§ 5. AXIOMY ODDĚLOVÁNÍ

5.1. Oddělování a H-oddělování

Definice **5.1.1.** O bodových množinách M_1, M_2 pravíme, že jsou (navzájem) *oddělené* (v prostoru P), jestliže existuje takové okolí U_1 množiny M_1 a takové okolí U_2 množiny M_2, že $U_1 \cap M_2 = \emptyset = U_2 \cap \cap M_1$.

5.1.1. Dvě oddělené bodové množiny jsou disjunktní. Viz **4.2.3.**

5.1.2. Aby bodové množiny M_1, M_2 byly navzájem oddělené, k tomu je nutné a stačí $\overline{M}_1 \cap M_2 = \emptyset = M_1 \cap \overline{M}_2$.

Důkaz. I. Nechť M_1, M_2 jsou oddělené. Nechť U_1 je takové okolí M_1, že $U_1 \cap M_2 = \emptyset$. Pro $x \in M_1$ je $x \in P - \overline{M}_2$ podle **4.2.8** a **4.2.9.** Tudíž $M_1 \cap \overline{M}_2 = \emptyset$ a podobně též $\overline{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$.

II. Budiž $\overline{M}_1 \cap M_2 = \emptyset = M_1 \cap \overline{M}_2$. Pro $U_1 = P - M_2$ máme $M_1 \subset P - \overline{P - U_1}$, tudíž U_1 je okolí množiny M_1, $U_1 \cap M_2 = \emptyset$. Podobně $U_2 = P - M_1$ je okolí množiny M_2, $U_2 \cap M_1 = \emptyset$.

5.1.3. Budiž Q vnořen do P. Bodové množiny $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$ jsou právě tehdy oddělené v prostoru Q, jsou-li oddělené v P. Viz **5.1.2.**

5.1.4. Dvě uzavřené množiny jsou právě tehdy oddělené, jestliže jsou disjunktní. Viz **5.1.2.**

5.1.5. Bodové množiny $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$ jsou právě tehdy oddělené, jsou-li disjunktní a jsou-li relativně uzavřené v $M_1 \cup M_2$.

Důkaz. I. Jsou-li M_1, M_2 oddělené, jsou disjunktní podle **5.1.1** a podle **5.1.2** jest $M_1 = (M_1 \cup M_2) \cap \overline{M}_1$, $M_2 = (M_1 \cup M_2) \cap \overline{M}_2$.

II. Nechť $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Jsou-li M_1, M_2 relativně uzavřené v $M_1 \cup M_2$, jsou podle **5.1.4** oddělené v $M_1 \cup M_2$ a podle **5.1.3** též v P.

5.1.6. Bodové množiny $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$ jsou právě tehdy oddělené, jsou-li disjunktní a jsou-li relativně otevřené v $M_1 \cup M_2$. Viz **5.1.5.**

5.1.7. Budiž $N_1 \subset M_1 \subset P$, $N_2 \subset M_2 \subset P$. Jsou-li M_1, M_2 oddělené, jsou také N_1, N_2 oddělené.

5.1.8. Nechť M_1, M_2 jsou oddělené; nechť M_1, M_3 jsou oddělené. Pak M_1, $M_2 \cup M_3$ jsou oddělené. Viz **5.1.2.**

Definice **5.1.2.** O bodových množinách M_1, M_2 pravíme, že jsou *H-oddělené* (v prostoru P), jestliže existuje takové okolí U_1 množiny M_1 a takové okolí U_2 množiny M_2, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

5.1.9. Jsou-li M_1, M_2 H-oddělené, jsou oddělené. Viz **4.2.3.**

5.1.10. Aby množiny M_1, M_2 byly H-oddělené, k tomu je nutné a stačí, aby existovalo takové okolí U_1 množiny M_1, že $\overline{U}_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Důkaz. I. Nechť U_1 (U_2) je okolí M_1 (M_2) a nechť $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Pro $x \in M_2$ je $x \in P - \overline{U}_1$ podle **4.2.8** a **4.2.9.** Tudíž $\overline{U}_1 \cap M_2 = \emptyset$.

II. Nechť $\overline{U}_1 \cap M_2 = \emptyset$, kde U_1 je okolí M_1. Pro $x \in M_2$, $U_2 = P - \overline{U}_1$ je $x \in P - \overline{P - U_2}$. Tudíž je U_2 okolí M_2 a jest $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

5.1.11. Budiž Q vnořen do P. Jsou-li $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$ H-oddělené v prostoru P, jsou také v Q H-oddělené. Viz **4.6.2.**

5.1.12. Dvě otevřené množiny jsou H-oddělené právě tehdy, jestliže jsou disjunktní. Viz **4.4.12.**

5.1.13. Budiž $N_1 \subset M_1 \subset P$, $N_2 \subset M_2 \subset P$. Jsou-li M_1, M_2 H-oddělené, jsou také N_1, N_2 H-oddělené.

5.1.14. Nechť M_1, M_2 jsou H-oddělené; nechť M_1, M_3 jsou H-oddělené. Pak M_1, $M_2 \cup M_3$ jsou H-oddělené. Podle **5.1.10**

existují taková okolí U_2, U_3 množiny M_1, že $\overline{U}_2 \cap M_2 = \overline{U}_3 \cap M_3 = \emptyset$. Podle **4.2.5** je $U = U_2 \cap U_3$ okolím M_1 a jest $\overline{U} \cap (M_2 \cup M_3) = \emptyset$.

5.1.15. Nechť P je F-prostor. Aby bodové množiny M_1, M_2 byly H-oddělené, k tomu je nutné a stačí, aby existovaly takové otevřené G_1, G_2, že $G_1 \supset M_1$, $G_2 \supset M_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Viz **4.4.13** a **4.5.8.**

5.2. H-PROSTORY

Definice **5.2.1.** Prostor P se nazývá *H-prostor* (a jeho topologie se nazývá *H-topologie*), jestliže každé dva různé body a, b [tj. jednobodové množiny (a), (b)] jsou H-oddělené.

5.2.1. Prostor vnořený do H-prostoru je H-prostor. Viz **5.1.11.**

Definice **5.2.2.** Bod a se nazývá *H-bod* (prostoru P), jestliže průnik uzávěrů všech okolí bodu a je roven (a). [Podle **4.2.7** stačí žádat, aby ke každému bodu $x \neq a$ existovalo takové okolí U bodu a, že $x \in P - \overline{U}$.]

5.2.2. Budiž Q vnořen do P. Je-li $a \in Q$ H-bod prostoru P, je a také H-bod prostoru Q. Viz **4.6.2.**

5.2.3. Aby prostor P byl H-prostor, k tomu je nutné a stačí, aby každý bod byl H-bodem. Viz **5.1.10.**

5.2.4. Budiž P nekonečný H-prostor. Pak P obsahuje spočetnou isolovanou množinu M. Předpoklad H-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.2**).

Důkaz. I. Můžeme předpokládat, že P sám není isolován. Podle **4.7.4** existuje bod $c \in P'$. Budeme definovat rekurentně bodovou posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ a posloupnost bodových množin $\{U_n\}_1^\infty$ tak, aby platilo:

(1) $U_m \supset U_n$ pro $m < n$;

(2) pro každé n je U_n okolím bodu c;

(3) $a_n \in P - \overline{U}_n$ pro každé n;

(4) $a_n \in U_m$ pro $m < n$.

II. Zvolíme libovolně bod $a_1 \in P$, $a_1 \neq c$. Podle **5.2.3** existuje takové okolí U_1 bodu c, že $a_1 \in P - \overline{U}_1$.

III. Předpokládejme, že při určitém $k \in \mathbf{N}$ byly už body a_n a množiny U_n $(1 \leqq n \leqq k)$ zvoleny tak, že pro $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $m < n \leqq k$ jsou splněny podmínky (1) až (4). (Pro $k = 1$ tomu tak je.) Protože U_n je okolí bodu $c \in P'$, existuje podle **4.2.10** bod $a_{n+1} \neq c$, $a_{n+1} \in U_n$. Podle **5.2.3** existuje takové okolí V bodu c, že $a_{n+1} \in P - \overline{V}$. Položme $U_{n+1} = U_n \cap V$, takže podle **4.2.5** U_{n+1} je okolí bodu c. Jest $U_{n+1} \subset V$, takže $a_{n+1} \in P - \overline{U}_{n+1}$. Podmínky (1) až (4) jsou tedy splněny pro $m < n \leqq k + 1$.

IV. Ze (3) a (4) plyne, že množina M všech členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ je nekonečná. Pro $k \in \mathbf{N}$ budiž M_k množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{k+1}^\infty$. Podle (4) je $M_k \subset U_k$, takže podle (1) a (3) je $M \cap \cap \overline{M}_k = M_k$, tj. množina M_k je relativně uzavřená v M. Podle **4.4.3** a **4.4.6** také $M - (a_k) = M_k + K_k$ (kde K_k je konečná) je relativně uzavřená v M a tudíž (a_k) je relativně otevřená v M, tj. množina M je isolovaná.

5.2.5. Mohutnost soustavy všech uzavřených množin nekonečného FH-prostoru P je $\geqq \exp \aleph_0$.

Poznámka. FH-prostor je prostor, který je současně F-prostorem i H-prostorem. Často se budeme vyjadřovat podobným způsobem.

Důkaz. Podle **5.2.4** existuje spočetná isolovaná množina $M \subset P$. Budiž Φ soustava uzávěrů všech podmnožin M. Stačí dokázat, že moh $\Phi = \exp \aleph_0$, a k tomu opět stačí ukázat, že

$$A \subset M\,, \quad B \subset M\,, \quad A \neq B \Rightarrow \overline{A} \neq \overline{B}\,.$$

Avšak podle **4.7.5** (kde místo P vezmeme M), je $M \cap \overline{A} \neq M \cap \overline{B}$, takže $\overline{A} \neq \overline{B}$.

V právě dokázané větě předpoklad FH-prostoru nelze nahradit předpokladem F-prostoru (příklad **6.4.2**); otázka, zda jej lze nahradit předpokladem H-prostoru, zůstává otevřená.

Definice **5.3.1.** Bod a se nazývá *R-bod* (prostoru P), jestliže ke každému okolí U bodu a existuje takové okolí V bodu a, že $\overline{V} \subset U$.

Definice **5.3.2.** Prostor se nazývá *R-prostor* (a jeho topologie se nazývá *R-topologie*), jestliže každý jeho bod je R-bod.

5.3.1. Budiž Q vnořen do P. Je-li bod $a \in Q$ R-bod prostoru P, je a také R-bod prostoru Q. Viz **4.6.2.**

5.3.2. Budiž Q vnořen do R-prostoru P. Pak také Q je R-prostor.

5.3.3. Každý R-bod je H-bod. Viz **4.2.6** a definici **5.2.2.**

5.3.4. Každý R-prostor je H-prostor.

5.3.5. Budiž a R-bod. Budiž F taková uzavřená množina, že $a \in P - F$. Pak množiny (a), F jsou H-oddělené. Podle **4.4.13** je $P - F$ okolím bodu a. Tudíž existuje takové okolí U bodu a, že $\overline{U} \subset P - F$; z **5.1.10** nyní plyne, že (a), F jsou H-oddělené.

5.3.6. Budiž a silný F-bod. Nechť pro každou uzavřenou množinu F, která neobsahuje bod a, množiny (a), F jsou H-oddělené. Pak a je R-bod. Zde nelze silný F-bod nahradit slabým F-bodem (příklad **6.4.16**).

Důkaz. Nechť U je libovolné okolí bodu a. Existuje takové otevřené okolí G bodu a, že $G \subset U$. Množina $F = P - G$ je uzavřená a podle **4.2.3** je $a \in P - F$. Tudíž (a), F jsou H-oddělené a podle **5.1.10** existuje takové okolí V bodu a, že $\overline{V} \cap F = \emptyset$ neboli $\overline{V} \subset G \subset U$.

5.3.7. Budiž P FR-prostor a budiž Q hustá bodová množina. Je-li $a \in Q$, je $\chi(a \mid Q) = \chi(a)$. Zde nelze FR-prostor nahradit ani R-prostorem ani FH-prostorem (viz cvičení **12.4.12** a **12.4.13**).

Důkaz. I. Existuje taková úplná soustava $\mathfrak{V}$ relativních okolí bodu a, že moh $\mathfrak{V} = \chi(a \mid Q)$. Každé množině $V \in \mathfrak{V}$ přiřaďme množinu

$$U = P - \overline{Q - V}\,;$$

tyto U tvoří soustavu množin $\mathfrak{U}$ mohutnosti $\leqq \chi(a \mid Q)$. Zřejmě $a \in U$ pro každou $U \in \mathfrak{U}$. Protože P je F-prostor, jsou množiny $U \in \mathfrak{U}$ otevřené, a tedy (viz **4.4.13**) to jsou okolí bodu a. Zbývá dokázat, že soustava okolí $\mathfrak{U}$ je úplná; neboť pak je moh $\mathfrak{U} \geqq \chi(a)$, tedy $\chi(a) \leqq \chi(a \mid Q)$, takže $\chi(a) = \chi(a \mid Q)$ podle **4.12.3**.

II. Budiž tedy W libovolné okolí bodu a. Máme dokázat, že pro některou $V \in \mathfrak{V}$ je $U = P - \overline{Q - V} \subset W$. Protože P je R-prostor, existuje takové okolí W_1 bodu a, že $\overline{W}_1 \subset W$. Podle **4.6.2** je $Q \cap W_1$ relativní okolí bodu a. Protože $\mathfrak{V}$ je úplná soustava relativních okolí, existuje taková $V \in \mathfrak{V}$, že $V \subset Q \cap W_1$. Budiž $U = P - \overline{Q - V}$. Není-li $U \subset W$, jest $U - W \neq \emptyset$ a tím spíše $U - \overline{W}_1 \neq \emptyset$. Množina $U - \overline{W}_1 = U \cap (P - \overline{W}_1)$ je však otevřená (viz **4.4.11**) a protože Q je hustá, plyne ze **4.9.5**, že $\emptyset \neq Q \cap (U - \overline{W}_1) = (Q \cap U) - \overline{W}_1$. To je však nemožné, neboť $Q \cap U = Q - \overline{Q - V} \subset Q - (Q - V) = V \subset$ $\subset W_1 \subset \overline{W}_1$.

5.4. Normální prostory

Definice **5.4.1.** Pravíme, že prostor P je *normální* nebo že je to *N-prostor* (a jeho topologii nazveme *N-topologií*), jestliže P je F-prostor a mimo to každé dvě disjunktní uzavřené množiny jsou H-oddělené.

5.4.1. Budiž Q vnořen do N-prostoru P. Je-li množina $Q \subset P$ uzavřená, také Q je N-prostor. Viz **4.6.6**, **4.6.10**, **5.1.11.**

5.4.2. Budiž P N-prostor. Buďtež M_1, M_2 dvě oddělené F_σ-množiny. Pak M_1, M_2 jsou H-oddělené.

Důkaz. I. Jest

$$M_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad M_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^*,$$

kde F_n, F_n^* jsou uzavřené množiny.

II. Pro každé $p = 0, 1, 2, \ldots$ označme $\boldsymbol{H}_p$ tuto hypothesu:

Pro $1 \leqq n \leqq p$ jsou dány takové otevřené množiny G_n, G_n^*, že

$[1]_p$ $F_n \subset G_n$, $F_n^* \subset G_n^*$ pro $1 \leqq n \leqq p$,
$[2]_p$ $\overline{G}_n \cap M_2 = \emptyset = \overline{G}_n^* \cap M_1$ pro $1 \leqq n \leqq p$,
$[3]_p$ $\overline{G}_i \cap \overline{G}_k^* = \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq k \leqq p$.

III. Nechť pro určité p hypothesa $\mathbf{H}_p$ je správná. Ukážeme, že lze potom určit G_{p+1} a G_{p+1}^* tak, aby byla správná také $\mathbf{H}_{p+1}$. Protože P je F-prostor, je množina $(\bigcup_{n=1}^{p} \overline{G}_n^*) \cup \overline{M}_2$ uzavřená. [Je-li $p = 0$, pak $\bigcup_{n=1}^{p} \overline{G}_n^*$ znamená $\emptyset$.] Mimo to je $F_{p+1} \subset M_1$ a podle **5.1.2** také $M_1 \cap \overline{M}_2 = \emptyset$, takže ze $[2]_p$ plyne $F_{p+1} \cap [(\bigcup_{n=1}^{p} \overline{G}_n^*) \cup \overline{M}_2] = \emptyset$. Protože P je N-prostor, existuje tedy (viz **4.2.3**, **4.5.8**, **5.1.10**) taková otevřená G_{p+1}, že

$$F_{p+1} \subset G_{p+1}\,, \quad \overline{G}_{p+1} \cap [(\bigcup_{n=1}^{p} \overline{G}_n^*) \cup \overline{M}_2] = \emptyset\,.$$

Množina $(\bigcup_{n=1}^{p+1} \overline{G}_n) \cup \overline{M}_1$ je uzavřená. Mimo to je $F_{p+1}^* \subset M_2$ a podle **5.1.2** také $\overline{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$, takže z hypothesy $[2]_p$ a z vlastností množiny G_{p+1} plyne

$$F_{p+1}^* \cap [(\bigcup_{n=1}^{p+1} \overline{G}_n) \cup \overline{M}_1] = \emptyset\,.$$

Protože P je N-prostor, existuje tedy taková otevřená G_{p+1}^*, že

$$F_{p+1}^* \subset G_{p+1}^*\,, \quad \overline{G}_{p+1}^* \cap [(\bigcup_{n=1}^{p+1} \overline{G}_n) \cup \overline{M}_1] = \emptyset$$

a tudíž je splněna hypothesa $\mathbf{H}_{p+1}$.

IV. Hypothesa $\mathbf{H}_0$ nežádá nic, je tedy správná. Tudíž můžeme podle III postupně určit množiny G_n a G_n^* pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ tak, že

$$F_n \subset G_n\,, \quad F_n^* \subset G_n^*\,, \quad \overline{G}_n \cap M_2 = \emptyset = \overline{G}_n^* \cap M_1\,,$$
$$\overline{G}_i \cap \overline{G}_k^* = \emptyset\,.$$

Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, $G^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^*$. Pak je $M_1 \subset G$, $M_2 \subset G^*$, $G \cap G^* = \emptyset$ a G, G^* jsou otevřené, takže M_1, M_2 jsou H-oddělené (viz **5.1.15**).

5.4.3. *P budiž FR-prostor. M_1, M_2 buďtež dvě nejvýš spočetné oddělené bodové množiny. Pak M_1, M_2 jsou H-oddě-*

lené. Zanedbáme-li triviální případ, kdy aspoň jedna z obou množin M_1, M_2 je prázdná, jest

$$M_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\,, \quad M_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^*$$

s jednobodovými množinami F_n, F_n^*. Další průběh důkazu je takřka doslova stejný jako u věty **5.4.2**; jediný rozdíl je v tom, že místo normality se užije věty **5.3.5**.

5.4.4. Q budiž vnořen do N-prostoru P. Je-li Q F_σ-množina v P, pak také Q je N-prostor. Podle **4.6.10** Q je F-prostor. Množiny $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$ buďtež relativně uzavřené a budiž $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Máme dokázat, že M_1, M_2 jsou H-oddělené v prostoru Q; při tom z **5.1.3** a **5.1.4** plyne, že jsou oddělené v prostoru P. Podle **4.6.13** existuje taková uzavřená F^*, že $M_1 = Q \cap F^*$. Mimo to existují takové uzavřené F_n, že $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Tudíž $M_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap F^*)$, takže (viz **4.4.5**) M_1 je F_σ-množina. Stejně se dokáže, že M_2 je F_σ-množina, takže podle **5.4.2** M_1, M_2 jsou H-oddělené v P a tudíž podle **5.1.11** také v Q.

5.4.5. Každý N-prostor je FR-prostor. F-prostor podle definice **5.4.1**, R-prostor podle **4.5.6** a **5.3.6.**

5.4.6. Budiž P N-prostor. Budiž U okolí uzavřené množiny F. Pak existuje takové okolí V množiny F, že $\overline{V} \subset U$. Jest $F \subset P - \overline{P - U}$. Bodové množiny F a $\overline{P - U}$ jsou uzavřené a disjunktní, tedy H-oddělené. Tudíž podle **5.1.10** existuje takové okolí V množiny F, že $\overline{V} \subset P - \overline{P - U} \subset U$.

Definice **5.4.2.** Pravíme, že prostor P je *dědičně normální* nebo že je to *N^*-prostor* (a že jeho topologie je *N^*-topologie*), jestliže (nejenom P, nýbrž) každý do P vnořený prostor je normální.

5.4.7. Budiž Q vnořen do P. Je-li P N^*-prostor, je také Q N^*-prostor.

Důkaz následujících dvou vět provedeme současně.

5.4.8. Nechť pro každou otevřenou množinu $Q \subset P$ platí, že Q (jakožto vnořený prostor) je normální. Pak P je dědičně normální.

5.4.9. Aby prostor P byl N^*-prostor, k tomu je nutné a stačí:

[1] aby P byl F-prostor;

[2] aby každé dvě oddělené množiny byly H-oddělené.

Důkazy vět **5.4.8**, **5.4.9**. I. Stačí dokázat dvě věci. Předně, že z vlastnosti vyslovené ve větě **5.4.8** plynou obě vlastnosti [1], [2] vyslovené v **5.4.9**; za druhé, že z těchto dvou vlastností plyne, že P je N^*-prostor.

II. Nechť je Q N-prostor pro každou otevřenou Q. Podle **4.4.9** P sám je N-prostor a tedy F-prostor. Buďtež dále $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$ dvě oddělené množiny. Máme dokázat, že M_1, M_2 jsou H-oddělené. Budiž $Q = P - (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2)$. Protože P je F-prostor, je množina Q otevřená a tvoří tudíž N-prostor. Podle **5.1.2** je $M_1 \subset Q \cap \overline{M}_1$, $M_2 \subset Q \cap \overline{M}_2$. Množiny $Q \cap \overline{M}_1$, $Q \cap \overline{M}_2$ jsou relativně uzavřené (v N-prostoru Q) a jsou disjunktní, takže jsou H-oddělené v prostoru Q a podle **5.1.15** existují takové dvě relativně otevřené množiny G_1, G_2, že $M_1 \subset Q \cap \overline{M}_1 \subset G_1$, $M_2 \subset Q \cap \overline{M}_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Podle **4.6.7** jsou G_1, G_2 také v prostoru P otevřené, takže M_1, M_2 jsou H-oddělené v P podle **5.1.15.**

III. Budiž P F-prostor, ve kterém každé dvě oddělené množiny jsou H-oddělené, a budiž Q vnořen do P. Podle **4.6.10** Q je F-prostor. Nechť množiny $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$ jsou relativně uzavřené a nechť $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Máme dokázat, že M_1, M_2 jsou H-oddělené v prostoru Q. Množiny M_1, M_2 jsou podle **5.1.4** oddělené v Q a tedy podle **5.1.3** oddělené v P, tudíž podle předpokladu v P H-oddělené a tedy podle **5.1.11** v Q H-oddělené.

5.4.10. Spočetný FR-prostor je N^*-prostor. Viz **5.4.3** a **5.4.9.**

5.4.11. Budiž P N-prostor. Každá otevřená množina budiž F_σ-množina. Pak P je N^*-prostor. Viz **5.4.4** a **5.4.8**. Věta **5.4.11** se nedá obrátit (příklad **6.4.13**).

Definice **5.4.3.** Normální prostor P, ve kterém každá otevřená množina je F_σ-množina, nazývá se *dokonale normální*. Větu **5.4.11** lze tedy vyslovit takto: Dokonale normální prostor je dědičně normální.

5.4.12. Budiž Q vnořen do N^*-prostoru P. Budiž $M_0 \subset Q$. Existuje taková množina $M \subset P$, že $M_0 = Q \cap M$ a že relativní hranice množiny M_0 je průnikem Q s hranicí množiny M. Je-li M_0 relativně otevřená, můžeme M zvolit otevřenou.

Důkaz. I. Budiž $A = Q - \overline{Q - M_0}$, $B = Q - \overline{M}_0$. Množiny A, B jsou relativně otevřené podle **4.6.5** a jest $A \cap B = \emptyset$, takže A, B jsou oddělené podle **5.1.3**, **5.1.9** a **5.1.12.** Protože P je N^*-prostor, plyne z **5.1.15** a **5.4.9**, že existují takové otevřené množiny $G \supset A$, $H \supset B$, že $G \cap H = \emptyset$. Podle **4.6.13** existuje taková otevřená K, že $K \cap Q = A$. Budiž $M = M_0 \cup (G \cap K)$.

II. Jest $M \cap Q = M_0 \cup (G \cap K \cap Q) = M_0 \cup A = M_0$, neboť

$$A \subset Q - (Q - M_0) = M_0 \,.$$

III. Podle **4.8.16** potřebujeme pouze dokázat, že množina $Q \cap \operatorname{Fr} M$ je podmnožinou relativní hranice množiny M_0. Tato relativní hranice je rovna $Q \cap \overline{M}_0 \cap \overline{Q - M}_0 = Q - (A \cup B)$, takže máme dokázat, že $(A \cup B) \cap \operatorname{Fr} M = \emptyset$. Je-li $x \in A$, je $G \cap K \subset M$ okolím x podle **4.4.11** a **4.4.13**; je-li $x \in B = Q - \overline{M}_0$, je $H \cap (P - \overline{M}_0) \subset P - \overline{M}$ okolím x podle **4.4.11** a **4.4.13.** V obou případech je $x \in P - \operatorname{Fr} M$ podle **4.8.2.**

IV. Je-li M_0 relativně otevřená, je $Q - M_0$ relativně uzavřená, tedy $Q \cap \overline{Q - M}_0 = Q - M_0$, $A = Q - \overline{Q - M}_0 = M_0$. Tudíž $M_0 \subset G \cap$ $\cap K$, takže M je otevřená podle **4.4.11.**

5.5. Cvičení k § 5

5.5.1. Jsou-li bodové množiny A, B uzavřené, pak $A - B$, $B - A$ jsou oddělené.

5.5.2. Budiž P F-prostor. Budiž $\{A_i\}_1^n$ taková konečná posloupnost bodových množin, že pro $1 \leqq i < k \leqq n$ množiny A_i, A_k jsou H-oddělené. Pak existují takové otevřené bodové množiny $G_i \supset A_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, že $\overline{A}_i \cap \overline{A}_k = \overline{G}_i \cap \overline{G}_k$ pro $1 \leqq i < k \leqq n$.

5.5.3. Aby F-prostor P byl dědičně normální, k tomu je nutné a stačí, aby k libovolným množinám $A_1 \subset P$, $A_2 \subset P$ existovaly takové uzavřené množiny F_1, F_2, že

$$F_1 \cup F_2 = P\,,\quad A_1 \subset F_1\,,\quad A_2 \subset F_2\,,\quad (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cap F_1 \cap F_2 = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\,.$$

5.5.4. Budiž P K-prostor (viz definici **4.13.6**). Nechť ke každému okolí U každého $x \in P$ existuje takové okolí V bodu x, že $\overline{V} \subset U$. Pak P je topologický prostor (a tedy R-prostor).

Definice **5.5.1.** Pravíme, že bodové množiny M_1, M_2 jsou *$\overline{H}$-oddělené* (v prostoru P), existuje-li takové okolí U_1 množiny M_1 a takové okolí U_2 množiny M_2, že množiny U_1, U_2 jsou oddělené.

5.5.5. Jsou-li množiny A, B $\overline{H}$-oddělené, jsou H-oddělené.

5.5.6. Jestliže v F-prostoru P množiny A, B jsou H-oddělené, pak jsou $\overline{H}$-oddělené.

5.5.7. V H-prostoru P, který je popsán v příkladě **8.3.3** (str. 194), množiny (a), (b) nejsou $\overline{H}$-oddělené.

Definice **5.5.2.** Pravíme, že bodové množiny M_1, M_2 jsou *$\overline{\overline{H}}$-oddělené* (v prostoru P), existuje-li takové okolí U_1 množiny M_1 a takové okolí U_2 množiny M_2, že $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$.

5.5.8. Jsou-li množiny A, B $\overline{\overline{H}}$-oddělené, jsou $\overline{H}$-oddělené.

5.5.9. Budiž P N-prostor; buďtež A, B dvě disjunktní uzavřené množiny. Pak A, B jsou $\overline{\overline{H}}$-oddělené.

5.5.10. Budiž P R-prostor. Je-li $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, pak množiny (a), (b) jsou $\overline{\overline{H}}$-oddělené.

5.5.11. Nechť prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N}$ všech celých kladných čísel, z množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a ze dvou dalších bodů a, b. Je-li $X \subset P$, $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, pak nechť $(m, n) \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže $(m, n) \in X$. Je-li $X \subset P$, $n \in \mathbf{N}$, pak nechť $n \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže buďto $n \in X$ nebo existuje nekonečně mnoho takových $x \in \mathbf{N}$, že $(n, x) \in X$. Je-li $X \subset P$, pak nechť $a \in X$ ($b \in \overline{X}$) právě tehdy, jestliže buďto $a \in X$ ($b \in X$) nebo ke každému $k \in \mathbf{N}$ existuje taková dvojice $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, že $(m, n) \in X$, $m > k$ a n je liché (sudé). Prostor Q vnořený do P nechť se skládá z $\mathbf{N} \cup (a)$ a ze všech těch $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, pro něž n je liché. Pak P je FH-prostor, ale množiny (a), (b) nejsou $\overline{\overline{H}}$-oddělené. V prostoru Q jsou každé dvě různé jednobodové množiny $\overline{\overline{H}}$-oddělené, ale Q není R-prostor.

5.5.12. Budiž $P = Q_1 \cup Q_2$; množiny $Q_1 - Q_2$, $Q_2 - Q_1$ buďtež oddělené v prostoru P. Pak uzávěr libovolné množiny $M \subset P$ je sjednocením relativního uzávěru množiny $M \cap Q_1$ ve vnořeném prostoru Q_1 a relativního uzávěru množiny $M \cap Q_2$ ve vnořeném prostoru Q_2. Jestliže pro $i = 1$ i pro $i = 2$ množina $M \cap Q_i$ je relativně uzavřená (relativně otevřená) v prostoru Q_i, pak množina M je uzavřená (otevřená) v prostoru P.