§ 12. NĚKTERÉ NOVĚJŠÍ VÝSLEDKY

12.1. FH-UZAVŘENÉ PROSTORY

Definice **12.1.1.** *H-uzavřený prostor* je H-prostor P, který má tuto vlastnost: Je-li $T \supset P$ H-prostor, pak množina P je uzavřená v T.

12.1.1. Budiž P H-prostor. Aby P byl H-uzavřený, k tomu je nutné a stačí, aby P byl kompaktní.

Důkaz. I. Je-li P kompaktní, je P H-uzavřený podle **8.3.13.**

II. Nechť prostor (P, u) není kompaktní, takže $P \neq \emptyset$. Pak existuje takové pokrytí $\mathfrak{B}$ prostoru P, že $P \neq \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro každou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$. Zvolme symbol ω různý od všech bodů prostoru P a položme $T = P \cup (\omega)$. Definujme v T topologii v takto: Budiž $Z \subset T$; jestliže $Z \subset P$ a jestliže mimo to $Z \subset \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro některou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$, budiž $vZ = uZ$; jinak budiž $vZ = (\omega) + u[Z - (\omega)]$. Axiomy $(\bar{\mathrm{I}})$ a $(\overline{\mathrm{II}})$ jsou zřejmě splněny a také je zřejmé, že prostor (P, u) je vnořen do (T, v). Mimo to je $vP = T$, takže množina $P \subset T$ není uzavřená. Zbývá dokázat, že T je H-prostor. Je-li $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak body x, y jsou v H-prostoru P H-oddělené. Tudíž existuje takové okolí U_1 bodu x v prostoru P a takové okolí U_2 bodu y v prostoru P, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Zřejmě U_1 (U_2) je také okolím bodu x (bodu y) v prostoru T, takže body x, y jsou také v T H-oddělené. Je-li $x \in P$, pak existuje okolí $V \in \mathfrak{B}$ bodu x v prostoru P; pak je V také okolím bodu x v prostoru T a $T - V$ je okolím bodu ω v prostoru T, takže body x, ω jsou v T H-oddělené.

Věta **12.1.1** ukazuje, že definice **12.1.1** nevede k žádnému novému pojmu. Jinak je tomu s podobnou definicí:

Definice **12.1.2.** *FH-uzavřený prostor* je FH-prostor P, který má tuto vlastnost: Je-li $T \supset P$ FH-prostor, pak množina P je uzavřená v T.

12.1.2. Budiž P FH-prostor. Aby P byl FH-uzavřený, k tomu je nutné a stačí, aby byla splněna tato podmínka: Je-li $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ pokrytí prostoru P skládající se z otevřených množin, pak existují takové množiny $G_i \in \mathfrak{G}$ v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq p)$, že $\bigcup_{i=1}^{p} \overline{G_i} = P$.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Nechť $P = (P, u)$ je vnořen do FH-prostoru $T = (T, v)$. Nechť bod $a \in T$ náleží do vP; máme dokázat, že $a \in P$. Budiž naopak $a \in T - P$, tedy $P \neq T$. Je-li $x \in P$, pak body a, x jsou H-oddělené v F-prostoru T, takže podle **5.1.15** existují takové dvě v-otevřené množiny $G(x)$, $H(x)$, že $x \in G(x)$, $a \in H(x)$, $G(x) \cap H(x) = \emptyset$. Množiny $P \cap G(x)$ $(x \in P)$ jsou u-otevřené (viz **4.6.5**) a tvoří pokrytí prostoru P (viz **8.1.2**), takže existují takové body $x_i \in P$ v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq p)$, že $\bigcup_{i=1}^{p} u[P \cap G(x_i)] = P$. Nyní $V = \bigcap_{i=1}^{p} H(x_i)$ je v-okolí bodu a (viz **4.4.11**, **4.4.13**). Protože $G(x_i) \cap H(x_i) = \emptyset$, je $vG(x_i) \cap H(x_i) = \emptyset$ podle **4.4.15** a tím spíše $u[P \cap G(x_i)] \cap H(x_i) = \emptyset$. Z toho plyne $V \cap P = \emptyset$ a to je spor (viz **4.2.9**), neboť $a \in vP$.

II. Jestliže podmínka není splněna, pak existuje pokrytí $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ prostoru $P = (P, u)$ skládající se z otevřených množin a takové, že $P \neq \bigcup uX$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro každou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$. Zvolme symbol ω různý od všech bodů prostoru P a položme $T = P \cup (\omega)$. Nechť soustava $\mathfrak{F}$ podmnožin T se skládá předně ze všech množin tvaru $F \cup (\omega)$, kde F probíhá všecky uzavřené množiny prostoru P, a za druhé ještě ze všech těch uzavřených množin F prostoru P, pro které platí $F \subset \bigcup uX$ $(X \in \mathfrak{K})$ při vhodné volbě konečné $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$. Ze **4.5.12** plyne, že v T existuje taková F-topologie v, při které $\mathfrak{F}$ tvoří soustavu všech uzavřených množin; zřejmě prostor (P, u) je vnořen do (T, v). Protože množina P nenáleží do soustavy $\mathfrak{F}$, není uzavřená v prostoru (T, v). Zbývá ukázat, že (T, v) je H prostor. Je-li $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak existují (viz **5.1.15**) takové u-otevřené množiny A, B, že $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$. Zřejmě A, B jsou také v-otevřené, takže x, y jsou také v T H-oddělené. Je-li $x \in P$, pak existuje taková $G \in \mathfrak{G}$, že $x \in G$. Množiny G, $T - uG$ jsou v-otevřené a jest $x \in G$, $\omega \in T - uG$, takže x, ω jsou v T H-oddělené.

12.1.3. Aby FH-prostor P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby P byl FH-uzavřený a aby to byl R-prostor.

Důkaz. I. Je-li P kompaktní, pak P je podle **12.1.1** H-uzavřený a tím spíše FH-uzavřený; mimo to P je R-prostor podle **5.4.5** a **8.3.19.**

II. Nechť FH-uzavřený prostor $P \neq \emptyset$ je R-prostor. Budiž $\mathfrak{U}$ pokrytí prostoru P. Je-li $x \in P$, existuje okolí $U(x) \in \mathfrak{U}$ bodu x. Protože P je FR-prostor, existuje takové otevřené okolí $G(x)$ bodu x, že $\overline{G(x)} \subset$ $\subset U(x)$. Množiny $G(x)$ $(x \in P)$ tvoří pokrytí prostoru P, takže podle **12.1.2** existují takové body $x_i \in P$ v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq p)$, že $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \overline{G(x_i)} = P$. Nyní jest $\bigcup\limits_{i=1}^{p} U(x_i) = P$, $U(x_i) \in \mathfrak{U}$; tudíž P je kompaktní.

Definice **12.1.3.** Bodovou množinu $Q \subset P$ nazveme *FH-uzavřenou*, jestliže Q jakožto vnořený prostor je FH-uzavřený prostor.

12.1.4. Nechť prostor P je FH-uzavřený a nechť $G \subset P$ je otevřená množina. Pak $\overline{G}$ je FH-uzavřená množina.

Důkaz. I. $\overline{G}$ je FH-prostor podle **4.6.10** a **5.2.1.** Budiž $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ pokrytí prostoru $\overline{G}$ složené z relativně otevřených množin. Z **12.1.2** plyne snadno, že je třeba pouze ukázat, že $\overline{G} \subset \bigcup \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro vhodně volenou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$. Ke každé $X \in \mathfrak{G}$ existuje podle **4.6.13** taková otevřená $\varphi(X) \subset P$, že $\overline{G} \cap \varphi(X) = X$. Také množina $P - \overline{G}$ je otevřená a jest

$$P = (P - \overline{G}) \cup \bigcup \varphi(X) \quad (X \in \mathfrak{G}) .$$

Tudíž z **8.1.2** a **12.1.2** plyne, že existuje taková konečná $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, že

$$P = \overline{(P - \overline{G})} \cup \bigcup \overline{\varphi(X)} \quad (X \in \mathfrak{K}) ,$$

a tedy, protože $G \cap \overline{(P - \overline{G})} = \emptyset$ (viz **4.4.15**),

$$G \subset \bigcup \overline{\varphi(X)} \quad (X \in \mathfrak{K}) .$$

Ze **4.4.14** však plyne

$$G \cap \overline{\varphi(X)} = G \cap \overline{G \cap \varphi(X)} \subset G \cap \overline{\overline{G} \cap \varphi(X)} = G \cap \overline{X} ,$$

takže $G \subset \bigcup \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{K})$. Protože soustava $\mathfrak{K}$ je konečná, je $\bigcup \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{K})$ uzavřená množina F-prostoru P, a tudíž $\overline{G} \subset \bigcup \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{K})$ podle **4.4.7.**

12.1.5. Budiž P FH-prostor. Buďtež Q_i $(1 \leqq i \leqq n)$ FH-uzavřené bodové množiny v konečném počtu. Pak také $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ je FH-uzavřená množina. Podle **4.6.10** a **5.2.1** je $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i \subset P$ FH-prostor, takže můžeme předpokládat, že $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i = P$. Je-li P vnořen do FH-prostoru T, pak v prostoru T množiny Q_i jsou uzavřené, takže podle **4.4.6** také množina $P \subset T$ je uzavřená.

12.1.6. Budiž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ monotónní soustava neprázdných FH-uzavřených množin. Pak je $\emptyset \neq \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{M})$.

Důkaz. I. Zřejmě můžeme předpokládat, že prostor P je FH-uzavřený.

II. Budiž $M \in \mathfrak{M}$, $x \in P - M$. Podle **5.1.15** ke každému $y \in M$ existují takové otevřené množiny $U(y)$, $V(y)$, že $y \in U(y)$, $x \in V(y)$, $U(y) \cap V(y) = \emptyset$. Podle **8.1.2**, **8.1.5** a **12.1.2** existují takové body $y_i \in M$ v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq m)$, že $M \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} M \cap U(y_i)}$. Položíme-li $G(M, x) = \bigcup_{i=1}^{m} U(y_i)$, je množina $G(M, x)$ otevřená (viz **4.4.10**) a jest $M \subset \overline{M \cap G(M, x)}$. Mimo to je $\bigcap_{i=1}^{m} V(y_i) \subset P - G(M, x)$ a množina $\bigcap_{i=1}^{m} V(y_i)$ je okolí bodu x (viz **4.2.5** a **4.4.13**), takže $x \in P - \overline{G(M, x)}$ podle **4.2.9.** Z toho plyne

$$\bigcap_x \overline{G(M, x)} = M \quad (x \in P - M)\,.$$

III. Budiž $M_i \in \mathfrak{M}$, $x_i \in P - M_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $M_i \supset M_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq n - 1)$; chceme dokázat, že $\bigcap_{i=1}^{m} G(M_i, x_i) \neq \emptyset$. Protože $\emptyset \neq M_n \subset \overline{M_n \cap G(M_n, x_n)}$, je $M_n \cap G(M_n, x_n) \neq \emptyset$ a stačí dokázat, že je-li $1 < r \leqq n$, pak

$$M_r \cap \bigcap_{i=r}^{n} G(M_i, x_i) \neq \emptyset \Rightarrow M_{r-1} \cap \bigcap_{i=r-1}^{n} G(M_i, x_i) \neq \emptyset\,.$$

Nechť tedy $M_r \cap \bigcap_{i=r}^{n} G(M_i, x_i) \neq \emptyset$. Protože $M_{r-1} \supset M_r$, $M_{r-1} \subset \subset \overline{M_{r-1} \cap G(M_{r-1}, x_{r-1})}$, jest

$$\overline{M_{r-1} \cap G(M_{r-1}, x_{r-1})} \cap \bigcap_{i=r}^{n} G(M_i, x_i) \neq \emptyset ,$$

takže podle **4.4.11** a **4.4.15** $M_{r-1} \cap \bigcap_{i=r-1}^{n} G(M_i, x_i) \neq \emptyset$.

IV. Předpokládejme, že $\emptyset = \bigcap X$ ($X \in \mathfrak{M}$). Pak je podle II také

$$\bigcap\nolimits_{(M,x)} \overline{G(M, x)} = \emptyset \quad (M \in \mathfrak{M},\ x \in P - M) ,$$

tedy též

$$\bigcup\nolimits_{(M,x)} (P - \overline{G(M, x)}) = P \quad (M \in \mathfrak{M},\ x \in P - M) .$$

To však znamená, že otevřené množiny $P - \overline{G(M, x)}$ ($M \in \mathfrak{M}$, $x \in P - - M$) tvoří pokrytí prostoru P (viz **8.1.2**). Podle **12.1.2** lze udati konečně mnoho množin $M_i \in \mathfrak{M}$ a bodů $x_i \in P - M_i$ ($1 \leqq i \leqq n$) tak, že

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{P - \overline{G(M_i, x_i)}} = P .$$

Vzhledem k monotonii soustavy $\mathfrak{M}$ můžeme ještě předpokládat, že $M_i \supset M_{i+1}$ ($1 \leqq i \leqq n - 1$). Protože $G(M_i, x_i) \subset \overline{G(M_i, x_i)}$, jest

$$P - G(M_i, x_i) \supset P - \overline{G(M_i, x_i)} ,$$

tedy

$$P - G(M_i, x_i) = \overline{P - G(M_i, x_i)} \supset \overline{P - \overline{G(M_i, x_i)}} ,$$

a tudíž

$$\bigcup_{i=1}^{n} [P - G(M_i, x_i)] = P$$

neboli $\bigcap_{i=1}^{n} G(M_i, x_i) = \emptyset$ a to je spor proti III.

12.1.7. Budiž P FH-prostor. Aby P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby každá uzavřená bodová množina byla FH-uzavřená.

Důkaz. I. Je-li F uzavřená podmnožina kompaktního prostoru P, je F kompaktní podle **8.3.1** a F je FH-prostor podle **4.6.10** a **5.2.1**, takže F je FH-uzavřená podle **12.1.3**.

II. Je-li každá uzavřená množina F-prostoru P FH-uzavřená, je P kompaktní podle **8.3.10** a **12.1.6.**

12.1.8. Budiž f spojité zobrazení FH-uzavřeného prostoru P na FH-prostor P_1. Pak také P_1 je FH-uzavřený prostor. Budiž $\mathfrak{G}$ pokrytí prostoru P_1 skládající se z otevřených množin. V prostoru P jsou množiny $f^{-1}(X)$ $(X \in \mathfrak{G})$ otevřené (viz **7.1.14**) a tvoří pokrytí prostoru P (viz **8.1.2**). Podle **12.1.2** existují takové množiny $G_i \in \mathfrak{G}$ v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq m)$, že $\bigcup_{i=1}^{m} \overline{H}_i = P$, kde $H_i = f^{-1}(G_i)$. Jest $f^1(H_i) = G_i$, tedy $f^1(\overline{H}_i) \subset \overline{G}_i$ podle definice **7.1.2.** Tudíž $\bigcup_{i=1}^{m} \overline{G}_i = P_1$ a prostor P_1 je FH-uzavřený podle **12.1.2.**

12.1.9. Buďtež u, v takové FH-topologie v množině P, že v je hrubší než u. Je-li prostor (P, u) FH-uzavřený, je také (P, v) FH-uzavřený. Viz **7.1.11** a **12.1.8.**

12.1.10. Budiž f spojité zobrazení FH-uzavřeného prostoru P do FH-prostoru P_1. Pak množina $f^1(P)$ je v prostoru P_1 uzavřená. Podle **4.6.10** a **5.2.1** je $f^1(P) \subset P_1$ FH-prostor, který je FH-uzavřený podle **12.1.8.**

Definice **12.1.4.** Budiž P FH-prostor. O FH-prostoru R pravíme, že je *FH-uzavřeným obalem* prostoru P, platí-li toto: [1] P je vnořen do R a množina P je hustá v prostoru R; [2] R je FH-uzavřený prostor; [3] je-li f spojité zobrazení prostoru P do nějakého FH-prostoru Q, pak existuje taková množina M, že $P \subset M \subset R$, a takové spojité zobrazení g prostoru M na $\overline{f^1(P)} \subset Q$, že $x \in P \Rightarrow g(x) = f(x)$.

12.1.11. Ke každému FH-prostoru P existuje FH-uzavřený obal.

Důkaz. I. Případ FH-uzavřeného P je triviální (položíme $R = P$; podmínka [3] je splněna podle **12.1.10**). Nechť tedy P není FH-uzavřený.

II. Nazveme α-soustavou každou soustavu $\mathfrak{A}$ s těmito vlastnostmi:

[α1] $\mathfrak{A}$ se skládá z otevřených množin prostoru P.

[α2] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$.

[$\alpha 3$] $\emptyset$ není prvkem soustavy $\mathfrak{A}$.

[$\alpha 4$] Je-li $A \in \mathfrak{A}$, $A \subset B \subset P$ a je-li B otevřená množina, jest $B \in \mathfrak{A}$.

[$\alpha 5$] Je-li $A_i \in \mathfrak{A}$ $(1 \leqq i \leqq m, m \in \boldsymbol{N})$, jest $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{A}$.

[$\alpha 6$] $\emptyset = \bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{A})$.

III. Dokážeme, že existuje aspoň jedna α-soustava. Protože P není FH-uzavřený, existuje podle **12.1.2** takové pokrytí $\mathfrak{U}$ prostoru P skládající se z otevřených množin, že $P \neq \bigcup \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro každou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$. Označme $\mathfrak{A}$ soustavu všech takových otevřených množin $A \subset P$, ke kterým existuje taková konečná soustava $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, že $A \cup \bigcup \overline{X} = P$, kde X probíhá soustavu $\mathfrak{K}$. Vlastnosti [$\alpha 1$] až [$\alpha 5$] soustavy $\mathfrak{A}$ jsou zřejmé. K důkazu vlastnosti [$\alpha 6$] zvolme $x \in P$; stačí udat takovou $A \in \mathfrak{A}$, že $x \in P - \overline{A}$. Existuje taková $X \in \mathfrak{U}$, že $x \in X$; zvolíme-li za $\mathfrak{K}$ soustavu skládající se z jediné množiny X, zjistíme, že $A = P - \overline{X} \in \mathfrak{U}$. Jest $\overline{A} = \overline{P - \overline{X}} \subset \overline{P - X} = P - X$, takže $x \in P - \overline{A}$.

IV. Nazveme β-soustavou každou takovou α-soustavu, která není obsažena v žádné od ní různé α-soustavě.

V. Každá α-soustava $\mathfrak{A}$ je obsažena v nějaké β-soustavě. To dokážeme takto. Budiž $\mathbf{C}$ množina všech α-soustav, obsahujících danou α-soustavu $\mathfrak{A}$ (jest $\mathfrak{A} \in \mathbf{C}$, tedy $\mathbf{C} \neq \emptyset$). Je-li tvrzení nesprávné, pak ke každé $X \in \mathbf{C}$ existuje taková $h(X) \in \mathbf{C}$, že $X \subset h(X) \neq X$. Podle **3.9.2** existuje taková monotónní soustava $\mathbf{C}_0 \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_0 \neq \emptyset$, že soustava $\mathfrak{A}_0 = \bigcup X$ $(X \in \mathbf{C}_0)$ nenáleží do $\mathbf{C}$, tj. není α-soustavou. To je nemožné, neboť se snadno nahlédne, že sjednocení monotónní soustavy α-soustav je α-soustava.

VI. Jsou-li $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ dvě různé β-soustavy, je zřejmě $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 \neq \emptyset$. Dokážeme, že ke každé $G \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1$ existuje taková $A \in \mathfrak{A}_1$, že $A \cap G = \emptyset$. Budiž $\mathfrak{A}^*$ soustava všech těch otevřených množin B, ke kterým lze určit $A \in \mathfrak{A}_1$ tak, že $B \supset A \cap G$. Pak je zřejmě $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}^*$, avšak $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}^*$, protože $G \in \mathfrak{A}^* - \mathfrak{A}_1$. Protože $\mathfrak{A}_1$ je β-soustava, nemůže $\mathfrak{A}^*$ být α-soustava. Avšak $\mathfrak{A}^*$ splňuje podmínku [αi] pro $i = 1, 2, 4, 5, 6$. Tudíž $\mathfrak{A}^*$ naplňuje podmínku [$\alpha 3$]; to však znamená, že $\emptyset \in \mathfrak{A}^*$, tj. že $A \cap G = \emptyset$ při vhodné $A \in \mathfrak{A}_1$.

VII. Každé β-soustavě $\mathfrak{A}$ přiřaďme nějakou věc $\tau(\mathfrak{A})$ různou od všech bodů prostoru P tak, aby bylo $\tau(\mathfrak{A}_1) \neq \tau(\mathfrak{A}_2)$ pro $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}_2$. Množinu všech věcí $\tau(\mathfrak{A})$ označme T a položme $R = P \cup T$. Do R zaveďme topologii u pomocí definujících soustav okolí $\mathfrak{U}(x)$ $(x \in R)$ takto: jestliže $x \in P$, pak nechť $\mathfrak{U}(x)$ se skládá ze všech otevřených okolí bodu x v prostoru P; jestliže $x = \tau(\mathfrak{A}) \in T$, pak nechť $\mathfrak{U}(x)$ je soustava všech množin tvaru $(x) \cup A$, kde $A \in \mathfrak{A}$. Musíme ukázat (viz **4.3.3**), že jsou splněny axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) vyslovené ve **4.3.1**. O axiomech (I$\mathfrak{U}$) a (II$\mathfrak{U}$) je to zřejmé. Že je splněn axiom (IV$\mathfrak{U}$), je zřejmé pro $a \in P$ a plyne z $[\alpha 5]$ pro $a \in T$. Platnost axiomu (III$\mathfrak{U}$) bude dokázána, zjistíme-li, že pro $x \in R$, $y \in R$, $x \neq y$ existují takové $U_1 \in \mathfrak{U}(x)$, $U_2 \in \mathfrak{U}(y)$, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$; tím bude zároveň zjištěno, že (R, u) je H-prostor. Je-li předně $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak podle **5.1.15** existují takové otevřené množiny A, B prostoru P, že $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$; pak jest $A \in \mathfrak{U}(x)$, $B \in \mathfrak{U}(y)$, $A \cap B = \emptyset$. Je-li za druhé $x \in P$, $y = \tau(\mathfrak{A}) \in T$, pak podle $[\alpha 6]$ existuje taková $A \in \mathfrak{A}$, že $x \in P - \bar{A}$; pak je $P - \bar{A} \in \mathfrak{U}(x)$, $(y) \cup A \in \mathfrak{U}(y)$, $(P - \bar{A}) \cap [(y) \cup A] = \emptyset$. Posléze budiž $x = \tau(\mathfrak{A}_1) \in T$, $y = \tau(\mathfrak{A}_2) \in T$, $x \neq y$; podle VI existují $A \in \mathfrak{A}_1$, $G \in \mathfrak{A}_2$, pro které je $A \cap G = \emptyset$; pak je $(x) \cup A \in \mathfrak{U}(x)$, $(y) \cup G \in \mathfrak{U}(y)$, $[(x) \cup A] \cap [(y) \cup G] = \emptyset$. Tedy (R, u) je H-prostor. Avšak definující okolí jsou zřejmě otevřená; tedy (R, u) je F-prostor (viz **4.5.6**). Je zřejmé, že P je vnořen do R. Posléze je $T \subset uP$ podle **4.3.2** a $[\alpha 3]$, takže množina P je hustá v R.

VIII. Ukážeme, že prostor (R, u) je FH-uzavřený. Nechť (R, u) je vnořen do FH-prostoru (S, v). Máme dokázat, že $vR = R$. Budiž naopak $x \in vR - R$ a budiž $\mathfrak{A}$ soustava všech množin tvaru $P \cap U$, kde U probíhá ty otevřené množiny prostoru S, pro které je $x \in U$. Dokažme, že $\mathfrak{A}$ je α-soustava. Vlastnost $[\alpha 1]$ plyne ze **4.6.5.** Vlastnosti $[\alpha 2]$, $[\alpha 4]$, $[\alpha 5]$ jsou zřejmé. Protože množina P je hustá v R, je $P \subset R \subset vP$, tedy $vP = vR$, tudíž $x \in vP$, takže $[\alpha 3]$ plyne ze **4.2.9** a **4.4.13.** Je-li $y \in P$, jest $x \neq y$, takže body x, y jsou H-oddělené v prostoru S a tudíž podle **5.1.10** existuje taková otevřená $U \subset S$, že $x \in U$, $y \in S - vU$, tedy $y \in P - \overline{P \cap U}$; platí tedy také $[\alpha 6]$. Tím je dokázáno, že $\mathfrak{A}$ je α-soustava; podle V existuje β-soustava $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Protože x a $z = \tau(\mathfrak{B})$ jsou dva různé body FH-prostoru S, existují takové dvě otevřené množiny $U_1 \subset S$, $U_2 \subset S$, že $x \in U_1$, $z \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Protože $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $P \cap U_1 \in \mathfrak{A}$, jest $z \cup (P \cap U_1)$ definující okolí bodu z v prostoru (R, u); podle **4.4.13** a **4.6.2** je také $R \cap U_2$ okolí bodu z v prostoru (R, u). Tudíž (viz **4.2.5**) též

$$[z \cup (P \cap U_1)] \cap (R \cap U_2) = (z)$$

je okolí bodu z v prostoru (R, u). To je spor, neboť množina P je hustá v prostoru (R, u), takže (viz **4.9.3**) $P \cap V \neq \emptyset$ pro každé okolí V bodu z v prostoru (R, u).

IX. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do FH-prostoru Q a budiž $Q_0 = \overline{f^1(P)} \subset Q$, takže množina $f^1(P)$ je hustá v Q_0. Podle **4.6.10** a **5.2.1** je Q_0 FH-prostor. Máme ukázat, že existuje taková množina M, že $P \subset M \subset R$, a takové spojité zobrazení g množiny M na Q_0, že $x \in P \Rightarrow g(x) = f(x)$. Pro $y \in Q_0 - f^1(P)$ budiž $\mathfrak{A}(y)$ soustava všech takových otevřených množin A prostoru P, ke kterým existuje takové okolí V bodu y v prostoru Q_0, že $f^{-1}(V) \subset A$. Ukážeme, že $\mathfrak{A}(y)$ je α-soustava. Vlastnosti [α1], [α2], [α4] jsou zřejmé. Protože množina $f^1(P)$ je hustá v Q_0, jest $V \cap f^1(P) \neq \emptyset$ podle **4.9.3**, tedy $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ a z toho plyne [α3]. Ze **4.2.5** plyne [α5]. Je-li dán $x \in P$, pak $f(x)$, y jsou dva různé body FH-prostoru Q_0 a podle **5.2.3** existuje otevřené okolí V bodu y v prostoru Q_0, pro které je $f(x) \in Q_0 - \overline{V}$. Budiž $A = f^{-1}(V)$; množina A je podle **7.1.14** otevřená v prostoru P, takže $A \in \mathfrak{A}(y)$. Nyní $f^1(A) \subset V$, takže $f^1(\overline{A}) \subset \overline{V}$ podle definice **7.1.2** a protože $f(x) \in Q_0 - \overline{V}$, máme $x \in P - \overline{A}$. Tím je dokázána též vlastnost [α6].

X. Pro $y \in Q_0 - f^1(P)$ budiž $\Phi(y)$ množina všech bodů $\tau(\mathfrak{B}) \in T$, kde $\mathfrak{B}$ probíhá všecky takové β-soustavy, pro které $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}(y)$. Podle V je $\Phi(y) \neq \emptyset$.

XI. Množiny $\Phi(y)$ $[y \in Q_0 - f^1(P)]$ jsou disjunktní. Není-li tomu tak, pak existují dva různé body y_1, y_2 množiny $Q_0 - f^1(P)$ a taková β-soustava $\mathfrak{B}$, že $\mathfrak{A}(y_1) \cup \mathfrak{A}(y_2) \subset \mathfrak{B}$. Existují takové dvě otevřené množiny U_1, U_2 prostoru Q_0, že $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$; podle **7.1.14** je $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}(y_1)$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}(y_2)$. Tudíž $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{B}$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{B}$, a tedy též $\emptyset = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{B}$ a to je spor proti vlastnosti [α3] soustavy $\mathfrak{B}$.

XII. Budiž

$$M = P \cup \bigcup_y \Phi(y) \quad [y \in Q_0 - f^1(P)]\,,$$

tedy $P \subset M \subset R$. Definujme zobrazení g množiny M do Q_0 takto: Je-li $x \in P$, budiž $g(x) = f(x)$. Je-li $x \in M - P$, pak podle XI existuje jediný bod $y \in Q_0 - f^1(P)$ takový, že $x \in \Phi(y)$; položíme $g(x) = y$. Zřejmě g je zobrazení M na Q_0, tj. $g^1(M) = Q_0$. Zbývá dokázat, že g je spojité, že tedy každý $x \in M$ je bodem spojitosti zobrazení g.

XIII. Budiž nejprve $x \in P$ a budiž V okolí bodu $f(x) = g(x)$ v prostoru Q_0. Protože zobrazení f je spojité, je $f^{-1}(V)$ okolí bodu x v prostoru P podle **7.1.1.** Z definice topologie prostoru R plyne, že $f^{-1}(V)$ je také okolím bodu x v prostoru R, a tedy i v prostoru M. Tudíž x je bod spojitosti zobrazení g podle **7.1.1.**

XIV. Budiž posléze $x \in M \cap T$, $g(x) = y$, tedy $x \in \Phi(y)$. Existuje taková β-soustava $\mathfrak{B}$, že $x = \tau(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{B}$. Budiž V otevřené okolí bodu y v prostoru Q_0. Podle **7.1.14** je $f^{-1}(V) \in \mathfrak{A}(y)$, tedy $f^{-1}(V) \in \mathfrak{B}$. Tudíž $(x) \cup f^{-1}(V)$ je definujícím okolím bodu x v prostoru R, a tedy též okolím bodu x v prostoru M. Tudíž také $g^{-1}(V) \supset (x) \cup f^{-1}(V)$ je okolím bodu x v prostoru M a podle **7.1.1** je x bodem spojitosti zobrazení g.

12.1.12. Budiž P FH-prostor a buďtež R_1, R_2 dva jeho FH-uzavřené obaly. Pak existuje takové homeomorfní zobrazení h prostoru R_1 na prostor R_2, že $x \in P \Rightarrow h(x) = x$. Identické zobrazení P na P je spojité zobrazení prostoru P do FH-prostoru R_2. Protože R_1 je FH-uzavřený obal prostoru P a protože množina P je hustá v prostoru R_2, existuje taková množina M_1, že $P \subset M_1 \subset R_1$, a takové spojité zobrazení f_1 množiny M_1 na R_2, že $x \in P \Rightarrow f_1(x) = x$. Podobně dostaneme existenci takové množiny M_2, že $P \subset M_2 \subset R_2$, a takového spojitého zobrazení f_2 množiny M_2 na R_1, že $x \in P \Rightarrow f_2(x) = x$. Budiž $M_0 = f_1^{-1}(M_2)$, takže $P \subset M_0 \subset R_1$, a pro $x \in M_0$ budiž $g(x) = f_2[f_1(x)]$. Pak je g spojité zobrazení M_0 do R_1 (viz **7.1.10**). Je-li $y \in R_1$, pak existuje takový $z \in M_2$, že $f_2(z) = y$, a takový $x \in M_1$, že $f_1(x) = z$, a tedy $x \in M_0$, $y = g(x)$. Tudíž g je spojité zobrazení M_0 na R_1, tj. $g^1(M_0) = R_1$. Budiž $G = \mathscr{E}_x\,[x \in M_0,\ g(x) \neq x]$. Je-li $x \in G$, $y = g(x) \neq x$, pak existují takové dvě otevřené množiny U, V prostoru R_1, že $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Množina $M_0 \cap U$ je otevřená v prostoru M_0 podle **4.6.5** a množina $g^{-1}(V)$ je otevřená v M_0 podle **7.1.14**; tedy $M_0 \cap U \cap g^{-1}(V)$ je otevřená v M_0 podle **4.4.11.** Tato poslední množina není prázdná, neboť obsahuje bod x. Nyní množina P je hustá v R_1 a jest $P \subset M_0 \subset R_1$, takže P je hustá v M_0 a tedy $P \cap \cap U \cap g^{-1}(V) \neq \emptyset$ podle **4.9.5.** Nechť tedy $z \in P \cap U \cap g^{-1}(V)$. Pak je $z \in U$, $g(z) \in V$, $U \cap V = \emptyset$ a to je spor, neboť $z \in P \Rightarrow g(z) = z$. Dosažený spor ukazuje, že $G = \emptyset$, tj. $x \in M_0 \Rightarrow x = g(x)$. Protože $g^1(M_0) = R_1$, musí být $M_0 = R_1$. Nyní už vyjde snadno, že $M_1 = R_1$, $M_2 = R_2$ a že zobrazení f_1, f_2 jsou navzájem inversní. Tudíž f_1 je homeomorfní zobrazení R_1 na R_2. Víme, že $x \in P \Rightarrow f_1(x) = x$.

12.2. Charaktery

Definice **12.2.1.** Je-li M množina mohutnosti $\mathfrak{m}$, E množina mohutnosti $\mathfrak{e}$ a je-li Φ soustava všech zobrazení množiny M do množiny E, je zřejmě mohutnost $\mathfrak{f}$ množiny Φ jednoznačně určena mohutnostmi $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$. Položíme

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}} ;$$

při konečných $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ je to zřejmě v souladu s elementárním pojmem mocniny.

12.2.1. Je-li $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost a je-li $1 < \mathfrak{e} \leqq \exp \mathfrak{m}$, jest $\mathfrak{e}^{\mathfrak{m}} = \exp \mathfrak{m}$.

Důkaz. I. Zvolme $e_1 \in E$, $e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$. Budiž E_0 množina skládající se ze dvou prvků e_1, e_2, takže $E_0 \subset E$; budiž Φ_0 soustava všech zobrazení množiny M do množiny E_0. Každému $f_0 \in \Phi_0$ přiřaďme množinu $f_0^{-1}(e_1) \subset M$; dostaneme prosté zobrazení soustavy Φ_0 na soustavu všech částí množiny M, takže $\text{moh}\, \Phi_0 = \exp \mathfrak{m}$. Protože $\Phi_0 \subset \Phi$, jest $\exp \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$. (Předpokladu $\mathfrak{e} \leqq \exp \mathfrak{m}$ jsme dosud neužili.)

II. Protože $\mathfrak{e} \leqq \exp \mathfrak{m}$, je zřejmě $\mathfrak{e}^{\mathfrak{m}} \leqq (\exp \mathfrak{m})^{\mathfrak{m}}$ a důkaz bude hotov, jestliže ještě dokážeme, že

$$(\exp \mathfrak{m})^{\mathfrak{m}} = \exp \mathfrak{m} .$$

Nyní $(\exp \mathfrak{m})^{\mathfrak{m}}$ je mohutnost soustavy Ψ zobrazení množiny M do soustavy Φ_0 zavedené v I. Budiž ještě Ω soustava všech zobrazení množiny $M \times M$ do E_0 (viz I). Podle **3.7.8** je $\text{moh}\,(M \times M) = \text{moh}\, M = \mathfrak{m}$, takže podle I je $\text{moh}\, \Omega = \exp \mathfrak{m}$. Stačí tedy udat prosté zobrazení soustavy Ω na soustavu Ψ. Takové zobrazení dostaneme, jestliže každému $g \in \Omega$ přiřadíme $h \in \Psi$ definované takto: Pro $x \in M$ budiž $h(x) = \tau \in \Phi_0$, kde $y \in M \Rightarrow \tau(y) = g(x, y)$.

12.2.2. Buďtež $\mathfrak{m}, \mathfrak{e}$ dvě nekonečné mohutnosti; budiž $\mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{e}$. Budiž E_0 množina mohutnosti $\mathfrak{e}$; budiž ω symbol různý od všech prvků množiny E_0. Existuje soustava Δ_0 topologií v množině $E_0 \cup (\omega)$, která má tyto vlastnosti:

[1] moh $\Delta_0 = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$.

[2] Všecky body $x \in E_0$ jsou isolované při každé topologii $u \in \Delta_0$.

[3] Při každé topologii $u \in \Delta_0$ jest $\chi(\omega) = \mathfrak{m}$, $\psi(\omega) = \aleph_0$.

Při důkazu musíme rozeznávat dva případy.

Důkaz věty **12.2.2** za předpokladu $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{e}$.

I. Budiž M množina mohutnosti $\mathfrak{m}$; budiž E množina mohutnosti $\mathfrak{e}$; budiž H soustava všech zobrazení množiny M do množiny E. Zvolme libovolně $e_0 \in E$. Budiž H_1 soustava těch $h \in H$, pro něž je pouze konečně mnoho takových $x \in M$, že $h(x) \neq e_0$; budiž $H_2 = H - H_1$.

II. Jest moh $H = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$, takže moh $H_2 \leqq \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$. Na druhé straně jest $H_2 \supset H^*$, je-li H^* soustava všech zobrazení množiny M do množiny $E - (e_0)$, jejíž mohutnost je rovna $\mathfrak{e}$ (viz **3.7.10**), takže moh $H^* = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$, a tedy moh $H_2 \geqq \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$. Tudíž moh $H_2 = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$.

III. Je-li $\mathfrak{M}$ soustava všech neprázdných konečných částí množiny M, jest $H_1 = \bigcup \varphi(X)$ $(X \in \mathfrak{M})$, kde $\varphi(X)$ znamená množinu těch $h \in H$, pro která platí: $x \in M - X \Rightarrow h(x) = e_0$. Mohutnost množiny $\varphi(X)$ je rovna mohutnosti kartézského součinu $n \in \boldsymbol{N}$ faktorů vesměs totožných s E, kde $n =$ moh X. Z toho plyne, že pro každou $X \in \mathfrak{M}$ jest moh $\varphi(X) = \mathfrak{e}$ (viz **3.7.9**). Protože moh $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{e}$ (viz **3.7.11**), je také moh $H_1 = \mathfrak{e}$ (viz **3.7.10**).

IV. Protože jsme právě dokázali, že moh $H_1 =$ moh E_0, stačí dokončit důkaz za předpokladu, že $E_0 = H_1$.

V. Každému $h \in H_2$ přiřaďme topologii $u = u_h$ v množině $H_1 \cup (\omega)$ takto. Pro $x \in H_1$ budiž (x) jediné definující okolí bodu x. Soustava $\mathfrak{U}(\omega) = \mathfrak{U}_h(\omega)$ definujících okolí bodu ω je vytvořena soustavou $\mathfrak{M}$ všech neprázdných konečných částí množiny M, a to tak, že každé

$X \in \mathfrak{M}$ přiřadíme množinu $U \cup (\omega) \in \mathfrak{U}(\omega)$, kde U znamená množinu všech těch $k \in H_1$, pro která platí: $x \in X \Rightarrow k(x) = h(x)$. Že takto skutečně vznikne topologie v množině $H_1 \cup (\omega)$, plyne ze **4.3.3**, neboť správnost axiomů (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) je zřejmá.

VI. Ukážeme, že mohutnost soustavy Δ_0 všech topologií popsaných v $\mathfrak{V}$ je rovna $\mathfrak{c}^{\mathfrak{m}}$. Protože moh $H_2 = \mathfrak{c}^{\mathfrak{m}}$ podle II, je třeba pouze ukázat, že:

$$h_1 \in H_2\,, \quad h_2 \in H_2\,, \quad h_1 \neq h_2 \Rightarrow u_{h_1} \neq u_{h_2}\,.$$

Existuje takový $x_0 \in M$, že $h_1(x_0) \neq h_2(x_0)$. Prvek (x_0) soustavy $\mathfrak{M}$ určuje definující okolí $U_2 \cup (\omega) \in \mathfrak{U}_{h_2}(\omega)$, kde U_2 se skládá ze všech těch $k \in H_1$, pro které je $k(x_0) = h_2(x_0)$. Kdyby bylo $u_{h_1} = u_{h_2}$, pak by podle **4.3.5** existovalo takové $U_1 \cup (\omega) \in \mathfrak{U}_{h_1}(\omega)$, že $U_1 \subset U_2$. To je však nemožné, neboť okolí $U_1 \cup (\omega)$ je vytvořeno jakousi $X \in \mathfrak{M}$ tak, že U_1 se skládá ze všech těch $k \in H_1$, pro které je: $x \in X \Rightarrow k(x) = h_1(x)$. Existuje však takové $k_0 \in U_1$, že $k_0(x_0) = h_1(x_0)$. Protože $h_1(x_0) \neq$ $\neq h_2(x_0)$, nemůže být $k_0 \in U_2$, a tudíž nemůže být ani $U_1 \subset U_2$.

VII. Již v III jsme si povšimli, že moh $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$, a z toho plyne, že $\chi(\omega) \leqq \mathfrak{m}$. Kdyby bylo $\chi(\omega) < \mathfrak{m}$, pak by podle **4.12.5** existovala taková úplná soustava $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}(\omega)$ okolí bodu ω, že moh $\mathfrak{B} < \mathfrak{m}$. Soustava $\mathfrak{B}$ by byla vytvořena jakousi soustavou $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, pro kterou by bylo moh $\mathfrak{M}_0 < \mathfrak{m}$. Podle **3.7.10** by také soustava $\bigcup X$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$ měla mohutnost menší než $\mathfrak{m}$, a tudíž by existoval takový $x_0 \in M$, který by nenáležel do žádné $X \in \mathfrak{M}_0$. V okolí $U_0 \cup (\omega)$ bodu ω vytvořeném množinou $(x_0) \in \mathfrak{M}$ by pak zřejmě nebylo obsaženo žádné okolí náležející do $\mathfrak{B}$ a to je spor, neboť $\mathfrak{B}$ je úplná soustava okolí bodu ω.

VIII. Protože $\chi(\omega) = \mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, jest $\psi(\omega) \geqq \aleph_0$ podle **4.12.1.** Protože $h \in H_2$, existuje taková prostá posloupnost $\{x_n\}$, že $h(x_n) \in M - (e_0)$ pro všecka n. Množina $(x_n) \in \mathfrak{M}$ vytváří okolí $U_n \cup (\omega)$ bodu ω, kde U_n se skládá z těch $k \in H_1$, pro něž je $k(x_n) = h(x_n)$. Protože $h(x_n) \neq e_0$ a protože $k \in H_1$, takže jen konečně mnoho $x \in M$ může mít vlastnost $k(x) \neq e_0$, musí být $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$ neboli $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [U_n \cup (\omega)] = (\omega)$. Tudíž $\psi(\omega) = \aleph_0$.

Důkaz věty **12.2.2** za předpokladu $\mathfrak{c} < \mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{c}$.

I. Zvolme libovolnou množinu $\boldsymbol{C}$ mohutnosti $\mathfrak{c}$. Pro každé $z \in \boldsymbol{C}$

budiž $P(z)$ množina skládající se ze dvou čísel 0, 1. Považujeme $P(z)$ za (isolovaný) prostor a utvoříme kartézský součin

$$Q = \mathfrak{P} P(z) \quad (z \in \mathbf{C}) .$$

Podle **6.2.10** a **6.2.19** je Q FH-prostor. Budiž $\mathfrak{C}$ soustava všech konečných částí množiny $\mathbf{C}$. Je-li $q \in Q$, $c \in \mathfrak{C}$, budiž $\mu^*(q, c)$ množina všech těch $x \in Q$, pro něž platí: $z \in c \Rightarrow x(z) = q(z)$. Z definice **6.2.1** snadno plyne, že soustava $\mathfrak{B}^*$ všech množin $\mu^*(q, c)$ $(q \in Q, c \in \mathfrak{C})$ je otevřená base prostoru Q.

II. Z definice **12.2.1** plyne, že moh $Q = 2^{\mathfrak{e}}$, takže podle **12.2.1** je moh $Q = \exp \mathfrak{e}$. Podle **3.7.11** je moh $\mathfrak{C} = \mathfrak{e}$. Při dané $c \in \mathfrak{C}$ existuje zřejmě jen konečně mnoho navzájem různých množin $\mu^*(q, c)$ $(q \in Q)$, takže ze **3.7.10** snadno odvodíme, že je též moh $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{e}$. Protože $\mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{e}$, existuje taková $M \subset Q$, že moh $M = \mathfrak{m}$. Pokládáme M za prostor vnořený do Q, takže M je FH-prostor podle **4.6.10** a **5.2.1.** Pro $q \in M$ budiž $\mu(q, c) = M \cap \mu^*(q, c)$. Budiž $\mathfrak{B}$ soustava všech množin $\mu(q, c)$ $(q \in M, c \in \mathfrak{C})$. Podle **4.6.15** je $\mathfrak{B}$ otevřená base prostoru M. Jest moh $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{e}$.

III. Každý prvek $b = (b^1, b^2)$ množiny $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ nazveme *čtvercem*; nazveme b^1 *základnou čtverce* b. Budiž T soustava všech neprázdných konečných množin skládajících se ze čtverců a nazveme *složkami* prvku $t \in T$ ty čtverce, ze kterých se t skládá. Ze **3.7.8** a **3.7.11** plyne, že také moh $T \leqq \mathfrak{e}$. Budiž E_1 soustava všech těch $t \in T$, jejichž každé dvě složky jsou navzájem disjunktní; do E_1 řadíme též ty $t \in T$, které mají jedinou složku. Jest moh $E_1 \leqq \mathfrak{e}$.

IV. Budiž E_2 taková množina, že $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ a že moh $E_2 = \mathfrak{e}$; jinak je E_2 libovolná. Podle **3.7.10** je moh $(E_1 \cup E_2) = \mathfrak{e}$, takže v dalším průběhu důkazu můžeme předpokládat, že $E_0 = E_1 \cup E_2$.

V. Budiž H soustava všech zobrazení množiny M do množiny M. Podle **12.2.1** je moh $H = \exp \mathfrak{m}$. Každému $h \in H$ přiřaďme topologii $u = u_h$ v množině $E_0 \cup (\omega)$ takto. Pro $x \in E_0$ budiž (x) jediné definující okolí bodu x. Abychom popsali soustavu $\mathfrak{U}(\omega) = \mathfrak{U}_h(\omega)$ definujících okolí bodu ω, zvolme nejprve neprázdnou konečnou $N \subset M$; dále pak pro každý $q \in N$ zvolme dva prvky $c'(q)$, $c''(q)$ soustavy $\mathfrak{C}$, čímž dostaneme dva prvky

$$B'(q) = \mu[q, c'(q)] \; ; \quad B''(q) = \mu[h(q), c''(q)]$$

soustavy $\mathfrak{B}$. Tyto volby určují množinu $U \subset E_1$, která se skládá ze všech těch $t \in E_1$, které pro každý $q \in N$ mají takovou složku $b = (b^1, b^2)$, pro kterou platí $q \in b^1$, $b^1 \subset B'(q)$, $b^2 \subset B''(q)$; ale vedle těchto složek patřících k jednotlivým $q \in N$ může $t \in E_1$ mít ještě další složky. Prvky soustavy $\mathfrak{U}(\omega)$ jsou vytvořeny právě popsanými volbami; má-li U právě popsaný (na těch volbách závislý) význam, pak ty volby vytvářejí prvky

$$(U - K) \cup (\omega)$$

soustavy $\mathfrak{U}(\omega)$, kde K probíhá všecky konečné části množiny E_1. Že dostaneme skutečně topologii v množině $E_0 \cup (\omega)$, plyne ze **4.3.3**, neboť správnost axiomů (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) se snadno zjistí.

VI. Ukážeme, že soustava Δ_0 všech topologií u_h ($h \in H$), popsaných v V, má mohutnost $\mathfrak{e}^{\mathfrak{m}} = \exp \mathfrak{m}$ (viz **12.2.1**). Protože moh $H = \exp \mathfrak{m}$, je třeba pouze zjistit, že

$$h_1 \in H\,, \quad h_2 \in H\,, \quad h_1 \neq h_2 \Rightarrow u_{h_1} \neq u_{h_2}\,.$$

Existuje takový $q_0 \in M$, že $h_1(q_0) \neq h_2(q_0)$. Protože $h_1(q_0)$, $h_2(q_0)$ jsou dva navzájem různé body FH-prostoru M, jehož otevřenou basí je $\mathfrak{B}$, existují takové dva prvky β_1, β_2 soustavy $\mathfrak{B}$, že

$$h_1(q_0) \in \beta_1\,, \quad h_2(q_0) \in \beta_2\,, \quad \beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset\,.$$

Zvolme ještě $\beta_0 \in \mathfrak{B}$ tak, aby bylo $q_0 \in \beta_0$, a označme U_2 množinu všech těch $t \in E_1$, které mají takovou složku $b = (b^1, b^2)$, pro kterou platí $q_0 \in b^1$, $b^1 \subset \beta_0$, $b^2 \subset \beta_2$. Potom je $U_2 \cup (\omega) \in \mathfrak{U}_{h_2}(\omega)$. Předpokládáme-li, že $u_{h_1} = u_{h_2}$, pak podle **4.3.5** je v $U_2 \cup (\omega)$ obsažena jako část nějaká množina náležející do $\mathfrak{U}_{h_1}(\omega)$. To znamená, že je možné zvolit nejprve konečnou množinu $N \subset M$ a potom pro každý $q \in N$ zvolit dále $c'(q) \in \mathfrak{C}$, $c''(q) \in \mathfrak{C}$ tak, že platí toto. Budiž

$$B'(q) = \mu[q, c'(q)]\,, \quad B''(q) = \mu[h_1(q), c''(q)]\,;$$

dále budiž U_1 množina těch $t \in E_1$, které pro každý $q \in N$ mají takovou složku $b = (b^1, b^2)$, že $q \in b^1$, $b^1 \subset B'(q)$, $b^2 \subset B''(q)$. Potom množina $U_1 - U_2$ musí být konečná. To však je nemožné. V případě, že q_0 nenáleží do N, je to snadno patrné, neboť potom U_1 obsahuje nekonečně mnoho takových $t \in E_1$, které nemají vůbec žádnou složku, jejíž základna by obsahovala bod q_0, kdežto základna jedné složky každého

$t \in U_2$ musí obsahovat bod q_0. Budiž tedy $q_0 \in N$. Potom každý $t \in U_1$ má právě jednu složku $b_0 = (b_0^1, b_0^2)$, pro kterou platí $q_0 \in b_0^1$, a pro tuto složku musí mimo jiné platit

$$(*) \qquad b_0^2 \subset B''(q_0) .$$

Jestliže t náleží do U_2, je zřejmě $b_0^2 \subset \beta_2$. Nyní β_1, $B''(q_0)$ jsou dva prvky otevřené base $\mathfrak{B}$ prostoru M, které oba obsahují bod $h_1(q_0)$. Proto existuje takový $\gamma \in \mathfrak{B}$, že

$$\gamma \subset \beta_1 \cap B''(q_0) .$$

Je-li U_1^* množina těch $t \in U_1$, které splňují nejen podmínku (*), nýbrž dokonce ostřejší podmínku $b_0^2 \subset \gamma$, je zřejmé, že U_1^* je nekonečná část množiny U_1. Přes to je $U_1^* \cap U_2 = \emptyset$, neboť

$$t \in U_1^* \Rightarrow b_0^2 \subset \gamma , \quad t \in U_2 \Rightarrow b_0^2 \subset \beta_2$$

a jest $\gamma \cap \beta_2 = \emptyset$, neboť $\gamma \subset \beta_1$, $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$.

VII. Pro každé $h \in H$ má soustava $\mathfrak{U}(\omega) = \mathfrak{U}_h(\omega)$ mohutnost $\mathfrak{m}$, takže $\chi(\omega) \leqq \mathfrak{m}$. Neboť mohutnost všech možných voleb N je podle **3.7.11** $\leqq \mathfrak{m}$. Je-li N zvolena, pak při každém $q_0 \in N$ máme pro $B'(q)$ a pro $B''(q)$ jenom $\mathfrak{e} < \mathfrak{m}$ možností (viz opět **3.7.11**), takže pro U je podle **3.7.10** $\mathfrak{m}$ možností. Posléze při daném U máme (viz **3.7.11**) nejvýš $\mathfrak{e}$ možností (a nejméně jednu) pro

$$(U - K) \cup (\omega) \in \mathfrak{U}(\omega) ,$$

takže moh $\mathfrak{U}(\omega) = \mathfrak{m}$ podle **3.7.10.** Tím je dokázáno, že $\chi(\omega) \leqq \mathfrak{m}$. Předpokládejme, že $\chi(\omega) < \mathfrak{m}$. Pak podle **4.12.5** existuje taková úplná soustava $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}(\omega)$ okolí bodu ω, že moh $\mathfrak{V} < \mathfrak{m}$. Je-li nyní $\mathfrak{N}$ soustava všech takových voleb N, od kterých lze dospět cestou popsanou v V k některé množině soustavy $\mathfrak{V}$, je též moh $\mathfrak{N} < \mathfrak{m}$. Protože jednotlivé $N \in \mathfrak{N}$ jsou konečné podmnožiny prostoru M, je podle **3.7.10** také mohutnost množiny $\bigcup N$ $(N \in \mathfrak{N})$ menší než mohutnost $\mathfrak{m}$ množiny M. Tudíž existuje takový $q_0 \in M$, který nenáleží do žádné $N \in \mathfrak{N}$. Existují takové $\beta_0 \in \mathfrak{B}$, $\beta_1 \in \mathfrak{B}$, že $q_0 \in \beta_0$, $h(q_0) \in \beta_1$. Je-li U_0 množina těch $t \in E_1$, které mají takovou složku $b = (b^1, b^2)$, pro kterou platí $q_0 \in b^1$, $b^1 \subset \beta_0$, $b^2 \subset \beta_1$, pak jest $U_0 \cup (\omega) \in \mathfrak{U}(\omega)$. Protože soustava $\mathfrak{V}$ je úplná, musí existovat taková $V_0 \subset E_1$, že $V_0 \cup (\omega) \in \mathfrak{V}$, $V_0 \subset U_0$. Ježto však bod q_0 nenáleží do žádné z množin $N \in \mathfrak{N}$, nahlédneme snadno, že existuje nekonečně mnoho takových $t \in V_0$, které nemají vůbec žádnou složku, jejíž základna by obsahovala q_0, kdežto naopak q_0 musí náležet do jedné složky každého $t \in U_0$. Inkluse $V_0 \subset U_0$ je tudíž nemožná.

VIII. Protože $\chi(\omega) = \mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, je $\psi(\omega) \geqq \aleph_0$ podle **4.12.1**. Existuje taková prostá posloupnost $\{q_n\}$, že $q_n \in M$ pro všecka n. Budiž $G_1 = M$, $G_n = M - \bigcup_{i=1}^{n-1} (q_i)$ pro $n = 2, 3, 4, \ldots$ Pak pro každé n je G_n okolím bodu q_n v prostoru M. Protože M má otevřenou basi $\mathfrak{B}$, existuje pro každé n taková $\beta_n \in \mathfrak{B}$, že $q_n \in \beta_n$, $\beta_n \subset G_n$; budiž ještě $\beta'_n \in \mathfrak{B}$, $h(q_n) \in \beta'_n$. Budiž U_n množina těch $t \in E_1$, které mají takovou složku $b = (b^1, b^2)$, že $q_n \in b_1$, $b^1 \subset \beta_n$, $b^2 \subset \beta'_n$. Pak jest $U_n \cup (\omega) \in \mathfrak{U}(\omega)$, takže $\psi(\omega) = \aleph_0$, jestliže platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n \cup (\omega)] = (\omega)$. Jestliže to však neplatí, pak existuje $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Podle definice U_n má t_0 pro každé n takovou složku $b_n = (b^1_n, b^2_n)$, že $q_n \in b^1_n$, $b^1_n \subset \beta_n$. Jestliže $m < n$, pak $q_m \in b^1_m$, $b^1_n \subset \beta_n$, $q_m \in M - (\beta_n)$, tedy $b^1_m \neq b^1_n$. To je spor, neboť t_0 má jenom konečný počet složek.

12.2.3. Buďtež $\mathfrak{z}, \mathfrak{m}, \mathfrak{e}$ nekonečné mohutnosti; budiž $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{e}$, $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{e}$. Budiž E množina mohutnosti $\mathfrak{e}$; budiž ω symbol různý od všech prvků množiny E. Existuje soustava Δ topologií v množině $E \cup (\omega)$, která má tyto vlastnosti:

[1] moh $\Delta = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}}$.

[2] Všecky body $x \in E$ jsou isolované při každé topologii $u \in \Delta$.

[3] Při každé topologii $u \in \Delta$ jest $\chi(\omega) = \mathfrak{m}$, $\psi(\omega) = \mathfrak{z}$.

Důkaz. I. Budiž Z množina mohutnosti $\mathfrak{z}$, která neobsahuje prvek ω. V množině $Z \cup (\omega)$ definujeme topologii v takto. Pro $z \in Z$ budiž (z) jediné definující okolí bodu z. Soustava $\mathfrak{U}(\omega)$ definujících okolí bodu ω nechť se skládá ze všech množin $(Z - K) \cup (\omega)$, kde K probíhá všecky konečné části množiny Z. Podle **4.3.3** je v topologie v množině $Z \cup (\omega)$. Podle **3.7.11** jest moh $\mathfrak{U}(\omega) = \mathfrak{z}$, takže $\chi(\omega) \leqq \mathfrak{z}$. Je-li $\mathfrak{K}$ soustava skládající se z konečných částí množiny Z a je-li moh $\mathfrak{K} < \mathfrak{z}$, pak podle **3.7.10** také $\bigcup K$ $(K \in \mathfrak{K})$ má mohutnost menší než $\mathfrak{z}$, takže $\bigcup K \neq$

$\neq Z$, a tedy $\bigcap [(Z - K) \cup (\omega)] \neq (\omega)$ pro $K \in \mathfrak{K}$. Tudíž $\psi(\omega) \geqq \mathfrak{z}$. Ze **4.12.1** nyní plyne, že $\chi(\omega) = \psi(\omega) = \mathfrak{z}$.

II. Budiž E_0 taková množina, že moh $E_0 = \mathfrak{e}$, $E_0 \cap [Z \cup (\omega)] = \emptyset$. Protože $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{e}$, je moh $(E_0 \cup Z) = \mathfrak{e}$ podle **3.7.10**, takže můžeme dokazovat za předpokladu, že $E = E_0 \cup Z$. Podle **12.2.2** existuje soustava Δ_0 topologií v množině $E_0 \cup (\omega)$ s vlastnostmi [1], [2], [3] tam vyslovenými. Každé topologii $u_0 \in \Delta_0$ přiřadíme topologii u v množině $E \cup (\omega)$ takto. Je-li $X \subset E \cup (\omega)$, pak

$$uX = u_0(X - Z) \cup v(X - E_0).$$

Je zřejmé, že u splňuje axiomy ($\bar{\text{I}}$) a ($\bar{\text{II}}$). Budiž Δ soustava všech topologií u. Vlastnosti [1] a [2] soustavy Δ jsou snadným důsledkem příslušných vlastností soustavy Δ_0. Ze **4.12.7** plyne, že totéž platí i o vlastnosti [3].

12.2.4. Budiž P nekonečná množina, $\mathfrak{e} = \text{moh}\, P$. Každému $x \in P$ buďtež přiřazeny dvě nekonečné mohutnosti $\mathfrak{m}(x)$, $\mathfrak{z}(x)$. Aby v množině P existovala topologie, při které

$$(\alpha) \qquad x \in P \Rightarrow \chi(x) = \mathfrak{m}(x)\,, \quad \psi(x) = \mathfrak{z}(x)\,,$$

k tomu je nutné a stačí, aby bylo

$$(\beta) \qquad x \in P \Rightarrow \mathfrak{z}(x) \leqq \mathfrak{m}(x) \leqq \exp \mathfrak{e}\,, \quad \mathfrak{z}(x) \leqq \mathfrak{e}\,.$$

Platí-li (β), pak v množině P existuje právě $\exp \mathfrak{s}$ topologií s vlastností (α), znamená-li $\mathfrak{s}$ mohutnost sjednocení disjunktní soustavy množin $A(x)$ $(x \in P)$, kde moh $A(x) = \mathfrak{m}(x)$ pro každý $x \in P$. Dokonce potom existuje v množině P $\exp \mathfrak{s}$ dědičně normálních topologií s vlastností (α).

Důkaz. I. Nutnost podmínky (β) plyne ze **4.12.1** a **4.12.23.** V dalším tedy předpokládáme, že podmínka (β) je splněna.

II. Zřejmě je $\mathfrak{s} \geqq \mathfrak{e}$. Z toho plyne podle **3.7.9**, že mohutnost množiny

$$\bigcup_x [P \times A(x)] = P \times \bigcup_x A(x) \quad (x \in P)$$

je rovna $\mathfrak{s}$, takže $\exp \mathfrak{s}$ je mohutnost soustavy všech částí množiny $P \times \bigcup_x A(x)$. Abychom dokázali, že v množině P existuje nejvýš $\exp \mathfrak{s}$ topologií splňujících podmínku (α), potřebujeme tudíž jenom zjistit existenci prostého zobrazení φ soustavy Ω všech takových topologií do soustavy všech částí množiny $P \times \bigcup_x A(x)$. Je-li nyní dána topologie $u \in \Omega$, pak ke každému $x \in P$ existuje úplná soustava $\mathfrak{U}(x)$ u-okolí bodu x s mohutností $\mathfrak{m}(x)$. Tudíž moh $A(x) =$ moh $\mathfrak{U}(x)$, takže existuje prosté zobrazení f_x množiny $A(x)$ na soustavu $\mathfrak{U}(x)$. Pro $t \in A(x)$ budiž $U = f_x(t)$, tedy $U \in \mathfrak{U}(x)$, a budiž $\varphi_x(u) \subset P \times A(x)$ množina všech dvojic tvaru (ξ, t), kde $\xi \in U$. Posléze budiž

$$\varphi(u) = \bigcup \varphi_x(u) \quad (x \in P) .$$

Snadno se zjistí, že φ je prosté zobrazení množiny Ω do soustavy všech částí množiny $P \times \bigcup_x A(x)$.

III. Abychom důkaz dokončili, potřebujeme ještě udat soustavu Λ mohutnosti exp $\mathfrak{s}$ dědičně normálních topologií v množině P, splňujících podmínku (α). Při tom můžeme množinu P nahradit kteroukoli množinou mohutnosti $\mathfrak{e}$. Budiž E libovolně zvolená množina mohutnosti $\mathfrak{e}$. Pro $p \in \mathbf{N}$ budiž E_p množina všech p-členných konečných posloupností $x = \{x_n\}_1^p$, jejichž všecky členy x_n náležejí do E. Podle **3.7.9** je moh $E_p = \mathfrak{e}$ pro každé p, takže podle **3.7.10** také moh $\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p = \mathfrak{e}$. Tudíž můžeme předpokládat, že

$$P = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p .$$

Budiž ω nový symbol. Protože podmínka je splněna, existuje podle **12.2.3** ke každému $x \in P$ soustava $\Delta(x)$ mohutnosti $\mathfrak{e}^{\mathfrak{m}(x)}$ topologií v množině $E \cup (\omega)$, při kterých všecky body množiny E jsou isolované, kdežto bod ω má při každé topologii soustavy $\Delta(x)$ charakter $\mathfrak{m}(x)$ a pseudocharakter $\mathfrak{z}(x)$. Budiž

$$\Delta = \mathfrak{P}\Delta(x) \quad (x \in P) .$$

Každému $u \in \Delta$ přiřadíme topologii $v = \lambda(u)$ v množině P. Pro $x \in P$ budiž u_x x-souřadnice prvku $u \in \Delta$, takže $u_x \in \Delta(x)$. Topologii v popíšeme pomocí definujících soustav okolí (viz **4.3.3**). Budiž $x = \{x_n\}_1^p \in P$. Definující soustava $\mathfrak{V}(x)$ v-okolí bodu x se skládá z množin $V \subset P$, z nichž každá vznikne z nějakého u_x-okolí U bodu ω v prostoru $(E \cup (\omega), u_x)$ tímto způsobem: Jest $V \subset \bigcup_{n=p}^{\infty} E_n$, při čemž $V \cap E_p$ obsahuje jediný bod x, a naproti tomu pro $q > p$ množina $V \cap E_q$ se skládá ze všech těch bodů $\{y_n\}_1^q$, pro které platí $y_n = x_n$ pro $1 \leqq n \leqq p$, $y_{p+1} \in U - (\omega)$. Správnost axiomů (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) je zřejmá. Musíme ještě dokázat tři věci. Předně, že každý prostor (P, v) je dědičně normální, za druhé, že mohutnost soustavy Λ všech topologií $v = \lambda(u)$ $(u \in \Delta)$ je rovna $\exp \mathfrak{s}$, za třetí, že je splněna vlastnost (α).

IV. Všecka definující v-okolí jsou v-otevřená, takže (P, v) je F-prostor. Abychom ukázali, že (P, v) je dědičně normální, uvažujme dvě oddělené bodové množiny A, B prostoru (P, v); podle **5.4.9** máme dokázat, že množiny A, B jsou H-oddělené. Pro $A = \emptyset$ i pro $B = \emptyset$ je to zřejmé; nechť tedy $A \neq \emptyset \neq B$. Podle **5.1.2** je $B \cap vA = \emptyset = A \cap vB$. Ke každému $x \in A$ existuje podle **4.3.2** taková $V(x) \in \mathfrak{V}(x)$, že $B \cap \cap V(x) = \emptyset$; podobně ke každému $y \in B$ existuje taková $W(y) \in \mathfrak{V}(y)$, že $A \cap W(y) = \emptyset$. Položme

$$H = \bigcup_x V(x)\,, \quad K = \bigcup_y W(y) \quad (x \in A,\ y \in B)\,.$$

Podle **4.2.4** a **4.2.8** je H okolí množiny A, K okolí množiny B. Stačí tedy zjistit, že $H \cap K = \emptyset$. Budiž naopak $H \cap K \neq \emptyset$. Pak existuje takov ý $x = \{x_n\}_1^p \in A$ a takový $y = \{y_n\}_1^q \in B$, že $V(x) \cap W(y) \neq \emptyset$. Je-li nejprve $p = q$, plyne z definice soustav $\mathfrak{V}(x)$, $\mathfrak{V}(y)$, že $V(x) \cap W(y) \neq \emptyset$ pouze pro $x = y$, a to je spor, neboť $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$. Je-li za druhé $p < q$, plyne z definice soustav $\mathfrak{V}(x)$, $\mathfrak{V}(y)$, že $V(x) \cap W(y) \neq \emptyset$ pouze pro $y \in V(x)$, a to je zase spor, neboť $y \in B$, $B \cap V(x) = \emptyset$. Podobný spor dostaneme v případě $p > q$.

V. Je-li $u_1 \in \Delta$, $u_2 \in \Delta$, $u_1 \neq u_2$, $v_1 = \lambda(u_1)$, $v_2 = \lambda(u_2)$, jest $v_1 \neq v_2$. Existuje totiž takový $x = \{x_n\}_1^p$, že u_1, u_2 mají navzájem různé x-souřadnice $u_{1x} \in \Delta(x)$, $u_{2x} \in \Delta(x)$. Nechť $Q \subset P$ se skládá z bodu x a ze všech bodů tvaru $\{y_n\}_1^{p+1}$, pro které $y_n = x_n$ pro $1 \leqq n \leqq p$. Pokládáme-li Q za prostor vnořený do (P, v_i) $(i = 1, 2)$, dostaneme v Q topologii w_i. Nyní položme $f(\omega) = x$ a pro $z \in E$: $f(z) = \{y_n\}_1^{p+1}$, kde $y_n = x_n$ pro $1 \leqq n \leqq p$, $y_{p+1} = z$. Zřejmě f je homeomorfní zobrazení prostoru $(E \cup (\omega), u_{1x})$ na (Q_1, w_1) a současně homeomorfní zobrazení prostoru $(E \cup (\omega), u_{2x})$ na (Q_2, w_2). Protože $u_{1x} \neq u_{2x}$, jest $w_1 \neq w_2$, a tedy $v_1 \neq v_2$. Tím je dokázáno, že $\operatorname{moh} \Lambda = \operatorname{moh} \Delta$. Zbývá dokázat, že $\operatorname{moh} \Delta = \exp \mathfrak{s}$. Budiž $u \in \Delta$ a pro $x \in P$ budiž $u_x \in \Delta(x)$ x-souřadnice prvku u. Jest $\operatorname{moh} \Delta(x) = \mathfrak{e}^{\mathfrak{m}(x)}$, $\mathfrak{e} = \operatorname{moh} P$, $\mathfrak{m}(x) = \operatorname{moh} A(x)$. Tudíž existuje prosté zobrazení σ_x množiny $\Delta(x)$ na soustavu všech zobrazení množiny $A(x)$ do P. Je-li tedy $x \in P$, $u_x \in \Delta(x)$, jest $\sigma_x(u_x)$ zobrazení množiny $A(x)$ do P. Je-li nyní $u \in \Delta$, budiž $\tau(u)$ takové zobrazení množiny $\bigcup_x A(x)$ $(x \in P)$ do P, že pro každý $x \in P$ zúžení $\tau(u) \mid A(x)$ splyne se $\sigma_x(u_x)$, kde u_x je x-souřadnice prvku u. Snadno zjistíme, že tím je definováno prosté zobrazení τ množiny Δ do soustavy všech zobrazení množiny $\bigcup_x A(x)$ do P. Nyní moh $\bigcup_x A(x) = \mathfrak{s}$, moh $P = \mathfrak{e}$, takže podle definice **12.2.1** je moh $\Delta = \mathfrak{e}^{\mathfrak{s}}$. Avšak $1 < \mathfrak{e} \leqq \mathfrak{s} \leqq \exp \mathfrak{s}$, takže podle **12.2.1** $\mathfrak{e}^{\mathfrak{s}} = \exp \mathfrak{s}$.

VI. Jestliže pozměníme definici soustavy $\mathfrak{V}(x)$ popsanou v III tak, že nenecháme U probíhat všecka u_x-okolí bodu ω v prostoru $(E \cup (\omega), u_x)$, nýbrž pouze nějakou úplnou soustavu $\mathfrak{W}(\omega)$ u_x-okolí bodu ω, dostaneme místo $\mathfrak{V}(x)$ soustavu $\mathfrak{V}_0(x) \subset \mathfrak{V}(x)$, která je zřejmě úplnou soustavou v-okolí bodu x, kde $v = \lambda(u)$; při tom je moh $\mathfrak{V}_0(x) =$ $=$ moh $\mathfrak{W}(\omega)$. Soustavu $\mathfrak{W}(\omega)$ můžeme zvolit tak, aby měla mohutnost $\mathfrak{m}(x)$; totéž potom platí i o soustavě $\mathfrak{V}_0(x)$, takže $\chi(x) \leqq \mathfrak{m}(x)$. Necháme-li U probíhat soustavu u_x-okolí bodu ω, která nemusí být úplná, ale splňuje podmínku $(\omega) = \bigcap W$ $(W \in \mathfrak{W}(\omega))$, dostaneme místo $\mathfrak{V}(x)$ takovou soustavu $\mathfrak{V}_0(x) \subset \mathfrak{V}(x)$, že $(x) = \bigcup V$ $(V \in \mathfrak{V}_0(x))$ a že moh $\mathfrak{V}_0(x) =$ moh $\mathfrak{W}(\omega)$; z toho plyne $\psi(x) \leqq \mathfrak{z}(x)$. Nyní v V jsme viděli, že existuje takové homeomorfní zobrazení f prostoru $(E \cup (\omega), u_x)$ na prostor (Q, w) vnořený do (P, u), že $f(\omega) = (x)$. Z toho plyne, že $\chi(x \mid Q) = \mathfrak{m}(x)$, $\psi(x \mid Q) = \mathfrak{z}(x)$, takže podle **4.12.3** jest $\chi(x) = \mathfrak{m}(x)$, $\psi(x) = \mathfrak{z}(x)$.

12.2.5. Budiž P úplně regulární prostor. Budiž $Q \subset P$ hustá množina. Budiž Φ množina všech spojitých funkcí v oboru P. Do množiny Φ můžeme zavést topologie u, v takto. Topologie u je nejjemnější ze všech takových topologií ve Φ, vzhledem ke kterým pro $f_n \in \Phi$, $f \in \Phi$ platí $\lim f_n = f$, jestliže pro každý $x \in Q$ je $\lim f_n(x) = f(x)$ ve smyslu přirozené topologie v $\mathbf{E}_1$. Topologii v zavedeme pomocí definujících soustav $\mathfrak{V}(f)$ okolí jednotlivých $f \in \Phi$: Je-li $f_0 \in \Phi$, pak každý prvek V soustavy $\mathfrak{V}(f_0)$ je vytvořen konečnou posloupností $\{a_n\}_1^p$, kde $a_n \in Q$ pro $1 \leqq n \leqq p$, a číslem $\varepsilon > 0$ tak, že V se skládá ze všech těch $f \in \Phi$, pro něž platí: $1 \leqq n \leqq p \Rightarrow |f(a_n) - f_0(a_n)| < \varepsilon$. Topologie v je hrubší než topologie u. Budiž ještě w topologie v množině Φ, která je hrubší než u a je jemnější než v. Pak v prostoru (Φ, w) má každý bod charakter $\geqq \operatorname{moh} Q$.

Důkaz. I. Je-li $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost prvků množiny Φ, je-li $f \in \Phi$, $g \in \Phi$ a jestliže pro každý $x \in Q$ platí $\lim f_n(x) = f(x) = g(x)$, pak jest $f = g$. Neboť budiž $T = \mathscr{E}_x [f(x) - g(x) = 0]$; máme dokázat, že $T = P$. Zřejmě $Q \subset T$, takže množina $T \subset P$ je hustá podle **4.9.1.** Mimo to množina $T \subset P$ je uzavřená podle **7.1.18.** Tudíž $T = P$ podle **4.9.2.**

II. Budiž Λ soustava všech takových posloupností $\{f_n\}$ ($f_n \in \Phi$), ke kterým existuje aspoň jedna taková $g \in \Phi$, že: $x \in Q \Rightarrow \lim f_n(X) = g(x)$. Z I plyne, že funkce g je posloupností $\{f_n\}$ jednoznačně určena, takže můžeme položit $g = \lambda f_n$. Snadno zjistíme, že jsou splněny axiomy (IL) a (IIL) vyslovené ve větě **6.3.12**, takže topologie u v množině Φ existuje.

III. Soustavy $\mathfrak{V}(f)$ splňují axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) vyslovené ve **4.3.1**, takže podle **4.3.3** existuje topologie v v množině Φ. Snadno se zjistí, že v je H-topologie. Platí-li vztah $\lim f_n = g$ vzhledem k topologii u, platí týž vztah i vzhledem k topologii v. Neboť budiž V definující okolí prvku $g \in \Phi$, vytvořené konečnou posloupností $\{a_i\}_1^p$ ($a_i \in Q$) a číslem $\varepsilon > 0$, tedy $f \in V \Leftrightarrow |f(a_i) - g(a_i)| < \varepsilon$ pro $1 \leqq i \leqq p$. Z definice topologie u plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a_i) = g(a_i)$ pro $1 \leqq i \leqq p$. Z toho plyne ihned, že existuje takový index k, že: $n > k \Rightarrow f_n \in V$; podle **6.3.5** je tudíž $\lim f_n = g$ vzhledem k topologii v. Tím je zjištěno, že topologie v je hrubší než topologie u.

IV. Tvrzení o charakteru je triviální, je-li množina Q konečná; nechť tedy Q je nekonečná. Zvolme $f_0 \in \Phi$. Máme dokázat, že $\chi(f_0) \geqq \mathfrak{q}$, kde charakter χ je míněn vzhledem k topologii w a $\mathfrak{q} = \operatorname{moh} Q$.

V. Pro každý $a \in Q$ budiž $\Omega(a) = \mathscr{E}_f [f \in \Phi, |f(a) - f_0(a)| < 1]$. $\Omega(a)$ je tedy v-okolí bodu $f_0 \in \Phi$, a tudíž podle **4.1.12** též jeho w-okolí. Předpokládejme, že při topologii w je $\chi(f_0) < \mathfrak{q}$. Potom existuje taková úplná soustava $\mathfrak{W}$ okolí bodu f_0 v prostoru (Φ, w), že $\operatorname{moh} \mathfrak{W} < \mathfrak{q}$. Pro každou $W \in \mathfrak{W}$ budiž $\mu(W)$ množina všech těch $a \in Q$, pro něž platí

$\Omega(a) \supset W$. Protože soustava $\mathfrak{W}$ je úplná, existuje ke každému $a \in Q$ aspoň jedna taková $W \in \mathfrak{W}$, že $a \in \mu(W)$. Tudíž

$$Q = \bigcup \mu(W) \quad (W \in \mathfrak{W}) .$$

Protože moh $Q = \mathfrak{q} >$ moh $\mathfrak{W}$, plyne ze **3.7.10**, že existuje taková $W_0 \in \mathfrak{W}$, že množina $T = \mu(W_0) \subset Q$ je nekonečná.

VI. P je F-prostor podle definice **8.4.1**, R-prostor podle **8.4.2**, H-prostor podle **5.3.4.** Je-li $\Delta \subset P$ otevřená a je-li $T \cap \Delta$ nekonečná, pak existuje bod $c \in T$ a takové otevřené okolí Γ bodu c v prostoru P, že $\overline{\Gamma} \subset \Delta$ a že množina $T \cap (\Delta - \overline{\Gamma})$ je nekonečná. Neboť existují takové dva body a, b, že $a \in T \cap \Delta$, $b \in T \cap \Delta$, $a \neq b$. Podle **5.1.15** a podle definice **5.2.1** existují takové dvě otevřené množiny G, H, že $a \in G, b \in H, G \cap H = \emptyset$. Jest $T \cap \Delta = [T \cap (\Delta - G)] \cup [T \cap (\Delta - H)]$, takže můžeme předpokládat, že třeba $T \cap (\Delta - G)$ je nekonečná. Položme $c = a$. Podle **4.2.5** je $G \cap \Delta$ okolí bodu c. Protože P je FR-prostor, existuje takové otevřené okolí Γ bodu c, že $\overline{\Gamma} \subset G \cap \Delta$.

VII. Je-li $\Delta = P$, je množina Δ otevřená a $T \cap \Delta$ je nekonečná. Podle VI tedy existuje bod $a_1 \in T$ a takové otevřené okolí G_1 bodu a_1 v prostoru P, že množina $T - \overline{G}_1$ je nekonečná. Obecněji předpokládejme, že při určitém $p \in \mathbf{N}$ pro $1 \leqq n \leqq p$ existuje bod $a_n \in T$ a takové otevřené okolí G_n bodu a_n v prostoru P, že množina $T - \bigcup\limits_{n=1}^{p} \overline{G}_n$ je nekonečná a že: $1 \leqq m < n \leqq p \Rightarrow \overline{G}_m \cap \overline{G}_n = \emptyset$. Položme $\Delta = P - \bigcup\limits_{n=1}^{p} \overline{G}_n$, takže Δ je otevřená a $T \cap \Delta$ je nekonečná. Tudíž podle VI existuje bod $a_{p+1} \in P$ a takové jeho otevřené okolí G_{p+1}, že $\overline{G}_{p+1} \cap \bigcup\limits_{n=1}^{p} \overline{G}_n = \emptyset$, že množina $T - \bigcup\limits_{n=1}^{p+1} \overline{G}_n$ je nekonečná. Můžeme tedy rekurentně určit bodovou posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ a disjunktní posloupnost otevřených množin $\{G_n\}_1^\infty$ tak, že $a_n \in T$ a že G_n je okolí bodu a_n v prostoru P.

VIII. Podle definice **8.4.1** existuje ke každému n taková $g_n \in \Phi$, že $g_n(a_n) = 1$, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1$ a že $x \in P - G_n \Rightarrow g_n(x) = 0$. Pro $x \in P$ budiž $f_n(x) = g_n(x) + f_0(x)$. Protože množiny G_n jsou disjunktní, je zřejmě $\lim f_n(x) = f_0(x)$ pro každý $x \in P$ a proto je $\lim f_n =$

$= f_0$ ve smyslu topologie u prostoru Φ. Nyní W_0 je w-okolí bodu $f_0 \in \Phi$, a tudíž podle **4.2.12** též u-okolí tohoto bodu. Podle definice **6.3.1** tedy existuje takový index k, že $f_k \in W_0$. Avšak $a_k \in T = \mu(W_0)$, tedy $\Omega(a_k) \supset \supset W_0$, takže $f_k \in \Omega(a_k)$. To znamená, že $|f_k(a_k) - f_0(a_k)| < 1$, a to je nemožné, neboť $|f_k(a_k) - f_0(a_k)| = |g_k(a_k)| = 1$.

Poznámka. Uvažujeme-li místo prostoru (Φ, w) prostor Φ_0 vnořený do (Φ, w), zůstane celý důkaz v platnosti, má-li Φ_0 tu vlastnost, že $f_n \in \Phi_0$ pro funkce f_n, které se vyskytují v VIII.

12.2.6. Budiž E_0 nekonečná množina, $\mathfrak{e} = \text{moh}\, E_0$. Budiž ω symbol různý od všech prvků množiny E_0. Existuje soustava Δ_0 L-topologií v množině $E_0 \cup (\omega)$ s těmito vlastnostmi:

[1] moh $\Delta_0 = \exp \mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

[2] Všecky body $x \in E_0$ jsou isolované při každé topologii $u \in \Delta_0$.

[3] Při každé topologii $u \in \Delta_0$ jest $\chi(\omega) = \exp \mathfrak{e}$.

Důkaz. I. Pro každé $z \in E_0$ budiž $P(z)$ isolovaný dvoubodový prostor. Budiž

$$P_1 = \mathfrak{P} P(z) \quad (z \in E_0)\,.$$

Podle definice **12.2.1** je moh $P_1 = 2^{\mathfrak{e}}$, tedy moh $P_1 = \exp \mathfrak{e}$ podle **12.2.1.** Podle **6.2.10** a **6.2.19** je P_1 FH-prostor. Podle **8.3.18** je P_1 kompaktní, a tedy podle **8.3.19** normální. Podle **6.2.17** má P_1 otevřenou basi $\mathfrak{B}_1$ mohutnosti $\mathfrak{e}$.

II. Budiž $R = Z \cup (\omega)$, kde Z má mohutnost $\mathfrak{z} = \mathfrak{e}$ a topologie prostoru R byla popsána v části I důkazu věty **12.2.3.** Snadno se zjistí, že R je kompaktní FH-prostor mohutnosti $\mathfrak{e}$ a že $\chi^t(R) = \mathfrak{e}$. Budiž $R_n = R$ pro všecka n,

$$P_2 = \mathfrak{P}_{n=1}^{\infty} R_n\,.$$

Zřejmě moh $P_2 = \mathfrak{e}^{\aleph_0}$. Prostor P_2 je podle **6.2.10** a **6.2.19** FH-prostor a podle **8.3.18** je kompaktní, takže podle **8.3.19** je normální. Podle **6.2.17** má P_2 otevřenou basi $\mathfrak{B}_2$ mohutnosti $\mathfrak{e}$.

III. Budiž T_1 množina těch bodů prostoru P_2, jejichž žádná souřadnice není rovna ω; budiž $T_2 = P_2 - T_1$. Ze **4.9.3** a z definice **6.2.1** snadno plyne, že obě množiny T_1, T_2 jsou husté v prostoru P_2. Ze **6.2.14** plyne, že každý bod $x \in T_1$ má v prostoru P_2 charakter $\aleph_0$. Zřejmě moh $T_1 = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$.

IV. Položíme $P = P_1 \cup P_2$, kde $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Jest moh $P_2 = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$; zřejmě $\mathfrak{c}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ a podle **12.2.1** $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \exp \mathfrak{c}$; protože moh $P_1 = \exp \mathfrak{c}$, jest moh $P = \exp \mathfrak{c}$ podle **3.7.10.** Pokládáme P za topologický prostor: uzávěrem $\overline{X}$ množiny $X \subset P$ bude sjednocení uzávěru množiny $P_1 \cap X$ v prostoru P_1 a uzávěru množiny $P_2 \cap X$ v prostoru P_2. Z I a II plyne snadno, že P je normální prostor s otevřenou basí $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$. Podle **3.7.10** jest moh $\mathfrak{B} = \mathfrak{c}$.

V. Budiž Φ soustava všech spojitých funkcí v oboru P. Budiž $o(x) = 0$ pro všecky $x \in P$, takže $o \in \Phi$. Budiž M libovolná část množiny T_1; budiž $Q = P_1 \cup M \cup T_2$; zřejmě moh $Q = \exp \mathfrak{c}$. Protože množina T_2 je hustá v prostoru P_2, je Q hustá v prostoru P. Proto můžeme v množině Φ zavést topologii u popsanou v **12.2.5**; tato topologie $u = u_M$ závisí ovšem na volbě množiny $M \subset T_1$. Budiž $\mathfrak{B}_0$ množina všech těch dvojic $(U, V) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, pro které platí $\overline{U} \subset V$. Podle **3.7.8** je moh $\mathfrak{B}_0 \leqq \mathfrak{c}$. Každé dvojici $(U, V) \in \mathfrak{B}_0$ můžeme podle **7.3.10** přiřadit takovou funkci $f_{U,V} \in \Phi$, že: $x \in \overline{U} \Rightarrow f_{U,V}(x) = 1$, $x \in P - V \Rightarrow f_{U,V}(x) = 0$. Budiž $E_1 \subset \Phi$ soustava všech $f_{U,V}[(U, V) \in \mathfrak{B}_0]$; jest moh $E_1 \leqq \mathfrak{c}$. Budiž u_0 topologie v množině $E_1 \cup (o)$, která vznikne vnořením do (Φ, u). Podle **6.3.9** a **6.3.12** je u_0 L-topologie. Podle **12.2.5** má o v prostoru (Φ, u) charakter $\geqq \exp \mathfrak{c}$. Z poznámky za důkazem věty **12.2.5** plyne, že totéž platí i v prostoru $[E_1 \cup (o), u_0]$. Uvažujme nyní novou topologii u^* v množině $E_1 \cup (o)$: pro $X \subset E_1 \cup (o)$ budiž buďto $u^*X = X \cup (o)$ nebo $u^*X = X$ podle toho, zda jest či není $o \in u_0X$. Všecky body $\xi \in E_1$ jsou isolované v $E_1 \cup (o)$ při topologii u^*; u^*-okolí bodu o jsou totožná s jeho u_0-okolími. Z toho dostáváme nejprve snadno, že charakter bodu o je při u^* týž jako při u_0, a je tedy $\geqq \exp \mathfrak{c}$; protože však moh $E_1 \leqq \mathfrak{c}$, je tento charakter podle **4.12.23** přesně roven $\exp \mathfrak{c}$.

VI. Topologie u^* v množině $E_1 \cup (o)$ závisí na volbě množiny $M \subset T_1$. Protože moh $T_1 = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$, jest $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ mohutnost soustavy množin M. Abychom ukázali, že touž mohutnost má i soustava všech topologií u^*, je třeba pouze zjistit, že dvěma různým volbám M_1, M_2

množiny M odpovídají vždy dvě různé hodnoty u_1^*, u_2^* topologie u^*. Budiž třeba $M_1 - M_2 \neq \emptyset$, $a \in M_1 - M_2$. Protože $M_1 \subset T_1$, má bod a v prostoru P_2 charakter $\aleph_0$ a lehko zjistíme, že totéž platí i v prostoru P. Podle **4.12.16** existuje taková posloupnost $\{V_n\}$ otevřených okolí bodu a v prostoru P, že $V_n \supset V_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = (a)$. Podle **5.4.5** existuje posloupnost $\{U_n\}$ otevřených okolí bodu a v prostoru P, pro kterou platí $\overline{U}_n \subset V_n$. Je tedy $(U_n, V_n) \in \mathfrak{B}_0$, a tudíž $f_n \in E_1$, kde $f_n = f_{U_n, V_n}$. Zřejmě jest $\lim f_n = o$ ve smyslu topologie u_2^*, ne však ve smyslu topologie u_1^*, takže $u_1^* \neq u_2^*$.

VII. Nyní jsou splněna všecka tvrzení věty, jestliže místo E_0 dáme E_1, místo ω pak o. Zbývá však malá potíž, protože o mohutnosti množiny E_1 víme pouze tolik, že je nejvýš rovna $\mathfrak{c}$. K překonání této potíže stačí zvolit nějakou takovou množinu E_2, pro kterou je moh $E_2 = \mathfrak{c}$, $E_2 \cap [E_1 \cup (o)] = \emptyset$ a položit $E_0 = E_1 \cup E_2$. Při tom uzávěr množiny $X \subset E_0 \cup (o)$ definujeme jako sjednocení množiny $E_2 \cap X$ a uzávěru množiny $[E_1 \cup (o)] \cap X$ v prostoru $E_1 \cup (o)$.

12.2.7. Budiž E nekonečná množina, moh $E = \mathfrak{c}$. Existuje právě $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ L-topologií v množině E. Dokonce existuje $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ takových dědičně normálních L-topologií v množině E, že každý $x \in E$ má charakter $\exp \mathfrak{c}$.

Důkaz. I. Zřejmě množina E obsahuje $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$ posloupností $\{x_n\}_0^{\infty}$, takže existuje $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ soustav takových posloupností. Takovou soustavu Λ posloupností nám však dá každá L-topologie v množině E, jestliže položíme $\{x_n\}_0^{\infty} \in \Lambda$ právě tehdy, je-li $\{x_n\}_1^{\infty}$ při dané L-topologii konvergentní a má-li při ní limitu x_0. Protože různé L-topologie zřejmě dají různé soustavy Λ, existuje v množině E nejvýš $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ L-topologií.

II. Je ještě třeba udat soustavu mohutnosti $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ takových dědičně normálních L-topologií v množině E, při kterých každý bod má charakter $\exp \mathfrak{c}$. Takovou soustavu topologií však dostaneme konstrukcí popsanou v části III důkazu věty **12.2.4**, jestliže při této konstrukci nevyjdeme od **12.2.3**, nýbrž od **12.2.6** (viz také další části citovaného důkazu).

12.3.1. Kartézský součin nespočetně mnoha více než jednobodových prostorů není dědičně normální.

Důkaz. I. Každý takový kartézský součin obsahuje množinu homeomorfní s kartézským součinem nespočetně mnoha dvoubodových prostorů. Proto stačí ukázat, že při nespočetné $\mathbf{C}$ kartézský součin

$$R = \mathfrak{P} P(z) \quad (z \in \mathbf{C})$$

není dědičně normální, jestliže každý $P(z)$ je isolovaný prostor skládající se ze dvou čísel 0, 1. Zřejmě můžeme položit $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$, kde $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2 = \emptyset$, $\mathbf{C}_1$ je nespočetná a $\mathbf{C}_2$ je nekonečná.

II. Pro $M \subset \mathbf{C}$, $x \in R$ budiž $\varphi(x, M)$ množina všech těch $\xi \in R$, pro které platí: $z \in M \Rightarrow \xi(z) = x(z)$. Budiž $\mathfrak{K}$ soustava všech konečných částí množiny $\mathbf{C}$. Podle definice **6.2.1** pro každý $x \in R$ množiny $\varphi(x, M)$ ($M \in \mathfrak{K}$) tvoří úplnou soustavu okolí bodu x.

III. Budiž $\omega(x) = 0$ pro všecka $z \in \mathbf{C}$, tedy $\omega \in R$. Budiž A_1 množina všech takových $x \in R - (\omega)$, že: $z \in \mathbf{C}_1 \Rightarrow x(z) = 0$; budiž A_2 množina všech takových $x \in R - (\omega)$, že: $z \in \mathbf{C}_2 \Rightarrow x(z) = 0$. Zřejmě $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\overline{A}_1 = A_1 \cup (\omega)$, $\overline{A}_2 = A_2 \cup (\omega)$, takže A_1, A_2 jsou oddělené podle **5.1.2.** Podle **5.4.9** stačí dokázat, že A_1, A_2 nejsou H-oddělené. Předpokládejme opak; pak existuje okolí Ω_1 množiny A_1 a okolí Ω_2 množiny A_2, kde $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

IV. Pro $z \in \mathbf{C}$ budiž $a_z(z) = 1$, $a_z(\zeta) = 0$ pro $\zeta \in \mathbf{C} - (z)$, tedy $a_z \in R$. Pak jest: $z \in \mathbf{C}_1 \Rightarrow a_z \in A_2$, $z \in \mathbf{C}_2 \Rightarrow a_z \in A_1$.

V. Budiž $z_1 \in \mathbf{C}_2$. Protože $a_{z_1} \in A_1$, jest Ω_1 okolí bodu a_{z_1} podle **4.2.8**, takže existuje $M_1 \in \mathfrak{K}$, pro kterou $\varphi(a_{z_1}, M_1) \subset \Omega_1$. Obecněji předpokládejme, že při určitém $p \in \mathbf{N}$ jsme už každému n, kde $1 \leqq n \leqq p$, přiřadili $z_n \in \mathbf{C}_2$ a $M_n \in \mathfrak{K}$ tak, že

$$1 \leqq n \leqq p \Rightarrow \varphi(a_{z_n}, M_n) \subset \Omega_1 ,$$

$$1 \leqq m \leqq p - 1 \Rightarrow z_{m+1} \in \mathbf{C} - \bigcup_{n=1}^{m} M_n .$$

Množina $\bigcup_{n=1}^{p} [M_n \cup (z_n)] \subset \mathbf{C}$ je konečná; protože $\mathbf{C}_2 \subset \mathbf{C}$ je nekonečná, můžeme zvolit $z_{p+1} \in \mathbf{C}_2 - \bigcup_{n=1}^{p} [M_n \cup (x_n)]$. Protože $a_{z_{p+1}} \in A_1$, je Ω_1 okolí bodu $a_{z_{p+1}}$, takže existuje $M_{p+1} \in \mathfrak{K}$, pro kterou $\varphi(a_{z_{p+1}}, M_{p+1}) \subset \subset \Omega_1$. Můžeme tedy rekurentně určit dvě posloupnosti $\{z_n\}_1^\infty$ a $\{M_n\}_1^\infty$ tak, že $z_p \in \mathbf{C}_2$, $M_p \in \mathfrak{K}$, $\varphi(a_{z_p}, M_p) \subset \Omega_1$, $z_{p+1} \in \mathbf{C} - \bigcup_{n=1}^{p} [M_n \cup (z_n)]$ pro $p \in \mathbf{N}$.

VI. Protože $\bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n \cup (z_n)]$ je spočetná, ale $\mathbf{C}_1 \subset \mathbf{C}$ je nespočetná, existuje $\zeta \in \mathbf{C}_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n \cup (z_n)]$. Protože $a_\zeta \in A_2$, jest Ω_2 okolí bodu a_ζ; existuje tedy taková $K_0 \in \mathfrak{K}$, že $\varphi(a_\zeta, K_0) \subset \Omega_2$.

VII. Protože množina $K_0 \subset \mathbf{C}$ je konečná, existuje takový index k, že

$$K_0 \cap \bigcup_{n=1}^{k} [M_n \cup (z_n)] = K_0 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n \cup (z_n)] .$$

Budiž $b(z_{k+1}) = 1$, $b(\zeta) = 1$, $b(z) = 0$ pro $z \in \mathbf{C}$, $z_{k+1} \neq z \neq \zeta$, tedy $b \in R$. Protože $\zeta \in \mathbf{C} - \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n \cup (z_n)]$, jest $\zeta \in \mathbf{C} - M_{k+1}$. Z toho plyne $b \in \varphi(a_{z_{k+1}}, M_{k+1})$, tedy $b \in \Omega_1$. Kdyby bylo $z_{k+1} \in K_0$, bylo by $z_{k+1} \in K_0 \cap \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n \cup (z_n)]$, tedy $z_{k+1} \in \bigcup_{n=1}^{k} [M_n \cup (z_n)]$, ale to je nemožné. Tudíž $z_{k+1} \in \mathbf{C} - K_0$ a z toho plyne $b \in \varphi(a_\zeta, K_0)$, tedy $b \in \Omega_2$. Tudíž $b \in \Omega_1$, $b \in \Omega_2$ a to je nemožné, neboť $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

12.3.2. Budiž $\mathfrak{c}$ nekonečná mohutnost. Existuje prostor P s těmito vlastnostmi:

[1] P je úplně regulární.

[2] $\operatorname{moh} P = \exp \exp \mathfrak{c}$.

[3] Existuje taková množina $Q \subset P$, že Q je hustá v P, že $\operatorname{moh} Q = \mathfrak{c}$ a že každý $x \in Q$ je isolovaným bodem prostoru P.

[4] P není dědičně normální.

Důkaz. I. Zvolme množinu $\mathbf{C}$ mohutnosti $\mathfrak{c}$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ nechť (isolovaný) prostor $R(z)$ se skládá ze dvou čísel 0, 1; utvořme kartézský součin

$$S = \mathfrak{P}R(z) \quad (z \in \mathbf{C}) .$$

Budiž $\mathfrak{C}$ soustava všech konečných částí množiny $\mathbf{C}$; podle **3.7.11** jest moh $\mathfrak{C} = \mathfrak{c}$. Je-li $s \in S$, $c \in \mathfrak{C}$, budiž $\mu(s, c)$ množina těch $x \in S$, pro něž: $z \in c \Rightarrow x(z) = s(z)$. Z definice **6.2.1** plyne, že soustava $\mathfrak{B}$ všech množin $\mu(s, c)$ $(s \in S,\ c \in \mathfrak{C})$ je otevřená base prostoru S. Při dané $c \in \mathfrak{C}$ existuje zřejmě jen konečný počet navzájem různých množin $\mu(s, c)$ $(s \in S)$, takže ze **3.7.10** snadno soudíme, že moh $\mathfrak{B} = \mathfrak{c}$.

II. Každou dvojici $b = (b^1, b^2) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ nazveme *čtverec*; b^1 je *základna čtverce* b. Budiž T soustava všech neprázdných konečných množin čtverců; jednotlivé čtverce, ze kterých se skládá $t \in T$, nazveme *složkami* prvku t. Ze **3.7.8** a **3.7.11** plyne, že moh $T = \mathfrak{c}$. Budiž Q soustava všech těch $t \in T$, jejichž každé dvě složky jsou navzájem disjunktní; do Q řadíme též ty $t \in T$, které mají jedinou složku. Jest moh $Q = \mathfrak{c}$.

III. Budiž H soustava všech zobrazení množiny S do S. Jest moh $S = \exp \mathfrak{c}$, tedy moh $H = \exp\exp \mathfrak{c}$, takže podle **3.7.10** také moh $P = \exp\exp \mathfrak{c}$, kde $P = Q \cup H$. Zavedeme do P topologii pomocí definujících soustav okolí $\mathfrak{U}(x)$ $(x \in P)$ (viz **4.3.3**). Pro $x \in Q$ nechť $\mathfrak{U}(x)$ obsahuje pouze množinu (x), takže každý $x \in Q$ je isolovaným bodem prostoru P. Pro $h \in H$ vznikne $\mathfrak{U}(h)$ takto. Nejprve zvolme neprázdnou konečnou $N \subset S$. Potom pro každý $s \in N$ zvolme dva prvky $c'(s)$, $c''(s)$ soustavy $\mathfrak{C}$, což dá dva prvky

$$B'(s) = \mu[s, c'(s)]\,, \quad B''(s) = \mu[h(s), c''(s)]$$

soustavy $\mathfrak{B}$. Tyto volby určí množinu $V \subset Q$, která se skládá ze všech těch $t \in Q$, které pro každý $s \in N$ mají takovou složku $b = (b^1, b^2)$, pro kterou platí $s \in b^1$, $b^1 \subset B'(s)$, $b^2 \subset B''(s)$; ale vedle těchto složek patřících jednotlivým $s \in N$ může $t \in V$ mít ještě další složky. Prvky soustavy $\mathfrak{U}(h)$ jsou vytvořeny právě popsanými volbami; má-li V právě popsaný (na těch volbách závislý) význam, pak ty volby vytvářejí prvky

$$(V - K) \cup M \in \mathfrak{U}(h)\,,$$

kde K probíhá všecky konečné části množiny Q a M znamená množinu všech těch $\varphi \in H$, pro které: $s \in N \Rightarrow \varphi(s) = h(s)$. Že dostaneme skutečně topologii v množině P, plyne ze **4.3.3**, neboť správnost axiómů ($\mathrm{I}\mathfrak{U}$) až ($\mathrm{IV}\mathfrak{U}$) se snadno zjistí.

IV. Pro prostor H vnořený do P zřejmě platí:

$$H = \mathfrak{P} S(z) \quad (z \in S),$$

kde pro každý $z \in S$ znamená $S(z)$ isolovaný prostor, jehož body splynou s body prostoru S. Podle **12.3.1** prostor H není dědičně normální, takže ani P není dědičně normální.

V. Snadno se zjistí, že v prostoru P všecka definující okolí jsou otevřená, takže P je F-prostor. Avšak rovněž snadno se zjistí, že tato definující okolí jsou také uzavřená. Z toho pak plyne, že je-li U libovolné definující okolí a je-li

$$x \in U \Rightarrow f(x) = 0\,, \quad x \in P - U \Rightarrow f(x) = 1\,,$$

je f spojitá funkce v oboru P. Prostor P je tedy úplně regulární.

12.3.3. Nechť H-prostor P obsahuje hustou množinu Q mohutnosti $\mathfrak{e}$. Pak jest $\operatorname{moh} P \leqq \exp \exp \mathfrak{e}$. Budiž $\mathfrak{Q}$ soustava všech částí množiny Q; budiž $\mathbf{Q}$ soustava všech částí množiny $\mathfrak{Q}$. Stačí udat prosté zobrazení prostoru P do množiny $\mathbf{Q}$. Pro $x \in P$ budiž $\mathfrak{U}(x)$ soustava všech okolí bodu x. Pro každý $x \in P$ a pro každou $U \in \mathfrak{U}(x)$ zvolme bod $f_x(U) \in U \cap Q$ (viz **4.9.3**). Pro každý $x \in P$ budiž $M(x) \subset Q$ množina všech bodů $f_x(U)$ $[U \in \mathfrak{U}(x)]$. Pro každý $x \in P$ budiž $\mathfrak{M}(x)$ soustava všech množin $U \cap M(x)$ $[U \in \mathfrak{U}(x)]$. Jest $\mathfrak{M}(x) \in \mathbf{Q}$ a stačí zjistit, že: $x \neq y \Rightarrow \mathfrak{M}(x) \neq \mathfrak{M}(y)$. Budiž naopak $x \neq y$, $\mathfrak{M}(x) = \mathfrak{M}(y)$. Protože P je H-prostor, existují $U \in \mathfrak{U}(x)$, $V \in \mathfrak{U}(y)$, $U \cap V = \emptyset$. Jest $V \cap M(y) \in \mathfrak{M}(y)$, tedy $V \cap M(y) \in \mathfrak{M}(x)$. Tudíž existuje taková $W \in \mathfrak{U}(x)$, že $V \cap M(y) = W \cap M(x)$. Protože $U \cap V = \emptyset$, je tedy $U \cap W \cap M(x) = \emptyset$. To je nemožné, neboť $U \cap W \in \mathfrak{U}(x)$ podle **4.2.5**, takže $f_x(U \cap W) \in U \cap W \cap M(x)$.

12.3.4. Budiž Q nekonečný isolovaný prostor, $\mathfrak{e} = \operatorname{moh} Q$. Budiž $\beta(Q)$ kompaktní β-obal prostoru Q. Pak jest $\operatorname{moh} \beta(Q) = \exp \exp \mathfrak{e}$. Z **12.3.2** plyne, že lze Q vnořit do takového úplně regulárního prostoru P, že množina Q je hustá v P a že $\operatorname{moh} P = \exp \exp \mathfrak{e}$.

Podle **8.4.8** existuje kompaktní β-obal B prostoru P. Podle definice **8.4.3** je B kompaktní FH-prostor a množina P je hustá v B, takže podle **4.9.8** také množina Q je hustá v B. Podle **8.4.9** existuje spojité zobrazení prostoru $\beta(Q)$ na prostor B. Tudíž moh $\beta(Q) \geqq$ moh $B \geqq$ $\geqq$ moh $P = \exp \exp \mathfrak{c}$. Na druhé straně je moh $\beta(Q) \leqq \exp \exp \mathfrak{c}$ podle **12.3.3**, neboť podle definice **8.4.3** je $\beta(Q)$ H-prostor, ve kterém množina Q je hustá.

12.3.5. Budiž N nekonečný normální prostor, který není S-kompaktní. Budiž $\beta(N)$ jeho kompaktní β-obal. Pak $\beta(N)$ není dědičně normální. Podle **8.2.6** existuje nekonečná množina $Q \subset N$, jejíž derivace v prostoru N je prázdná. Podle **4.4.2** je množina Q uzavřená v prostoru N, takže podle **8.4.14** existuje kompaktní β-obal $\beta(Q)$ prostoru Q vnořený do $\beta(N)$. Stačí tedy dokázat, že $\beta(Q)$ není dědičně normální. Prostor Q je isolovaný podle **4.7.4.** Můžeme tedy zavést prostory P, B jako v důkazu věty **12.3.4**; prostor P podle **12.3.2** není dědičně normální, takže ani $B \supset P$ není dědičně normální. Jak jsme si už v předcházejícím důkazu povšimli, existuje spojité zobrazení h prostoru $\beta(Q)$ na prostor B. Nyní B je H-prostor a $\beta(Q)$ je kompaktní, takže zobrazení h podle **8.3.23** je oboustranně spojité. Kdyby $\beta(Q)$ byl dědičně normální, platilo by podle **7.2.21** totéž o B a to je nemožné.

12.3.6. Budiž Q nekonečný isolovaný prostor a budiž $\beta(Q)$ jeho kompaktní β-obal. Budiž $\mathfrak{B}$ soustava uzávěrů $\overline{X}$ [v prostoru $\beta(Q)$] všech množin $X \subset Q$. Pak $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru $\beta(Q)$.

Důkaz. I. Je-li $X \subset Q$, pak množiny X, $Q - X$ jsou uzavřené v prostoru Q, takže $\overline{X} \cap \overline{Q - X} = \emptyset$ podle **8.4.11**, neboť Q je zřejmě normální prostor. Podle definice **8.4.3** je $\overline{Q} = \beta(Q)$, tedy $\overline{X} \cup \overline{Q - X} =$ $= \beta(Q)$, takže množina $\overline{X} = \beta(Q) - \overline{Q - X}$ je otevřená.

II. Budiž $a \in \beta(Q)$ a budiž U okolí bodu a v prostoru $\beta(Q)$. Podle **4.4.13** a **4.5.17** je třeba pouze ukázat, že existuje taková $X \subset Q$, že $a \in \overline{X}$, $\overline{X} \subset U$. Podle definice **8.4.3** je $\beta(Q)$ kompaktní FH-prostor, tedy R-prostor podle **5.4.5** a **8.3.19.** Tudíž existuje takové okolí V bodu a, že $\overline{V} \subset U$. Budiž $X = Q \cap V \subset Q$. Jest $\overline{X} \subset \overline{V} \subset U$ a podle **4.2.13** (místo M, N, U vezmeme Q, (a), V) jest $a \in \overline{X}$.

12.3.7. Budiž Q spočetný isolovaný prostor a budiž $\beta(Q)$ jeho kompaktní β-obal. Každá množina hustá v $\beta(Q) - Q$ má mohutnost $\geqq \exp \aleph_0$. Budiž Z množina všech racionálních čísel. Podle **2.2.7** existuje prosté zobrazení f množiny Z na Q. Ke každému $\xi \in \mathbf{E}_1$ existuje v Z taková prostá posloupnost $\{r_n\}$, že $\lim r_n = \xi$. Budiž $A(\xi)$ množina všech členů posloupnosti $\{r_n\}$; budiž $B(\xi) = f^1[A(\xi)]$. Množina $\overline{B(\xi)} \subset \beta(Q)$ je kompaktní (viz **8.3.1**), kdežto $B(\xi) \subset Q$ je nekonečná a isolovaná; tedy $\emptyset \neq C(\xi) = \overline{B(\xi)} - B(\xi) \subset \beta(Q) - Q$. Podle **12.3.6** je $\overline{B(\xi)}$ otevřená v prostoru $\beta(Q)$, takže $C(\xi)$ je relativně otevřená v $\beta(Q) - Q$. Jestliže T je hustá v $\beta(Q) - Q$, pak podle **4.9.5** existuje bod $g(\xi) \in T \cap C(\xi)$. Podle **2.3.4** je třeba ještě jen zjistit, že body $g(\xi)$ jsou všecky navzájem různé. Je-li však $\xi_1 \in \mathbf{E}_1$, $\xi_2 \in \mathbf{E}_1$, $\xi_1 \neq \xi_2$, je množina $A(\xi_1) \cap A(\xi_2)$ konečná, takže také množina $K = B(\xi_1) \cap \cap B(\xi_2)$ je konečná. Zřejmě

$$C(\xi_1) \subset \overline{B(\xi_1) - K}\,, \quad C(\xi_2) \subset \overline{B(\xi_2) - K}\,.$$

Dále jsou množiny $B(\xi_1) - K$, $B(\xi_2) - K$ relativně uzavřené v Q, jelikož Q je isolovaný prostor; rovněž je zřejmé, že Q je normální. Tudíž podle **8.4.11** je $\overline{B(\xi_1) - K} \cap \overline{B(\xi_2) - K} = \emptyset$ a tím spíš $C(\xi_1) \cap C(\xi_2) = = \emptyset$, tedy $g(\xi_1) \neq g(\xi_2)$.

12.3.8. Budiž Q nekonečný isolovaný prostor a budiž $\beta(Q)$ jeho kompaktní β-obal. Budiž F nekonečná uzavřená podmnožina prostoru $\beta(Q)$. Pak jest moh $F \geqq \exp \exp \aleph_0$. Podle úvahy provedené v částech VI a VII důkazu věty **12.2.5** (místo tehdejších P, T máme nyní $\beta(Q)$, F) existuje taková bodová posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ a taková disjunktní posloupnost množin $\{G_n\}_1^\infty$, že $a_n \in F$ a G_n je okolí bodu a_n v prostoru $\beta(Q)$. Podle **12.3.6** můžeme předpokládat, že $G_n = \overline{X}_n$, kde $X_n \subset Q$. Budiž $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n)$, takže $\overline{A} \subset F$ podle **4.4.7**. Zřejmě A je spočetný isolovaný prostor. Množina $\overline{A}$ je kompaktní podle **8.3.1** a je to FH-prostor podle **4.6.10** a **5.2.1**; množina A je hustá v $\overline{A}$. Budiž f omezená funkce v oboru A. Pro $x \in X_n$ budiž $\varphi(x) = f(a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; pro $x \in Q - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ budiž $\varphi(x) = 0$. Pak je φ omezená funkce v oboru Q. Protože Q je isolovaný prostor, je funkce φ spojitá. Podle definice **8.4.3** existuje taková spojitá funkce ψ v oboru $\beta(Q)$, že $\varphi = \psi \mid Q$. Je-li $g = \psi \mid \overline{A}$, je g spojitá funkce v oboru $\overline{A}$ a snadno se zjistí, že $f = g \mid A$. Podle definice **8.4.3** je tedy $\overline{A}$ kompaktní β-obal spočetného isolovaného prostoru A. Podle **12.3.4** je tudíž moh $\overline{A} \geqq \exp\exp \aleph_0$. Protože $F \supset \overline{A}$, je též moh $F \geqq \geqq \exp\exp \aleph_0$.

12.3.9. Budiž Q úplně regulární prostor a budiž $\beta(Q)$ jeho kompaktní β-obal. Množina $F \neq \emptyset$ budiž uzavřená v $\beta(Q)$ a budiž G_δ-množinou v $\beta(Q)$; dále budiž $Q \cap F = \emptyset$. Pak jest moh $F \geqq \exp\exp \aleph_0$. Podle definice **8.4.3** je $\beta(Q)$ kompaktní FH-prostor, je tedy normální podle **8.3.19.** Tudíž podle **7.3.14** existuje taková spojitá funkce f v oboru $\beta(Q)$, že: $x \in \beta(Q) \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in F \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x) = 0$. Množina $\mathscr{E}_x\,[x \in \beta(Q),\ f(x) < 1] = G$ je otevřená podle **7.1.14**; jest $F \subset G$, tedy $G \neq \emptyset$. Protože Q je hustá v $\beta(Q)$ (viz definici **8.4.3**), plyne ze **4.9.5**, že existuje bod $a_1 \in Q \cap G$. Protože $a_1 \in Q$, $Q \cap F = \emptyset$, jest $f(a_1) > 0$; protože $a_1 \in G$, jest $f(a_1) < 1$. Celkem tedy $0 < f(a_1) < 1$. Obecněji předpokládejme, že při určitém $p \in \mathbf{N}$ je dána taková konečná posloupnost $\{a_n\}_1^p$, že

$$1 \leqq n \leqq p \Rightarrow a_n \in Q\,, \quad 0 < f(a_n) < n^{-1}\,,$$
$$1 \leqq n \leqq p - 1 \Rightarrow f(a_{n+1}) < f(a_n)\,.$$

Množina

$$\mathscr{E}_x\ [x \in \beta(Q),\ f(x) < (p + 1)^{-1},\ f(x) < f(a_p)] = G$$

je otevřená podle **7.1.14** a jest $F \subset G$, tedy $G \neq \emptyset$. Protože Q je hustá v $\beta(Q)$, existuje bod $a_{p+1} \in Q \cap G$. Zřejmě $0 < f(a_{p+1}) < (p + 1)^{-1}$, $f(a_{p+1}) < f(a_p)$. Můžeme tedy rekurentně určit takovou nekonečnou bodovou posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in Q$, $0 < f(a_{n+1}) < f(a_n)$, $\lim f(a_n) = 0$; zřejmě $\{a_n\}$ je prostá. Pro $p \in \mathbf{N}$ budiž $A_p = \bigcup_{n=p}^{\infty} (a_n)$. Množina $\overline{A}_1$ je kompaktní podle **8.3.1** a je FH-prostorem podle **4.6.10** a **5.2.1**; A_1 je hustá v $\overline{A}_1$. Budiž g omezená funkce v oboru A_1. Snadno se nahlédne, že existuje taková omezená spojitá funkce φ v oboru $\mathscr{E}_t\,[t \in \mathbf{E}_1,\ 0 < t]$, že $\varphi[f(a_n)] = g(a_n)$ pro všecka n. Budiž h zobrazení Q do $\mathbf{E}_1$ složené z $f \mid Q$ a φ; pak je h omezená spojitá funkce v oboru Q a jest $g = h \mid A_1$. Podle definice **8.4.3** existuje taková spojitá funkce k v oboru $\beta(Q)$, že

$h = k \mid Q$. Pak je $u = k \mid \overline{A}_1$ spojitá funkce v oboru $\overline{A}_1$ a jest $g = u \mid A_1$. Tudíž podle definice **8.4.3** je $\overline{A}_1$ kompaktní β-obal prostoru A_1. Pro $p \in \mathbf{N}$ jest $A_1 = A_p \cup K_p$, kde K_p je konečná množina, a tedy $\overline{A}_1 = \overline{A}_p \cup K_p$. Podle **7.1.18** je množina $\Phi_p = \mathscr{E}_x\,[x \in \beta(Q), f(x) \leqq f(a_p)]$ uzavřená v prostoru $\beta(Q)$. Jest $A_p \subset \Phi_p$, tedy $\overline{A}_p \subset \Phi_p$ podle **4.4.7**, takže $\overline{A}_1 \subset K_p \cup \Phi_p \subset A_1 \cup \Phi_p$. Protože $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \Phi_p = F$, jest $\overline{A}_1 - A_1 \subset F$. Protože $f \mid A_1$ je zřejmě homeomorfní zobrazení množiny A_1 na isolovanou podmnožinu prostoru $\mathbf{E}_1$, jest A_1 isolovaný prostor, takže moh $\overline{A}_1 = \exp\exp \aleph_0$ podle **12.3.4.** Protože A_1 je spočetná, je podle **3.7.10** moh $(\overline{A}_1 - A_1) = \exp\exp \aleph_0$ a tedy moh $F \geqq \exp\exp \aleph_0$, neboť $F \supset \overline{A}_1 - A_1$.

12.3.10. Budiž Q úplně regulární prostor a budiž $\beta(Q)$ jeho kompaktní β-obal. Jestliže charakter bodu $a \in \beta(Q)$ jest $\leqq \aleph_0$, jest $a \in Q$. Množina (a) je zřejmě G_δ-množina v $\beta(Q)$ a protože je též uzavřená v $\beta(Q)$, jest $a \in Q$ podle **12.3.9.**

12.3.11. Buďtež Q_1, Q_2 úplně regulární prostory s prvním axiomem spočetnosti. Budiž $\beta(Q_i)$ kompaktní β-obal prostoru Q_i $(i = 1, 2)$. Existuje-li homeomorfní zobrazení f prostoru $\beta(Q_1)$ na $\beta(Q_2)$, jest $f \mid Q_1$ homeomorfní zobrazení prostoru Q_1 na Q_2. Pro $x \in \beta(Q_i)$ jest $\chi(x) \leqq \aleph_0 \Rightarrow x \in Q_i$ podle **12.3.10**, $x \in Q_i \Rightarrow \chi(x) \leqq \aleph_0$ podle **5.3.7** a **8.4.2.** Z toho plyne snadno správnost věty.

12.3.12. Budiž Z množina všech omezených číselných posloupností $\{a_n\}_1^\infty$. Je-li $\{a_n\} \in Z$, $\{b_n\} \in Z$, budiž $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} . \{b_n\} = \{a_n b_n\}$. Budiž Λ množina všech zobrazení λ množiny Z do $\mathbf{E}_1$ s těmito vlastnostmi:

[IΛ] Je-li $\alpha = \{a_n\} \in Z$, $\beta = \{b_n\} \in Z$ a je-li $a_n \neq b_n$ pouze pro konečně mnoho indexů n, jest $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$.

[IIΛ] Je-li $\alpha = \{a_n\} \in Z$, $u \in \mathbf{E}_1$, $v \in \mathbf{E}_1$ a je-li $u \leqq a_n \leqq v$ pro všecka n, jest $u \leqq \lambda(\alpha) \leqq v$.

[IIIΛ] Je-li $\alpha \in Z$, $\beta \in Z$, jest $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$.

[IVΛ] Je-li $\alpha \in Z$, $\beta \in Z$, jest $\lambda(\alpha\beta) = \lambda(\alpha) . \lambda(\beta)$.

Jest moh $\Lambda = \exp\exp \aleph_0$. Množina Λ se dá popsat takto. Budiž $\mathbf{N}$ množina všech celých kladných čísel chápaná jako isolovaný prostor, a budiž $\beta(\mathbf{N})$ kompaktní β-obal tohoto prostoru. Každý bod $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$ vytvoří určité zobrazení $\lambda \in \Lambda$ takto: Každou posloupnost $\alpha = \{a_n\} \in Z$ můžeme pokládat za omezenou spojitou funkci v oboru $\mathbf{N}$, ke které podle definice **8.4.3** patří funkce f v oboru $\beta(\mathbf{N})$ taková, že α je zúžení funkce f na obor $\mathbf{N}$; potom jest $\lambda(\alpha) = f(x)$. Každé $\lambda \in \Lambda$ je v tomto smyslu vytvořeno právě jedním $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$.

Důkaz. I. Budiž $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$ a budiž λ zobrazení množiny Z do $\mathbf{E}_1$ vytvořené bodem x tak, jak je to popsáno ve znění věty. Vlastnosti [IIIΛ] a [IVΛ] zobrazení λ jsou zřejmé. Je-li $u \leqq a_n \leqq v$ pro všecka n, budiž $F = \mathscr{E}_\xi\,[\xi \in \beta(\mathbf{N}),\, u \leqq f(\xi) \leqq v]$. Podle **7.1.18** je F uzavřená v prostoru $\beta(\mathbf{N})$ a podle definice **8.4.3** je $\mathbf{N}$, a tedy i F, hustá v $\beta(\mathbf{N})$; tudíž $x \in F$ podle **4.9.2**, což dokazuje vlastnost [IIΛ]. Budiž $\alpha = \{a_n\} \in Z$, $\beta = \{b_n\} \in Z$ a množina $K = \mathscr{E}_n\,[a_n \neq b_n]$ budiž konečná. Buďtež f, g ty spojité funkce v oboru $\beta(\mathbf{N})$, pro které platí: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(n) = a_n,\ \ g(n) = b_n$. Budiž $M = \mathscr{E}_\xi\,[\xi \in \beta(\mathbf{N}),\, f(\xi) - g(\xi) = 0]$; zřejmě $\mathbf{N} - K \subset M$. Podle **7.1.18** je množina M uzavřená v $\beta(\mathbf{N})$, takže $\overline{\mathbf{N} - K} \subset M$ podle **4.4.7.** Protože $\beta(\mathbf{N}) = \overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{N} - K} \cup \overline{K} = \overline{\mathbf{N} - K} \cup K$, $K \subset \mathbf{N}$, $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$, jest $x \in M$ a také vlastnost [IΛ] je splněna.

II. Dva různé body x, y množiny $\beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$ vytvářejí dvě různá zobrazení $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda$. Neboť podle definice **8.4.3** je $\beta(\mathbf{N})$ FH-prostor, takže podle **12.3.6** existují takové $X_1 \subset \mathbf{N}$, $X_2 \subset \mathbf{N}$, že $x \in \overline{X}_1$, $y \in \overline{X}_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Budiž ještě $X_3 = \mathbf{N} - (X_1 \cup X_2)$; pak jest

$$\beta(\mathbf{N}) = \overline{X}_1 \cup \overline{X_2 \cup X_3}$$

a z **8.4.11** plyne, že $\overline{X}_1 \cap \overline{X_2 \cup X_3} = \emptyset$. Je-li

$$\xi \in \overline{X}_1 \Rightarrow f(\xi) = 0\,, \quad \xi \in \overline{X_2 \cup X_3} \Rightarrow f(\xi) = 1\,,$$

jest f spojitá funkce v oboru $\beta(\mathbf{N})$ a je-li $\alpha = \{f(n)\}_1^\infty$, jest $\lambda(\alpha) = f(x) = 0$, $\mu(\alpha) = f(y) = 1$, takže $\lambda \neq \mu$. Všemi body $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$ je tedy vytvořena část množiny Λ, jejíž mohutnost je rovna moh $[\beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}] = \exp\exp\aleph_0$ podle **3.7.10** a **12.3.4.**

III. Zbývá dokázat, že libovolně dané $\lambda \in \Lambda$ se dá vytvořit některým bodem $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$. Budiž $\omega = \{o_n\} \in Z$, $\eta = \{e_n\} \in Z$, kde $o_n = 0$, $e_n = 1$ pro všecka n. Podle [IIΛ] je $\lambda(\omega) = 0$, $\lambda(\eta) = 1$. Pro $X \subset \mathbf{N}$

budiž $\gamma(X) = \{c_n\} \in Z$, kde: $n \in X \Rightarrow c_n = 1$, $n \in \mathbf{N} - X \Rightarrow c_n = 0$; budiž též $\mu(X) = \lambda[\gamma(X)]$.

IV. Jest $\mu(\mathbf{N}) = 1$, neboť $\gamma(\mathbf{N}) = \eta$.

V. Jest $\mu(\emptyset) = 0$, neboť $\gamma(\emptyset) = \omega$.

VI. Je-li $X_1 \subset \mathbf{N}$, $X_2 \subset \mathbf{N}$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, pak je buďto $\mu(X_1) = 0$ nebo $\mu(X_2) = 0$. Neboť $\gamma(X_1) \,.\, \gamma(X_2) = \omega$, takže podle [$\Lambda$4] je $\mu(X_1) \,.\, \mu(X_2) = 0$.

VII. Pro $X \subset \mathbf{N}$ je buďto $\mu(X) = 0$, $\mu(\mathbf{N} - X) = 1$ nebo $\mu(X) = 1$, $\mu(\mathbf{N} - X) = 0$. Neboť $\gamma(X) + \gamma(\mathbf{N} - X) = \eta$, tedy $\mu(X) + \mu(\mathbf{N} - X) = 1$ podle [IIIΛ], a jedno z čísel $\mu(X)$, $\mu(\mathbf{N} - X)$ je rovno nule podle VI.

VIII. Je-li $X_1 \subset \mathbf{N}$, $X_2 \subset \mathbf{N}$, $\mu(X_1) = \mu(X_2) = 1$, pak $\mu(X_1 \cap X_2) = 1$. Neboť jinak by podle VII bylo $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$; protože $\gamma(X_1 - X_2) + \gamma(X_1 \cap X_2) = \gamma(X_1)$, bylo by $\mu(X_1 - X_2) + \mu(X_1 \cap X_2) = \mu(X_1)$ podle [IIIΛ] a tedy $\mu(X_1 - X_2) = 1$; protože také $\mu(X_2) = 1$, je to spor proti VI, neboť $(X_1 - X_2) \cap X_2 = \emptyset$.

IX. Budiž $\mathfrak{M}$ soustava všech těch $X \subset \mathbf{N}$, pro něž $\mu(X) = 1$. Podle IV je $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Je-li $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$ konečná soustava ($\mathfrak{K} \neq \emptyset$), pak průnik $\bigcap X$ ($X \in \mathfrak{K}$) podle VIII také náleží do $\mathfrak{M}$, a tudíž podle V není prázdný. $\mathfrak{M}$ je tedy centrovaná soustava, takže podle **8.3.6** existuje takový bod $x \in \beta(\mathbf{N})$, že

$$X \subset \mathbf{N}\,, \quad \mu(X) = 1 \Rightarrow x \in \overline{X}\,.$$

Obráceně platí

$$X \subset \mathbf{N}\,, \quad x \in \overline{X} \Rightarrow \mu(X) = 1\,.$$

Neboť jinak by podle VII bylo $\mu(\mathbf{N} - X) = 1$, tedy $x \in \overline{\mathbf{N} - X}$ a to je nemožné, protože $\overline{X} \cap \overline{\mathbf{N} - X} = \emptyset$ podle **8.4.11**, neboť $\mathbf{N}$ je zřejmě normální.

X. Jest $x \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$. Neboť kdyby bylo $x \in \mathbf{N}$, bylo by $(x) \subset \mathbf{N}$, $x \in \overline{(x)}$, tedy $\mu((x)) = 1$ podle IX a to je nemožné, neboť posloupnost $\gamma((x))$ se liší jen v jediném členu od posloupnosti ω, takže $\mu((x)) = 0$ podle [IΛ].

XI. Budiž $\alpha = \{a_n\} \in Z$ a budiž f ta spojitá funkce v oboru $\beta(\mathbf{N})$, pro kterou platí: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(n) = a_n$. Máme dokázat, že $\lambda(\alpha) = f(x)$.

Není-li tomu tak, pak existuje takové číslo $\delta > 0$, že $|\lambda(\alpha) - f(x)| > \delta$. Podle **7.1.3** a **12.3.6** existuje taková $X \subset \mathbf{N}$, že $x \in \overline{X}$ a že

$$\xi \in \overline{X} \Rightarrow |f(\xi) - f(x)| < \delta .$$

Budiž $\tau = \{t_n\} \in Z$, kde: $n \in X \Rightarrow t_n = 0$, $n \in \mathbf{N} - X \Rightarrow t_n = f(x) - a_n$. Jest $\gamma(X) . \tau = \omega$, tedy $\mu(X) . \lambda(\tau) = 0$ podle [IVΛ]; podle IX je $\mu(X) = 1$, takže $\lambda(\tau) = 0$. Tudíž $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha + \tau)$ podle [IIIΛ]. Je-li $\alpha + \tau = \{h_n\}$, je zřejmě $|h_n - f(x)| < \delta$ pro všecka n, takže podle [IIΛ] je $|\lambda(\alpha + \tau) - f(x)| \leqq \delta$ neboli $|\lambda(\alpha) - f(x)| \leqq \delta$ a to je spor.

12.4. Cvičení k § 12

12.4.1. Každý nekonečný prostor P se dá vnořit do nějakého prostoru R, ve kterém P není uzavřenou množinou; je-li P F-prostor, můžeme také za R volit F-prostor.

12.4.2. Budiž $P = \mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$. Pro $X \subset P$ budiž uX sjednocení množiny X s množinou všech těch $t \in P$, které ve smyslu obyčejné topologie v $\mathbf{E}_1$ jsou body zhuštění množiny X. Pak je (P, u) FH-uzavřený prostor, ale žádný $t \in P$ není R-bodem prostoru (P, u).

12.4.3. Budiž (P, u) FH-uzavřený prostor. Budiž $\mathfrak{B}$ soustava všech množin tvaru $P - uG$, kde G probíhá všecky u-otevřené podmnožiny P. Existuje F-topologie v v množině P, při které je $\mathfrak{B}$ otevřenou basí. Prostor (P, v) je FH-prostor. Topologie v je hrubší než u; jestliže FH-topologie w v množině P je hrubší než u, pak w je jemnější než v. Jestliže v P každé dva různé body jsou $\overline{\overline{H}}$-oddělené (viz definici **5.5.2**), pak v je R-topologie. Je-li f spojité zobrazení prostoru (P, u) do FR-prostoru Q, pak f je spojité též jako zobrazení (P, v) do Q.

12.4.4. Budiž (P, u) FH-prostor. Aby (P, u) byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby předně každé dva různé body byly $\overline{\overline{H}}$-oddělené a aby za druhé bylo $v = u$ pro každou FH-topologii v hrubší než u. (Užije se 12.4.3.)

12.4.5. Budiž P FH-prostor; budiž R jeho FH-uzavřený obal. Pak platí toto: [1] Množina $P \subset R$ je otevřená. [2] Množina $R - P \subset R$ je isolovaná. [3] Je-li $G \subset P$ otevřená a je-li $a \in \overline{G} - P$, pak $(a) \cup G$ je okolí bodu a v prostoru R. [4] Je-li množina $A \subset P$ řídká v P, jest $\overline{A} \subset P$. (Užije se důkazu věty **12.1.11**, jakož i **12.1.12**.)

12.4.6. Budiž P FR-prostor. Množina $Q \subset P$ budiž hustá v P. Je-li $\mathfrak{q} = \text{moh}\, Q$, jest $\chi(x) \leqq \exp \mathfrak{q}$ pro každý $x \in P$. (Viz **4.12.23** a **5.3.7.**)

12.4.7. Buďtež $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ dvě nekonečné mohutnosti, $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{m}$. Existuje F-prostor P mohutnosti $\mathfrak{m}$, který obsahuje hustou množinu mohutnosti $\mathfrak{e}$. Proto v **12.3.3** nelze vynechat předpoklad, že P je H-prostor.

12.4.8. Budiž P nekonečná množina mohutnosti $\mathfrak{m}$. Mohutnost soustavy všech topologií v množině P je exp exp $\mathfrak{m}$. Totéž platí o soustavě všech dědičně normálních topologií v množině P.

12.4.9. Nechť Z, $\mathbf{N}$ a Λ mají týž význam jako v **12.3.12**. Budiž

$$R = \mathfrak{P} P(\alpha) \quad (\alpha \in Z)\,,$$

kde $P(\alpha) = \mathbf{E}_1$ pro každé $\alpha \in Z$, takže $\Lambda \subset R$. [Λ je kompaktní β-obal prostoru $f^1(\mathbf{N}) \subset R$, jestliže $f(n)$ pro $n \in \mathbf{N}$ znamená ten bod prostoru R, jehož α-souřadnice pro každé $\alpha = \{a_n\} \in Z$ je rovna a_n.] Budiž Λ^* množina těch $\lambda \in R$, jež mají vlastnosti [IΛ], [IIΛ], [IIIΛ], ale nemusí mít vlastnost [IVΛ] (viz **12.3.12**). Jest moh $\Lambda^* =$ exp exp $\aleph_0$. Pro $x \in R$, $y \in R$, $c \in \mathbf{E}_1$ budiž $x + y = z \in R$, $cx = t \in R$, kde $z(\alpha) = x(\alpha) + y(\alpha)$, $t(\alpha) = c\,.\,x(\alpha)$ pro každé $\alpha \in Z$. Množinu $M \subset R$ nazveme konvexní, jestliže:

$$x \in M\,, \quad y \in M\,, \quad c_1 \in \mathbf{E}_1\,, \quad c_2 \in \mathbf{E}_1\,, \quad c_1 \geqq 0\,, \quad c_2 \geqq 0\,,$$
$$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 x + c_2 y \in M\,.$$

Ke každé $M \subset R$ existuje nejmenší taková konvexní $k(M) \subset R$, že $M \subset k(M)$. Pak Λ^* je uzávěr množiny $k(\Lambda)$ v prostoru R.

12.4.10. Nechť Z, R, Λ^* mají týž význam jako v 12.4.9. Budiž Λ_0 množina těch $\lambda \in R$, které splňují podmínky [IΛ]^0, [IIΛ], [IIIΛ], při čemž [IΛ]^0 znamená toto zostření podmínky [IΛ]:

[IΛ]^0: Je-li $\alpha = \{a_n\} \in Z$, $\beta = \{b_n\} \in Z$ a je-li $b_n = a_{n+1}$ pro všecka n, jest $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$. Jest moh $\Lambda_0 =$ exp exp $\aleph_0$. Žádné $\lambda \in \Lambda_0$ nesplňuje podmínku [IVΛ]. [Položíme-li $\beta = \mu(\alpha) \in Z$ pro $\alpha = \{a_n\} \in Z$, kde $\beta = \{b_n\}$, $nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a je-li $\lambda^* \in \Lambda^*$, jest $\lambda_0 \in \Lambda_0$, jestliže $\lambda_0(\alpha) = \lambda^*[\mu(\alpha)]$ pro $\alpha \in Z$.]

12.4.11. Budiž $\mathbf{N}$ množina všech celých kladných čísel chápaná jako isolovaný prostor, budiž $\beta(\mathbf{N})$ kompaktní β-obal tohoto prostoru. Zvolme $c \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$ a zvolme $a \neq c$, $a \neq n$ pro všecka $n \in \mathbf{N}$. Budiž $P = \mathbf{N} \cup (a) \cup (c)$. Topologii prostoru P definujme tak, že každý $n \in \mathbf{N}$ je isolovaný bod a že pro $X \subset P$ je předně $a \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže buďto $a \in X$ nebo množina X je nekonečná, a za druhé $c \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže buďto $c \in X$ nebo c náleží do uzávěru množiny $X \cap \mathbf{N}$ v prostoru $\beta(\mathbf{N})$. Pomocí tohoto prostoru P lze ukázat, že v **6.3.11** nelze vynechat předpoklad, že P je H-prostor nebo L-prostor, ani jej nelze nahradit předpokladem, že P je F-prostor.

12.4.12. Budiž R množina všech racionálních čísel, S množina všech iracionálních čísel, u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Budiž $P = \bigcup_{x \in \mathbf{E}_1} \bigcup_{n=1}^{\infty} (x, n) \cup (\omega)$, kde symbol ω je různý od všech $x \in \mathbf{E}_1$ i od všech dvojic (x, n), kde $n \in \mathbf{N}$. Budiž v taková topologie v $S \cup (\omega)$, při které množina S je isolovaná a charakter bodu ω je roven $\exp \exp \aleph_0$ (viz **12.2.2**). Pro $M \subset P$, $n \in \mathbf{N}$ nechť M_n je množina těch $x \in \mathbf{E}_1$, pro něž $(x, n) \in M$. Topologii v prostoru P definujme takto: Pro $x \in \mathbf{E}_1$, $n \in \mathbf{N}$, $M \subset P$ nechť $(x, n) \in \overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $(x, n) \in M$ nebo $x \in u(R \cap M_n)$. Pro $M \subset P$ nechť $\omega \in \overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $\omega \in M$ nebo pro každé $k \in \mathbf{N}$ je buďto $\bigcup_{n>k} (R \cap M_n) \neq \emptyset$ nebo $\omega \in v[S \cap \bigcup_{n>k} M_n]$. Pak P je FH-prostor, ve kterém spočetná množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} R \times (n)$ je hustá a ve kterém bod ω má charakter $\exp \exp \aleph_0$. Z toho plyne, že ani v **5.3.7** ani v 12.4.6 nelze předpoklad FR-prostoru nahradit předpokladem FH-prostoru.

12.4.13. Nechť R, S, ω, v mají týž význam jako ve 12.4.12. Budiž $\mathfrak{V}$ soustava všech okolí bodu ω v prostoru $S \cup (\omega)$ při topologii v. Budiž $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R \times (n) \cup S \cup (\omega)$. Topologii prostoru P popíšeme pomocí definujících soustav okolí jeho jednotlivých bodů. Je-li $a \in R$, pak každé reálné $\varepsilon > 0$ určuje definující okolí bodu (a, n), které se skládá ze všech dvojic (x, n), kde $x \in \mathbf{E}_1$, $|x - a| < \varepsilon$. Je-li $b \in S$, pak každé $k \in \mathbf{N}$ určuje definující okolí bodu b, které se skládá z tohoto bodu a ze všech těch $(x, n) \in R \times \mathbf{N}$, pro něž platí $n > k$, $|x - b| \leqq n^{-1}$. Konečně libovolná $V \in \mathfrak{V}$ spolu s libovolným $k \in \mathbf{N}$ určuje definující okolí bodu ω, které se skládá z tohoto bodu, že všech těchto dvojic (n, n), pro něž $n \in \mathbf{N}$, $n > k$ a ze všech těch $y \in S$, pro něž $y \in V$. Pak P je R-prostor, ve kterém spočetná množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} R \times (n)$ je hustá a ve kterém bod ω má charakter $\exp \exp \aleph_0$. Z toho plyne, že ani v **5.3.7** ani v 12.4.6 nelze předpoklad FR-prostoru nahradit předpokladem R-prostoru.