1. LOKÁLNĚ KONEČNÉ SOUBORY

Pro účely tohoto dodatku bude výhodné zavést vedle pojmu soustavy množin (viz **T 1.1**) též pojem souboru množin, s nimž se někdy lépe pracuje.

1.1. Nechť A, X jsou libovolné množiny. Zobrazení φ množiny A do množiny X budeme někdy nazývat *souborem* (podrobněji: souborem prvků množiny X); množinu A nazýváme pak *množinou indexů* daného souboru, prvky z A nazýváme *indexy* souboru. Je patrné, že posloupnosti (viz **T 2.1**) jsou právě ty soubory (v právě zavedeném smyslu), u nichž množinou indexů je množina přirozených čísel. Obdobně jako u posloupností značíme obyčejně hodnotu souboru pro index α znakem x_α a podobně, celý soubor pak např. znakem $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ nebo stručněji $\{x_\alpha\}$; prvky x_α nazýváme *členy* souboru.

Četné definice (a také věty), které se budou vyskytovat v dalších úvahách, lze vyslovit zcela obdobným způsobem pro soubory (zpravidla soubory podmnožin jistého prostoru) i pro množiny zpravidla pro množiny podmnožin jistého prostoru). Abychom nemuseli uvádět vždy dvojí definici, vyslovíme nyní tato pravidla:

Pravidlo A. Je-li vlastnost V definována pro jistou třídu souborů, pak říkáme, že množina X má vlastnost V, jestliže soubor $\{x; x \in X\}$, tj. soubor, který každému $x \in X$ přiřazuje zase x, má vlastnost V.

Pravidlo B. Je-li vlastnost V definována pro jistou třídu množin, pak říkáme, že soubor $\{x_\lambda\}$ má vlastnost V, jestliže množina všech jeho členů má vlastnost V.

U některých definicí upozorníme výslovně na použití pravidla A; popř. B; jinde však přenecháváme čtenáři, aby uvážil, kde se těchto pravidel má použít.

1.2. Definice. Soubor množin $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ je *disjunktní*, jestliže $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow M_{\alpha_1} \cap M_{\alpha_2} = \emptyset$; *bodově konečný*, jestliže pro libovolné x je $x \in M_\alpha$ pouze pro konečně mnoho indexů α; *σ-disjunktní*, jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}$ taková, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ a každý soubor $\{M_\alpha;\ \alpha \in A_n\}$ je disjunktní; *σ-bodově konečný*, jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}$ taková, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ a každý soubor $\{M_\alpha;\ \alpha \in A_n\}$ je bodově konečný. Pro soustavy množin definujeme zmíněné vlastnosti podle pravidla **1.1** A (pro vlastnost „disjunktní" je to ve shodě s obvyklou definicí).

Poznámka. Má-li soubor $\{M_\alpha\}$ tu vlastnost, že pro libovolné x je $x \in M_\alpha$ pro nejvýš spočetně mnoho indexů α, nemusí ještě být σ-bodově konečný; viz **10.1**.

1.3. Definice. Nechť P je topologický prostor. Soubor $\{M_\alpha;\ \alpha \in A\}$ jeho podmnožin je *lokálně konečný v P*, jestliže každý bod $x \in P$ má okolí U takové, že $U \cap M_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho indexů α, *σ-lokálně konečný v P*, jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}$ taková, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ a každý soubor $\{M_\alpha;\ \alpha \in A_n\}$ je lokálně konečný v P. Pro soustavy množin definujeme zmíněné vlastnosti podle pravidla **1.1** A.

Poznámka. Soubor $\{M_\alpha\}$ částí prostoru P takový, že každý $x \in P$ má okolí, které protíná M_α pro nejvýš spočetně mnoho α, nemusí ještě být σ-lokálně konečný; viz **10.1**.

1.4. Nechť soubor $\{M_\alpha;\ \alpha \in A\}$ částí prostoru P je lokálně konečný v P. Jestliže $B \subset A$ a pro $\alpha \in B$ je $L_\alpha \subset M_\alpha$, pak $\{L_\alpha;\ \alpha \in B\}$ je lokálně konečný v P.

1.5. Nechť soubor $\{M_\alpha;\ \alpha \in A\}$ je lokálně konečný v prostoru P. Nechť $\{A_\lambda\}$ je bodově konečný soubor částí množiny indexů A. Pro každý index λ položme $S_\lambda = \bigcup_{\alpha \in A_\lambda} M_\alpha$. Potom soubor $\{S_\lambda\}$ je lokálně konečný v P.*)

Důkaz. Buď $x \in P$. Existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap M_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho indexů α; tyto indexy označme $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pro $i = 1, \ldots, n$ buď C_i množina těch indexů λ, pro něž $\alpha_i \in A_\lambda$. Podle

*) Podotýkáme, že je-li $\{X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor množin a je-li $A = \emptyset$, pak (ve shodě s poznámkou na konci **T 1.4**) rozumíme výrazem $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ vždy množinu $\emptyset$.

předpokladu jsou C_i konečné, tedy též $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ je konečná. Snadno se zjistí, že platí $U \cap S_\lambda = \emptyset$, kdykoli index λ neleží v C. To znamená, že $\{S_\lambda\}$ je lokálně konečný.

1.6. Nechť $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ je soubor částí prostoru P. Nechť $\{A_\beta; \beta \in B\}$ je soubor částí množiny indexů A, $\bigcup_{\beta \in B} A_\beta = A$. Pro $\beta \in B$ položme $S_\beta = \bigcup_{\alpha \in A_\beta} M_\alpha$. Jestliže soubor $\{S_\beta; \beta \in B\}$ a všechny soubory $\{M_\alpha; \alpha \in A_\beta\}$, $\beta \in B$, jsou lokálně konečné v P, pak též $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ je lokálně konečný v P.

Důkaz. Buď $x \in P$. Existuje okolí U_0 bodu x takové, že množina C těch $\beta \in B$, pro něž $U_0 \cap S_\beta \neq \emptyset$, je konečná. Nechť C se skládá z prvků $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Ježto každý soubor $\{M_\alpha; \alpha \in A_{\beta_i}\}$ je lokálně konečný, existují okolí U_i, $i = 1, \ldots, n$, bodu x a konečné množiny D_i, $i = 1, \ldots, n$, takové, že $U_i \cap M_\alpha = \emptyset$ pro $\alpha \in A_{\beta_i} - D_i$. Položme $U = \bigcap_{i=0}^{n} U_i$, $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Zřejmě pak $U \cap M_\alpha = \emptyset$ pro $\alpha \in A$, α non $\in D$.

1.7. Nechť soubory $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{Y_\beta; \beta \in B\}$ jsou lokálně konečné (σ-lokálně konečné) v prostoru P. Potom též soubor $\{X_\alpha \cap Y_\beta; (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ je lokálně konečný (σ-lokálně kokonečný) v P.

1.8. Nechť P je prostor, $S \subset P$, $\{X_\alpha\}$ je soubor částí S. Je-li $\{X_\alpha\}$ lokálně konečný v P, pak je lokálně konečný též v S; je-li lokálně konečný v $\overline{S}$, pak je lokálně konečný též v P.

1.9. Nechť f je spojité zobrazení prostoru P do prostoru Q; nechť $\{X_\alpha\}$ je soubor částí P. Je-li soubor $\{f^1(X_\alpha)\}$ lokálně konečný v $f^1(P)$, pak je též $\{X_\alpha\}$ lokálně konečný.

1.10. Nechť $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor částí F-prostoru P. Potom též soubor $\{\overline{X}_\alpha\}$ je lokálně konečný.

1.11. Věty **1.4**, **1.6**, **1.7**, **1.8**, **1.9**, **1.10** jsou též správné, nahradíme-li všude slova „lokálně konečný" slovy „σ-lokálně konečný".

Dokážeme toto tvrzení pouze pro větu **1.6.** Nechť tedy soubor

$\{S_\beta; \beta \in B\}$ a všechny soubory $\{M_\alpha; \alpha \in A_\beta\}$ jsou σ-lokálně konečné (používáme označení z **1.6**). Pak existují B_n a $A_{\beta,n}$ tak, že $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $A_\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\beta,n}$, soubory $\{S_\beta; \beta \in B_m\}$, $\{M_\alpha; \alpha \in A_{\beta,n}\}$ jsou lokálně konečné. Buď $C_{m,n} = \bigcup_{\beta \in B_m} A_{\beta,n}$; buď $Q_{\beta,n}$ sjednocení M_α pro $\alpha \in A_{\beta,n}$. Každý soubor $\{Q_{\beta,n}; \beta \in B_m\}$ je lokálně konečný podle **1.4**, neboť $Q_{\beta,n} \subset S_\beta$. Z toho vyplývá podle **1.6**, že každý soubor $\{M_\alpha; \alpha \in C_{m,n}\}$ je lokálně konečný. Ježto zřejmě $\bigcup_{m,n} C_{m,n} = A$, je tedy $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ σ-lokálně konečný.

1.12. Nechť soubor $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný v P. Potom $\overline{\bigcup_\alpha X_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{X}_\alpha$.

Důkaz. Nechť $x \in \overline{\bigcup_\alpha X_\alpha}$. Ježto $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný, existuje okolí U bodu x a indexy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tak, že $U \cap X_\alpha = \emptyset$, jestliže index α je různý od všech α_i, $i = 1, \ldots, n$. Máme tedy $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}}$, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{X}_{\alpha_i}$. Tedy $\overline{\bigcup_\alpha X_\alpha} \subset \bigcup_\alpha \overline{X}_\alpha$. Obrácená inkluse je zřejmá.

1.13. Nechť soubor uzavřených množin $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný v P. Potom též $\bigcup_\alpha X_\alpha$ je uzavřená. — Plyne okamžitě z **1.12.**

1.14. Nechť $\mathfrak{M}$ je soustava částí prostoru P a nechť platí: jestliže $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor částí prostoru P a $X_\alpha \in \mathfrak{M}$ pro každé α, potom $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}$. Označme $\mathfrak{M}_\sigma$ soustavu všech $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_n \in \mathfrak{M}$. Potom platí: jestliže soubor $\{X_\alpha\}$ je σ-lokálně konečný v P, $X_\alpha \in \mathfrak{M}_\sigma$ pro každé α, pak též $\bigcup X_\alpha \in \mathfrak{M}_\sigma$.

1.15. Je-li $\{X_\alpha\}$ σ-lokálně konečný soubor F_σ-množin prostoru P, pak též $\bigcup_\alpha X_\alpha$ je F_σ-množina v P.

1.16. Nechť $\mathfrak{M}$ je soustava částí prostoru P taková, že (1) $M_1 \in \mathfrak{M}$, $M_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{M}$, (2) je-li soubor $\{M_\alpha\}$ lokálně konečný v P, $M_\alpha \in \mathfrak{M}$, pak $\bigcup_\alpha M_\alpha \in \mathfrak{M}$. Buď $\mathfrak{M}_\delta$ soustava všech $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_n \in \mathfrak{M}$. Nechť $\{X_\alpha\}$, $\{Y_\alpha\}$ jsou soubory částí P, $\{Y_\alpha\}$ je lokálně konečný, $X_\alpha \subset Y_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{M}$, $X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$. Potom $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$.

Důkaz. Nechť $X_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{\alpha,n}$, $X_{\alpha,n} \in \mathfrak{M}$. Položme $X^*_{\alpha,n} = \bigcap_{k=1}^{n} X_{\alpha,k} \cap Y_\alpha$. Potom $X^*_{\alpha,n} \in \mathfrak{M}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X^*_{\alpha,n} = X_\alpha$, soubor $\{X^*_{\alpha,n}\}$ je lokálně konečný pro každé $n = 1, 2, \ldots$ Buď $X^*_n = \bigcup_\alpha X^*_{n,\alpha}$. Pak zřejmě $X^*_n \in \mathfrak{M}$, $\bigcup_\alpha X_\alpha \subset \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} X^*_n$. Dokážeme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} X^*_n \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$. Buď $x \in P$, x non $\in \bigcup_\alpha X_\alpha$. Ježto $\{X^*_{\alpha,1}\}$ je lokálně konečný, existuje okolí V bodu x tak, že $V \cap X^*_{\alpha,1} = \emptyset$ pro všechny indexy α s výjimkou $\alpha = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, p$. Ježto (pro libovolné α) x non $\in X_\alpha$ a $X_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^*_{\alpha,n}$, existují (pro $i = 1, \ldots, p$) indexy n_i tak, že x non $\in X^*_{\alpha_i,n_i}$. Buď $n = \max_{i=1,\ldots,p} n_i$. Pak x non $\in \bigcup_\alpha X^*_{\alpha,n} = X^*_n$ a tím spíše x non $\in \bigcap_{n=1}^{\infty} X^*_n$. Tedy $\bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^*_n$, $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$.

1.17. Nechť $\mathfrak{M}$ je soustava částí F-prostoru P taková, že (1) $M_1 \in \mathfrak{M}$, $M_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{M}$, (2) je-li soubor $\{M_\alpha\}$ lokálně konečný v P, $M_\alpha \in \mathfrak{M}$, pak $\bigcup_\alpha M_\alpha \in \mathfrak{M}$, (3) je-li $F \subset P$ uzavřená, pak $F \in \mathfrak{M}$. Buď $\mathfrak{M}_\delta$ soustava všech $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_n \in \mathfrak{M}$. Nechť $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor částí P, $X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$. Potom $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$.*)

Důkaz. Použijeme věty **1.16**, kde položíme $Y_\alpha = \overline{X}_\alpha$.

1.18. Sjednocení lokálně konečného souboru řídkých množin v F-prostoru je řídká množina.

Důkaz. Nechť X_α jsou řídké, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný; buď $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$. Abychom ukázali, že X je řídké, máme pro libovolný bod $x \in P$ a jeho libovolné okolí U dokázat: existuje bod $y \in U$ a jeho okolí V tak, že $V \cap X = \emptyset$. Ježto $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný, existuje okolí U_0 bodu x tak, že $U_0 \cap X_\alpha = \emptyset$ pro všechna α s výjimkou $\alpha = \alpha_i$, $i =$

*) Z vět **1.14** a **1.17** vyplývá ihned, že sjednocení lokálně konečného souboru množin, náležejících do určité borelovské třídy F_σ, $F_{\sigma\delta}$ atd. (tj. do některé z tříd, které dostáváme na základě uzavřených množin, když provedeme konečně mnoho kroků, z nichž každý střídavě spočívá v tvoření sjednocení nebo průniků spočetně mnoha množin) náleží opět do této třídy. Snadno se dokáže, že obdobné tvrzení platí pro libovolné borelovské třídy. Borelovskými třídami se zde nezabýváme a proto neuvádíme ani jejich definici; viz o nich např. knihu K. Kuratowského, Topologie I.

$= 1, \ldots, p$. Ježto $X_{\alpha 1}$ je řídké, existuje $x_1 \in U_0 \cap U$ a okolí U_1 bodu x_1 tak, že $U_1 \subset U_0 \cap U$, $U_1 \cap X_{\alpha_1} = \emptyset$. Ježto X_{α_2} je řídké, existuje $x_2 \in U_1$ a jeho okolí U_2 tak, že $U_2 \subset U_1$, $U_2 \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$; vzhledem k $U_2 \subset U_1$ je také $U_2 \cap X_{\alpha_1} = \emptyset$. Po konečném počtu kroků dospějeme tak k bodu $y = x_p \in U$ a jeho okolí $V = U_p$ takovému, že $V \cap X_{\alpha_i} = \emptyset$ $(i = 1, \ldots, p)$; $V \subset U_0 \cap U$, a tedy $V \cap X_\alpha = \emptyset$ pro $\alpha \neq \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, takže $V \cap X = \emptyset$.

1.19. Sjednocení σ-lokálně konečného souboru množin 1. kategorie v F-prostoru P je 1. kategorie v P. — Viz **1.18**, **1.14**.

1.20. Nechť $\{\xi_\alpha; \alpha \in A\}$ je soubor reálných čísel. Existuje-li prostá posloupnost (konečná nebo nekonečná) $\{\alpha(n)\}$ taková, že

(*) $\alpha(n) \in A$; když $\alpha \in A$ je různé od všech $\alpha(n)$, pak $\xi_\alpha = 0$; je-li $\{\alpha(n)\}$ nekonečná, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{\alpha(n)}$ je absolutně konvergentní,

pak číslo $\sigma = \sum_n \xi_{\alpha(n)}$ zřejmě nezávisí (jak plyne z elementárních vět o číselných řadách) na konkrétní volbě prosté posloupnosti $\{\alpha(n)\}$ s vlastnostmi (*). Toto číslo σ nazveme pak *součtem souboru* $\{\xi_\alpha\}$ a označíme je $\Sigma_\alpha \xi_\alpha$ nebo podrobněji $\sum_{\alpha \in A} \xi_\alpha$. Tuto definici doplníme ještě tak, že pro $A = \emptyset$ klademe $\sum_{\alpha \in A} \xi_\alpha = 0$.

Je zřejmé, že nekonečná posloupnost čísel $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ má součet v právě zavedeném smyslu právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ je absolutně konvergentní.

Nechť $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$ je soubor funkcí na množině M. Má-li soubor $\{f_\alpha(x); \alpha \in A\}$ součet pro každé $x \in M$, nazýváme funkci, která každému $x \in M$ přiřazuje číslo $\Sigma_\alpha f_\alpha(x)$, *součtem souboru funkcí* $\{f_\alpha\}$ a značíme ji $\Sigma_\alpha f_\alpha$ nebo podrobněji $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha$.

1.21. Soubor $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$ funkcí na topologickém prostoru P nazveme *lokálně konečným*, je-li soubor $\{\mathscr{E}_x\,[x \in P, f_\alpha(x) \neq 0]; \alpha \in A\}$ lokálně konečný.

Je zřejmé, že každý lokálně konečný soubor funkcí má součet.

1.22. Součet lokálně konečného souboru spojitých funkcí je spojitá funkce.

Důkaz. Nechť f_α jsou spojité funkce v prostoru P; nechť soubor $\{f_\alpha\}$ je lokálně konečný. Buď $f = \Sigma_\alpha f_\alpha$. Nechť $x \in P$. Existuje okolí U bodu x tak, že $y \in U \Rightarrow f_\alpha(y) = 0$ pro všechna α s výjimkou $\alpha = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Buď $\varepsilon > 0$; zvolme okolí V bodu x tak, aby $y \in V \Rightarrow$ $\Rightarrow |f_{\alpha_i}(y) - f_{\alpha_i}(x)| < \frac{\varepsilon}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Pak zřejmě $y \in U \cap V \Rightarrow |f(y) - - f(x)| < \varepsilon$.

Cvičení k § 1

1.1. Hranice sjednocení lokálně konečného souboru množin je částí sjednocení hranice jednotlivých množin souboru.

1.2. Nechť P je prostor, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor jeho částí. Jestliže X_α jsou řídce rozložené množiny, pak též $\bigcup X_\alpha$ je řídce rozložená.

1.3. Nechť P je FH-prostor. Nechť $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor uzavřených částí P, $\bigcup X_\alpha = P$. Jestliže X_α jsou normální, pak též P je normální. [Dokažte: jsou-li U, V otevřené, $U \cup V = P$, pak existuje uzavřené K, L takové, že $K \subset U$, $L \subset V$, $K \cup L = P$.]

1.4. Nechť P je prostor. Množinu $X \subset P$ nazveme *Baireovou* (v P), jestliže existuje otevřená $G \subset P$ taková, že $X - G$ a $G - X$ jsou 1. kategorie v P. Pro F-prostor P dokažte: (a) sjednocení, průnik a rozdíl dvou Baireových množin v P je Baireova množina; (b) jestliže $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor částí P a X_α jsou Baireovy množiny, pak též $\bigcup X_\alpha$ je Baireova množina.

1.5. Funkci f v prostoru P nazýváme *Baireovou*, jestliže existuje množina $A \subset P$, která je 1. kategorie v P a taková, že parciální funkce $f|P - A$ je spojitá. Dokažte: je-li $\{f_\alpha\}$ lokálně konečný soubor funkcí na F-prostoru P a jsou-li všechny funkce f_α Baireovy, pak též funkce $f = \Sigma_\alpha f_\alpha$ je Baireova.