Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory

§4. Topologické prostory a F-prostory

In: Eduard Čech (author); Josef Novák (author); Miroslav Katětov (author): Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959. pp. 57--101.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402595

§ 4. TOPOLOGICKÉ PROSTORY A $\mathcal{F}$-PROSTORY

4.1. Uzávěr a derivace

Budiž P libovolná množina a budiž $\mathfrak{P}$ soustava všech jejích částí. Pravíme, že P je *topologický prostor*, v dalším obyčejně prostě *prostor*, je-li dáno zobrazení u soustavy $\mathfrak{P}$ do $\mathfrak{P}$ splňující tyto dva axiomy:

(I) jestliže $X \subset P$ obsahuje nejvýš jeden prvek, je $uX = X$;

(II) $X_1 \subset P,\ X_2 \subset P \Rightarrow u(X_1 \cup X_2) = (uX_1) \cup (uX_2)$.

Je-li obava z nedorozumění, mluvíme určitěji o prostoru (P, u).

Zobrazení u nazýváme *topologií* prostoru P a pro $X \subset P$ nazýváme množinu uX *uzávěrem* množiny X (při topologii u). Prvky prostoru nazýváme *body* a části prostoru nazýváme *bodové množiny.*

Jsou-li dány dvě topologie u, v v téže množině P a je-li

$$X \subset P \Rightarrow uX \subset vX\,,$$

pravíme, že u je *jemnější* než v nebo že v je *hrubší* než u. Při tom nevylučujeme případ $u = v$.

Obyčejně je dána v P jediná topologie. Potom uzávěr bodové množiny X obyčejně značíme $\overline{X}$. Vodorovného pruhu se užívá v této knize pouze v tomto smyslu.

Definice **4.1.1.** *Homeomorfní zobrazení* f prostoru (P, u) na prostor (P_1, u_1) je prosté zobrazení P na P_1, při kterém platí

$$X \subset P \Rightarrow f^1(uX) = u_1\, f^1(X)\,.$$

Topologické vlastnosti prostoru (tj. vlastnosti, které se dají převést na pojem uzávěru) jsou ovšem invariantní při homeomorfních zobrazeních.

4.1.1. V každém prostoru P platí pravidlo

$$X_1 \subset X_2 \subset P \Rightarrow \overline{X}_1 \subset \overline{X}_2\,,$$

které plyne ze (II).

4.1.2. V každém prostoru P platí pravidlo

$$X \subset \overline{X}.$$

Důkaz. Zvolme $a \in X$. Pak je $(a) \subset X$, takže podle **4.1.1** $\overline{(a)} \subset \overline{\overline{X}}$, tedy podle (I) $(a) \subset \overline{X}$ neboli $a \in \overline{X}$.

Definice **4.1.2.** *Derivace bodové množiny* X, značka X', je bodová množina definovaná takto:

$$x \in X' \Leftrightarrow x \in \overline{X - (x)}\,.$$

Body $x \in X'$ se nazývají *hromadnými body množiny* X (ať už patří či nepatří do X).

4.1.3. V každém prostoru P platí pravidla:

(I′) obsahuje-li $X \subset P$ nejvýš jeden bod, je $X' = \emptyset$;

(II′) $X_1 \subset P$, $X_2 \subset P \Rightarrow (X_1 \cup X_2)' = X_1' \cup X_2'$.

4.1.4. Pro každou bodovou množinu X je $\overline{X} = X \cup X'$.

Důkaz. I. Jest $X \subset \overline{X}$ podle **4.1.2,** $X' \subset \overline{X}$ podle **4.1.1**, tedy $\overline{X} \supset$ $\supset (X \cup X')$.

II. Je-li $x \in \overline{X} - X$, je $X - (x) = X$, tedy $x \in X'$; tudíž $\overline{X} \subset$ $\subset (X \cup X')$.

4.1.5. Každé části X množiny P budiž přiřazena $X' \subset P$ tak, že jsou splněny axiomy (I′) a (II′). Pak existuje v P právě jedna taková topologie, při níž derivace každé $X \subset P$ je rovna X'.

Důkaz. Existuje-li taková topologie u, je $uX = X \cup X'$ podle **4.1.4.** Z axiomů (I′), (II′) plynou okamžitě axiomy ($\overline{\text{I}}$), ($\overline{\text{II}}$). Musíme ještě dokázat, že $x \in X' \Leftrightarrow x \in u[X - (x)]$. To však je zřejmé, neboť podle (I′) a (II′) je $X' = [X - (x)]'$ a podle definice u je $x \in u[X -$ $- (x)] \Leftrightarrow x \in [X - (x)]'$.

Věta **4.1.5** říká, že místo pojmu uzávěru jsme mohli za primitivní pojem vzít pojem derivace.

4.1.6. Pro každou konečnou bodovou množinu M je $M' = \emptyset$. Plyne ze **4.1.3.**

4.1.7. Pro každou konečnou bodovou množinu M je $M = \overline{M}$. Odvodí se přímo z ($\bar{\mathrm{I}}$) a ($\overline{\mathrm{II}}$) nebo také ze **4.1.4** a **4.1.6.**

4.1.8. V každém prostoru P platí: $X_1 \subset X_2 \subset P \Rightarrow X_1' \subset X_2'$. Plyne z (II′).

4.2. Okolí

Ve cvičeních **1.6.1** až **1.6.37** byla sestavena jednoduchá pravidla pro operování s množinami, kterých často užíváme u bodových množin. Důležitý je zejména pojem *doplňku bodové množiny* X, který označíme X^*; je to prostě množina $P - X$. Je tedy $(X^*)^* = X$ pro každou $X \subset P$ a $X_1 \subset X_2 \subset P \Rightarrow X_2^* \subset X_1^*$. Z každé soustavy bodových množin $\mathfrak{M}$ vznikne *doplňková soustava* $\mathfrak{M}^*$, která se skládá z doplňků množin $X \in \mathfrak{M}$. Jestliže ve cvičení **1.6.8** zvolíme $C = P$, dostaneme tzv. *de Morganova pravidla*:

$$\bigcup A^*(z) = [\bigcap A(z)]^*\,, \quad \bigcap A^*(z) = [\bigcup A(z)]^*\,.$$

Od pojmu uzávěru dospějeme utvořením doplňku k pojmu vnitřku:

Definice **4.2.1.** *Vnitřek bodové množiny* X, značka X_ι, je množina

$$X_\iota = P - \overline{P - X}\,.$$

4.2.1. V každém prostoru P platí pravidla:

(I_ι) jestliže $P - X$ obsahuje nejvýš jeden bod, je $X_\iota = X$;

(II_ι) $X_1 \subset P,\ X_2 \subset P \Rightarrow (X_1 \cap X_2)_\iota = (X_1)_\iota \cap (X_2)_\iota$.

Poznámka. Podle **4.1.2** je vždy $X_\iota \subset X$.

Je výhodné nahradit pojem vnitřku pojmem okolí, v podstatě s ním ekvivalentním.

Definice **4.2.2.** Bodová množina U se nazývá *okolím bodu* a (*okolím bodové množiny* M), jestliže $a \in U_\iota$ ($M \subset U_\iota$), tj. $a \in P - \overline{P - U}$ ($M \subset P - \overline{P - U}$).

4.2.2. Prostor je okolím každého bodu a každé bodové množiny.

4.2.3. Každé okolí bodu a (bodové množiny M) obsahuje bod a (množinu M). Plyne z poznámky za větou **4.2.1.**

4.2.4. Každá nadmnožina okolí bodu a (množiny M) je okolím bodu a (množiny M). Plyne ze **4.1.1.**

4.2.5. Průnik soustavy konečně mnoha okolí bodu a (množiny M) je okolím bodu a (množiny M). Plyne ze (II_ι).

4.2.6. Je-li U okolí bodu a (množiny M) a je-li $x \neq a$ ($x \in P - M$), je také $U - (x)$ okolím bodu a (množiny M). Máme dokázat, že $[U - (x)]_\iota = U_\iota - (x)$. To plyne ze ($\text{II}_\iota$) a ($\text{I}_\iota$), neboť $U - (x) = U \cap [P - (x)]$.

4.2.7. Průnik všech okolí bodu a (množiny M) je totožný s (a) [s M]. Plyne ze **4.2.3** a **4.2.6.**

4.2.8. Aby U byla okolím bodové množiny M, k tomu je nutné a stačí:

$$x \in M \Rightarrow U \text{ je okolím bodu } x.$$

4.2.9. Aby bod a náležel do uzávěru bodové množiny M, k tomu je nutné a stačí, aby každé okolí bodu a obsahovalo aspoň jeden bod množiny M.

Důkaz. I. Budiž $a \in \overline{M}$. Jest

$$U \cap M = \emptyset \Rightarrow M \subset P - U \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{P - U} \Rightarrow a \in \overline{P - U} ;$$

pro okolí U bodu a však je $a \in P - \overline{P - U}$.

II. Budiž $a \in P - \overline{M}$. Pak $U = P - M$ je okolí bodu a a jest $U \cap M = \emptyset$.

4.2.10. Aby bod a náležel do derivace bodové množiny M, k tomu je nutné a stačí, aby každé okolí bodu a obsahovalo aspoň jeden od a různý bod množiny M. Plyne ze **4.2.9** a z definice **4.1.2.**

4.2.11. Aby bod a náležel do derivace bodové množiny M, k tomu je nutné a stačí, aby každé okolí bodu a obsahovalo nekonečně mnoho bodů množiny M. Plyne ze **4.2.10** a **4.2.6.**

4.2.12. Buďtež u a v dvě topologie v množině P. Aby u byla jemnější než v, k tomu je nutné a stačí, aby pro každý $x \in P$ každé v-okolí bodu x bylo jeho u-okolím.

Důkaz. I. Podmínka stačí podle **4.2.9.**

II. Je-li u jemnější než v a je-li V v-okolí bodu x, je $u(P - V) \subset \subset v(P - V)$, $x \in P - v(P - V)$, tedy $x \in P - u(P - V)$, tj. V je u-okolí bodu x.

4.2.13. Budiž $M \subset P$, $N \subset P$ a budiž U okolí množiny N. Pak je

$$N \cap \overline{M} = N \cap \overline{M \cap U}\,.$$

Důkaz. Podle **4.1.1** stačí prokázat nemožnost předpokladu $a \in (N \cap \cap \overline{M}) - \overline{M \cap U}$. Jest $M \subset (M \cap U) \cup (P - U)$, tedy $\overline{M} \subset (\overline{M \cap U}) \cup \cap \overline{P - U}$. Tudíž $a \in \overline{P - U}$, tj. U není okolím bodu a. To je spor proti **4.2.8**, neboť $a \in N$.

4.3. Úplné soustavy okolí

Definice **4.3.1.** *Úplnou soustavou okolí* bodu $a \in P$ (množiny $M \subset P$) rozumíme takovou soustavu $\mathfrak{S}$ okolí bodu a (množiny M), že každé okolí bodu a (množiny M) je nadmnožinou aspoň jednoho v $\mathfrak{S}$ obsaženého okolí. Vždy existuje aspoň jedna úplná soustava okolí, totiž soustava všech okolí bodu a (množiny M).

4.3.1. Úplná soustava $\mathfrak{U}(a)$ okolí bodu a má tyto vlastnosti:

(I$\mathfrak{U}$) soustava $\mathfrak{U}(a)$ není prázdná;

(II$\mathfrak{U}$) $U \in \mathfrak{U}(a) \Rightarrow a \in U$;

(III$\mathfrak{U}$) je-li bod x různý od a, pak existuje taková $U \in \mathfrak{U}(a)$, že $x \in P - U$;

(IV$\mathfrak{U}$) $U_1 \in \mathfrak{U}(a)$, $U_2 \in \mathfrak{U}(a) \Rightarrow$ existuje $U \in \mathfrak{U}(a)$, $U \subset U_1 \cap U_2$.

Důkaz: **4.2.2, 4.2.3, 4.2.5, 4.2.6.**

4.3.2. Je-li $\mathfrak{U}(a)$ úplná soustava okolí bodu a, pak

$$U \in \mathfrak{U}(a) \Rightarrow U \cap M \neq \emptyset$$

je nutnou a postačující podmínkou toho, aby bod a náležel do uzávěru množiny M. To plyne ze **4.2.9.**

4.3.3. Každému prvku a množiny P budiž přiřazena soustava $\mathfrak{U}(a)$ částí P tak, že jsou splněny axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) (viz **4.3.1**). Pak existuje v P právě jedna taková topologie u, při které pro každý bod $a \in P$ je $\mathfrak{U}(a)$ úplnou soustavou okolí bodu a.

Důkaz. I. Existuje-li taková topologie u, pak podle **4.3.2** je uzávěrem uX libovolné $X \subset P$ množina těch $x \in P$, pro něž

$$U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow U \cap X \neq \emptyset .$$

II. Musíme zjistit platnost axiomů ($\bar{\text{I}}$) a ($\bar{\text{II}}$). Podle (I$\mathfrak{U}$) je $u\emptyset = \emptyset$. Je-li $x \in P$, je $x \in u(x)$ podle (II$\mathfrak{U}$), avšak $a \in P - (x) \Rightarrow a \in P - u(x)$ podle (III$\mathfrak{U}$). Tudíž platí ($\bar{\text{I}}$). Je-li $X_1 \subset P, X_2 \subset P$, pak $u(X_1 \cup X_2) \supset uX_1 \cup uX_2$ je zřejmé. Jestliže však $a \in P$ nenáleží ani do uX_1 ani do uX_2, pak podle definice topologie u existují takové $U_1 \in \mathfrak{U}(a)$, $U_2 \in \mathfrak{U}(a)$, že $U_1 \cap X_1 = \emptyset = U_2 \cap X_2$. Podle (IV$\mathfrak{U}$) existuje $U \in \mathfrak{U}(a)$, $U \subset U_1 \cap U_2$, takže $U \cap (X_1 \cup X_2) = \emptyset$, tj. a nenáleží do $u(X_1 \cup X_2)$. Tudíž platí ($\bar{\text{II}}$).

III. Pro $a \in P$, $U \in \mathfrak{U}(a)$ je U u-okolím bodu a, neboť jinak by bylo $a \in u(P - U)$, tj. $V \in \mathfrak{U}(a) \Rightarrow V \cap (P - U) \neq \emptyset$, což pro $V = U$ je nesprávné.

IV. Pro každý $a \in P$ je soustava okolí $\mathfrak{U}(a)$ úplná. Neboť jinak by existovalo u-okolí W bodu a, pro něž by bylo

$$U \in \mathfrak{U}(a) \Rightarrow U \cap (P - W) \neq \emptyset$$

a z toho by plynulo $a \in u(P - W)$, což je ve sporu s tím, že W je u-okolím bodu a.

Věta **4.3.3** poskytuje metodu zavedení topologie do množiny P, která má velkou praktickou důležitost. Při takovém zavedení topologie nazveme $\mathfrak{U}(a)$ *definující soustavou okolí bodu* $a \in P$. Je třeba mít na paměti, že dvě různé volby definujících soustav okolí mohou vytvořit touž topologii v P.

4.3.4. Do množiny P budiž zavedena topologie u definujícími soustavami okolí $\mathfrak{U}(a)$ $(a \in P)$ a topologie v definujícími soustavami okolí $\mathfrak{V}(a)$ $(a \in P)$. K tomu, aby byla u jemnější než v, je nutné a stačí, aby pro každý bod a k libovolné $V \in \mathfrak{V}(a)$ existovala taková $U \in \mathfrak{U}(a)$, že $U \subset V$.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Je-li W v-okolí bodu a, pak podle definice **4.3.1** existuje $V \in \mathfrak{V}(a)$, $V \subset W$. Podle naší podmínky existuje $U \in \mathfrak{U}(a)$, $U \subset V$. Jest $U \subset W$ a tedy podle **4.2.4** je W u-okolím bodu a. Tudíž u je jemnější než v podle **4.2.12.**

II. Budiž u jemnější než v a budiž $a \in P$, $V \in \mathfrak{V}(a)$. Podle **4.2.12** je V u-okolím bodu a, takže podle definice **4.3.1** existuje $U \in \mathfrak{U}(a)$, $U \subset V$.

4.3.5. Do množiny P budiž zavedena topologie u definujícími soustavami okolí $\mathfrak{U}(a)$ $(a \in P)$ a topologie v definujícími soustavami okolí $\mathfrak{V}(a)$ $(a \in P)$. K tomu, aby u, v byly totožné, je nutné a stačí, aby pro každý $a \in P$:

[1] k libovolné $V \in \mathfrak{V}(a)$ existovala $U \in \mathfrak{U}(a)$, $U \subset V$,

[2] k libovolné $U \in \mathfrak{U}(a)$ existovala $V \in \mathfrak{V}(a)$, $V \subset U$.

4.3.6. Budiž $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a (bodové množiny M). Budiž V okolí bodu a (množiny M). Nechť

$$X \in \mathfrak{V} \Leftrightarrow X \in \mathfrak{U}, \quad X \subset V.$$

Pak také $\mathfrak{V}$ je úplná soustava okolí bodu a (množiny M). Je-li W okolí bodu a (množiny M), je podle **4.2.5** také $V \cap W$ okolím bodu a (množiny M). Protože soustava $\mathfrak{U}$ je úplná, existuje $U \in \mathfrak{U}$, $U \subset V \cap W$. Pak je $U \in \mathfrak{V}$, $U \subset W$. Tudíž soustava $\mathfrak{V}$ je úplná.

4.4. Uzavřené a otevřené bodové množiny

Definice **4.4.1.** Bodová množina M se nazývá *uzavřená*, je-li $\overline{M} = M$.

4.4.1. Je-li $\overline{M} \subset M \subset P$, je M uzavřená. Plyne ze **4.1.2.**

4.4.2. $M \subset P$ je uzavřená právě tehdy, jestliže $M' \subset M$. Plyne ze **4.1.4.**

4.4.3. Každá konečná množina je uzavřená. Plyne ze **4.1.7.**

4.4.4. Celý prostor je uzavřená množina. Plyne ze **4.4.1.**

4.4.5. Budiž $\mathsf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $A(z)$ uzavřená bodová množina. Pak také $\bigcap A(z)$ $(z \in \mathsf{C})$ je uzavřená množina. Plyne ze **4.1.1** a **4.4.1.**

4.4.6. Sjednocení konečně mnoha uzavřených bodových množin je uzavřená množina. Plyne z axiomu (II).

4.4.7. Budiž $M \subset F \subset P$. Je-li F uzavřená, je $\overline{M} \subset F$. Plyne ze **4.1.1.**

Definice **4.4.2.** Bodová množina M se nazývá *otevřená,* jestliže $P - M$ je uzavřená. Jinak řečeno, soustava všech uzavřených množin a soustava všech otevřených množin jsou navzájem doplňkové soustavy.

4.4.8. $\emptyset$ je otevřená množina. Viz **4.4.4.**

4.4.9. Celý prostor P je otevřená množina. Také $P - K$ je otevřená pro každou konečnou množinu $K \subset P$. Viz **4.4.3.**

4.4.10. Budiž $\mathsf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $A(z)$ otevřená bodová množina. Pak také $\bigcup A(z)$ $(z \in \mathsf{C})$ je otevřená množina. Viz **4.4.5.**

4.4.11. Průnik konečně mnoha otevřených bodových množin je otevřená množina. Viz **4.4.6.**

4.4.12. Bodová množina G je otevřená právě tehdy, je-li svým vlastním okolím. Že G je okolím množiny G, znamená, že

$$G \subset P - \overline{P - G} \Leftrightarrow \overline{P - G} \subset P - G ,$$

tedy podle **4.4.1**, že $P - G$ je uzavřená.

4.4.13. Otevřená množina G je právě tehdy okolím bodu a (množiny M), jestliže $a \in G$ $(M \subset G)$. Plyne ze **4.2.3**, **4.2.8** a **4.4.12.**

4.4.14. Budiž $M \subset P$, $G \subset P$; G budiž otevřená. Pak je

$$G \cap \overline{M} = G \cap (\overline{M \cap G}) .$$

Plyne ze **4.2.13** a **4.4.12.**

4.4.15. Budiž $M \subset P$, $G \subset P$; G budiž otevřená. Pak je

$$G \cap M = \emptyset \Rightarrow G \cap \overline{M} = \emptyset .$$

Definice **4.4.3.** Bodová množina M se jmenuje *F_σ-množina*, je-li $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ s uzavřenými F_n.

4.4.16. Každá uzavřená množina je F_σ-množina.

4.4.17. Sjednocení nejvýš spočetné soustavy F_σ-množin je F_σ-množina. Viz **2.2.4.**

4.4.18. Průnik konečně mnoha F_σ-množin je F_σ-množina. Stačí uvažovat průnik dvou F_σ-množin $M_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1n}$, $M_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n}$, který je průnikem spočetné soustavy uzavřených množin $F_{1m} \cap F_{2n}$, kde $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Definice **4.4.4.** Bodová množina M se nazývá *G_δ-množina*, jestliže $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ s otevřenými G_n.

4.4.19. Bodová množina M je právě tehdy G_δ-množinou, jestliže její doplněk $P - M$ je F_σ-množinou.

4.4.20. Každá otevřená množina je G_δ-množina.

4.4.21. Průnik nejvýš spočetné soustavy G_δ-množin je G_δ-množina.

4.4.22. Sjednocení konečně mnoha G_δ-množin je G_δ-množina.

4.5. F-PROSTORY

Definice **4.5.1.** Bod a prostoru P se nazývá *slabým F-bodem,* jestliže

$$X \subset P\,, \quad a \in \overline{\overline{X}} \Rightarrow a \in \overline{X}\,.$$

Při tom $\overline{\overline{X}}$ je uzávěr uzávěru množiny X.

4.5.1. Aby $a \in P$ byl slabým F-bodem, k tomu je nutné a stačí, aby vnitřek každého okolí bodu a byl okolím bodu a.

Důkaz. Je-li $U = P - X$, je podle definice **4.2.1** $U_\iota = P - \overline{X}$, a tedy $(U_\iota)_\iota = P - \overline{\overline{X}}$. Definici slabého F-bodu můžeme vyslovit ve tvaru:

$$\text{není-li } a \in \overline{X}, \text{ pak není } a \in \overline{\overline{X}}$$

neboli ve tvaru $a \in U_\iota \Rightarrow a \in (U_\iota)_\iota$ a podle definice **4.2.2**: je-li U okolím a, je také U_ι okolím a.

Definice **4.5.2.** Bod a prostoru P se nazývá *silným F-bodem*, jestliže soustava všech otevřených okolí bodu a je úplnou soustavou okolí bodu a.

4.5.2. Silný F-bod je slabým F-bodem. Budiž U okolí bodu $a \in P$. Je-li a silným F-bodem, existuje otevřené okolí $G \subset U$ bodu a. Protože $G \subset U$, je $P - U \subset P - G$, tedy $\overline{P - U} \subset P - G$ podle **4.4.7.** Podle definice **4.2.1** je $U_\iota = P - \overline{P - U}$, tedy $U_\iota \supset G$. Podle **4.2.4** je tedy U_ι okolím bodu a, takže a je slabým F-bodem podle **4.5.1.**

Definice **4.5.3.** Prostor P se nazývá *F-prostorem* (a jeho topologie se nazývá *F-topologií*), je-li uzávěr každé bodové množiny množinou uzavřenou.

4.5.3. V F-prostoru P je uzávěr M bodové množiny $\overline{M}$ nejmenší uzavřenou nadmnožinou M. Neboť předně je $\overline{M}$ uzavřenou nadmnožinou množiny M a za druhé podle **4.4.7** je $\overline{M} \subset F$ pro každou uzavřenou $F \supset M$.

4.5.4. Aby prostor P byl F-prostorem, k tomu je nutné a stačí, aby vnitřek každé bodové množiny byl otevřenou množinou. Je-li totiž $Y = P - X$, je $Y_\iota = P - \overline{X}$. $\overline{X}$ je uzavřená právě tehdy, jestliže Y_ι je otevřená.

4.5.5. Aby prostor P byl F-prostorem, k tomu je nutné a stačí, aby každý jeho bod byl slabým F-bodem. Viz definice **4.5.1** a **4.5.3.**

4.5.6. Aby prostor P byl F-prostorem, k tomu je nutné a stačí, aby každý jeho bod byl silným F-bodem.

D ů k a z. I. Je-li každý bod silným F-bodem, je P F-prostorem podle **4.5.2** a **4.5.5.**

II. P budiž F-prostor. U budiž okolí bodu $a \in P$. Jest

$$a \in P - \overline{P - U} = G\,.$$

Množina G je otevřená, je $U \supset G$ a podle **4.4.13** je G okolím bodu a. Tedy a je silný F-bod.

4.5.7. Budiž $M \subset P$. Každý bod $x \in M$ budiž silným F-bodem. Pak otevřená okolí množiny M tvoří úplnou soustavu okolí této množiny. Budiž U okolí M. Pro každý $x \in M$ existuje podle **4.2.8** a podle definice **4.5.2** otevřené okolí $G(x) \subset U$ bodu x. Položme $G = \bigcup G(x)$ $(x \in M)$ pro $M \neq \emptyset$, $G = \emptyset$ pro $M = \emptyset$. Pak je $M \subset G$ podle **4.2.3**, je $G \subset U$ a podle **4.4.8** a **4.4.10** je G otevřená množina. G je okolím množiny M podle **4.4.13.**

4.5.8. P budiž F-prostor. Pak otevřená okolí libovolné množiny $M \subset P$ tvoří úplnou soustavu okolí této množiny.

4.5.9. Pro každý bod x prostoru P budiž $\mathfrak{U}(x)$ úplná soustava okolí bodu x. Aby $a \in P$ byl slabým F-bodem, k tomu je nutné a stačí, aby ke každému $U \in \mathfrak{U}(a)$ existovalo takové $V \in \mathfrak{U}(a)$, že ke každému $x \in V$ existuje $W \in \mathfrak{U}(x)$, $W \subset U$.

D ů k a z. I. Nechť podmínka je splněna. Budiž T libovolné okolí bodu a. Existuje $U \in \mathfrak{U}(a)$, $U \subset T$. Podle podmínky k tomuto U určíme V. Množina U je zřejmě okolím množiny V, takže $V \subset U_\iota \subset T_\iota$, a tedy T_ι podle **4.2.4** je okolím bodu a. Tudíž a je slabý F-bod podle **4.5.1.**

II. Budiž a slabý F-bod. Je-li $U \in \mathfrak{U}(a)$, je $U_\iota = P - \overline{P - U}$ okolím bodu a podle **4.5.1.** Tudíž existuje $V \in \mathfrak{U}(a)$, $V \subset U_\iota$. Množina U je tedy okolím každého $x \in V$; takže pro $x \in V$ existuje taková $W \in \mathfrak{U}(x)$, že $W \subset U$.

4.5.10. Jestliže v libovolném prostoru P derivace M' nějaké bodové množiny M je uzavřená, pak také uzávěr $\overline{M}$ množiny M je uzavřená množina. Podle **4.4.2** je $M'' \subset M'$. Podle

4.1.3 a **4.1.4** je $(\overline{M})' = M' \cup M'' = M' \subset \overline{M}$, a tudíž $\overline{M}$ je uzavřená podle **4.4.2.**

Obrácení věty **4.5.10** je nesprávné (viz příklad **6.4.1**). Nicméně platí:

4.5.11. Aby prostor P byl F-prostorem, k tomu je nutné a stačí, aby derivace M' každé $M \subset P$ byla uzavřená množina.

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna, pak P je F-prostor podle **4.5.10.**

II. Budiž P F-prostor. Podle **4.4.2** máme dokázat, že $M'' \subset M'$. Nechť naopak $a \in M'' - M'$. Protože $a \in P - M'$, existuje podle **4.2.10** takové okolí U bodu a, že $U \cap M \subset (a)$. Podle **4.5.1** a **4.5.5** je U_ι okolím bodu a. Protože $a \in M''$, existuje tedy podle **4.2.10** bod $b \in M' \cap \cap U_\iota$. Protože $b \in U_\iota$, je U okolím bodu b. Protože $b \in M'$, je množina $U \cap M$ podle **4.2.11** nekonečná a to je spor.

Budiž $\mathfrak{F}$ soustava podmnožin dané množiny P. Jestliže v P existuje topologie, při které je $\mathfrak{F}$ soustavou všech uzavřených množin, pak podle **4.4.3**, **4.4.4**, **4.4.5** a **4.4.6** jsou splněny tyto axiomy:

(I$\mathfrak{F}$) jestliže množina $X \subset P$ obsahuje nejvýš jeden prvek, jest $X \in \mathfrak{F}$;

(II$\mathfrak{F}$) $P \in \mathfrak{F}$;

(III$\mathfrak{F}$) průnik libovolné soustavy množin obsažené v $\mathfrak{F}$ náleží do $\mathfrak{F}$;

(IV$\mathfrak{F}$) $F_1 \in \mathfrak{F},\ F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$.

Obráceně platí:

4.5.12. Nechť soustava $\mathfrak{F}$ podmnožin množiny P splňuje axiomy (I$\mathfrak{F}$) až (IV$\mathfrak{F}$). Soustava Φ všech těch topologií v P, při kterých je $\mathfrak{F}$ soustavou všech uzavřených množin, není prázdná. Soustava Φ obsahuje právě jednu F-topologii; tato je nejhrubší topologií soustavy Φ.

Důkaz. I. Je-li $u \in \Phi$, $v \in \Phi$ a je-li u F-topologií, pak je u hrubší než v. Neboť pro $X \subset P$ je $uX \supset X$ a $uX \in \mathfrak{F}$, tedy $uX \supset vX$ podle **4.4.7.** Jestliže nejen u, nýbrž i v je F-topologií, pak je také v hrubší než u a tudíž $u = v$.

II. Pro každou $M \subset P$ existují podle (II$\mathfrak{F}$) množiny $X \supset M$, $X \in \mathfrak{F}$; průnik všech takových X označme uM, takže $uM \in \mathfrak{F}$ podle (III$\mathfrak{F}$).

Zřejmě

$$M \subset P \Rightarrow M \subset uM\,, \tag{1}$$

$$M \subset P \Rightarrow uM \in \mathfrak{F}\,, \tag{2}$$

$$M \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow uM = M\,. \tag{3}$$

u je topologie v P, neboť axiom (I) plyne z (I$\mathfrak{F}$) a ze (3), a axiom (II) se snadno odvodí z definice uzávěru a ze (IV$\mathfrak{F}$). Podle (3) je $\mathfrak{F}$ soustava všech množin uzavřených při u, tj. $u \in \Phi$. Ze (2) plyne, že u je F-topologie.

Definice **4.5.4.** Ze **4.5.12** plyne, že ke každé topologii v v množině P existuje právě jedna F-topologie u v téže množině s tou vlastností, že $X \subset P$ je uzavřená při u právě tehdy, je-li uzavřená při v. Tuto F-topologii u nazveme *F-modifikací topologie v*. Podle **4.5.12** je studium F-modifikace topologie v ekvivalentní se studiem soustavy bodových množin uzavřených při v.

4.5.13. Nechť u a v jsou dvě topologie v P. Je-li u jemnější než v, pak každá bodová množina uzavřená při v je také při u uzavřená. Je-li $M \subset P$ uzavřená při v, je $M \subset uM \subset vM = M$, tedy $M = uM$, tj. M je uzavřená při u.

4.5.14. Nechť u a v jsou dvě F-topologie v P. Jestliže každá množina uzavřená při v je také uzavřená při u, pak u je jemnější než v. Pro $M \subset P$ je vM uzavřená při u, takže $uM \subset vM$ podle **4.4.7.**

4.5.15. F-modifikace u topologie v v množině P je nejjemnější ze všech F-topologií hrubších než v. Podle **4.5.12** je u hrubší než v. Nechť také F-topologie w je hrubší než v. Každá bodová množina uzavřená při w je podle **4.5.13** uzavřená při v a tudíž podle definice u také uzavřená při u. Tedy u je jemnější než w podle **4.5.14.**

Podle **4.5.12** můžeme teorii F-prostorů založit na primitivním pojmu uzavřené množiny podrobeném axiomům (I$\mathfrak{F}$) až (IV$\mathfrak{F}$). Pro obecné topologické prostory je to nemožné. Při budování teorie F-prostorů můžeme vzít za východisko místo soustavy $\mathfrak{F}$ všech uzavřených množin také doplňkovou soustavu $\mathfrak{G}$ všech otevřených množin, při čemž $\mathfrak{G}$ splňuje tyto axiomy:

(I$\mathfrak{G}$) jestliže množina $X \subset P$ obsahuje nejvýš jeden prvek, jest $P - X \in \mathfrak{G}$;

(II$\mathfrak{G}$) $\emptyset \in \mathfrak{G}$;

(III$\mathfrak{G}$) sjednocení libovolné soustavy množin obsažené v $\mathfrak{G}$ náleží do $\mathfrak{G}$;

(IV$\mathfrak{G}$) $G_1 \in \mathfrak{G}$, $G_2 \in \mathfrak{G} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}$.

Je však prakticky výhodnější zavést místo soustavy $\mathfrak{G}$ jisté její význačné podsoustavy.

Definice **4.5.5.** Soustavu $\mathfrak{B}$ podmnožin F-prostoru P nazveme *otevřenou basí* tohoto prostoru, jestliže: [1] každá $B \in \mathfrak{B}$ je otevřená; [2] každá neprázdná otevřená množina je sjednocením jisté soustavy obsažené v $\mathfrak{B}$. V každém F-prostoru P existuje aspoň jedna otevřená base, totiž soustava všech otevřených bodových množin.

4.5.16. Budiž $\mathfrak{B}$ soustava částí množiny P. Aby v P existovala F-topologie s otevřenou basí $\mathfrak{B}$, musí $\mathfrak{B}$ splňovat tyto dva axiomy:

(I$\mathfrak{B}$) ke každému $x \in P$ existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $x \in B$; je-li $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak dokonce existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $x \in B$, $y \in P - B$;

(II$\mathfrak{B}$) je-li $B_1 \in \mathfrak{B}$, $B_2 \in \mathfrak{B}$, $a \in (B_1 \cap B_2)$, pak existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $a \in B$, $B \subset B_1 \cap B_2$.

Jsou-li splněny axiomy (I$\mathfrak{B}$) a (II$\mathfrak{B}$), je příslušná F-topologie jednoznačně určena. F-topologie je svou otevřenou basí $\mathfrak{B}$ jednoznačně určena, neboť soustava $\mathfrak{G}$ se musí skládat z množiny $\emptyset$ a ze všech sjednocení soustav obsažených v $\mathfrak{B}$. Avšak soustava $\mathfrak{B}$ musí být taková, aby pro $\mathfrak{G}$ platily axiomy (I$\mathfrak{G}$) až (IV$\mathfrak{G}$). Nyní (II$\mathfrak{G}$) a (III$\mathfrak{G}$) jsou jistě splněny a snadno se ukáže, že

$$(\mathrm{I}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{I}\mathfrak{G}), \quad (\mathrm{II}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{IV}\mathfrak{G}).$$

4.5.17. Budiž $\mathfrak{B}$ nějaká soustava otevřených množin F-prostoru P. Pro každý $x \in P$ budiž $\mathfrak{B}(x)$ soustava těch $B \in \mathfrak{B}$, které obsahují bod x. Aby $\mathfrak{B}$ byla otevřenou basí prostoru P, k tomu je nutné a stačí, aby pro každý $x \in P$ byla $\mathfrak{B}(x)$ úplná soustava okolí bodu x.

Důkaz. I. Nechť $\mathfrak{B}$ je otevřená base. Budiž U okolí bodu a. Podle **4.2.3** a **4.5.6** existuje taková otevřená $G \subset U$, že $a \in G$. Z definice **4.5.5** plyne, že existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $B \subset G$, $a \in B$. Jest $B \subset U$ a podle **4.4.13** je B okolím bodu a. Tudíž $\mathfrak{B}(a)$ je úplná soustava okolí bodu a.

II. Nechť pro každý $x \in P$ je $\mathfrak{B}(x)$ úplná soustava okolí bodu x. Nechť $G \neq \emptyset$ je otevřená. Podle **4.4.13** existuje pro každý $x \in G$ taková $B(x) \in \mathfrak{B}(x)$, že $B(x) \subset G$. Pak je $G = \bigcup B(x)$ $(x \in G)$. Tudíž $\mathfrak{B}$ je otevřená base.

4.6. Vnořené prostory

Prostor (P, u) a množina $Q \subset P$ buďtež pevně dány. Zavedeme do Q topologii v pravidlem

$$X \subset Q \Rightarrow vX = Q \cap (uX) .$$

Správnost obou axiomů ($\overline{\mathrm{I}}$) a ($\overline{\mathrm{II}}$) je zřejmá. Pravíme, že (Q, v) je *prostor vnořený do prostoru* (P, u).

Množina $X \subset Q$ má dva uzávěry: předně uzávěr uX v prostoru P, který obyčejně nazýváme prostě uzávěrem a značíme $\overline{X}$, a uzávěr vX v prostoru Q, který nazveme *relativním uzávěrem*. Podobně výrazy derivace, okolí, uzavřená a otevřená množina vztahujeme vždy na celý prostor P a ve vnořeném prostoru mluvíme o *relativní derivaci, relativních okolích, relativně uzavřených a relativně otevřených množinách.* Podobně se vyjadřujeme o F_σ-množinách a o G_δ-množinách.

Je-li $Q_1 \subset Q_2 \subset P$, pak můžeme pokládat Q_1 za prostor vnořený do prostoru Q_2, který sám je vnořen do prostoru P; můžeme však také Q_1 uvažovat přímo jako prostor vnořený do P. Z definice je patrné, že obojí nazírání vede na touž topologii prostoru Q_1.

4.6.1. Budiž Q vnořen do P. Relativní derivace množiny $M \subset Q$ je rovna $Q \cap M'$.

4.6.2. Budiž Q vnořen do P. Budiž $a \in Q$ ($M \subset Q$). Množina $U \subset Q$ je právě tehdy relativním okolím bodu a (množiny M), je-li U průnik množiny Q s okolím bodu a (množiny M).

Důkaz. I. Budiž V okolí bodu a (množiny M). Pro $x = a$ ($x \in M$) je $x \in P - \overline{P - V}$. Podle **4.1.1** je $\overline{Q - Q \cap V} \subset \overline{P - V}$, takže $x \in Q - \overline{Q - Q \cap V}$. Tudíž $Q \cap V$ je relativní okolí bodu a (množiny M).

II. Budiž U relativní okolí bodu a (množiny M). Pro $x = a$ ($x \in M$) je $x \in Q - Q \cap \overline{Q - U} = Q - \overline{Q - U}$. Položíme-li $V = P - (Q - U)$, je $U = Q \cap V$, $x \in P - \overline{P - V}$. Tudíž V je okolí bodu a (množiny M).

4.6.3. Budiž Q vnořen do P. Budiž $a \in Q$ ($M \subset Q$). Budiž $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a (množiny M). Pak průniky Q se všemi množinami soustavy $\mathfrak{U}$ tvoří úplnou soustavu relativních okolí bodu a (množiny M).

4.6.4. Budiž Q vnořen do P. Je-li $F \subset P$ uzavřená, pak $Q \cap F$ je relativně uzavřená. Plyne ze **4.4.1**, neboť $Q \cap \overline{Q \cup F} \subset Q \cap \overline{F} = Q \cap F$ podle **4.1.1.**

4.6.5. Budiž Q vnořen do P. Je-li $G \subset P$ otevřená, pak $Q \cap G$ je relativně otevřená. Plyne ze **4.6.4.**

4.6.6. Budiž Q vnořen do P. Je-li množina Q uzavřená v P, pak množina $M \subset Q$ je právě tehdy relativně uzavřená, jestliže M je uzavřená v P.

Důkaz. I. Je-li M uzavřená, je $M = Q \cap M$ relativně uzavřená podle **4.6.4.** (Uzavřenosti množiny Q zde ještě není třeba.)

II. Je-li M relativně uzavřená, je $M = Q \cap \overline{M}$. Avšak $\overline{M} \subset Q$ podle **4.4.7**, takže $M = \overline{M}$.

4.6.7. Budiž Q vnořen do P. Je-li množina Q otevřená v P, pak množina $M \subset Q$ je právě tehdy relativně otevřená, jestliže M je otevřená v P.

Důkaz. I. Je-li M otevřená, je $M = Q \cap M$ relativně otevřená podle **4.6.5.** (Otevřenosti množiny Q zde ještě není třeba.)

II. $M \subset Q$ budiž relativně otevřená. Podle **4.4.12** je množina M relativním okolím sebe samé, takže podle **4.6.2** existuje takové její okolí U, že $M = Q \cap U$. Podle **4.4.13** je také Q okolím množiny M. Podle **4.2.5** je tedy také $U \cap Q = M$ okolím M, takže M je otevřená podle **4.4.12.**

4.6.8. Budiž Q vnořen do P. Budiž $Q = F \cap G$, kde F je uzavřená a G je otevřená množina. Je-li $M \subset Q$ relativně uzavřená, pak M je průnikem Q s množinou uzavřenou v P. Je-li $M \subset Q$ relativně otevřená, pak M je průnikem Q s množinou otevřenou v P. Předpoklad $Q = F \cap G$ nelze vynechat (viz větu **4.6.14**); je splněn zejména tehdy, jestliže množina Q je buďto uzavřená nebo otevřená. Viz však **4.6.13.**

Důkaz. I. Nechť M je relativně uzavřená. Vedle prostorů Q a P uvažujme ještě prostor F (vnořený do P). Stačí ukázat, že M je průnikem Q s množinou, která v prostoru F je uzavřená. Neboť podle **4.6.6** (kde místo Q vezmeme F) je taková množina uzavřená i v prostoru P. V další části důkazu pro případ relativně uzavřené M můžeme tedy za celý prostor brát F, za vnořený prostor Q; množina $Q = F \cap G$ je v prostoru F otevřená podle **4.6.5** (kde místo Q vezmeme F). Jelikož $M \subset Q$ je relativně uzavřená, je $Q - M$ relativně otevřená. Podle **4.6.7** (zase s F místo P) je $Q - M$ otevřená též v prostoru F, takže $\Phi = F - (Q - M)$ je v prostoru F uzavřená; je však $M = Q \cap \Phi$.

II. Nechť M je relativně otevřená. Pak $Q - M$ je relativně uzavřená. Tudíž podle I je $Q - M = Q \cap H$, kde H je uzavřená, ale pak je $M = Q \cap K$, kde $K = P - H$ je otevřená.

4.6.9. Budiž Q vnořen do P. Je-li $M \subset P$ F_σ-množinou, je $Q \cap M$ relativní F_σ-množinou. Je-li $M \subset P$ G_δ-množinou, je $Q \cap M$ relativní G_δ-množinou. Plyne ze **4.6.4** a **4.6.5.**

4.6.10. Budiž Q vnořen do $\mathcal{F}$-prostoru P. Pak také Q je $\mathcal{F}$-prostor. Je-li $Q \subset M$, pak uzávěr $\overline{M}$ je uzavřená množina. Podle **4.6.4** je relativní uzávěr $Q \cap \overline{M}$ relativně uzavřená množina.

4.6.11. Budiž Q vnořen do P. Je-li $a \in Q$ slabým $\mathcal{F}$-bodem prostoru P, je a také slabým $\mathcal{F}$-bodem prostoru Q. Budiž $X \subset Q$, $a \in Q \cap \overline{Q \cap \overline{X}}$. Pak je $a \in \overline{\overline{X}}$ podle **4.1.1**, tedy $a \in \overline{X}$, $a \in Q \cap \overline{X}$.

4.6.12. Budiž Q vnořen do P. Je-li $a \in Q$ silným F-bodem prostoru P, je a také silným F-bodem prostoru Q. Plyne ze **4.6.3** a **4.6.5.**

Poznámka. Věty **4.6.11** a **4.6.12** zřejmě nelze obrátit. Jestliže $a \in P$ není slabým (silným) F-bodem v prostoru P, pak a je slabým (silným) F-bodem ve vnořeném prostoru $Q = (a)$.

4.6.13. Budiž Q vnořen do F-prostoru P. Je-li $M \subset Q$ relativně uzavřená, pak M je průnikem Q s množinou uzavřenou v P. Je-li $M \subset Q$ relativně otevřená, pak M je průnikem Q s množinou otevřenou v P.

Důkaz. I. Je-li M relativně uzavřená, je $M = Q \cap \overline{M}$, kde $\overline{M}$ je uzavřená.

II. Je-li M relativně otevřená, pak $Q - M$ je relativně uzavřená. Podle I je $Q - M = Q \cap F$ s uzavřenou F, takže $M = Q \cap G$, kde $G = P - F$ je otevřená.

4.6.14. Nechť prostor P není F-prostorem. Pak existuje vnořený prostor Q a v něm bodová množina M, která je relativně uzavřená, ale není průnikem Q s množinou uzavřenou v P. Bodová množina $Q - M$ je relativně otevřená, ale není průnikem Q s množinou otevřenou v P.

Důkaz. I. Existuje taková $M \subset P$, že $\overline{\overline{M}} \neq \overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Budiž $a \in \overline{\overline{M}} - \overline{M}$, $Q = M \cup (a) \neq M$. Jest $M = Q \cap \overline{M}$, takže M je relativně uzavřená. Je-li však F uzavřená a $M \subset F$ (což by nastalo pro $M = Q \cap F$), pak $\overline{\overline{M}} \subset F$ (užijeme dvakrát **4.4.7**), tedy $a \in F$, takže $M \neq Q \cap F$.

II. $(a) = Q - M$ je relativně otevřená. Kdyby bylo $(a) = Q \cap G$ s otevřenou G, bylo by $M = Q \cap F$ s uzavřenou $F = P - G$.

4.6.15. Budiž Q vnořen do F-prostoru P. Je-li $\mathfrak{B}$ otevřená base prostoru P, pak soustava všech průniků $Q \cap B$ ($B \in \mathfrak{B}$) je otevřená base prostoru Q. Plyne ze **4.6.5** a **4.6.13.**

4.6.16. Budiž Q vnořen do F-prostoru P. Budiž $M \subset Q$. Aby M byla relativní F_σ-množinou (relativní G_δ-množinou), k tomu je nutné a stačí, aby M byla průnikem Q s F_σ-množinou (G_δ-množinou) prostoru P. Plyne ze **4.6.9** a **4.6.13.**

4.6.17. Budiž u F-modifikace topologie v prostoru P. Budiž $Q = F \cap G$, kde množina F je v-uzavřená, množina G je v-otevřená. Budiž u^* (v^*) ta topologie v Q, kterou dostaneme, nazíráme-li na Q jako na prostor vnořený do (P, u) [do (P, v)]. Pak u^* je F-modifikace topologie v^*. Předpoklad $Q = F \cap G$ nelze vynechat (viz příklad **6.4.1**).

Důkaz. Protože u je hrubší než v, je u^* hrubší než v^*. Je-li tedy u_0 F-modifikace topologie v^*, je u_0 jemnější než u^* podle **4.5.15**, neboť u^* je F-topologie podle **4.6.10**. Máme dokázat, že u^* je jemnější než u_0 neboli podle **4.5.14**, že každá u_0-uzavřená část Q je u^*-uzavřená. Nechť $R \subset Q$ je u_0-uzavřená, tedy v^*-uzavřená podle definice **4.5.4.** Podle **4.6.8** existuje taková v-uzavřená $F \subset P$, že $R = Q \cap F$. Podle definice **4.5.4** je F u-uzavřená, takže R je u^*-uzavřená podle **4.6.4.**

4.6.18. Buďtež Q_1 a Q_2 vnořeny do P. Budiž $Q_1 \cup Q_2 = P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Pro $i = 1, 2$ budiž U_i relativní okolí bodu a v prostoru Q_i. Pak je $U_1 \cup U_2$ okolí bodu a v prostoru P.

Důkaz. Podle **4.6.2** existují taková okolí V_1, V_2 bodu a, že $U_i = Q_i \cap V_i$ pro $i = 1, 2$. Jest

$$V_1 \cap V_2 =$$
$$= (V_1 \cap V_2) \cap (Q_1 \cup Q_2) \subset (V_1 \cap Q_1) \cup (V_2 \cap Q_2) = U_1 \cup U_2 ;$$

protože $V_1 \cap V_2$ je okolím bodu a, je též $U_1 \cup U_2$ okolím bodu a.

4.7. Hustě a řídce rozložené množiny

Definice **4.7.1.** *Isolovaný bod* prostoru P je takový $a \in P$, že množina (a) je otevřená. Isolovaný bod bodové množiny $Q \subset P$ je isolovaný bod vnořeného prostoru Q.

4.7.1. Budiž $a \in Q$, $Q \subset P$. Aby a byl isolovaný bod množiny Q, k tomu je nutné a stačí, aby existovalo takové okolí U bodu a, že $Q \cap U = (a)$. To plyne ze **4.4.12** a **4.6.2.**

4.7.2. Budiž $Q_1 \subset Q_2 \subset P$. Je-li $a \in Q_1$ isolovaný bod množiny Q_2, je a také isolovaným bodem množiny Q_1. To plyne ze **4.7.1.**

4.7.3. Budiž $P = Q_1 \cup Q_2$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Je-li a isolovaným bodem každé z obou množin Q_1, Q_2, je a isolovaným bodem prostoru P. Podle předpokladu je (a) relativním okolím bodu a v každém z obou vnořených prostorů Q_1, Q_2, takže podle **4.6.18** ($\dot{a}$) je okolím bodu a i v prostoru P.

4.7.4. Budiž $a \in Q$, $Q \subset P$. Aby a byl isolovaný bod množiny Q, k tomu je nutné a stačí $a \in Q - Q'$. Plyne ze **4.2.3**, **4.2.10** a **4.7.1.**

Definice **4.7.2.** *Prostor P* nazýváme *isolovaným*, často také *diskrétním*, je-li každý jeho bod isolovaný. *Bodovou množinu* $Q \subset P$ nazýváme *isolovanou*, jestliže vnořený prostor Q je isolovaný.

4.7.5. Aby prostor P byl isolovaný, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $\overline{X} = X$ pro každou bodovou množinu X.

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna, je pro každý $x \in P$ množina $P - (x)$ uzavřená, tedy (x) otevřená.

II. Je-li prostor P isolovaný, je $P' = \emptyset$ podle **4.7.4**, tedy $X \subset P \Rightarrow$ $\Rightarrow X' = \emptyset$ podle **4.1.8**, $\overline{X} = X$ podle **4.1.4.**

Definice **4.7.3.** Prostor P nazýváme *hustě rozloženým*, je-li $P \neq \emptyset$ a není-li žádný bod isolovaný. Bodová množina $Q \subset P$ je hustě rozložená, jestliže vnořený prostor Q je hustě rozložený.

4.7.6. Aby bodová množina Q byla hustě rozložená, k tomu je nutné a stačí $\emptyset \neq Q \subset Q'$; lze to psát také $\emptyset \neq \overline{Q} = Q'$. První tvar plyne ze **4.7.4**, druhý potom ze **4.1.4.**

4.7.7. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $A(z)$ hustě rozložená množina v prostoru P. Pak také množina $S = \bigcup A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ je hustě rozložená. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $A(z) \subset A'(z)$ podle **4.7.6**, tedy $A(z) \subset S'$ podle **4.1.8.** Tudíž je $S \subset S'$ a zřejmě $S \neq \emptyset$, takže věta plyne ze **4.7.6.**

4.7.8. Jestliže bodová množina $Q \subset P$ je hustě rozložená, je také $\overline{Q}$ hustě rozložená. Podle **4.7.6** je $\overline{Q} = Q'$; podle **4.1.8** plyne ze vztahu $Q \subset \overline{Q}$, že $Q' \subset (\overline{Q})'$ a tudíž $\overline{Q} \subset (\overline{Q})'$. Zřejmě $\overline{Q} \neq \emptyset$, takže věta plyne ze **4.7.6.**

Obrácení věty **4.7.8** je nesprávné (viz příklad **6.4.4**). Nicméně platí:

4.7.9. Jestliže v F-prostoru P množina Q není hustě rozložená, není ani $\overline{Q}$ hustě rozložená. Kdyby $\overline{Q}$ byla hustě rozložená, bylo by $\emptyset \neq \overline{Q} \subset (\overline{Q})'$ podle **4.7.6**, tedy $Q \cup Q' \subset Q' \cup Q''$ podle **4.1.3** a **4.1.4.** Podle **4.4.2** a **4.5.11** však je $Q'' \subset Q'$. Tudíž by bylo $Q \subset Q'$ a ježto $\overline{Q} \neq \emptyset$, je také $Q \neq \emptyset$ a Q je hustě rozložená podle **4.7.6.**

Definice **4.7.4.** Prostor P je *řídce rozložený,* jestliže žádná bodová množina není hustě rozložená. Bodová množina $Q \subset P$ je řídce rozložená, jestliže vnořený prostor Q je řídce rozložený.

4.7.10. V každém prostoru P existuje právě jedna bodová množina K s těmito vlastnostmi:

[1] buďto je $K = \emptyset$ nebo K je hustě rozložená;

[2] množina $P - K$ je řídce rozložená;

[3] množina K je uzavřená.

Důkaz. I. Je-li P řídce rozložený, budiž $K = \emptyset$. V opačném případě budiž K sjednocení všech hustě rozložených bodových množin. Podle **4.7.7** je K hustě rozložená nebo je $K = \emptyset$. Z definice K plyne, že $P - K$ je řídce rozložená. Podle **4.7.8** je $\overline{K}$ hustě rozložená nebo je $\overline{K} = \emptyset$. Tudíž K je uzavřená podle **4.4.1.** Tedy K má vlastnosti [1], [2], [3].

II. Nechť také bodová množina H má vlastnosti [1], [2], [3]. Z vlastnosti [1] množiny H plyne podle definice K, že $H \subset K$. Kdyby bylo $H \neq K$, bylo by $\emptyset \neq K - H \subset P - H$, takže podle vlastnosti [2] množiny H existuje isolovaný bod a množiny $K - H$. Podle **4.7.1** existuje takové okolí U bodu a, že $U \cap (K - H) = (a)$. Podle vlastnosti [3] množiny H soudíme ze **4.4.13**, že $P - H$ je okolí bodu a. Podle **4.2.5** je také $V = U \cap (P - H)$ okolím bodu a. Jest $V \cap K = (a)$, takže podle **4.7.1** je a isolovaný bod hustě rozložené K a to je spor.

4.7.11. V F-prostoru sjednocení konečně mnoha řídce rozložených množin je řídce rozložené. Předpoklad F-prostoru je nutný; viz příklad **6.4.5.**

Důkaz. Stačí uvažovat dvě řídce rozložené množiny A, B. Není-li $A \cup B$ řídce rozložená, existuje hustě rozložená $S \subset A \cup B$. Protože B je řídce rozložená, není $S \subset B$, takže je $\emptyset \neq A \cap S \subset A$. Protože A je řídce rozložená, existuje isolovaný bod a množiny $A \cap S$. Podle **4.5.6** a **4.7.1** existuje takové otevřené okolí G bodu a, že $A \cap G \cap S = (a)$. Protože S je hustě rozložená, je $G \cap S \neq (a)$ podle **4.7.1** a protože $A \cap G \cap S = (a)$, $S \subset A \cup B$, je $(B \cap G \cap S) - (a) \neq \emptyset$. Protože B je řídce rozložená, existuje isolovaný bod $b \neq a$ množiny $B \cap G \cap S$. Podle **4.7.1** existuje takové okolí U bodu b, že $U \cap B \cap G \cap S = (b)$. Podle **4.4.13** je G okolí bodu b, takže podle **4.2.5** a **4.2.6** také $V = (U \cap G) - (a)$ je okolí bodu b. Protože $A \cap G \cap S = (a)$, $U \cap B \cap G \cap S = (b)$, $a \neq b$, $S \subset A \cup B$, $V = (U \cap G) - (a)$, je $V \cap S = (b)$. Podle **4.7.1** je tedy b isolovaný bod hustě rozložené množiny S a to je spor.

4.8. Hranice bodové množiny

Definice **4.8.1.** *Hranicí množiny* $M \subset P$, značka $\mathrm{Fr}\, M$, rozumíme množinu $\overline{M} \cap \overline{P - M}$.

4.8.1. Pro $M \subset P$ je $\mathrm{Fr}\,(P - M) = \mathrm{Fr}\, M$.

4.8.2. Aby bod a náležel do hranice bodové množiny M, k tomu je nutné a stačí, aby každé okolí bodu a obsahovalo aspoň jeden bod množiny M a aspoň jeden bod jejího doplňku. Plyne ze **4.2.9.**

4.8.3. Pro $M \subset P$ je $\overline{M} = M \cup (\mathrm{Fr}\, M)$. Zřejmé je $\overline{M} \supset M \cup (\mathrm{Fr}\, M)$, takže dokázat máme pouze $\overline{M} - M \subset \mathrm{Fr}\, M$. Avšak

$$\overline{M} - M = \overline{M} \cap (P - M) \subset \overline{M} \cap \overline{P - M} = \mathrm{Fr}\, M\,.$$

4.8.4. Pro $M \subset P$ je $M_\iota = M - (\mathrm{Fr}\, M)$. Plyne ze **4.8.1**, **4.8.3** a z definice **4.2.1.**

4.8.5. Aby $M \subset P$ byla uzavřená, k tomu je nutné a stačí $M \supset \mathrm{Fr}\, M$. Plyne ze **4.8.3.**

4.8.6. Aby $M \subset P$ byla otevřená, k tomu je nutné a stačí $M \cap (\mathrm{Fr}\, M) = \emptyset$. Plyne ze **4.8.1** a **4.8.5.**

4.8.7. Pro otevřenou množinu G je $\mathrm{Fr}\, G = \overline{G} - G$. Neboť $\overline{P - G} = P - G$.

4.8.8. V F-prostoru hranice každé bodové množiny M je uzavřená množina. Plyne ze **4.4.5.**

4.8.9. Jestliže v prostoru P hranice každé bodové množiny je uzavřená množina, pak P je F-prostor. Podle **4.8.3** jest

$$\overline{\overline{M}} = \overline{M} \cup \overline{\mathrm{Fr}\, M} = (M \cup \mathrm{Fr}\, M) \cup \mathrm{Fr}\, M = M \cup (\mathrm{Fr}\, M) = \overline{M}\,.$$

4.8.10. V F-prostoru platí $\mathrm{Fr}\, \overline{M} \subset \mathrm{Fr}\, M$ pro každou bodovou množinu M. Neboť $\mathrm{Fr}\, \overline{M} = \overline{\overline{M}} \cap \overline{P - \overline{M}} = \overline{M} \cap \overline{P - \overline{M}} \subset \overline{M} \cap \overline{P - M} = \mathrm{Fr}\, M$.

4.8.11. Jestliže v prostoru P platí $\mathrm{Fr}\, \overline{M} \subset \mathrm{Fr}\, M$ pro každou bodovou množinu M, pak P je F-prostor. Podle definice hranice je $\mathrm{Fr}\, M \subset \overline{M}$. Je-li $\mathrm{Fr}\, \overline{M} \subset \mathrm{Fr}\, M$, je tedy $\mathrm{Fr}\, \overline{M} \subset \overline{M}$, takže $\overline{M}$ je uzavřená podle **4.8.5.**

4.8.12. Hranice sjednocení konečné soustavy bodových množin je částí sjednocení hranic jednotlivých množin soustavy. Stačí dokázat pro dvě množiny A, B. Jest $\overline{P - A \cup B} \subset \overline{P - A}$ podle **4.1.1** a podobně také $\overline{P - A \cup B} \subset \overline{P - B}$. Protože $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$, jest

$$\mathrm{Fr}\, (A \cup B) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{P - (A \cup B)} \subset (\overline{A} \cap \overline{P - A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{P - B}) = \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B\,.$$

4.8.13. Hranice průniku konečné soustavy bodových množin je částí sjednocení hranic jednotlivých množin soustavy. Plyne ze **4.8.1** a **4.8.12.**

4.8.14. Pro $A \subset P$, $B \subset P$ je $\mathrm{Fr}\, (A - B) \subset \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B$. Plyne ze **4.8.1** a **4.8.13.**

4.8.15. V F-prostoru P pro $A \subset P$, $B \subset P$ je $\mathrm{Fr}\, (A - \overline{B}) \subset \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B$. Plyne ze **4.8.10** a **4.8.14.** Předpoklad F-prostoru je nutný podle **4.8.11**, neboť podle předpokladu je $\mathrm{Fr}\, (P - \overline{B}) \subset \mathrm{Fr}\, P \cup \mathrm{Fr}\, B$ a podle definice **4.8.1** je Fr $P = \emptyset$, takže podle **4.8.1** je Fr $\overline{B} \subset$ Fr B pro každou bodovou množinu B.

4.8.16. Budiž Q vnořen do P. Pro $M \subset P$ je relativní hranice bodové množiny $Q \cap M \subset Q$ částí hranice bodové množiny M.

4.9. Husté bodové množiny

Definice **4.9.1.** Pravíme, že bodová množina M je *hustá* (v prostoru P), jestliže $\overline{M} = P$. Pravíme, že bodová množina M je hustá v bodové množině Q, jestliže $M \subset Q$ a jestliže $\overline{M}$ je hustá ve vnořeném prostoru Q, neboli jestliže $M \subset Q \subset \overline{M}$.

4.9.1. Je-li $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4 \subset P$ a je-li M_1 hustá v M_4, je M_2 hustá v M_3. Plyne ze **4.1.1.**

4.9.2. Je-li $M \subset P$ hustá a uzavřená, je $M = P$.

4.9.3. Aby bodová množina M byla hustá, k tomu je nutné a stačí, aby každé okolí každého bodu prostoru obsahovalo aspoň jeden bod množiny M. Plyne ze **4.2.9.**

4.9.4. Aby bodová množina M byla hustá v bodové množině Q, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $M \subset Q$ a aby každé okolí každého bodu $x \in Q$ obsahovalo aspoň jeden bod množiny M. Plyne ze **4.6.2** a **4.9.3.**

4.9.5. Budiž P $\mathcal{F}$-prostor. Aby bodová množina M byla hustá, k tomu je nutné a stačí, aby každá neprázdná otevřená množina obsahovala aspoň jeden bod množiny M. Plyne ze **4.4.13**, **4.5.8** a **4.9.3.** Předpoklad $\mathcal{F}$-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

4.9.6. Budiž P $\mathcal{F}$-prostor. Je-li $A \subset P$ hustá a je-li $G \subset P$ hustá a otevřená, je také $A \cap G$ hustá. Předpoklad $\mathcal{F}$-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

Důkaz. Je-li $\Gamma \neq \emptyset$ otevřená, je $\Gamma \cap G$ otevřená podle **4.4.11.** Ze **4.9.5** soudíme nejprve

$$G \text{ hustá} \Rightarrow \Gamma \cap G \neq \emptyset$$

a potom

$$A \text{ hustá} \Rightarrow A \cap (\Gamma \cap G) \neq \emptyset\,.$$

Je tedy $\Gamma \cap (A \cap G) \neq \emptyset$ pro každou otevřenou $\Gamma \neq \emptyset$ a $A \cap G$ je hustá podle **4.9.5.**

4.9.7. Budiž P F-prostor. Průnik konečně mnoha otevřených hustých množin je hustá množina. Plyne ze **4.9.6** podle **4.4.11.** Předpoklad F-prostoru je nutný (příklad **6.4.1**).

4.9.8. Budiž P F-prostor. Je-li Q hustá a je-li A hustá v Q, je A hustá. Předpoklad F-prostoru je nutný (příklad **6.4.1**).

Důkaz. Jest $\overline{Q} = P$, $\overline{A} \supset Q$; tedy $\overline{A} \supset \overline{Q}$, $\overline{A} = P$.

4.9.9. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $A(z) \subset P$ hustá v $B(z) \subset P$. Budiž $A = \bigcup A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, $B = \bigcup B(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak je A hustá v B. Jest $A(z) \subset B(z)$, tedy $A \subset B$. Mimo to $\overline{A(z)} \supset B(z)$, takže $\overline{A} \supset B(z)$ podle **4.1.1**, a tudíž $\overline{A} \supset B$.

4.9.10. Budiž $M \subset P$, $G \subset P$, G otevřená. Je-li $G \subset \overline{M}$, pak $M \cap G$ je hustá v G. Plyne ze **4.4.14.**

4.9.11. Je-li $M \subset P$ hustá, je $M \cap G$ hustá v G pro každou otevřenou G.

4.9.12. Je-li $M \subset P$ hustá v $Q \subset P$ a je-li G otevřená, pak $M \cap G$ je hustá v $Q \cap G$. Užijeme **4.9.11** na vnořený prostor Q majíce na paměti, že podle **4.6.5** je $Q \cap G$ relativně otevřená.

4.9.13. Hustá bodová množina obsahuje každý isolovaný bod prostoru. Plyne ze **4.7.1** a **4.9.3.**

4.10. Řídké bodové množiny

Definice **4.10.1.** Pravíme, že bodová množina M je *řídká* (v prostoru P), jestliže $P - \overline{M}$ je hustá. Pravíme, že bodová množina M je řídká v bodové množině Q, jestliže $M \subset Q$ a jestliže M je řídká ve vnořeném prostoru Q.

4.10.1 Aby bodová množina $M \subset P$ byla řídká v bodové množině $Q \subset P$, k tomu je nutné a stačí

$$M \subset Q \subset \overline{Q - \overline{M}}\,.$$

4.10.2. Je-li $A \subset B \subset Q \subset P$ a je-li B řídká v Q, je také A řídká v Q.

4.10.3. Je-li uzávěr bodové množiny M řídký, je také M řídká.

4.10.4. Budiž P F-prostor. Aby bodová množina M byla řídká, k tomu je nutné a stačí, aby její uzávěr byl řídký. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.6**).

4.10.5. Uzavřená bodová množina $F \subset P$ je právě tehdy řídká, jestliže otevřená množina $P - F$ je hustá.

4.10.6. Aby bodová množina $M \subset P$ byla řídká, k tomu je nutné a stačí $\overline{M} \subset \operatorname{Fr} \overline{M}$.

Důkaz. Jest $\overline{P - \overline{M}} = P \Leftrightarrow \overline{P - \overline{M}} \supset \overline{M}$, neboť $\overline{P - \overline{M}} \supset P - \overline{M}$. Dále jest $\overline{P - \overline{M}} \supset \overline{M} \Leftrightarrow \operatorname{Fr} \overline{M} \supset \overline{M}$, neboť $\operatorname{Fr} \overline{M} = \overline{\overline{M}} \cap \overline{P - \overline{M}}$, $\overline{\overline{M}} \supset \overline{M}$.

4.10.7. Aby uzavřená bodová množina $M \subset P$ byla řídká, k tomu je nutné a stačí $M = \operatorname{Fr} M$. Podle **4.8.5** a **4.10.6.**

4.10.8. Budiž P F-prostor. Bodová množina M je řídká právě tehdy, jestliže její uzávěr neobsahuje žádnou neprázdnou otevřenou množinu. Plyne ze **4.9.5.** Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

4.10.9. Budiž P F-prostor. Bodová množina M je řídká právě tehdy, jestliže ke každé neprázdné otevřené G existuje taková otevřená Γ, že

$$\Gamma \neq \emptyset\,, \quad \Gamma \subset G\,, \quad M \cap \Gamma = \emptyset\,.$$

Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Nechť $G \neq \emptyset$ je otevřená.

Je-li $\Gamma \subset G$ otevřená a je-li $M \cap \Gamma = \emptyset$, je $\overline{M} \cap \Gamma = \emptyset$ podle **4.4.15**. Tudíž nemůže být $G \subset \overline{M}$. Tedy M je řídká podle **4.10.8**.

II. M budiž řídká, $G \neq \emptyset$ otevřená. Pak $\Gamma = G \cap (P - \overline{M})$ je otevřená podle **4.4.11**, jest $\Gamma \subset G$, $M \cap \Gamma = \emptyset$ a podle **4.10.8** je $\Gamma \neq \emptyset$.

4.10.10. Budiž P F-prostor. Je-li $M \subset Q \subset R \subset P$ a je-li M řídká v Q, je M řídká také v R. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

Důkaz. Podle **4.6.10** stačí dokazovat za předpokladu $R = P$. Jestliže $M \subset Q$ není řídká v P, pak podle **4.10.8** existuje neprázdná otevřená $G \subset \overline{M}$. Kdyby bylo $G \cap Q = \emptyset$, bylo by též (viz **4.4.15**)

$$\emptyset = G \cap \overline{Q} \supset G \cap \overline{M} = G ,$$

což je nemožné. Tudíž relativní uzávěr $\overline{M} \cap Q$ množiny M obsahuje neprázdnou relativně otevřenou $G \cap Q$, takže podle **4.10.8** (viz též **4.6.10**) M není řídká v Q.

4.10.11. Budiž P F-prostor. Sjednocení konečné soustavy řídkých bodových množin je řídká množina. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

Důkaz stačí provést pro dvě řídké množiny A, B. Množiny $P - \overline{A}$, $P - \overline{B}$ jsou otevřené a husté, takže podle **4.9.7** také $P - \overline{A \cup B} = P - (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P - \overline{A}) \cap (P - \overline{B})$ je hustá a tedy $A \cup B$ je řídká.

4.10.12. Je-li $M \subset P$ řídká, pak pro každou otevřenou G je $M \cap G$ řídká v G. Množina $P - \overline{M}$ je hustá; podle **4.9.12** je $(P - \overline{M}) \cap G = G - (G \cap \overline{M})$ hustá v G. Podle **4.4.14** je $G - (G \cap \overline{M}) = G - G \cap \overline{M \cap G}$. Tedy $M \cap G$ je řídká v G.

4.10.13. Budiž P F-prostor. Nechť ke každému bodu a množiny $M \subset P$ existuje takové okolí U bodu a, že množina $U \cap M$ je řídká. Pak množina M je řídká. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

Důkaz. Jestliže M není řídká, pak podle **4.10.8** existuje taková otevřená $G \neq \emptyset$, že $G \subset \overline{M}$. Podle **4.4.15** existuje bod $a \in G \cap M$. Protože $a \in M$, existuje takové okolí U bodu a, že množina $U \cap M$ je řídká. Podle **4.2.5**, **4.4.13** a **4.5.6** existuje takové otevřené okolí H bodu a, že $H \subset G \cap U$. Podle **4.2.3** je $a \in H$. Podle **4.4.14** je $H \cap \cap \overline{H} \cap \overline{M} = H \cap \overline{M} \supset H \cap G = H$, tj. $H \subset \overline{H} \cap \overline{M} \subset \overline{U} \cap \overline{M}$. To je spor proti **4.10.8**, neboť $H \neq \emptyset$ je otevřená a $U \cap M$ je řídká.

4.10.14. Budiž P F-prostor. Bodová množina M budiž buďto uzavřená nebo otevřená. Pak je $\mathrm{Fr}\, M$ řídká množina. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.1**).

Důkaz. Podle **4.8.1** můžeme předpokládat, že M je uzavřená. Jestliže $\mathrm{Fr}\, M$ není řídká, pak podle **4.8.8** a **4.10.8** existuje taková otevřená $G \neq \emptyset$, že $G \subset \mathrm{Fr}\, M$. Zvolme $a \in G$, takže podle **4.4.13** je G okolím bodu a. Protože $a \in \mathrm{Fr}\, M$, je $G - M \neq \emptyset$ podle **4.8.2** a to je spor, neboť podle **4.8.5** je $G \subset M$.

4.11. Bodové množiny první kategorie

Definice **4.11.1.** O bodové množině M pravíme, že je *první kategorie* (v prostoru P), je-li $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou řídké bodové množiny. Pravíme, že bodová množina M je první kategorie v bodové množině Q, jestliže $M \subset Q$ a M je první kategorie ve vnořeném prostoru Q.

4.11.1. Je-li $A \subset B \subset Q \subset P$ a je-li B první kategorie v množině Q, je také A první kategorie v množině Q. Plyne ze **4.10.2.**

4.11.2. Sjednocení nejvýš spočetné soustavy bodových množin první kategorie je množina první kategorie. Viz **2.2.4.**

4.11.3. Budiž P F-prostor. Ke každé bodové množině první kategorie existuje nadmnožina první kategorie, která je F_σ-množinou. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.7**).

Důkaz. Je-li $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ s řídkými A_n, pak F_σ-množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ je první kategorie podle **4.10.4.**

4.11.4. Budiž P F-prostor. Je-li $A \subset Q \subset R \subset P$ a je-li A první kategorie v Q, je A také první kategorie v R. Plyne ze **4.10.10.** Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.8**).

4.11.5. Je-li $M \subset P$ první kategorie, pak pro každou otevřenou G je $M \cap G$ první kategorie v G. Plyne ze **4.10.12.**

4.11.6. Nechť M je F_σ-množina. Je-li $P - M$ hustá, je M první kategorie. Budiž $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ s uzavřenými F_n. Jest $P - F_n \supset \supset P - M$, tedy $P - F_n$ je hustá podle **4.9.1** a F_n je řídká podle **4.10.5.**

4.11.7. Budiž P F-prostor. Ke každému bodu a bodové množiny M nechť existuje takové okolí U bodu a, že množina $U \cap M$ je první kategorie. Pak M je první kategorie. Předpoklad F-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.9**).

Důkaz. I. Podle **3.6.1** můžeme předpokládat, že M je dobře uspořádána.

II. Podle **4.4.13**, **4.5.6** a **4.11.1** existuje ke každému $x \in M$ taková otevřená $G(x)$, že $x \in G(x)$ a že $G(x) \cap M$ je první kategorie. Jest

$$M \subset \bigcup G(x) \quad (x \in M) .$$

III. Pro každý bod $x \in M$ budiž $S(x)$ množina těch $z \in G(x) \cap M$, pro které platí:

$$y \in M , \quad y \text{ před } x \Rightarrow z \in M - G(y) .$$

Zřejmě je předně $S(x) \subset G(x) \cap M$ a za druhé

$$x \in M , \quad y \in M , \quad y \text{ před } x \Rightarrow G(y) \cap S(x) = \emptyset .$$

Protože M je dobře uspořádaná, je zřejmě $M = \bigcup S(x)$ $(x \in M)$.

IV. Protože $S(x) \subset G(x) \cap M$, plyne ze **4.11.1**, že $S(x)$ je první kategorie. Můžeme tedy položit (pro každý $x \in M$) $S(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(x)$, kde množiny $T_n(x)$ jsou řídké. Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $H_n = \bigcup T_n(x)$ $(x \in M)$, takže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ a je pouze ještě třeba ukázat, že každá množina H_n je řídká.

V. Nechť $\Delta \neq \emptyset$ je otevřená. Podle **4.10.9** máme dokázat existenci takové otevřené $\Gamma \neq \emptyset$, že $\Gamma \subset \Delta$, $H_n \cap \Gamma = \emptyset$. Protože $H_n \subset M \subset \subset \bigcup_x G(x)$, je to zřejmé tehdy, jestliže $\Delta \cap \bigcup G(x) = \emptyset$. Nechť tedy $\Delta \cap \bigcup G(x) \neq \emptyset$. Protože M je dobře uspořádaná, existuje takový $a \in M$, že $\Delta \cap G(a) \neq \emptyset$ a že

$$x \in M\,, \quad x \text{ před } a \Rightarrow \Delta \cap G(x) = \emptyset\,.$$

Protože

$$x \in M\,, \quad a \text{ před } x \Rightarrow G(a) \cap S(x) = \emptyset$$

a protože $H_n = \bigcup_x T_n(x)$, $T_n(x) \subset S(x) \subset G(x)$, je

$$(1) \qquad \Delta \cap H_n \cap G(a) = \Delta \cap T_n(a) \cap G(a) \subset T_n(a)\,.$$

Avšak $T_n(a)$ je řídká a podle **4.4.11** neprázdná množina $\Delta \cap G(a)$ je otevřená, takže ze **4.10.9** plyne existence takové otevřené $\Gamma \neq \emptyset$, že $\Gamma \subset \Delta \cap G(a)$, $T_n(a) \cap \Gamma = \emptyset$. Podle (1) je tedy $H_n \cap \Gamma = \emptyset$.

4.12. Charaktery

Budiž $a \in P$ ($M \subset P$). Existuje vždy aspoň jedna úplná soustava okolí bodu a (množiny M), totiž soustava všech okolí bodu a (množiny M). Z toho a ze **4.2.7** plyne podle **3.7.3**, že následující tři definice mají smysl.

Definice **4.12.1.** *Charakter bodové množiny M*, značka $\chi(M)$, je nejmenší možná mohutnost úplné soustavy okolí množiny M. *Charakter $\chi(a)$ bodu a* je charakter množiny (a).

Definice **4.12.2.** *Pseudocharakter bodové množiny M*, značka $\psi(M)$, je nejmenší možná mohutnost takové soustavy $\mathfrak{U}$ okolí množiny M, že $M = \bigcap U$ ($U \in \mathfrak{U}$). *Pseudocharakter $\psi(a)$ bodu a* je pseudocharakter množiny (a).

Definice **4.12.3.** *Vnitřní charakter bodové množiny M*, značka $\omega(M)$, je nejmenší mohutnost takové soustavy $\mathfrak{U}$ okolí množiny M, pro kterou průnik $\bigcap U$ ($U \in \mathfrak{U}$) buďto je roven M nebo není okolím množiny M. *Vnitřní charakter $\omega(a)$ bodu a* je vnitřní charakter množiny (a).

Je-li Q vnořen do P a je-li $a \in Q$ ($M \subset Q$), označíme $\chi(a \mid Q)$, $\psi(a \mid Q)$,

$\omega(a \mid Q)$ resp. $\chi(M \mid Q)$, $\psi(M \mid Q)$, $\omega(M \mid Q)$ *relativní charakter, relativní pseudocharakter a relativní vnitřní charakter*, tj. mohutnosti definované analogicky v prostoru Q.

4.12.1. Budiž $a \in P$ ($M \subset P$). Je-li a isolovaný bod (je-li M otevřená), jest

$$\omega(a) = \psi(a) = \chi(a) = 1 \quad [\omega(M) = \psi(M) = \chi(M) = 1] .$$

Není-li a isolovaný bod (není-li M otevřená), jest

$$\aleph_0 \leqq \omega(a) \leqq \psi(a) \leqq \chi(a) \quad [\aleph_0 \leqq \omega(M) \leqq \psi(M) \leqq \chi(M)] .$$

Důkaz. I. Bod a je isolovaný právě tehdy, jestliže množina (a) je otevřená. Stačí tudíž uvažovat případ, kdy je dána množina M.

II. $\omega(M) \leqq \psi(M)$ je triviální; $\psi(M) \leqq \chi(M)$ plyne ze **4.2.7** a z definice **4.3.1.** Zřejmé je $\omega(M) \geqq 1$. Stačí tudíž dokázat předně, že $\chi(M) = 1$ při otevřené M, a za druhé, že při konečném $\omega(M)$ musí M být otevřená.

III. Je-li M otevřená, pak podle **4.2.3** a **4.4.12** M sama tvoří úplnou soustavu okolí M, takže $\chi(M) = 1$.

IV. Je-li $\omega(M)$ konečná mohutnost, existuje taková konečná soustava okolí U_i ($1 \leqq i \leqq n$), že množina $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ je buďto rovna M nebo není okolím M. Avšak podle **4.2.5** V je okolím M. Tudíž $V = M$ a podle **4.4.12** množina M je otevřená.

4.12.2. Budiž $a \in P$ ($M \subset P$). Není-li a isolovaný bod (není-li M otevřená množina), pak $\omega(a)$ $[\omega(M)]$ je nejmenší možná mohutnost takové soustavy $\mathfrak{U}$ okolí bodu a (množiny M), že průnik $\bigcap U$ ($U \in \mathfrak{U}$) není okolím bodu a (množiny M). Plyne z definice **4.12.3**, neboť podle **4.4.12** a podle definice **4.7.1** není (a) (není M) okolím bodu a (množiny M).

4.12.3. Budiž Q vnořen do P. Budiž $a \in Q$ ($M \subset Q$). Pak je

$$\chi(a \mid Q) \leqq \chi(a) , \qquad \psi(a \mid Q) \leqq \psi(a) ,$$
$$[\chi(M \mid Q) \leqq \chi(M) , \qquad \psi(M \mid Q) \leqq \psi(M)] .$$

Naproti tomu, jestliže a není isolovaný bod množiny Q (jestliže M není relativně otevřená), jest

$$\omega(a \mid Q) \geqq \omega(a) \quad [\omega(M \mid Q) \geqq \omega(M)] .$$

Důkaz. I. Stačí uvažovat případ, kdy je dána $M \subset P$.

II. Je-li $\mathfrak{U}$ soustava okolí M mohutnosti $\chi(M)$ $[\psi(M)]$ a jestliže $\mathfrak{U}$ je úplná [jestliže $M = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$], pak průniky Q se všemi $U \in \mathfrak{U}$ podle **4.6.3** (podle **4.6.2**) tvoří soustavu $\mathfrak{V}$ relativních okolí M, která je úplná [pro kterou je $M = \bigcap V$ $(V \in \mathfrak{V})$]. Podle **3.7.1** je moh $\mathfrak{V} \leqq$ moh $\mathfrak{U}$, a tudíž $\chi(M \mid Q) \leqq \chi(M)$ $[\psi(M \mid Q) \leqq \psi(M)]$.

III. Jestliže M není relativně otevřená, pak podle **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{V}$ relativních okolí M, že moh $\mathfrak{V} = \omega(M' \mid Q)$ a že průnik $H = \bigcap V$ $(V \in \mathfrak{V})$ není relativním okolím M. Podle **4.6.2** existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny M v prostoru P, že moh $\mathfrak{U}$ = moh $\mathfrak{V}$ a že $H = Q \cap K$, kde $K = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Podle **4.6.2** není K okolím M. Tudíž $\omega(M) \leqq \omega(M \mid Q)$.

4.12.4. Budiž $a \in P$. Je-li Q vnořen do P a je-li $a \in Q$, je buďto $\chi(a \mid Q) = 1$ nebo $\chi(a \mid Q) \geqq \omega(a)$. Je-li a isolovaný v Q, je $\chi(a \mid Q) = 1$ podle **4.12.1.** Jinak je $\chi(a \mid Q) \geqq \omega(a \mid Q)$ podle **4.12.1**, $\omega(a \mid Q) \geqq \omega(a)$ podle **4.12.3.**

4.12.5. Budiž $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu $a \in P$ (množiny $M \subset P$). Pak existuje taková úplná soustava $\mathfrak{V}$ okolí bodu a (množiny M), že $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$, moh $\mathfrak{V} = \chi(a)$ $[= \chi(M)]$. Zvolme takovou úplnou soustavu $\mathfrak{W}$ okolí bodu a (množiny M), že moh $\mathfrak{W} = \chi(a)$ $[= \chi(M)]$. Protože $\mathfrak{U}$ je úplná, existuje takové zobrazení f soustavy $\mathfrak{W}$ do $\mathfrak{U}$, že

$$W \in \mathfrak{W} \Rightarrow f(W) \subset W .$$

Protože také $\mathfrak{W}$ je úplná, je zřejmé, že $\mathfrak{V} = f^1(\mathfrak{W})$ je úplná. Avšak moh $\mathfrak{V}$ je podle **3.7.1** $\leqq$ moh $\mathfrak{W}$ a podle definice **4.12.1** $\geqq \chi(a)$ $[\chi(M)]$. Tudíž moh $\mathfrak{V} = \chi(a)$ $[= \chi(M)]$.

4.12.6. Každý vnitřní charakter je regulární mohutnost. Stačí uvažovat $\omega(M)$. Je-li M otevřená, je $\omega(M) = 1$ podle **4.12.1**, a to je regulární mohutnost podle **3.8.4**. Nechť M není otevřená, takže podle **4.12.1** je $\omega(M)$ nekonečná mohutnost. Podle **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí M, že moh $\mathfrak{U} = \omega(M)$ a že $\bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$ není okolím M; na druhé straně musí průnik $\bigcap V$ $(V \in \mathfrak{V})$ být okolím M, je-li $\mathfrak{V}$ taková soustava okolí M, že moh $\mathfrak{V} < \omega(M)$. Jestliže mohutnost $\omega(M)$ není regulární, pak podle **3.8.6** existuje taková množina $\mathsf{C} \neq \emptyset$

a pro každé $z \in \mathbf{C}$ taková soustava $\mathfrak{B}(z) \subset \mathfrak{U}$, že moh $\mathbf{C}$, jakož i mohutnost každé $\mathfrak{B}(z)$, je menší než $\omega(M)$, a že $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{B}(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Protože moh $\mathfrak{B}(z) < \omega(M)$, je každé $V(z) = \bigcap U[U \in \mathfrak{B}(z)]$ okolím M. Protože také moh $\mathbf{C} < \omega(M)$, je také $W = \bigcap V(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ okolím M. To je spor, neboť zřejmě $W = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$.

4.12.7. Nechť Q_1 a Q_2 jsou vnořeny do P. Nechť $Q_1 \cup Q_2 = P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$, $\chi(a \mid Q_1) \geqq \chi(a \mid Q_2)$ $[\psi(a \mid Q_1) \geqq \psi(a \mid Q_2)]$. Pak je $\chi(a) = \chi(a \mid Q_1)$ $[\psi(a) = \psi(a \mid Q_1)]$.

Důkaz. I. Je-li a isolovaným bodem množiny Q_1, je $\chi(a \mid Q_1) = \psi(a \mid Q_1) = 1$ podle **4.12.1** a z předpokladu $\chi(a \mid Q_2) \leqq \chi(a \mid Q_1)$ $[\psi(a \mid Q_2) \leqq \psi(a \mid Q_1)]$ plyne podle **4.12.1**, že a je také isolovaným bodem množiny Q_2. Potom je však podle **4.7.3** a isolovaným bodem prostoru P a podle **4.12.1** je $\chi(a) = 1 = \chi(a \mid Q_1)$ $[\psi(a) = 1 = \psi(a \mid Q_1)]$. Stačí tudíž vést důkaz za předpokladu, že a není isolovaným bodem množiny Q_1, že tedy (viz **4.12.1**) mohutnosti $\chi(a \mid Q_1)$, $\psi(a \mid Q_1)$ jsou nekonečné.

II. Podle **4.12.3** stačí dokázat, že $\chi(a) \leqq \chi(a \mid Q_1)$ $[\psi(a) \leqq \psi(a \mid Q_1)]$.

III. Pro $i = 1, 2$ existuje taková soustava $\mathfrak{B}_i$ relativních okolí (ve vnořeném prostoru Q_i) bodu a, že moh $\mathfrak{B}_i = \chi(a \mid Q_i)$ $[= \psi(a \mid Q_i)]$ a že $\mathfrak{B}_i$ je úplná [že $(a) = \bigcap V$ $[V \in \mathfrak{B}_i)]$. Podle **4.6.2** existuje pro $i = 1, 2$ taková soustava $\mathfrak{U}_i$ okolí bodu a v prostoru P, že moh $\mathfrak{U}_i =$ moh $\mathfrak{B}_i$ a že ke každému $V_i \in \mathfrak{B}_i$ existuje taková $U_i \in \mathfrak{U}_i$, že $Q_i \cap U_i = V_i$.

Podle **3.7.1** a **3.7.8** je moh $(\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2) = \chi(a \mid Q_1)$ $[= \psi(a \mid Q_1)]$. Mohutnost soustavy $\mathfrak{U}$ všech průniků $U_1 \cap U_2$ $(U_1 \in \mathfrak{U}_1, U_2 \in \mathfrak{U}_2)$ je podle **3.7.1** nejvýš rovna $\chi(a \mid Q_1)$ $[\psi(a \mid Q_1)]$. Podle **4.2.5** je $\mathfrak{U}$ soustava okolí bodu a. Je pouze třeba dokázat, že $\mathfrak{U}$ je úplná [že $(a) = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})]$.

IV. V případě charakteru budiž W libovolné okolí bodu a. Podle **4.6.2** je $Q_i \cap W$ $(i = 1, 2)$ relativní okolí a ve vnořeném prostoru Q_i. Protože soustava $\mathfrak{U}_i$ je úplná, existuje taková $V_i \in \mathfrak{B}_i$, že $V_i \subset Q_i \cap W$. Je-li $U_i \in \mathfrak{U}_i$, $Q_i \cap U_i = V_i$, je $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$, $U_1 \cap U_2 = (Q_1 \cup Q_2) \cap U_1 \cap U_2 \subset (Q_1 \cap U_1) \cup (Q_2 \cap U_2) = V_1 \cup V_2 \subset W$.

V. V případě pseudocharakteru při $U \in \mathfrak{U}$, $U_i \in \mathfrak{U}_i$, $V_i \in \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2)$ máme

$$\bigcap U = (\bigcap U_1) \cap (\bigcap U_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap (\bigcap U_1) \cap (\bigcap U_2) \subset$$
$$\subset [Q_1 \cap (\bigcap U_1)] \cup [Q_2 \cap (\bigcap U_2)] \subset (\bigcap V_1) \cup (\bigcap V_2) \subset (a)\,,$$

takže $(a) = \bigcap U$ podle **4.2.3.**

4.12.8. Nechť Q_1 a Q_2 jsou vnořeny do P. Nechť $Q_1 \cup Q_2 = P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Jestliže buďto $\omega(a \mid Q_2) = 1$ nebo $1 < \omega(a \mid Q_1) \leqq \leqq \omega(a \mid Q_2)$, jest $\omega(a) = \omega(a \mid Q_1)$.

Důkaz. I. Je-li $\omega(a) = 1$, je $\omega(a \mid Q_1) = \omega(a \mid Q_2) = 1$ podle **4.7.2** a **4.12.1** a to souhlasí se zněním věty.

II. Je-li $\omega(a \mid Q_1) = \omega(a \mid Q_2) = 1$, pak podle **4.12.1** je a isolovaným bodem i množiny Q_1 i množiny Q_2 a tedy podle **4.7.3** také isolovaným bodem prostoru P a tudíž $\omega(a) = 1$.

III. Zbývá případ $\omega(a \mid Q_1) > 1$, o kterém už víme, že dá $\omega(a) > 1$. Podle **4.12.3** je $\omega(a) \leqq \omega(a \mid Q_1)$, takže máme ukázat, že $\omega(a) < < \omega(a \mid Q_1)$ je nemožné. Jestliže však $\omega(a) < \omega(a \mid Q_1)$, pak ze **4.12.2** plyne, že existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí bodu a, že moh $\mathfrak{U} = \omega(a)$ a že průnik $H = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$ není okolím bodu a. Podle **4.2.3** je $a \in H$. Protože $\omega(a) < \omega(a \mid Q_1)$, plyne ze **4.6.2**, že množina $Q_1 \cap H = = \bigcap (Q_1 \cap U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ je relativním okolím bodu a ve vnořeném prostoru Q_1. Nyní rozeznáváme dvě možnosti.

IV. První možnost: $\omega(a \mid Q_2) = 1$. Podle **4.4.12** a **4.12.1** je (a) relativním okolím a ve vnořeném prostoru Q_2. Potom vyjde ze **4.6.18**, že $(Q_1 \cap H) \cup (a) = Q_1 \cap H$ je okolím bodu a. Potom je však podle **4.2.4** také H okolím bodu a a to je spor.

V. Druhá možnost: $\omega(a \mid Q_2) \geqq \omega(a \mid Q_1)$, tedy $\omega(a \mid Q_2) > \omega(a)$. Potom však nejenom je $Q_1 \cap H$ relativním okolím a v prostoru Q_1 (viz III), nýbrž také (z obdobného důvodu) $Q_2 \cap H$ je relativním okolím a v prostoru Q_2. Nyní **4.6.18** dá, že $H = (Q_1 \cup Q_2) \cap H$ je okolím a v prostoru P a to je spor.

Definice **4.12.4.** Budiž $a \in P$ $(M \subset P)$. Pravíme, že charakter $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ je *monotónní*, existuje-li monotónní (ve smyslu článku **3.1**) úplná soustava okolí bodu a (množiny M).

4.12.9. Budiž $\mathfrak{U}$ monotónní úplná soustava okolí bodu $a \in P$ (množiny $M \subset P$). $\mathfrak{U}$ budiž sestupně uspořádána (viz **3.1**).

Nechť $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ je konfinální s $\mathfrak{U}$. Pak také $\mathfrak{B}$ je úplná soustava okolí bodu a (množiny M). Budiž W libovolné okolí bodu a (množiny M). Protože soustava $\mathfrak{U}$ je úplná, existuje $U \in \mathfrak{U}$, $U \subset W$. Protože $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ je konfinální s $\mathfrak{U}$, existuje taková $V \in \mathfrak{B}$, že $V = U$ nebo je U před V, tj. že $V \subset U$. Pak je však $V \subset W$.

4.12.10. Je-li $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ monotónní, existuje monotónní úplná soustava $\mathfrak{B}$ okolí bodu a (množiny M) s mohutností $\chi(a)$ $[\chi(M)]$, jejíž sestupné uspořádání je regulární dobré uspořádání (viz **3.8**). Podle **4.12.5** existuje monotónní úplná soustava $\mathfrak{U}$ okolí bodu a (množiny M) s mohutností $\chi(a)$ $[\chi(M)]$. Uvažujeme soustavu $\mathfrak{U}$ v jejím sestupném uspořádání. Podle **3.8.3** existuje s $\mathfrak{U}$ konfinální regulárně uspořádaná $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$. Soustava $\mathfrak{B}$ má mohutnost $\leqq \chi(a)$ $[\leqq \chi(M)]$ podle **3.7.1**, a tedy $= \chi(a)$ $[= \chi(M)]$, neboť $\mathfrak{B}$ podle **4.12.9** je úplná soustava okolí bodu a (množiny M).

4.12.11. Je-li $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ monotónní, jest

$$\omega(a) = \psi(a) = \chi(a) \quad [\omega(M) = \psi(M) = \chi(M)] .$$

Důkaz stačí provést pro případ množiny M. Je-li věta nesprávná, pak podle **4.12.1** jest $1 < \omega(M) < \chi(M)$. Podle **4.12.5** existuje taková monotónní úplná soustava $\mathfrak{U}$ okolí M, že $\operatorname{moh} \mathfrak{U} = \chi(M)$. Podle **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{W}$ okolí M, že $\operatorname{moh} \mathfrak{W} = \omega(M)$ a že $H = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{W})$ není okolím M. Protože soustava $\mathfrak{U}$ je úplná, existuje takové zobrazení f soustavy $\mathfrak{W}$ do $\mathfrak{U}$, že

$$W \in \mathfrak{W} \Rightarrow f(W) \subset W .$$

Je-li $K = \bigcap f(X)$ $(X \in \mathfrak{W})$, je tedy $K \subset H$, takže podle **4.2.4** ani K není okolím M. Podle **3.7.1** je $\operatorname{moh} f^1(\mathfrak{W}) \leqq \omega(M) < \chi(M)$, takže $f^1(\mathfrak{W})$ není úplná soustava okolí M. Protože $\mathfrak{U}$ je úplná, plyne ze **4.12.9**, že při sestupném uspořádání soustavy $\mathfrak{U}$ soustava $f^1(\mathfrak{W}) \subset \mathfrak{U}$ není konfinální s $\mathfrak{U}$. Z toho však plyne, že existuje taková $U_0 \in \mathfrak{U}$, že $X \in \mathfrak{W} \Rightarrow U_0 \subset$ $\subset f(X)$. Podle definice množiny K je tedy $U_0 \subset K$ a podle **4.2.4** je tudíž K okolím M a to je spor.

4.12.12. Je-li $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ monotónní, pak $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ je regulární mohutnost. Tato věta plyne ze **4.2.9** a **4.2.10**; také plyne ze **4.12.6** a **4.12.11**.

4.12.13. Budiž Q vnořen do P. Budiž $a \in Q$ ($M \subset Q$). Je-li $\chi(a)$ [$\chi(M)$] monotónní, je také $\chi(a \mid Q)$ [$\chi(M \mid Q)$] monotónní. Plyne ze **4.6.2.**

4.12.14. Budiž Q vnořen do P. Budiž $a \in Q$ ($M \subset Q$). Je-li $\chi(a)$ [$\chi(M)$] monotónní, pak relativní charakter $\chi(a \mid Q)$ [$\chi(M \mid Q)$] je buďto roven 1 nebo je roven $\chi(a)$ [$\chi(M)$]. Stačí uvažovat $\chi(M)$. Podle **4.12.11** je $\chi(M) = \omega(M)$, a tedy podle **4.12.13** také $\chi(M \mid Q) = \omega(M \mid Q)$. Na druhé straně je podle **4.12.1** a **4.12.3** buďto $\chi(M \mid Q) = 1$ nebo $\chi(M \mid Q) \leqq \chi(M)$, $\omega(M \mid Q) \geqq \omega(M)$, tudíž $\chi(M \mid Q) = \chi(M)$.

4.12.15. Nechť Q_1 a Q_2 jsou vnořeny do P. Nechť $Q_1 \cup Q_2 = P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Nechť oba relativní charaktery $\chi(a \mid Q_1)$, $\chi(a \mid Q_2)$ jsou monotónní a různé od jedné. Aby $\chi(a)$ byl monotónní, je nutné a stačí $\chi(a \mid Q_1) = \chi(a \mid Q_2)$.

Důkaz. I. Je-li $\chi(a)$ monotónní, je $\chi(a \mid Q_1) = \chi(a) = \chi(a \mid Q_2)$ podle **4.12.14.**

II. Nechť $\chi(a \mid Q_1) = \chi(a \mid Q_2) = \mathfrak{m}$. Podle **4.12.10** existuje pro $i = 1, 2$ monotónní úplná soustava $\mathfrak{U}_i$ relativních okolí bodu a v prostoru Q_i s mohutností $\mathfrak{m}$, jejíž sestupné uspořádání je regulární dobré uspořádání. Podle **3.6.3** a **3.8.2** existuje podobné zobrazení f soustavy $\mathfrak{U}_1$ na soustavu $\mathfrak{U}_2$, kde u obou soustav máme na mysli sestupné uspořádání. Budiž $\mathfrak{B}$ soustava všech množin

$$f(U) \cup U \quad (U \in \mathfrak{U}_1)\,.$$

Podle **4.6.18** je $\mathfrak{B}$ soustava okolí bodu a v prostoru P, která zřejmě je monotónní. Máme ukázat, že soustava $\mathfrak{B}$ je úplná. Nechť tedy W je libovolné okolí bodu a. Podle **4.6.2** pro $i = 1, 2$ je $Q_i \cap W$ relativní okolí a v prostoru Q_i. Existují tudíž takové množiny $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2^* \in \mathfrak{U}_2$, že $U_1 \subset Q_1 \cap W$, $U_2^* \subset Q_2 \cap W$. Existuje taková množina $U_2 \in \mathfrak{U}_1$, že $f(U_2) = U_2^*$ a tudíž $U_1 \cup f(U_2) \subset W$. Protože soustavy $\mathfrak{U}_1$ a $\mathfrak{U}_2$ jsou monotónní a zobrazení f je vzhledem k jejich sestupnému uspořádání podobné, je buďto $U_1 \subset U_2$, $f(U_1) \subset f(U_2)$ nebo $U_1 \supset U_2$, $f(U_1) \supset f(U_2)$. Tudíž je buďto $V_1 \subset W$ nebo $V_2 \subset W$, položíme-li

$$V_1 = U_1 \cup f(U_1) \in \mathfrak{B}\,, \quad V_2 = U_2 \cup f(U_2) \in \mathfrak{B}\,.$$

4.12.16. Je-li $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ spočetný charakter, je $\chi(a)$ $[\chi(M)]$ monotónní. Podrobněji: existuje posloupnost $\{V_n\}$, pro kterou platí $V_n \supset V_{n+1}$ a jejíž členy tvoří úplný systém okolí bodu a (množiny M). Jestliže členy posloupnosti $\{U_n\}$ tvoří úplný systém okolí bodu a (množiny M), stačí položit $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ (viz **4.2.5**).

Definice **4.12.5.** Pravíme, že v prostoru P platí *první axiom spočetnosti*, je-li $\chi(x) \leqq \aleph_0$ pro každý bod x. Podle **4.12.1** je pak $\chi(x) = 1$ pro každý isolovaný bod, $\chi(x) = \aleph_0$ pro každý jiný bod.

Protože každý $\mathcal{F}$-prostor má aspoň jednu otevřenou basi, má následující definice podle **3.7.3** smysl.

Definice **4.12.6.** *Totální charakter* $\mathcal{F}$-prostoru P, značka $\chi^t(P)$, je nejmenší možná mohutnost otevřené base prostoru P.

4.12.17. Totální charakter konečného $\mathcal{F}$-prostoru P je roven počtu jeho bodů. Totální charakter nekonečného $\mathcal{F}$-prostoru P je nekonečný.

Důkaz. I. V konečném prostoru je podle **4.4.9** každá bodová množina otevřená. Z toho plyne, že soustava bodových množin je otevřenou basí konečného prostoru právě tehdy, jestliže obsahuje všecky jednobodové množiny.

II. Je-li charakter $\chi^t(P)$ konečný, je v P jen konečně mnoho otevřených a tedy i konečně mnoho uzavřených množin. Tudíž prostor P je konečný.

4.12.18. Budiž Q vnořen do $\mathcal{F}$-prostoru P. Pak je $\chi^t(Q) \leqq$ $\leqq \chi^t(P)$. Viz **4.6.10** a **4.6.15.**

4.12.19. V $\mathcal{F}$-prostoru P platí pro každý bod a: $\chi(a) \leqq \chi^t(P)$. Viz **4.5.17.**

4.12.20. Budiž $\mathfrak{B}$ otevřená base $\mathcal{F}$-prostoru P. Pak je v $\mathfrak{B}$ obsažena otevřená base mohutnosti $\chi^t(P)$.

Důkaz. I. Pro konečné $\chi^t(P)$ viz důkaz věty **4.12.17.**

II. Budiž $\chi^t(P)$ nekonečné a budiž $\mathfrak{U}$ otevřená base mohutnosti $\chi^t(P)$. Budiž $\mathfrak{C}$ soustava všech takových dvojic $(A_1, A_2) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$, ke kterým existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $A_1 \subset B \subset A_2$. Pak existuje takové zobrazení φ soustavy $\mathfrak{C}$ do soustavy $\mathfrak{B}$, že

$$(A_1, A_2) \in \mathfrak{C} \Rightarrow A_1 \subset \varphi(A_1, A_2) \subset A_2 .$$

Budiž $\mathfrak{B}_0 = \varphi^1(\mathfrak{C})$. Ze **3.7.1** a **3.7.8** plyne, že moh $\mathfrak{B}_0 \leqq \chi^t(P)$. Protože $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, zbývá dokázat, že $\mathfrak{B}_0$ je otevřená base.

III. Budiž U okolí bodu $a \in P$. Podle **4.4.13** a **4.5.17** máme ukázat, že existuje taková dvojice $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$, že $a \in \varphi(A_1, A_2) \subset U$. Ze **4.4.13** a **4.5.17** plyne nejprve existence takové $A_2 \in \mathfrak{U}$, že $a \in A_2 \subset U$, potom existence takové $B \in \mathfrak{B}$, že $a \in B \subset A_2$ a nakonec existence takové $A_1 \in \mathfrak{U}$, že $a \in A_1 \subset B$. Jest $(A_1, A_2) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{B}$, $A_1 \subset B \subset A_2$, tudíž je $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$, a tedy $a \in A_1 \subset \varphi(A_1, A_2) \subset A_2 \subset U$.

4.12.21. Každý F-prostor P obsahuje hustou množinu M, jejíž mohutnost je $\leqq \chi^t(P)$. Budiž $\mathfrak{B}$ otevřená base mohutnosti $\chi^t(P)$. Můžeme předpokládat, že $\emptyset$ nenáleží do $\mathfrak{B}$. Existuje takové zobrazení φ soustavy $\mathfrak{B}$ do P, že $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow \varphi(B) \in B$. Je-li $M = \varphi^1(\mathfrak{B})$, pak podle **3.7.1** je moh $M \leqq \chi^t(P)$ a množina M je hustá podle **4.9.5.**

4.12.22. V každém F-prostoru P je mohutnost P i mohutnost soustavy $\mathfrak{F}$ všech uzavřených množin a soustavy $\mathfrak{G}$ všech otevřených množin $\leqq \exp \chi^t(P)$. Budiž $\mathfrak{B}$ otevřená base mohutnosti $\chi^t(P)$ a budiž **B** množina všech soustav obsažených v $\mathfrak{B}$, takže moh **B** $\leqq \exp \chi^t(P)$. Zřejmě existuje prosté zobrazení soustavy $\mathfrak{G}$ do **B**, takže podle **3.7.1** je moh $\mathfrak{G} \leqq \exp \chi^t(P)$. Zřejmě však moh $\mathfrak{F} =$ $=$ moh $\mathfrak{G}$ a protože jednobodové množiny jsou uzavřené, je moh $P \leqq$ $\leqq$ moh $\mathfrak{F}$.

Definice **4.12.7.** Pravíme, že v prostoru P platí *druhý axiom spočetnosti*, je-li P F-prostor a je-li $\chi^t(P) \leqq \aleph_0$. Patří sem všecky konečné prostory; jinak $\chi^t(P) = \aleph_0$ (viz **4.12.17**).

4.12.23. Budiž P prostor mohutnosti $\mathfrak{m}$. Pro každý bod a je $\chi(a) \leqq \exp \mathfrak{m}$, $\psi(a) \leqq \mathfrak{m}$, $\omega(a) \leqq \mathfrak{m}$. Je-li P F-prostor, jest $\chi^t(P) \leqq$ $\leqq \exp \mathfrak{m}$.

Důkaz. I. Protože $\exp \mathfrak{m}$ je mohutnost soustavy všech bodových množin, jsou nerovnosti $\chi(a) \leqq \exp \mathfrak{m}$, $\chi^t(P) \leqq \exp \mathfrak{m}$ zřejmé.

II. Pro $x \in P$, $x \neq a$ je $U(x) = P - (x)$ okolím a podle **4.2.2** a **4.2.6.** Protože $(a) = \bigcap U(x)$ $(x \in P,\ x \neq a)$, je $\psi(a) \leqq \mathfrak{m}$ a podle **4.12.1** je také $\omega(a) \leqq \mathfrak{m}$.

4.12.24. Nechť $M \subset P$ má mohutnost $\mathfrak{m}$. Pak pro každý hromadný bod a množiny M je $\omega(a) \leqq \mathfrak{m}$. Podle **4.7.4** není a isolovaným bodem vnořeného prostoru $Q = M \cup (a)$, takže podle **4.12.3** je $\omega(a) \leqq \omega(a \mid Q)$. Avšak ze **4.12.23** (viz též **2.2.10**) plyne $\omega(a \mid Q) \leqq \mathfrak{m}$.

4.12.25. Budiž $M \subset P$, $a \in M$. Je-li $\omega(a) = 1$ nebo $\omega(a) > \psi(M)$, je M okolím bodu a.

Důkaz. I. Je-li $\omega(a) = 1$, je M okolím a podle **4.2.4, 4.4.13** a **4.12.1.**

II. Budiž $\omega(a) > \psi(M)$. Podle **4.12.1** a **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí M, že moh $\mathfrak{U} = \psi(M)$ a že $M = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Podle **4.2.8** se $\mathfrak{U}$ skládá z okolí bodu a; protože moh $\mathfrak{U} < \omega(a)$, je M okolím a.

4.13. Cvičení k § 4

Definice **4.13.1.** Pojem *obecného prostoru* (P, u) vznikne z pojmu topologického prostoru tím, že axiom $(\bar{\mathrm{I}})$ nahradíme slabším axiomem

$$(\bar{\mathrm{I}}\mathrm{ob.}) \qquad u\emptyset = \emptyset\,,$$

axiom $(\bar{\mathrm{II}})$ ponecháme beze změny a připojíme axiom

$$(\mathrm{IIIob.}) \qquad X \subset P \Rightarrow X \subset uX\,,$$

který pro topologické prostory je důsledkem axiomů $(\bar{\mathrm{I}})$ a $(\bar{\mathrm{II}})$ (viz větu **4.1.2**). Pojem vnoření (viz článek **4.6**) se přenese beze změny na obecné prostory; doslova se přenesou také definice **4.1.1**, **4.2.1**, **4.2.2**, **4.3.1**, **4.4.1**, **4.4.2**, **4.4.3**, **4.4.4**, **4.5.1**, **4.5.2**, **4.5.3**, **4.5.4**, **4.5.5**, **4.8.1**, **4.9.1**, **4.10.1**, **4.11.1**, **4.12.1**, **4.12.4**, **4.12.5**, **4.12.6** a **4.12.7** (ne však definice **4.1.2**, **4.7.1**, **4.7.2**, **4.7.3**, **4.7.4**, **4.12.2** a **4.12.3**). Definice **4.1.2** se rozštěpí na dvě definice:

Definice **4.13.2.** *Derivace* X' bodové množiny X je bodová množina definovaná takto:

$$x \in X' \Leftrightarrow x \in \overline{X - (x)}\,.$$

Definice **4.13.3.** Bod $a \in P$ nazýváme *hromadným bodem množiny* $X \subset P$, jestliže $a \in \overline{X - K}$ pro každou konečnou množinu $K \subset P$. Množinu všech hromadných bodů množiny X označíme X^h.

4.13.1. Věty **4.1.1**, **4.1.4** a **4.1.8** platí také pro obecné prostory. Větu **4.1.3** je třeba pozměnit takto: V každém obecném prostoru P platí pravidla:

(I'ob.) $\emptyset' = \emptyset$.

(II'ob.) $(X_1 \cup X_2)' = X_1' \cup X_2'$.

(III'ob.) $x \in X' \Rightarrow x \in [X - (x)]'$.

Ve větě **4.1.5** je třeba místo axiomů (I') a (II') vzít axiomy (I'ob.) až (III'ob.).

4.13.2. Buďiž P obecný prostor. Pak platí:

$$X \subset P \Rightarrow X^h \subset X' ;$$
$$X_1 \subset X_2 \subset P \Rightarrow X_1^h \subset X_2^h ;$$
$$X_1 \subset P , \quad X_2 \subset P \Rightarrow (X_1 \cup X_2)^h = X_1^h \cup X_2^h .$$

Je-li $K \subset P$ konečná množina, jest $K^h = \emptyset$.

4.13.3. Buďiž (P, v) obecný prostor. Pro $X \subset P$ buďiž

$$uX = X \cup X^h .$$

Pak (P, u) je topologický prostor. Pro $X \subset P$ jest $uX \subset vX$. Je-li také (P, w) takový topologický prostor, že $X \subset P \Rightarrow wX \subset vX$, pak jest: $X \subset P \Rightarrow wX \subset$ $\subset uX$.

4.13.4. Věty **4.2.2**, **4.2.3**, **4.2.4**, **4.2.5**, **4.2.8**, **4.2.9**, **4.2.10**, **4.2.12** a **4.2.13** platí také pro obecné prostory. Ve větě **4.2.1** je třeba místo (I_ι) vzít: $P_\iota = P$; (II_ι) zůstane beze změny a připojí se (III_ι) $X \subset P \Rightarrow X_\iota \subset X$.

Definice **4.13.4.** Buďiž P obecný prostor. *Hvězda bodové množiny* $M \subset P$, značka M^s, je množina těch bodů $x \in P$, pro které je $\bar{x} \cap M \neq \emptyset$; $\bar{x}$ je uzávěr množiny (x). *Hvězda bodu* $a \in P$, značka a^s, je hvězda množiny (a).

4.13.5. Buďiž P obecný prostor. Pak jest:

$$\emptyset^s = \emptyset ; \quad X \subset P \Rightarrow X \subset X^s ; \quad x \in P \Rightarrow x \in x^s .$$

Pro každou soustavu $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ bodových množin jest:

$$\bigcup (X^s) = (\bigcup X)^s \quad (X \in \mathfrak{M}) .$$

Platí-li $(x) = x^s$ pro každý bod x, pak P je topologický prostor a jest: $X \subset P \Rightarrow$ $\Rightarrow X^s = X$.

4.13.6. Buďiž P obecný prostor. Je-li U okolí bodu a (bodové množiny M) a je-li $x \in P - a^s$ $(x \in P - M^s)$, pak také $U - (x)$ je okolí bodu a (množiny M).

4.13.7. Buďiž P obecný prostor. Průnik všech okolí bodu a (bodové množiny M) je roven a^s (je roven M^s).

4.13.8. Buďiž P obecný prostor. Aby $a \in P$ byl hromadným bodem množiny $M \subset P$, k tomu je nutné a stačí, aby každé okolí bodu a obsahovalo nekonečně mnoho bodů množiny M.

4.13.9. Věty **4.3.2**, **4.3.4**, **4.3.5** a **4.3.6** platí beze změny i pro obecné prostory. Totéž platí o větách **4.3.1** a **4.3.3**, jestliže v nich škrtneme axiom (III$\mathfrak{U}$).

4.13.10. Věty **4.4.1** až **4.4.22**, s výjimkou vět **4.4.3** a **4.4.9**, platí beze změny i pro obecné prostory. Větu **4.4.3** je nutné úplně vynechat; z věty **4.4.9** zůstane v platnosti pouze tvrzení, že P je otevřená množina.

Definice **4.13.5.** Budiž P obecný prostor. Množinu $M \subset P$ nazveme *F_s-množinou,* existuje-li taková soustava $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ uzavřených množin, že $M = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{F})$. Množinu $M \subset P$ nazveme *G_d-množinou,* existuje-li taková soustava $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ otevřených množin, že $M = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{G})$.

4.13.11. Budiž P obecný prostor. Každá F_σ-množina je F_s-množinou. Každá G_s-množina je G_d-množinou. Aby $M \subset P$ byla G_d-množinou, k tomu je nutné a stačí, aby $P - M$ byla F_s-množinou. Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ libovolná soustava F_s-množin (G_d-množin), pak sjednocení i průnik soustavy $\mathfrak{M}$ jsou F_s-množiny (G_d-množiny).

4.13.12. Věty **4.5.1** až **4.5.17**, s výjimkou vět **4.5.11**, **4.5.12** a **4.5.16**, platí beze změny i pro obecné prostory. Věta **4.5.12** bude platit pro obecné prostory, jestliže axiomu (I$\mathfrak{F}$) dáme slabší tvar $\emptyset \in \mathfrak{F}$. [Podobně axiom (I$\mathfrak{G}$), str. **70**, dostane pro obecné prostory slabší tvar $P \in \mathfrak{G}$.] Věta **4.5.16** bude platit pro obecné prostory, jestliže axiomu (I$\mathfrak{B}$) dáme slabší tvar: $P = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{B})$.

4.13.13. Že věta **4.5.11** v obecných prostorech neplatí, ukazuje tento příklad. Budiž P množina obsahující aspoň dva prvky; položme $u\emptyset = \emptyset$ a pro $\emptyset \neq X \subset P$: $uX = P$. Pak je P obecný F-prostor, ale derivace jednobodových množin nejsou uzavřené.

Definice **4.13.6.** *K-prostor* P je obecný prostor, ve kterém pro každý bod x platí: $\bar{x} \cap x^s = (x)$.

4.13.14. Aby obecný prostor P byl K-prostorem, k tomu je nutné a stačí:

$$x \in P\,, \quad y \in P\,, \quad x \in \bar{y}\,, \quad y \in \bar{x} \Rightarrow x = y\,.$$

4.13.15. Nutná a postačující podmínka, aby obecný prostor P byl K-prostorem, zní: Je-li $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak buďto existuje takové okolí U bodu x, že $(y) \cap U = \emptyset$, nebo existuje takové okolí V bodu y, že $(x) \cap V = \emptyset$.

4.13.16. V K-prostoru jsou uzávěry dvou různých bodů navzájem různé. Existuje trojbodový obecný prostor P, ve kterém každé dva různé body mají různé uzávěry, ačkoli P není K-prostor.

4.13.17. Jestliže v obecném prostoru P uzávěr každého bodu je uzavřená množina a mimo to každé dva různé body mají různé uzávěry, pak P je K-prostor. Zejména je obecný F-prostor K-prostorem, jestliže každé dva různé body mají různé uzávěry.

4.13.18. Ke každému obecnému F-prostoru (P, u) existuje FK-prostor (P_1, v) a takové zobrazení f prostoru P na P_1, že

$$X \subset P\,, \quad X_1 = f^1(X) \Rightarrow uX = f^{-1}(vX_1)\,.$$

Z toho plyne, že celá teorie obecných F-prostorů se redukuje na teorii FK-prostorů.

4.13.19. Je-li P K-prostor a je-li uzávěr každého bodu G_d-množinou, pak P je topologický prostor.

4.13.20. Věty **4.6.1** až **4.6.18** platí beze změny i pro obecné prostory.

4.13.21. Budiž Q vnořen do K-prostoru P. Pak také Q je K-prostor.

4.13.22. Budiž Q vnořen do obecného prostoru P; budiž $M \subset Q$. Je-li M^s hvězda množiny M v prostoru P, pak $Q \cap M^s$ je hvězda množiny M v prostoru Q.

Definice **4.13.7.** *Silně isolovaný bod* obecného prostoru P je takový bod $a \in P$, že množina (a) je otevřená. *Slabě isolovaný bod* obecného prostoru P je takový bod $a \in P$, že hvězda a^s je okolím bodu a. Silně (slabě) isolovaný bod bodové množiny $Q \subset P$ je silně (slabě) isolovaný bod vnořeného obecného prostoru Q.

4.13.23. Věty **4.7.1**, **4.7.2**, **4.7.3** platí i pro obecné prostory, jestliže slovo isolovaný nahradíme výrazem silně isolovaný.

4.13.24. Budiž P obecný prostor; budiž $Q \subset P$, $a \in Q$. Aby a byl slabě isolovaný bod množiny Q, je nutné a stačí, aby existovalo takové okolí U bodu a v prostoru Q, že $Q \cap U = Q \cap a^s$. Budiž $Q_1 \subset Q_2 \subset P$. Je-li $a \in Q_1$ slabě isolovaný bod množiny Q_2, je a také slabě isolovaný bod množiny Q_1.

Definice **4.13.8.** Obecný prostor P nazveme *silně* (*slabě*) *isolovaným*, jestliže každý jeho bod je silně (slabě) isolovaný. Bodovou množinu $Q \subset P$ nazveme silně (slabě) isolovanou, jestliže vnořený obecný prostor Q je silně (slabě) isolovaný.

4.13.25. Aby obecný prostor P byl silně isolovaný, je nutné a stačí, aby P byl isolovaný topologický prostor. Existují slabě isolované obecné prostory, které nejsou silně isolované; např. každý konečný obecný prostor je slabě isolovaný.

Definice **4.13.9.** Obecný prostor P nazveme *slabě hustě rozloženým* (*silně hustě rozloženým*), jestliže $P \neq \emptyset$ a žádný bod není silně isolovaný (slabě isolovaný). Bodovou množinu $Q \subset P$ nazveme slabě (silně) hustě rozloženou, jestliže vnořený obecný prostor Q je slabě (silně) hustě rozložený.

4.13.26. Věty **4.7.6**, **4.7.7**, **4.7.8** budou správné pro obecné prostory, jestliže výraz hustě rozložený nahradíme výrazem slabě hustě rozložený; věta **4.7.7** zůstane správná, jestliže výraz hustě rozložený nahradíme výrazem silně hustě rozložený.

4.13.27. Jestliže ve větě **4.7.8** výraz hustě rozložený nahradíme výrazem silně hustě rozložený, dostaneme větu, která není správná pro obecné prostory. To lze nahlédnouti takto. Budiž (Q, v) nějaký hustě rozložený topologický F-prostor; budiž ω symbol různý od všech $x \in Q$; budiž $P = Q \cup (\omega)$. Budiž $u\emptyset = \emptyset$; pro $\emptyset \neq X \subset P$ budiž $uX = v(X \cap Q) \cup (\omega)$. Pak je (P, u) FK-prostor, množina $Q \subset P$ je silně hustě rozložená, ale množina $uQ = P$ nikoliv.

4.13.28. Pro obecné F-prostory je věta **4.7.9** nesprávná při obou možných interpretacích výrazu hustě rozložený. Můžeme to nahlédnouti takto. Budiž (Q, v) nějaký hustě rozložený topologický F-prostor; budiž ω symbol různý od všech $x \in Q$; budiž $P = Q \cup (\omega)$. Pro $X \subset Q$ budiž $uX = vX$, $u[X \cup (\omega)] = P$. Pak (P, u) je FK-prostor; množina $(\omega) \subset P$ není slabě hustě rozložená, ale $u(\omega) = P$ je silně hustě rozložená.

Definice **4.13.10.** Obecný prostor P nazveme *silně řídce rozložený* (*slabě řídce rozložený*), jestliže žádná bodová množina není slabě hustě rozložená (silně hustě rozložená). Bodovou množinu $Q \subset P$ nazveme silně (slabě) řídce rozloženou, jestliže vnořený prostor Q je silně (slabě) řídce rozložený.

4.13.29. Jestliže ve větě **4.7.10** výraz hustě rozložený nahradíme výrazem slabě hustě rozložený a současně výraz řídce rozložený nahradíme výrazem silně řídce rozložený, dostaneme větu správnou pro obecné prostory. Jestliže však ve **4.7.10** výraz hustě rozložený nahradíme výrazem silně hustě rozložený a současně výraz řídce rozložený nahradíme výrazem slabě řídce rozložený, dostaneme větu pro obecné prostory nesprávnou, jak ukazuje příklad prostoru (P, u) popsaného ve **4.13.27.**

4.13.30. Jestliže ve větě **4.7.11** výraz řídce rozložený nahradíme výrazem silně řídce rozložený, dostaneme větu pro obecné F-prostory nesprávnou, jak ukazuje příklad $P = (a) \cup (b)$, $u\emptyset = \emptyset$, $P \supset X \neq \emptyset \Rightarrow uX = P$ [množiny (a), (b) jsou silně řídce rozložené, množina $(a) \cup (b)$ nikoli]. Omezíme-li se však na FK-prostory, stane se věta správnou.

4.13.31. Jestliže ve větě **4.7.11** výraz řídce rozložený nahradíme výrazem slabě řídce rozložený, dostaneme větu, která pro obecné prostory je nesprávná a zůstane nesprávnou i tehdy, omezíme-li se na FK-prostory. To ukazuje tento příklad. Budiž $P = \mathbf{N}$. Pro nekonečnou $X \subset P$ budiž $uX = P$. Pro konečnou $X \subset P$ nechť uX se skládá z X a z těch čísel $y \in P$, která jsou o sudé číslo menší než některé $x \in P$. Pak (P, u) je FK-prostor. Je-li A množina sudých, B množina lichých $x \in P$, jsou A, B slabě řídce rozložené, $A \cup B = P$ však nikoli.

4.13.32. Věty **4.8.1** až **4.8.16** platí i pro obecné prostory.

4.13.33. Věty **4.9.1** až **4.9.12** platí i pro obecné prostory. Stejně je tomu i s větou **4.9.13**, jestliže v ní slovo isolovaný nahradíme výrazem silně isolovaný; jestliže však ve **4.9.13** slovo isolovaný nahradíme výrazem slabě isolovaný, stane se věta **4.9.13** nesprávnou i pro FK-prostory.

4.13.34. Věty **4.10.1** až **4.10.14** platí i pro obecné prostory.

4.13.35. Věty **4.11.1** až **4.11.8** platí i pro obecné prostory.

Definice **4.13.11.** Budiž P obecný prostor. *Pseudocharakter* množiny $M \subset P$, značka $\psi(M)$, je nejmenší možná mohutnost takové soustavy $\mathfrak{U}$ okolí množiny M, která má vlastnost: $M^s = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Pseudocharakter $\psi(a)$ bodu $a \in P$ je pseudocharakter množiny (a).

Definice **4.13.12.** Budiž P obecný prostor. *Vnitřní charakter* množiny $M \subset P$, značka $\omega(M)$, je nejmenší možná mohutnost takové soustavy $\mathfrak{U}$ okolí množiny M, že průnik $\bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$ buďto je roven M^s nebo není okolím množiny M. Vnitřní charakter $\omega(a)$ bodu $a \in P$ je vnitřní charakter množiny (a).

4.13.36. Jestliže ve větách **4.12.1**, **4.12.2**, **4.12.3** slovo isolovaný nahradíme výrazem silně isolovaný a otevřenost množiny M vlastností „M^s je okolím M“ (relativní otevřenost vlastností „$Q \cap M^s$ je relativním okolím M“), dostaneme věty platné i pro obecné prostory.

4.13.37. Věty **4.12.4** až **4.12.23**, s výjimkou vět **4.12.17** a **4.12.22**, platí beze změny i pro obecné prostory.

4.13.38. Pro obecné F-prostory věta **4.12.7** neplatí. Příklad: $u\emptyset = \emptyset$, $P \supset \supset X \neq \emptyset \Rightarrow uX = P$; totální charakter tohoto prostoru P je roven 1 nezávisle na moh P. Avšak **4.12.7** platí pro FK-prostory.

4.13.39. Ve **4.12.22** platí tvrzení o $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$ pro všecky obecné F-prostory, tvrzení o P platí pro FK-prostory.

4.13.40. Věta **4.12.24** je nesprávná pro obecné prostory a zůstane nesprávnou i pro FK-prostory. Budiž $Q = (Q, v)$ topologický F-prostor, ve kterém bod a má nespočetný vnitřní charakter; budiž $P = Q \cup S$, kde $Q \cap S = \emptyset$ a množina S je spočetná. Pro $X \subset P$ budiž $uX = vX$ v případě $X \cap S = \emptyset$, $uX = v(X \cap Q) \cup (X \cap S) \cup (a)$ v případě $X \cap S \neq \emptyset$. Pak (P, u) je FK-prostor, ve kterém bod a je hromadným bodem spočetné množiny S, ale vnitřní charakter bodu a je v prostoru (P, u) týž jako v (Q, v), tedy nespočetný. Jestliže však ve větě **4.12.24** předpoklad, že a je hromadným bodem množiny M, nahradíme předpokladem, že a není slabě isolovaným bodem množiny $M \cup (a)$, dostaneme větu správnou pro obecné prostory.

4.13.41. S upraveným tvrzením, že M^s je okolím bodu a, stane se věta **4.12.25** správnou i pro obecné prostory.

4.13.42. V každém obecném prostoru P platí pro každou $M \subset P$ vzorec

$$\overline{P - \overline{P - \overline{\overline{P - M}}}} = \overline{P - \overline{\overline{M}}}.$$

4.13.43. Existuje FK-prostor P s těmito vlastnostmi: [1] existuje taková otevřená base $\mathfrak{B}$ prostoru P, že žádná $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_0 \neq \mathfrak{B}$ není otevřenou basí prostoru P; [2] existuje bod $a \epsilon P$, který není slabě isolovaným bodem. Uzávěr $\bar{a}$ je nutně nekonečný. V uvažovaném P nutně existují slabě isolované body.

4.13.44. Budiž P obecný prostor. Budiž $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a. Budiž $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$, moh $\mathfrak{U}_0 < \chi(a)$. Pak $\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0$ jest úplná soustava okolí bodu a.

4.13.45. Budiž P obecný prostor. Budiž $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a. Budiž $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2$. Pak buďto $\mathfrak{U}_1$ nebo $\mathfrak{U}_2$ je úplná soustava okolí bodu a.

4.13.46. Budiž P obecný prostor. Budiž $\mathfrak{U}$ taková soustava okolí bodu a, že moh $\mathfrak{U} \geqq \chi(a)$ a že každá $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$, pro kterou moh $\mathfrak{U}_0 = \chi(a)$, je úplnou soustavou okolí bodu a. Pak charakter $\chi(a)$ je monotónní.