Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre VII: Le faisceau canonique

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [91]--104.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/402564`

CHAPITRE VII.

LE FAISCEAU CANONIQUE.

31. **Les congruences conjuguées ou harmoniques à une surface donnée.** — Dans la géométrie métrique, les normales à une surface S engendrent une *congruence* (système de ∞^2 droites), dont les développables déterminent sur S un système conjugué (le système des lignes de courbure). Dans ce paragraphe nous nous occupons de la généralisation de cette remarque.

Considérons une congruence H de droites; sur chaque droite de la congruence, choisissons un point A; et soit S la surface engendrée par ces points. Si les droites de H ne sont pas tangentes à S, et si les développables de H déterminent un système conjugué sur S, nous disons *que* H *et* S *sont conjuguées*.

Corrélativement nous pouvons, pour chaque droite r de H, choisir un plan α qui passe par r. Soit S′ l'enveloppe de ces plans α. Si les droites de H ne sont pas tangentes à S′ et si aux développables de H correspond sur S′ un système conjugué, nous dirons *que* H *et* S′ *sont harmoniques*.

En remarquant que ces définitions sont corrélatives on déduit que, en étudiant l'une, on étudie en même temps l'autre.

Soit donnée une surface S : nous voulons déterminer les congruences H conjuguées à S. Une droite de H, sortant d'un point x de S, qui ne soit pas tangent en x à S, sera l'intersection de deux plans $\xi_u - l_1\xi$, $\xi_v - l_2\xi$; elle peut être aussi obtenue en joignant les points x, $x_{uv} - l_1 x_v - l_2 x_u$. Un point

$$x' = x + R(x_{uv} - l_1 x_v - l_2 x_u)$$

de cette droite en est un point *focal*, si l'on peut déterminer $du : dv$

de manière que dx' soit un point de la même droite

$$\lambda x + (\mu + d\mathrm{R})(x_{uv} - l_1 x_v - l_2 x_u)$$
$$(\lambda,\ \mu \text{ arbitraires}).$$

En écrivant ces conditions, et en éliminant λ, μ, on trouve

$$\begin{aligned} du &+ \mathrm{R}[(\beta\gamma + \theta_{uv})\,du + \pi_{22}\,dv - dl_2 - l_2\theta_u\,du - l_1\gamma\,dv] \\ &= -l_2\mathrm{R}(d\theta - l_1\,du - l_2\,dv), \\ dv &+ \mathrm{R}[(\beta\gamma + \theta_{uv})\,dv + \pi_{11}\,du - dl_1 - l_1\theta_v\,dv - l_2\beta\,du] \\ &= -l_1\mathrm{R}(d\theta - l_1\,du - l_2\,dv). \end{aligned}$$

En éliminant R on trouve les équations des développables de H

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &(\pi_{11} - l_{1u} + l_1\theta_u - l_2\beta - l_1^2)\,du^2 \\ &+ (-\pi_{22} + l_{2v} - l_2\theta_v + l_1\gamma + l_2^2)\,dv^2 + (l_{2u} - l_{1v})\,du\,dv = 0, \end{aligned}$$

qui est du premier ordre et du second degré et détermine les *deux* systèmes de développables. En éliminant au contraire $du : dv$, on trouve

$$\text{(2)}\quad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left[2\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + 2\frac{\theta_{uv}}{a_{12}} - \frac{1}{a_{12}}(l_{2u} + l_{1v} + 2l_1 l_2)\right] + \ldots = 0,$$

où

$$\text{(2}_1\text{)}\quad \rho = a_{12}\mathrm{R}$$

est *une quantité intrinsèque* (*indépendante du choix des variables asymptotiques*). Cette équation détermine les *deux* points focaux d'une droite de H. D'après (1), *la congruence est conjuguée à la surface* S *seulement si* $l_{2u} = l_{1v}$, *c'est-à-dire si*

$$\text{(3)}\quad l_1\,du + l_2\,dv$$

est une différentielle exacte. Remarquons que *cette différentielle est intrinsèque, et dépend seulement de la surface* S, *de la congruence* H *et du choix des coordonnées homogènes* x. Si l'on ne change ni S, ni H et si l'on pose $x' = \rho x$, la valeur correspondante de cette différentielle sera

$$\text{(3}_1\text{)}\quad l'_1\,du + l'_2\,dv = l_1\,du + l_2\,dv + d\log\rho.$$

Si la différentielle (3) est exacte, on pourra choisir ρ de manière que cette expression soit nulle. On pourra donc énoncer le théorème :

La méthode la plus générale de construire une congruence conjuguée à une surface donnée S *est celle de considérer les congruences engendrées par les droites* $(x, x_{uv}) = (\xi_u, \xi_v)$, *où les* x *sont les plus générales coordonnées homogènes d'un point de la surface.* Nous parlerons plus loin du rôle que ces congruences jouent dans la théorie des *géodésiques projectives.*

32. La normale projective et la métrique normale. — *Quelle est la plus remarquable des congruences conjuguées à une surface?* Cette question, d'après les résultats du paragraphe 31, est équivalente à l'autre :

Quel est le plus remarquable des systèmes de coordonnées homogènes x *d'un point d'une surface* S ?

Dans le paragraphe 23 nous avons déterminé (pour les surfaces *qui ne sont pas réglées*) un système de coordonnées (les coordonnées *normales*), qui est défini par une méthode intrinsèque et invariante. Si x sont des coordonnées homogènes quelconques, *les coordonnées normales sont données par des formules* $x' = \sigma' x$, *où* σ' *dépend des* x *et de leurs dérivées jusqu'au troisième ordre. Et il n'y a pas d'autres méthodes pour définir un autre système* $x'' = \sigma'' x$ *de coordonnées intrinsèques et invariantes, si le facteur* σ'' *doit dépendre seulement des dérivées des* x *d'ordre non supérieur au troisième.* En effet, le rapport $\sigma'' : \sigma'$ serait un invariant du voisinage (du troisième ordre) d'un point de notre surface. Et nous avons déjà remarqué que tous ces voisinages sont projectivement identiques au voisinage défini par l'équation (18) du paragraphe 24, et par conséquent un tel invariant ne peut pas exister. Les coordonnées *normales* sont par conséquent le plus *simple système* de coordonnées homogènes x, défini par une méthode intrinsèque et invariante.

Si les x sont les coordonnées normales, la droite $(x, x_{uv}) = (\xi_u, \xi_v)$ sera appelée la *normale projective.* De même que la normale métrique, elle engendre une congruence conjuguée à la surface. Et, d'après ce que nous avons dit, on ne peut pas, dans la géométrie projective, définir par une méthode plus simple une droite qui engendre une congruence conjuguée. Elle est par conséquent *la plus simple généralisation de la normale métrique.*

Il y a une autre analogie entre les normales métrique et projective.

Si x, y, z sont des coordonnées rectangulaires et u, v sont des paramètres des lignes de longueur nulle sur une surface S, la *normale métrique est la droite sortant du point* (x, y, z), *dont les cosinus directeurs sont proportionnels à* x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}, *ou*, si l'on veut, à $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$, $\Delta_2 z$, *où le paramètre différentiel* Δ_2 *est calculé par rapport à l'élément linéaire de Gauss.*

De même, si x, y, z, t sont coordonnées normales, la normale projective est la droite *qui joint le point* (x, y, z, t) *au point* $(x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}, t_{uv})$ *si* u, v *sont des coordonnées asymptotiques, ou*, si l'on veut, *au point* $(\Delta_2 x, \Delta_2 y, \Delta_2 z, \Delta_2 t)$, *où le paramètre différentiel* Δ_2 *est calculé par rapport à la forme* φ_2 (§ 23, 26). La dernière définition est valable pour tout choix des coordonnées u, v.

M. Terracini [14] et M. Bompiani [21], [41], [43] ont donné des définitions géométriques de la normale projective. Nous nous bornerons à citer seulement une définition de M. Bompiani [43].

Soient P un point de la surface S, C une courbe de S sortant de P, P_0 un point de C. Les asymptotiques sortant de P, P_0 se rencontrent par exemple en P_1 et P_2. La droite PP_i et la tangente en P_i à l'asymptotique passant par P, P_i déterminent un plan $\pi_i (i = 1, 2)$. Les plans π_1, π_2 ont pour intersection une droite r sortant de P, laquelle (si l'on fait varier le point P_0 sur la courbe C) engendre un cône qui passe par la tangente en P à C. Le plan tangent à ce cône le long de cette tangente passe par la normale projective, n'importe comment on a choisi la courbe C sortant de P.

Soient les x des coordonnées homogènes tout à fait arbitraires. La congruence des droites (x, x_{uv}) sera une des congruences conjuguées à la surface S. L'équation (2), où l'on pose $l_1 = l_2 = 0$, nous donne

$$(21) \qquad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(2\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + 2\frac{\theta_{uv}}{a_{12}}\right) + \ldots = 0.$$

Si ses racines sont ρ_1 et ρ_2, on trouve

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -2\left(\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + \frac{\theta_{uv}}{a_{12}}\right).$$

On peut écrire ce résultat en coordonnées u, v tout à fait générales. Il suffit de remarquer que $(\beta\gamma : a_{12})$ est le rapport de $(\varphi_2 : F_2)$, si φ_2 est la forme quadratique normale, et F_2 est la forme correspondant aux coordonnées x et que $(-\theta_{uv} : a_{12})$ est *la courbure totale* K de la forme F_2. On aura par conséquent

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+2\frac{\varphi_2}{F_2}=2K \qquad (K = \text{courbure de } F_2).$$

Considérons maintenant la géométrie métrique définie dans l'espace par l'élément linéaire

$$(4)\qquad ds^2 = F_2 + dw^2,$$

en considérant u, v, w comme les coordonnées curvilignes du point

$$x(u, v) + \frac{w}{a_{12}} x_{uv},$$

Dans cette métrique la surface $w = 0$ est la surface S, que nous considérons; les lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont les droites (x, x_{uv}); les surfaces $w = \text{const.}$ sont les surfaces parallèles à la S. Dans cette géométrie métrique *les ρ_i sont les distances de x aux points focaux de la droite* (x, x_{uv}), et l'on peut les appeler *les distances focales*. Elles satisfont à l'équation (3). La géométrie métrique définie par l'équation (4) est évidemment *intrinsèque*, mais n'est pas *invariante* (de même que la forme F_2). Mais, si l'on suppose que les x soient les coordonnées normales et par conséquent que $a_{12} = \beta\gamma$, ou, plus généralement, que $\varphi_2 = F_2$, elle devient *intrinsèque et invariante. Une surface non réglée définit la géométrie métrique $ds^2 = \varphi_2 + dw^2$, qui est intrinsèque et invariante* (dans le groupe des transformations homographiques). Dans cette géométrie les $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont *les normales projectives;* on pourra appeler les $\frac{1}{\rho_i}$ *les courbures principales projectives; $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ sera la courbure projective moyenne.*

D'après (4) on a que *la courbure projective moyenne est égale à* $2K - 2$, *si* K *est la courbure totale de la forme* φ_2. C'est le théorème, qui correspond au *theorema egregium* de Gauss pour la géométrie métrique.

Il va sans dire que nous pourrions faire usage de la *géométrie normale* pour transporter à la géométrie projective beaucoup de théorèmes et de problèmes de la géométrie métrique,

Encore une remarque. L'équation (11_2) du paragraphe 20 définit une quadrique de Darboux; elle passe par un point focal

$$x + \frac{\rho_i}{a_{12}} x_{uv},$$

seulement si

$$2 + \frac{[(1-h)\beta\gamma + \theta_{uv}]}{a_{12}} \rho_i = 0.$$

Cette équation pour $i = 1, 2$ nous donne *deux* valeurs h_i de h définies par les

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{K}{2} + \frac{h_i - 1}{2} \frac{\varphi_2}{F_2}$$

et, en coordonnées normales ($\beta\gamma = a_{12}$, $\varphi_2 = F_2$),

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{K}{2} + \frac{h_i - 1}{2} = \frac{K - j_i}{2},$$

où j_i est l'invariant de contact, qui définit la quadrique de Darboux correspondante (§ 20). On en déduit

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2K - 2 = K - \frac{j_1 + j_2}{2}$$

ou

$$\frac{j_1 + j_2}{2} = 2 - K, \qquad \frac{h_1 + h_2}{2} = K - 1.$$

On en déduit que $K - 1$ *est la valeur du paramètre h pour la quadrique de Darboux, par rapport à laquelle les précédents points focaux sont conjugués* (et qui coïncide avec la quadrique de Lie seulement si $K = 1$).

La polaire de la normale projective par rapport à une quadrique de Darboux est une droite du plan tangent, qui sera appelée la *seconde normale projective* (1).

33. **Les directrices.** — Soit S une surface; pour chaque point x de S considérons une droite r sortant de x et la droite polaire r' appartenant au plan tangent ξ. La congruence H engendrée par les r, et la congruence H' engendrée par les r' seront appelées *congruences polaires*.

(1) Par la même méthode on pourrait définir la *seconde normale métrique*. On pourrait démontrer que *les surfaces à courbure totale* (métrique) *constante sont caractérisées par la propriété d'avoir la seconde normale métrique à l'infini.*

Peut-il arriver que les développables de deux congruences polaires se correspondent ? Cela arrivera seulement si l'équation (1) reste équivalente à elle-même, si l'on échange les β, γ, p_{ii} avec les $-\beta$, $-\gamma$, π_{ii}, c'est-à-dire si

$$\pi_{11} - l_2\beta = p_{11} + l_2\beta, \qquad \pi_{22} - l_1\gamma = p_{22} + l_1\gamma,$$

qui (en supposant $\beta\gamma \neq 0$) deviennent

$$l_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma} + \theta_u\right), \qquad l_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta} + \theta_v\right).$$

La droite r définie par ces valeurs des l_i est appelée la *directrice;* et sa polaire r' la *seconde directrice.* Rappelons-nous maintenant que les coordonnées ξ du plan tangent, normalisées selon les définitions de la théorie des surfaces, sont aussi normalisées (§ 17) selon les définitions de la théorie des courbes gauches, quand on les considère comme les coordonnées du plan osculateur d'une asymptotique. Par conséquent le plan polaire du point

$$x' = x_{uu} - \theta_u x_u - \frac{1}{2}(p_{11} + \pi_{11})x$$

par rapport au complexe linéaire osculateur en x à l'asymptotique $v = \text{const.}$ est le plan

$$\xi' = \xi_{uu} - \theta_u \xi_u - \frac{1}{2}(\pi_{11} + p_{11})\xi.$$

Mais, d'après les équations fondamentales, on a

$$x' = \frac{1}{2}(p_{11} - \pi_{11})x + \beta x_v,$$

$$-\xi' = \frac{1}{2}(p_{11} - \pi_{11})\xi + \beta\xi_v.$$

On en déduit que ξ' est aussi le plan polaire de x par rapport au complexe osculateur à l'asymptotique $u = \text{const.}$ De même on démontre que le plan polaire du point

$$x'' = \frac{1}{2}(p_{22} - \pi_{22})x + \gamma x_u$$

par rapport à l'un ou à l'autre des précédents complexes linéaires, est le plan

$$\xi'' = \frac{1}{2}(p_{22} - \pi_{22})\xi + \gamma\xi_u.$$

En remarquant que

$$\pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta\theta_v,$$
$$\pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma\theta_u,$$

on déduit que chacun des *deux* points

$$x_v - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta} + \theta_v\right)x,$$
$$x_u - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma} + \theta_u\right)x,$$

a le même plan polaire par rapport au complexe osculateur en x à l'une ou à l'autre des asymptotiques sortant de x. *La droite joignant ces deux points est la seconde directrice; sa polaire est la première directrice.* Par conséquent *les directrices sont précisément les directrices de la congruence intersection des deux complexes cités.* (Les droites qui rencontrent les deux directrices sont toutes et seules les droites, qui appartiennent en même temps aux deux complexes osculateurs.)

M. Bompiani a trouvé [23] une autre propriété de ces droites. Soit A un point d'une surface S, et soit Q la quadrique de Lie correspondante. L'enveloppe des quadriques de Lie de S est tangente à la quadrique Q, non seulement en A, mais aussi en quatre autres points. Des six droites passant par deux de ces quatre points, quatre sont génératrices de Q, les deux autres s, s' sont polaires l'une de l'autre. On peut définir une directrice comme la droite sortant de A et rencontrant ces deux droites s, s'.

Dans le cas d'une surface réglée ($\beta\gamma = 0$), les considérations précédentes ne sont plus valables. Pour l'étude de ce cas, nous renvoyons à la *G. P. D.*

34. **Les arêtes.** — On a donné beaucoup de définitions de ces droites; nous renvoyons à la *G. P. D.* et nous nous bornons à en donner seulement deux. Si O est un point d'une surface S, il y a trois systèmes de ∞^1 homographies qui conservent le *voisinage de troisième ordre des deux asymptotiques sortant de* O (ou, si l'on veut, *le voisinage de troisième ordre de* O *sur la surface* S, *considérée soit comme lieu de points, soit comme enveloppe de plans*). *Ces homographies transforment en elles-mêmes seulement quatre droites :* les tangentes asymptotiques et *les arêtes.* De cette défini-

tion on pourrait partir pour déterminer (par des calculs très simples) les arêtes. Nous préférons partir d'une autre définition bien moins simple, mais qui a le grand avantage de pouvoir être facilement généralisée.

Considérons une asymptotique $v = v_0 =$ const. sortant d'un point $O(u = u_0, v = v_0)$ de la surface S. Projetons-la d'un point fixe de l'espace

$$\overline{x} = x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v + x_{uv} \qquad (x_i = \text{const.})$$

sur le plan ξ tangent en O à S. Nous obtiendrons une courbe plane, qui aura une conique osculatrice Γ. Par la même méthode, nous obtiendrons une autre conique Γ' osculatrice à la projection de l'autre asymptotique $u = u_0$. En remarquant que, d'après l'équation (12) du paragraphe 13,

$$(x, x_u, x_{uu}, \overline{x}) = \beta(x, x_u, x_v, \overline{x}) = \omega\beta\, e^{\theta}\, S\xi\overline{x},$$

et en se rappelant les résultats du paragraphe 6, on déduit que la polaire du point $A = (x_u + \lambda x)$, où $u = u_0$, $v = v_0$, par rapport à la conique osculatrice Γ, est la droite

$$\beta(x, x_v) + \left[\lambda - \frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta} + \frac{2}{3}\theta_u - \frac{1}{3}\frac{S\xi_u\overline{x}}{S\xi\overline{x}}\right](x, x_u)$$

qui *coïncide avec la tangente* (x, x_v) *à l'autre asymptotique seulement si* A *est le point*

$$A = 3x_u + \left(\frac{\beta_u}{\beta} - 2\theta_u - x_2\right)x.$$

Par la même méthode, on démontre que la polaire du point

$$B = 3x_v + \left(\frac{\gamma_v}{\gamma} - 2\theta_v - x_1\right)x,$$

par rapport à Γ', est l'autre tangente asymptotique (x, x_u). Considérons sur le plan tangent ξ les trois droites : α. la droite AB; β. la droite $(x_u + x_2 x, x_v + x_1 x)$ polaire de la droite $(x, \overline{x})$ dans la polarité fondamentale; et soit C l'intersection de ces deux droites; γ. la droite joignant les points x et C Dans le faisceau de ces trois droites il y a une droite indépendante du point $\overline{x}$. C'est la droite joignant les points

$$4x_u + \left(\frac{\beta_u}{\beta} - 2\theta_u\right)x,$$
$$4x_v + \left(\frac{\gamma_v}{\gamma} - 2\theta_v\right)x,$$

que nous appellerons la seconde arête (*). La droite polaire sera la première arête.

35. **L'axe et le faisceau canonique.** — Nous démontrerons plus loin (§ 40) que les trois plans osculateurs en x aux trois courbes de Segre ($\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3 = 0$) sortant de x passent par une même droite, que nous appellerons le (*premier*) *axe*, en appelant *second axe* sa polaire dans la polarité fondamentale; ce second axe est la droite joignant les points

$$x_u + \left[-\frac{1}{2}\theta_u + \frac{1}{6}\frac{\partial \log(\beta : \gamma)}{\partial u}\right]x$$
$$x_v + \left[-\frac{1}{2}\theta_v + \frac{1}{6}\frac{\partial \log(\gamma : \beta)}{\partial v}\right]x.$$

En résumant, nous pouvons considérer les droites ($\xi_u - l_1\xi, \xi_v - l_2\xi$), identiques aux droites joignant x à $x_{uv} - l_1 x_v - l_2 x_u$, où

$$-l_1 = +\lambda\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - \theta_u\right),$$
$$-l_2 = \lambda\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} - \theta_v\right)$$

(et nous pouvons aussi considérer leurs droites polaires, qui appartiennent au plan tangent ξ).

Pour $\lambda = 0$, on a la *normale projective;*

Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, on a la *directrice;*

Pour $\lambda = -\frac{1}{3}$, on a l'*axe;*

Pour $\lambda = -\frac{1}{4}$, on à l'*arête.*

(*) Tout récemment M. Strazzeri en a donné une autre définition. *Elle est la droite d'inflexion de la cubique rationnelle qui a en* O *un point double et y a un contact de troisième ordre avec chacune des branches de l'intersection de la surface et de son plan tangent en* O.

Nous renvoyons à la *G. P. D.* pour l'étude détaillée de ce faisceau de droites, et pour la définition géométrique d'autres droites appartenant à ce faisceau. Nous l'appellerons *le faisceau canonique;* nous appellerons *droite canonique* toute droite du faisceau précédent, qui soit définie par une valeur *numérique* de λ. La droite définie par $\lambda = \infty$ est la *tangente canonique* (en x) à la surface. Remarquons que si les coordonnées sont normales, alors $\theta = \log\beta\gamma$, et les formules précédentes deviennent simplement

$$-l_1 = \lambda \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}, \qquad -l_2 = \lambda \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}.$$

De ce qui précède on déduit facilement que la *congruence engendrée par la normale projective est conjuguée à la surface; si cela arrive pour la congruence engendrée par une autre droite canonique, alors la congruence engendrée par une droite canonique quelconque est aussi conjuguée à la surface.* La condition nécessaire et suffisante pour que cela arrive est que

$$\frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{u\, \partial v} = 0.$$

Dans ce cas on peut, en changeant les paramètres des asymptotiques, rendre $\beta = \gamma$ (§ 17) et la *surface est isothermo-asymptotique* (ou surface F).

Particulièrement intéressant est le cas où $\beta = \gamma = 1$. Dans ce cas toutes les droites *canoniques* sortant d'un point x de la surface coïncident. On démontre (§ 36) que les *surfaces correspondantes* (surfaces de *coïncidence*) *sont les surfaces applicables projectivement sur la surface* $xyz = 1$.

Du faisceau *canonique* nous avons déjà parlé à la fin du paragraphe 24.

Si l'on définit le voisinage d'un point d'une surface par le développement du paragraphe 24,

$$\begin{aligned} z = {} & xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) \\ & + \frac{1}{13}(Px^4 + 4Qx^3y + 6Rx^2y^2 + 4Sxy^3 + Ty^4) + (5), \end{aligned}$$

une droite canonique est définie par les équations

$$\frac{x}{2\lambda(T+2Q)+(Q+T)} = \frac{y}{2\lambda(P+2S)+P+S} = \frac{z}{2},$$

qui sont évidemment invariantes pour les changements des coordonnées étudiés dans le paragraphe 24.

Une application aux surfaces R_0. — La seconde droite canonique correspondant à une certaine valeur de λ rencontre la tangente asymptotique (x, x_u) dans le point

$$x_u + \left[\lambda \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - \theta_u\right)\right] x.$$

La droite analogue correspondant à une valeur double du paramètre rencontre l'autre tangente asymptotique (x, x_v) dans le point

$$x_v + \left[2\lambda \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} - \theta_v\right)\right] x.$$

La droite joignant ces deux points engendre une congruence $H(\lambda, 2\lambda)$ qui sera harmonique à la surface seulement si

$$\left[\lambda \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - \theta_u\right)\right] du + \\ + \left[2\lambda \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} + \theta_v\right)\right] dv$$

est une différentielle exacte. En remarquant que $\lambda =$ const., on trouve que cette condition est équivalente à la

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Si cette équation est satisfaite, on peut changer les paramètres des asymptotiques de manière que $\beta = 1$. Alors (§ 29) la surface est *une surface* R_0, et est projectivement déformable.

La congruence $H(\lambda, 2\lambda)$ *est conjuguée à la surface, seulement si celle-ci est une surface* R_0 (et par conséquent projectivement déformable).

36. Un exemple. La surface $xyz = 1$. — Étudions les surfaces, pour lesquelles $\beta = \gamma = 1$; en changeant les coordonnées homogènes x, nous pourrons rendre $\theta =$ const. Et les équations fondamentales se réduiront aux suivantes :

$$x_{uu} = x_v + p_{11} x, \qquad x_{vv} = x_u + p_{22} x.$$

Les conditions d'intégrabilité seront satisfaites, si l'on suppose

$p_{11} = p_{22} = 0$. Et, si $p_{ii} = 0$, nous aurons, en intégrant les précédentes équations, que la surface correspondante peut être définie par les équations

$$x = e^{u+v}, \qquad y = e^{\varepsilon u + \varepsilon^2 v}, \qquad z = e^{\varepsilon v + \varepsilon^2 u} \qquad t = 1 \qquad (\varepsilon = \sqrt[3]{1})$$

ou par la

$$xyz = 1.$$

Cette surface est une surface cubique avec trois points doubles ($y = z = t = 0$, $x = y = t = 0$, $x = z = t = 0$) biplanaires.

Toutes les surfaces de coïncidence (§ 35) *sont par conséquent projectivement applicables sur cette surface.* Les lignes de Darboux ($du^3 + dv^3 = 0$) sont les lignes $u + \varepsilon^i v = \text{const.}$ ($i = 0, 1, 2$), c'est-à-dire sont *l'intersection de la surface avec un plan coordonné* $x = \text{const.}$, ou $y = \text{const.}$, ou $z = \text{const.}$, *et sont des coniques*. Les lignes de Segre sont définies par une équation $u = \varepsilon^i v + \text{const.}$ Elles sont par conséquent l'intersection de la surface avec un plan ($x : z = \text{const.}$, ou $y : z = \text{const.}$, ou $x : z = \text{const.}$) passant par une arête du trièdre xyz. Les droites canoniques passent toutes par le point $x_{uv} - x$, c'est-à-dire par l'origine. Si l'on néglige des facteurs numériques, les

$$x, \quad y, \quad z, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{z}$$

sont les coordonnées des tangentes de Darboux et de Segre. On en déduit facilement que ces coordonnées satisfont à une équation $\varphi_{uv} = \varphi$. Nous démontrerons plus loin que cette équation a une simple interprétation géométrique. *Les tangentes à un système de lignes de Darboux ou de Segre engendrent une congruence* W.

On fera un exercice utile en étudiant la seconde nappe focale d'une de ces congruences.

Pour les congruences conjuguées et harmoniques à une surface, *voir* Green [11], Fubini [8], Čech [10], [14], Godeaux [6].

La normale projective a été définie par MM. Fubini [8] et Green [11]; la définition du texte est celle de M. Fubini. Le théorème que la congruence des normales projectives est la plus simple congruence conjuguée à la surface a été démontré pour la première fois par M. Sannia [3] et plus simplement par M. Čech [14]. Le théorème du paragraphe 32 sur la courbure projective moyenne est dû à M. Fubini [8], son interprétation à l'aide des quadriques de

Darboux à M. Čech [25]. Les directrices ont été introduites par M. Wilczynski [15]; *voir* aussi Green [11], Godeaux [10]. Les arêtes ont été définies par Green [11[; la définition exposée au texte (Čech) est une simple généralisation de celle de Green; *voir* aussi B. Segre [2] et Čech [28]. Les axes ont été définies par M. Čech [3]; *voir* aussi Čech [14]. D'autres droites canoniques particulières ont été considérées par MM. Bompiani [21], Fubini [23] et Lane [8], [11]. Pour le faisceau canonique, *voir* encore Bompiani [41], Sannia [7], [8] et Fubini [44], [45].

Rappelons aussi les recherches relatives aux surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe. Le cas des directrices a été étudié par MM. Tzitzéica [4], [6], [8], [9], Wilczynski [25] et Jonas [5]; le cas des normales projectives par MM. Cartan [7] et Čech (*G. P. D.*, p. 160); le cas général par Kaucký [2], [3]. On a aussi considéré des surfaces pour lesquelles une droite canonique jouit d'une autre propriété spéciale; *voir* Bompiani [20], Čech (*G. P. D.*, p. 149-151), Cartan [7], Fubini [37].

Les surfaces F (isothermo-asymptotiques) ont été étudiées par M. Fubini [4], [11], [21], M^lle^ Ragazzi [1], MM. Cartan [4], Bompiani [24], Thomsen [4], Terracini [20], Čech [29]; *voir G. P. D.*, § 17 C, 25 B, 51. Les surfaces de coïncidence ont été étudiées par MM. Fubini [23] et Bompiani [23]; *voir G. P. D.*, § 27.

La propriété caractéristique des surfaces R_0 exposée au paragraphe 35 est due essentiellement à M. Kanitani [2].

Pour l'étude de beaucoup de droites canoniques, dont nous n'avons pas parlé dans ce livre, et pour quelques classes de surfaces qui se présentent dans cette théorie, le lecteur pourra consulter aussi la *G. P. D.* (Chap. III).