Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre XI: Correspondances entre deux surfaces

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [192]--205.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402568

CHAPITRE XI.

CORRESPONDANCES ENTRE DEUX SURFACES.

64. Correspondance Γ des plans osculateurs. — Soit $x(u, v)$ le point mobile d'une surface S non développable rapportée à un système *arbitraire* de coordonnées curvilignes u, v. Pour chaque valeur de (u, v), choisissons un point $X(u, v)$ non situé dans le plan tangent à S en $x(u, v)$, mais d'ailleurs quelconque. Alors les quatre points x, x_u, x_v, X sont linéairement indépendants, de manière que chaque point de l'espace en est une combinaison linéaire. En particulier, on a des équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_{uu} &= c_{111}x_v - c_{112}x_u + b_{11}x + a_{11}X,\\ x_{uv} &= c_{121}x_v - c_{122}x_u + b_{12}x + a_{12}X,\\ x_{vv} &= c_{221}x_v - c_{222}x_u + b_{22}x + a_{22}X.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$F = F(du, dv) = a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,dv\,du + a_{22}\,dv^2;$$

alors

$$(x, x_u, x_v, d^2x) = F(du, dv)(x, x_u, x_v, X);$$

donc $F = 0$ est l'équation différentielle des asymptotiques de la surface S.

Le plan osculateur à une courbe tracée sur S est (x, dx, d^2x). Des équations (1) on déduit que

$$(2)\qquad (x, dx, d^2x) = \xi_0(x, x_u, x_v) + \xi_1(x, x_u, X) + \xi_2(x, x_v, X)$$

avec

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi_0 = du\,d^2v - dv\,d^2u + C(du, dv),\\ &\xi_1 = du\,F(du, dv), \qquad \xi_2 = dv\,F(du, dv),\end{aligned}\right.$$

où nous avons posé

$$(4)\qquad \begin{aligned} C(du, dv) = c_{111}\,du^3 &+ (2c_{121} + c_{112})\,du^2\,dv\\ &+ (c_{221} + 2c_{122})\,du\,dv^2 + c_{222}\,dv^3.\end{aligned}$$

Cela posé, considérons une autre surface S′ non développable en correspondance biunivoque avec S, et rapportons S′ aux coordonnées curvilignes *correspondantes* à celles choisies pour S. Au lieu de

$$x, \quad X, \quad c_{rst}, \quad a_{rs}, \quad b_{rs}, \quad F, \quad C,$$

écrivons, relativement à la surface S′,

$$y, \quad Y, \quad c'_{rst}, \quad a'_{rs}, \quad b'_{rs}, \quad F', \quad C'.$$

Au plan (2) correspond le plan

$$(2') \qquad (y, dy, d^2y) = \eta_0(y, y_u, y_v) + \eta_1(y, y_u, Y) + \eta_2(y, y_v, Y)$$

avec

$$(3') \qquad \begin{cases} \eta_0 = du\, d^2v - dv\, d^2u + C'(du, dv), \\ \eta_1 = dx\, F'(du, dv), \qquad \eta_2 = dv\, F'(du, dv). \end{cases}$$

Pour chaque valeur de (u, v), la correspondance Γ entre les plans osculateurs (2) et (2′) est définie analytiquement par (3) et (3′). En éliminant les différentielles, on obtient les équations de Γ sous la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho\eta_0 = \xi_0\, F(\xi_1, \xi_2) + C'(\xi_1, \xi_2) - C(\xi_1, \xi_2), \\ \rho\eta_1 = \xi_1\, F'(\xi_1, \xi_2), \\ \rho\eta_2 = \xi_2\, F'(\xi_1, \xi_2). \end{cases}$$

En général, Γ *est* donc *une correspondance birationnelle cubique.* Le degré de Γ s'abaisse évidemment seulement si les seconds membres de (4) ou, ce qui est la même chose, si les trois formes différentielles

$$(5) \qquad F(du, dv), \quad F'(du, dv), \quad C'(du, dv) - C(du, dv)$$

ont un facteur commun.

Si la correspondance entre S et S′ est *non asymptotique*, c'est-à-dire si la courbe de S′ correspondant à une asymptotique de S n'est jamais asymptotique, alors le degré de Γ est nécessairement égal à *trois*, car dans ce cas les deux premières des formes (5) sont sans facteur commun.

Considérons maintenant une correspondance *demi-asymptotique*, c'est-à-dire le cas où les asymptotiques d'un (et d'un seul) système se correspondent sur les deux surfaces. Sans restreindre la généralité, supposons que les asymptotiques *conservées* soient les $v =$ const., et que l'autre famille d'asymptotiques de la surface S' soit $u = \text{const.}$ Alors

$$a'_{11} = a'_{22} = a_{11} = 0$$

(tandis que a'_{12}, a_{12}, $a_{22} \neq 0$) et les équations (4) de la correspondance Γ deviennent

$$(4') \quad \begin{cases} \rho\eta_0 = \xi_0\xi_2(2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2) + C'(\xi_1, \xi_2) - C(\xi_1, \xi_2), \\ \rho\eta_1 = 2a'_{12}\xi_1^2\xi_2, \\ \rho\eta_2 = 2a'_{12}\xi_1\xi_2^2. \end{cases}$$

Il en résulte que la correspondance Γ reste en général cubique; il n'y a exception que si

$$(6) \qquad c'_{111} = c_{111}.$$

Dans ce cas les seconds membres de (4') ont le facteur commun ξ_2 et la correspondance Γ est *quadratique*. Si cela arrive pour chaque valeur de (u, v), nous appellerons la correspondance entre S et S' une *demi-déformation projective*. L'équation (6) exprime d'ailleurs que les courbes touchant l'asymptotique $v = \text{const.}$ et ayant une inflexion [pour la valeur considérée de (u, v)] se correspondent sur les deux surfaces.

Considérons enfin une correspondance *asymptotique*, c'est-à-dire le cas où *toutes* les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les u, v soient des coordonnées asymptotiques (pour toutes les deux surfaces). En outre, on peut encore supposer que $X = x_{uv}$, $Y = y_{uv}$. En comparant les équations (1) avec les équations fondamentales [§ 17, (I)], on voit que

$$(7) \quad \begin{cases} a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 0, \\ c_{111} = \beta, \quad c_{112} = -\theta_u, \quad c_{121} = c_{122} = 0, \\ c_{221} = \theta_v, \quad c_{222} = -\gamma \end{cases}$$

et pareillement pour S'. Les équations (4) de la correspondance Γ deviennent

$$(4'') \quad \begin{cases} \rho\eta_0 = (2\xi_0 - \overline{\theta'_u - \theta_u}\,\xi_1 + \overline{\theta'_v - \theta_v}\,\xi_2)\xi_1\xi_2 + (\beta' - \beta)\xi_1^3 - (\gamma' - \gamma)\xi_2^3, \\ \xi\eta_1 = 2\xi_1^2\xi_2, \\ \rho\eta_2 = 2\xi_1\xi_2^2. \end{cases}$$

En général, la correspondance Γ est *cubique;* dans le cas où l'on a une et une seule des équations $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, la correspondance Γ est *quadratique* (dans ce cas, nous parlerons d'une *demi-déformation asymptotique*); enfin, nous trouvons le théorème déjà énoncé au paragraphe 30 que la correspondance Γ est linéaire (homographique) seulement dans le cas d'une *déformation projective*.

On peut compléter les considérations qui précèdent (ainsi que celles des paragraphes suivants) en faisant usage du principe de dualité. Nous avons envisagé les surfaces S et S′ comme *lieux de points* et nous avons considéré les plans osculateurs aux courbes tracées sur elles. Or on peut remplacer une des deux surfaces S et S′ (ou toutes les deux) par sa *corrélative* Σ ou Σ', c'est-à-dire on peut l'envisager comme enveloppe de ses plans tangents; au lieu des plans osculateurs, on a alors à considérer les points de rebroussement des développables circonscrites. On a ainsi toujours à envisager simultanément *quatre* correspondances entre : 1° S et S′; 2° Σ et Σ'; 3° Σ et S′; 4° S et Σ' (1). En particulier partons de la correspondance *identique* entre S et S′ = S. Les deux premières des quatre correspondances se réduisent alors à l'identité, tandis que les deux dernières, inverses l'une à l'autre, font correspondre chaque point de S à son plan tangent. La correspondance Γ relative n'est rien d'autre que la correspondance de Segre déjà étudiée au paragraphe 39.

65. **Les systèmes axiaux correspondants.** — Considérons une surface S pour laquelle nous garderons les notations du paragraphe précédent. Traçons, par chaque point de S, une droite arbitraire r (non située dans le plan tangent). On peut alors considérer les courbes tracées sur S et assujetties à la condition que, pour chaque valeur de u, v, leur plan osculateur contienne la droite r correspondante. Un tel système de courbes tracées sur S s'appelle, selon M. Bompiani, le *système axial* associé aux droites r. Analytiquement cela revient à prescrire une relation linéaire et homogène

$$\lambda_0 \xi_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = 0 \qquad (\text{avec } \lambda_0 \neq 0)$$

entre les coordonnées ξ_0, ξ_1, ξ_2 du plan (2). Les équations (3) per-

(1) On peut démontrer par exemple que si le degré de la correspondance Γ relative au cas 1° s'abaisse *pour chaque valeur de* u, v, la même chose arrive dans le cas 2°. Cela n'est plus vrai si le degré de Γ s'abaisse pour une valeur *particulière* de (u, v) (*voir* Čech [4]).

mettent d'écrire l'équation différentielle du système axial. Pour un système axial donné, on peut toujours choisir le point $X(u, v)$ sur la droite r. Alors, l'équation différentielle du système axial est

$$du\, d^2 v - dv\, d^2 u + C(du, dv) = 0.$$

Cela posé, revenons à l'étude de la correspondance entre S et S'. Nous allons rechercher s'il existe des systèmes axiaux *correspondants*. A cet effet, faisons décrire au plan (2') un faisceau quelconque. Autrement dit, considérons les plans (2') dont les coordonnées η_0, η_1, η_2 satisfont à une relation linéaire

$$\lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 = 0. \tag{8}$$

D'après (4), le plan (2) correspondant décrit un cône de la troisième classe dont l'équation est

$$\lambda_0[\xi_0 F(\xi_1, \xi_2) + C'(\xi_1, \xi_2) - C(\xi_1, \xi_2)] + (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) F'(\xi_1, \xi_2) = 0. \tag{9}$$

En faisant varier $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ on obtient dans l'étoile au centre $x(u, v)$ un système linéaire (9) de cônes. On obtient les plans tangents communs à tous ces cônes en annulant simultanément les coefficients de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ dans l'équation (9). Pour plus de simplicité, supposons que les lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ soient des asymptotiques de la surface S', de manière que

$$a'_{11} = a'_{22} = 0, \qquad a'_{12} \neq 0.$$

En outre supposons la correspondance *non asymptotique*, c'est-à-dire $a_{11} a_{22} \neq 0$. On trouve alors que le système linéaire (9) a *trois* plans tangents fixes

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi_1 = \xi_2 = 0, & \\ \xi_1 = 0, & a_{22}\xi_0 + (c'_{222} - c_{222})\xi_2 = 0, \\ \xi_2 = 0, & a_{11}\xi_0 + (c'_{111} - c_{111})\xi_0 = 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Le plan (10_1) est simplement le plan tangent à S en x; on reconnaît d'ailleurs de (9) que c'est un plan tangent *double* pour nos cônes, les droites de contact correspondantes étant les *tangentes asymptotiques* à S en x. Chacun des deux autres plans (10) passe par l'image (sur S) d'une tangente asymptotique à S'; leur intersection a s'appelle l'*axe de la correspondance* au point $x(u, v)$.

Le système linéaire (9) est évidemment complètement défini par les propriétés que nous venons de trouver : il se compose de cônes rationnels de la troisième classe ayant un plan tangent double au plan tangent à S en x; les droites de contact du plan tangent double sont les tangentes asymptotiques à S en x; en outre, ces cônes possèdent deux autres plans tangents fixes simples, qui sont les plans joignant l'axe a de la correspondance à ces tangentes à S en x à qui correspondent les tangentes asymptotiques en y à S'. Il en résulte que le système linéaire (9) possède un et un seul cône dégénéré en trois faisceaux de droites; les axes de ces faisceaux sont respectivement les deux tangentes asymptotiques à S et l'axe de la correspondance. De la signification du système linéaire (9) on déduit que, si le plan (2) décrit un faisceau autour de l'axe a de la correspondance, le plan correspondant (2') décrit aussi un *faisceau* dont l'axe soit appelé a'; c'est d'ailleurs évidemment le *seul* couple de faisceaux s'appartenant dans la correspondance Γ (pour la valeur considérée de u, v). La droite a' joue donc le même rôle que la droite a.

En faisant varier u, v, on voit qu'*au système axial sur* S *associé aux droites a correspond sur* S' *le système axial associé aux droites a'; c'est le seul couple de systèmes axiaux correspondants.*

M. Bompiani ([18], [19]) a trouvé une autre définition des deux plans $(10_{2,3})$. A cet effet, considérons sur S' une courbe telle que, pour la valeur considérée de u, v, on ait

$$dv = 0, \qquad d^2 v = -c'_{111}\, du^2.$$

On reconnaît aisément que (pour la valeur considérée de u, v) on a $(y, dy, d^2y) = 0$, c'est-à-dire que la courbe a en $y(u, v)$ un point d'inflexion. Pour le plan osculateur en x de la courbe correspondante sur S, on obtient

$$\xi_0 = (c_{111} - c'_{111})\, du^3, \qquad \xi_1 = a_{11}\, du^3, \qquad \xi_2 = 0;$$

c'est donc le plan (10_3). *Les plans* $(10_{2,3})$ *sont les plans osculateurs en* $x(u, v)$ *à ces courbes tracées sur* S *dont les correspondantes sur* S' *ont un point d'inflexion en* $y(u, v)$.

Considérons maintenant le cas d'une correspondance *demi-asymptotique*. On voit sans difficulté que, si la condition (6) n'est pas vérifiée, il n'existe aucun couple de systèmes axiaux correspondants. Considérons au contraire le cas (6) d'une demi-déformation projective. Les équations (4') deviennent, en supprimant le facteur commun ξ_2,

$$\rho\eta_0 = \xi_0(2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2) + G(\xi_1, \xi_2),$$
$$\rho\eta_1 = 2a'_{12}\xi_1^2,$$
$$\rho\eta_2 = 2a'_{12}\xi_1\xi_2.$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} G(\xi_1, \xi_2) = {} & (2c'_{121} - c'_{112} - 2c_{121} - c_{112})\xi_1^2 \\ & + (c'_{221} + 2c'_{122} - c_{221} - 2c_{112})\xi_1\xi_2 + (c'_{222} - c_{222})\xi_2^2. \end{aligned}$$

Au lieu du système linéaire (9), on a à étudier le système linéaire de cônes quadriques

$$\lambda_0[\xi_0(2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2) + G(\xi_1, \xi_2)] + 2a'_{12}\xi_1(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = 0.$$

On voit aisément que ces cônes possèdent deux plans tangents fixes : 1° le plan tangent à S en x, la droite de contact étant, pour tous ces cônes, la tangente asymptotique à S *non conservée* dans la correspondance ; 2° le plan α (¹) défini par

$$\xi_1 = 0, \qquad a_{22}\xi_0 + (c'_{222} - c_{222})\xi_2 = 0.$$

Il y a une *infinité* de couples de faisceaux correspondants (relativement à Γ), l'axe du premier faisceau (relatif à S) étant une droite arbitraire passant par x et contenue dans le plan α. En faisant varier u, v on obtient que, *dans le cas d'une demi-déformation projective, il y a une infinité de couples de systèmes axiaux correspondants ;* cette infinité dépend d'*une fonction arbitraire d'un argument* (c'est-à-dire du choix de la droite r dans le faisceau x, α).

Enfin, dans le cas d'une *correspondance asymptotique*, on trouve sans difficulté qu'en général il n'existe aucun couple de systèmes axiaux correspondants ; il n'y a exception que dans le cas d'une déformation projective où *tous* les systèmes axiaux se correspondent sur les deux surfaces.

66. **Les homographies de M. Bompiani.** — Revenons à la correspondance générale entre S et S'. De nouveau supposons que le plan (2') décrive, dans l'étoile au centre y, le faisceau (8). D'après (2')

(¹) On voit sans difficulté que les courbes tracées sur S' dont les correspondantes sur S ont le plan α comme plan osculateur en x, ont une inflexion en y (**Bompiani** [18], [19]).

l'axe de ce faisceau est

$$r' = (y,\ \lambda_2 y_u - \lambda_1 y_v + \lambda_0 Y).$$

Le plan (2) correspondant décrit le cône de la troisième classe (9). Supposons, pour plus de simplicité, que les lignes coordonnées u, v soient des asymptotiques de la surface S (non de S′, comme plus haut) de manière que

$$a_{11} = 0, \qquad a_{22} = 0, \qquad a_{12} \neq 0.$$

L'équation (9) devient

$$\begin{aligned}[2a_{12}\lambda_0\xi_0 &+ (\alpha_1\lambda_0 + 2a'_{12}\lambda_1 + a'_{11}\lambda_2)\xi_1 \\ &+ (\alpha_2\lambda_0 + a'_{22}\lambda_1 + 2a'_{12}\lambda_2)\xi_2]\xi_1\xi_2 + (\ldots)\xi_1^3 + (\ldots)\xi_2^3 = 0,\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2c'_{121} + c'_{112} - 2c_{121} - c_{112},\\ \alpha_2 &= c'_{221} + 2c'_{122} - c_{221} - 2c_{122}.\end{aligned}$$

On en déduit que les trois plans de rebroussement du cône (9) appartiennent au faisceau

$$\begin{aligned}2a_{12}\lambda_0\xi_0 &+ (\alpha_1\lambda_0 + 2a'_{12}\lambda_1 + a'_{11}\lambda_2)\xi_1 \\ &+ (\alpha_2\lambda_0 + a'_{22}\lambda_1 + 2a'_{12}\lambda_2)\xi_2 = 0.\end{aligned}$$

L'axe r de ce faisceau est, d'après (2),

$$\begin{aligned}r = |x,\ &(\alpha_2\lambda_0 + a'_{22}\lambda_1 + 2a'_{12}\lambda_2)x_u \\ &- (\alpha_1\lambda_0 + 2a'_{12}\lambda_1 + a'_{11}\lambda_2)x_v + 2a_{12}\lambda_0 X|.\end{aligned}$$

A chaque droite r' de l'étoile $y(u, v)$, nous venons de faire correspondre une droite r de l'étoile $x(u, v)$. Les coordonnées de r étant linéaires en λ_0, λ_1, λ_2, cette correspondance Γ_0 entre les étoiles y et x est *homographique*. Cependant, l'homographie Γ_0 est dégénérée si

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & a'_{22} & 2a'_{12} \\ \alpha_1 & 2a'_{12} & a'_{11} \\ 2a_{12} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a_{12}(a'_{11}a'_{22} - 4a'^2_{12}) = 0.$$

On voit aisément que cela arrive si les tangentes asymptotiques à S et les tangentes à S dont les correspondantes sur S′ sont asymptotiques forment une quaterne *équianharmonique*. Si par exemple

S est une *sphère*, alors Γ_0 dégénère si l'angle des courbes tracées sur S et correspondantes aux asymptotiques de S′ est égal à 60°.

A la correspondance *inverse* entre S′ et S est aussi associée une homographie Γ'_0. En effectuant d'abord Γ'_0 et ensuite Γ_0, on obtient une correspondance homographique K de l'étoile x en elle-même. Si la correspondance entre S et S′ est *non asymptotique*, K est une *homologie* dont les éléments fixes sont le plan tangent à S et *l'axe a* de la correspondance; l'*invariant* (rapport anharmonique) de cette homologie est égal à

$$\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1},$$

k étant le rapport anharmonique des tangentes asymptotiques à S et des tangentes à S *images* des tangentes asymptotiques à S′. Dans le cas d'une correspondance *demi-asymptotique*, K est *en général* une homologie spéciale, les éléments fixes étant le plan tangent et la tangente *non* asymptotique à S image d'une tangente asymptotique à S′. Enfin, dans le cas d'une *demi-déformation projective* et dans le cas d'une *correspondance asymptotique*, K est une *identité*, les homographies Γ_0 et Γ'_0 étant inverses l'une à l'autre.

67. **Les invariants** r, s. — Considérons toujours une correspondance entre deux surfaces non développables S et S′, rapportées aux systèmes de coordonnées curvilignes u, v *correspondants*. Fixons une valeur (u_0, v_0) de (u, v). Soit H une homographie telle que la transformée S′ de S moyennant H ait pour $(u, v) = (u_0, v_0)$ un contact analytique du premier ordre avec S′ ([1]). On trouve aisément que ([2]), dans les notations du paragraphe 64,

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}x = y, & \mathrm{H}x_u = y_u + \lambda y, \qquad \mathrm{H}x_v = y_v + \mu y, \\ \mathrm{HX} = \alpha_0 y + \alpha_1 y_u + \alpha_2 y_v + \alpha_3 \mathrm{Y} & (\alpha_3 \neq 0); \end{cases}$$

l'homographie H dépend donc de six constantes arbitraires.

Dorénavant, supposons que la correspondance donnée soit *demi-asymptotique;* pour fixer les idées, soient $v =$ const. les asymptotiques qui se correspondent sur les deux surfaces. Nous supposerons

---

([1]) Pour abréger, nous dirons que l'homographie H *réalise un contact analytique* de S et de S′.

([2]) La substitution $(u, v) = (u_0, v_0)$ est sous-entendue.

que ces asymptotiques ne soient pas rectilignes, c'est-à-dire, d'après (1), que $c_{111} \neq 0$, $c'_{111} \neq 0$. Des équations (1) et (11), on déduit [1]

$$c'_{111} \mathrm{H} x_{uu} - c_{111} y_{uu} = (\ldots) y + (\ldots) y_u.$$

Donc (*voir* § 7) l'expression

$$(12) \qquad r = \frac{c'_{111}}{c_{111}}$$

est l'invariant de contact des asymptotiques $v = v_0$ de S′ et de S* (transformée de S moyennant H). On voit que l'invariant r est complètement déterminé par la correspondance donnée, indépendamment du choix des constantes λ, μ, α, α_1, α_2, α_3 dont dépend l'homographie H. L'équation (6) montre que, dans le cas d'une demi-déformation projective, on a $r = 1$; autrement dit, l'homographie H réalise alors un contact (en général géométrique) du *second* ordre des asymptotiques $v =$ const. correspondantes.

Considérons encore le cas d'une correspondance *asymptotique*. Comme au paragraphe 64, supposons que les u, v soient des coordonnées asymptotiques et posons $X = x_{uv}$, $Y = y_{uv}$. Ici encore, on peut considérer l'invariant r; en outre, on a maintenant encore un autre invariant s de signification analogue relatif aux asymptotiques $u =$ const. D'après (7) et (12), on a

$$r = \frac{\beta'}{\beta}, \qquad s = \frac{\gamma'}{\gamma},$$

ce que nous savons déjà du paragraphe 30.

On peut fonder sur les invariants r, s une *classification des correspondances asymptotiques*. En général, r et s sont deux fonctions indépendantes de u, v; c'est le cas d'une correspondance asymptotique de *première espèce*. Dans le cas d'une correspondance de *deuxième espèce*, les invariants r, s ne sont pas tous les deux constants, mais on a entre eux une relation $f(r, s) = 0$. Enfin, une correspondance asymptotique est dite de *troisième espèce* si r et s sont des constantes.

68. **Plans osculateurs stationnaires.** — Soit S une surface non

(1) Il faut remarquer que $a_{11} = a'_{11} = 0$, car les courbes $v =$ const. sont asymptotiques.

développable rapportée à ses asymptotiques. Des équations fondamentales [§ 17 (I)], on déduit aisément que le plan osculateur à une courbe tracée sur S est

$$(13)\qquad (du\,d^2v - dv\,d^2u + \beta\,du^3 - \lambda\,dv^3 - \theta_u\,du^2\,dv + \theta_v\,du\,dv^2)\,\xi + 2\,du\,dv\,(\xi_u\,du - \xi_v\,dv).$$

Ce plan osculateur est *stationnaire* si l'on a, pour la valeur considérée de (u, v), $(x, dx, d^2x, d^3x) = 0$. Or, des équations § 17 $(\mathrm{I})_1$, $(\mathrm{I})_2$ et (16), on déduit par un calcul élémentaire, quoique un peu long, que

$$(14)\qquad (x, dx, d^2x, d^3x) = -F_2[dG + dF'_3 + F_2(\pi_{11}\,du^2 - \pi_{22}\,dv^2)] + \left(\frac{3}{2}\,dF_2 - F_3\right)(G + F'_3),$$

où

$$(15)\qquad \begin{cases} F_2 = 2a_{12}\,du\,dv, \\ F_3 = a_{12}(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3), \\ F'_3 = a_{12}(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3), \\ G = a_{12}(du\,d^2v - dv\,d^2u - \theta_u\,du^2\,dv + \theta_v\,du\,dv^2). \end{cases}$$

Or, considérons une surface S′ en correspondance asymptotique avec S; relativement à S′, écrivons y, a'_{12}, β', γ', θ' au lieu de x, a_{12}, β, γ, θ. Pour plus de simplicité, choisissons les facteurs des coordonnées homogènes de manière que l'on ait identiquement

$$(y, y_u, y_v, y_{uv}) = (x, x_u, x_v, x_{uv}).$$

On en déduit sans difficulté que les expressions F_2 et G relatives à S′ coïncident avec celles relatives à S. Il en résulte que l'expression V où

$$4e^{2\theta}V = (y, dy, d^2y, d^3y) - (x, dx, d^2x, d^3x)$$

ne contient pas les différentielles troisièmes, d'où l'on conclut aisément que l'*équation* $V = 0$ définit *les plans* (13) *osculateurs stationnaires qui restent stationnaires lorsqu'on effectue la correspondance donnée*. D'après (14), on trouve

$$V = [(\beta' - \beta)\,du^3 + (\gamma' - \gamma)\,dv^3](du\,d^2v - dv\,d^2u) + f_6(du, dv),$$

f_6 étant une forme algébrique du sixième degré. D'après (13), les *plans osculateurs stationnaires conservés* sont donc

$$(16)\quad f_6(du, dv)\xi + [(\beta'-\beta)\,du^3 + (\gamma'-\gamma)\,dv^3] \times [(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3)\xi + du^2\,dv(2\xi_u - \theta_u\xi) - du\,dv^2(2\xi_v - \theta_v\xi)].$$

En faisant varier $du:dv$, le plan (16) enveloppe en général un cône de la sixième classe; le plan tangent ξ en est évidemment plan tangent quintuple, les droites de contact étant les tangentes asymptotiques $du = 0$, $dv = 0$ et les trois tangentes définies par

$$(\beta'-\beta)\,du^3 + (\gamma'-\gamma)\,dv^3 = 0.$$

69. **Application à la déformation projective.** — Cependant, la *déformation projective* ($\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$) fournit une exception remarquable. En effet, dans ce cas, l'expression V ne contient plus que les différentielles du *premier* ordre; elle devient simplement

$$V = \frac{1}{4}\,du^2\,dv^2[(L'-L)\,du^2 - (M'-M)\,dv^2],$$

où les quantités L, M relatives à la surface S sont définies par les équations (1) du paragraphe 28 et les quantités L', M' ont une signification analogue relativement à S'. Si l'on a $L' = L$, $M' = M$, l'expression V s'évanouit identiquement et tous les plans osculateurs stationnaires sont conservés; or, c'est le cas banal où la correspondance entre S et S' est homographique. Considérons donc une déformation projective proprement dite; on voit que les plans osculateurs stationnaires conservés sont, outre le plan tangent ξ, les plans passant par une des deux tangentes [1]

$$(17)\qquad (L'-L)\,du^2 - (M'-M)\,dv^2 = 0.$$

Dans le cas d'une déformation R_0, on a $L = L'$ ou bien $M = M'$ de manière que le couple (17) se réduise à une tangente asymptotique et le plan tangent reste l'*unique* plan osculateur stationnaire conservé. C'est donc seulement le cas d'une déformation R qui est intéressant; en choisissant convenablement les paramètres asymptotiques, on a, dans ce cas (*voir* § 29), $\beta_v = \gamma_u$ et le couple (17) devient simplement

$$(17')\qquad du^2 - dv^2 = 0.$$

---

[1] Une signification géométrique un peu différente des deux tangentes (17) a été donnée à la fin du paragraphe 30.

définissant le réseau R appartenant à la déformation. On voit qu'*une courbe plane* C *tracée sur une surface* S *reste plane en effectuant une déformation projective lorsque et seulement lorsque* C *fait partie du réseau* R *appartenant à la déformation.*

Considérons en particulier le cas où *toutes* les courbes d'une des deux familles R définies par (17') sont planes, par exemple les

$$du - dv = 0. \tag{18}$$

Nous savons (*voir* § 41) que les tangentes aux courbes (18) engendrent une congruence W. Donc, pour chaque valeur de (u, v), il existe un complexe linéaire osculateur k à cette congruence. Le complexe k contient, en particulier, trois tangentes infiniment voisines de la courbe (18); or, ce sont trois droites situées toutes dans le plan de la courbe (18), mais ne passant pas par un point fixe; il en résulte que le complexe k est *spécial* et que sa directrice d est située dans le plan de la courbe (18). Or, d'après un théorème de M. Fubini (*voir G. P. D.*, § 43), si tous les complexes linéaires k osculateurs à une congruence W sont spéciaux, alors k est fixe. Donc, la droite d est fixe et les plans de toutes les courbes (18) appartiennent à un *faisceau*. D'après un théorème classique de M. Kœnigs, il en résulte que les courbes $du + dv = 0$ conjuguées aux courbes (18) sont les courbes de contact de S avec des cônes dont les sommets sont situés sur la droite d.

Particulièrement intéressant est le cas où toutes les courbes du réseau R (17') sont planes. On a alors ce que M. Mentré [10] appelle un *réseau double de M. Kœnigs ;* chacune des deux familles est composée des courbes planes, dont les plans forment un faisceau. Les axes d, d' de ces deux faisceaux peuvent être concourants ou non.

Nous avons vu qu'on obtient un réseau double de M. Kœnigs en considérant une déformation projective dans laquelle deux familles ∞^1 de courbes planes restent planes; le réseau double de M. Kœnigs est alors le réseau R appartenant à la déformation. Réciproquement, chaque réseau double de M. Kœnigs est un réseau R, car les tangentes aux courbes de chaque famille rencontrent une droite fixe (d ou d') et forment, par suite, une congruence W. Chaque réseau double de M. Kœnigs admet donc ∞^1 déformations projectives qui le transforment dans un nouveau réseau double de M. Kœnigs. Il se peut, d'ailleurs, que le réseau admet ∞^2 ou ∞^3 déformations projectives. Tous les réseaux doubles de M. Kœnigs, et en particulier tous ceux avec ∞^2 ou ∞^3 déformés projectifs, sont connus.

Sur une *surface de révolution*, les méridiens et les cercles parallèles forment évidemment un réseau double de M. Kœnigs. Donc, *chaque surface de révolution est projectivement déformable.*

Les théorèmes des paragraphes 64 et 65 sont dus à Čech [3], [4]; ils ont été retrouvés par M. Bompiani (*cf* encore Bianchi [2]) qui en a donné des applications à la géométrie métrique et conforme (*voir* Bompiani [18], [19], ainsi que *Math. Zeitschrift*, XXIV, 1925, p. 311-320). Pour le cas particulier de la déformation projective, *voir* aussi Fubini [18], [29]. Les systèmes axiaux ont été considérés pour la première fois par M^lle^ Sperry [1] et ensuite par M. Fubini [8]. Une classe particulière remarquable des systèmes axiaux a été étudiée par M. Bompiani [20]. Pour l'extension des systèmes axiaux aux hyperespaces, *voir* Bompiani, [27], [38], [39] et Bortolotti [1]. Les résultats du paragraphe 66 sont dus à M. Bompiani [18], [19]. Les invariants r, s ont été introduits et soumis à une étude détaillée par Čech [26], [30]. La considération du cône (16) (§ 68) est nouvelle (Čech). Les cas où les deux familles (ou une seule) d'un réseau R sont composées de courbes planes a été étudié par MM. Lembrechts [1] et Mentré [9]. Pour la déformation projective des surfaces de révolution, *voir* un Mémoire de M. Borůvka qui paraîtra au *Bulletin des Sciences mathématiques.*