspořádána. Nechť $B_{k,\alpha}$, kde $k = 1, 2, \ldots, \alpha \in A$, značí množinu $x \in P$ takových, že $\varrho(x, P - G_\alpha) \leqq k^{-1}$, x non $\in G_\beta$ pro $\beta \in A$, $\beta < \alpha$; položme $B_k = \bigcup_\alpha B_{k,\alpha}$. Nechť $H_{k,\alpha}$ značí množinu $x \in P$ takových, že $\varrho(x, B_{k,\alpha}) < \dfrac{1}{3k}$, $\varrho(x, B_j) > \dfrac{1}{4j}$ pro $j = 1, \ldots, k - 1$. Zjistí se, že $\{H_{k,\alpha}\}$ je pokrytí s potřebnými vlastnostmi.]

2.10. Nechť P je metrisovatelný prostor, $\{G_\alpha\}$ je jeho lokálně konečné otevřené pokrytí. Potom existuje vytvořující metrika ϱ prostoru P taková, že $(\varrho, 1)$-okolí (viz **T** def. **9.1.2**) každého $x \in P$ je obsaženo v některé G_α. [Nechť $F_\alpha \subset G_\alpha$ jsou uzavřené, $\bigcup F_\alpha = P$; nechť f_α jsou spojitá zobrazení P do $\langle 0, 1\rangle$, $f_\alpha(x) = 1$ pro $x \in F_\alpha$, $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - G_\alpha$. Položme $\varrho(x, y) = \sum_\alpha |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| + \sigma(x, y)$, kde σ je libovolná vytvořující metrika prostoru P.]

*) Termínu „ireducibilní“ se pro pokrytí v literatuře často používá v podstatně odlišném smyslu. Říká se totiž např., že otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ prostoru P je ireducibilní, je-li splněna tato podmínka: když $H_\alpha \subset G_\alpha$ jsou otevřené, $\bigcup H_\alpha = P$, pak pro libovolnou konečnou neprázdnou $\mu \subset A$ platí: protínají-li se G_α, $\alpha \in \mu$, pak se protínají též H_α, $\alpha \in \mu$.

2.11. Věta z 2.10 zůstává správnou, vynecháme-li předpoklad, že $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečné. [Použijte 2.9.]

2.12. Tvrzení věty 2.6 lze zesílit (lze klást $H_\alpha = G_\alpha$), položíme-li na P silnější požadavky. Dokažte: je-li $\{G_\alpha\}$ lokálně konečné otevřené pokrytí metrisovatelného prostoru P, pak existuje lokálně konečné σ-diskrétní otevřené pokrytí $\{U_\mu\}$, které je jemnější než $\{G_\alpha\}$ a má tu vlastnost, že každé U_μ protíná pouze konečně mnoho množin G_α. [Použijte 2.9.]

2.13. Nechť P je metrisovatelný prostor. Nechť $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný (v P) soubor částí P. Potom existuje vytvořující metrika ϱ prostoru P a číslo $\varepsilon > 0$ takové, že označíme-li G_α množinu všech $x \in P$, pro něž $\varrho(x, X_\alpha) < \varepsilon$, soubor $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečný. [Pro $x \in P$ buď U_x otevřené okolí, které protíná konečně mnoho X_α. Sestrojme k $\{U_x\}$ metriku ϱ podle 2.11 a položme $\varepsilon = \frac{1}{3}$.]