Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

---

Chapitre IV: Les asymptotiques d'une surface, la forme f_2 et les équations différentielles d'une surface

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [34]--50.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402561

CHAPITRE IV.

LES ASYMPTOTIQUES D'UNE SURFACE, LA FORME F_2 ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UNE SURFACE.

12. Les tangentes asymptotiques. — Si deux surfaces S, S′ passent par un point O, où elles ont le même plan tangent, leur intersection a en général en O un point double avec deux tangentes r, s, qui peuvent être réelles ou imaginaires, *ou coïncidantes*. Si S′ est le plan tangent en O à S, les r, s sont appelées les tangentes *asymptotiques* à S en O. Pour les étudier, nous nous servirons de coordonnées x, y, z non homogènes ($t = 1$), et supposerons de les avoir choisies de manière que O soit le point $x = y = z = 0$, et que le plan tangent en O soit le plan $z = 0$. Dans le voisinage de O nous supposerons que la surface soit définie par une équation

$$z = \varphi(x, y), \tag{1}$$

où la φ possède finies et continues toutes les dérivées, dont nous ferons usage. De nos hypothèses on déduit qu'en O

$$\varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0 \qquad (x = y = 0).$$

Et alors dans le voisinage de O, nous aurons

$$z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + (3), \tag{1_1}$$

où a, b, c sont des constantes, et avec (n) nous indiquons une quantité au moins de l'ordre n en x, y. Les tangentes asymptotiques seront définies évidemment par les équations

$$z = 0, \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0. \tag{2}$$

D'après notre définition, il est bien évident que ces droites sont des éléments projectifs pour une surface S; c'est-à-dire que, si une transformation homographique porte la surface S dans la surface Σ, et le point O dans le point Ω, elle porte aussi les tangentes asymptotiques à S en O dans les tangentes asymptotiques à Σ en Ω.

Des équations précédentes on peut déduire un autre résultat. Si $x = \alpha u$, $y = \beta u$, $z = 0$ (où α, β sont des constantes, et u est un paramètre) sont les équations paramétriques d'une tangente à S en O, l'équation (1_1) démontre que le point O est une intersection en général *double* de la surface S et de cette droite. Mais, si

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire s'il s'agit d'une tangente asymptotique, l'intersection est au moins *triple*; en effet, en développant l'équation $\varphi(x, y) = 0$, où l'on a posé $x = \alpha u$, $y = \beta u$, on trouve

$$\frac{1}{2}(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2)u^2 + \ldots = 0,$$

où les termes négligés sont au moins de l'ordre 3.

Les tangentes asymptotiques en O *à* S *sont les droites telles que leur intersection en* O *avec la surface* S *est au moins triple* (d'ordre 3).

Les tangentes asymptotiques *coïncident* seulement si $ac - b^2 = 0$ (ou sont *indéterminées* si $a = b = c = 0$). Si la surface est réelle, alors elles sont *réelles* si $ac - b^2 < 0$, sont *imaginaires* si $ac - b^2 > 0$. Un point O, où $ac - b^2 = 0$, est appelé un point *parabolique*. Nous considérons les points paraboliques comme singuliers et les excluons de notre étude. Nous démontrerons d'ailleurs plus loin que : *Si tous les points d'une surface* S *sont paraboliques, alors la surface* S *ou est un plan, ou est développable* (c'est-à-dire est l'enveloppe de ∞^1 plans). Et l'étude des surfaces développables est tout à fait élémentaire; elle se réduit à l'étude de la courbe gauche, qui a ces plans comme plans osculateurs.

13. Considérations corrélatives. Les tangentes conjuguées. — L'équation du plan tangent à S en A, si les coordonnées de A sont x, y, $z = \varphi(x, y)$, est

$$Z - z = (X - x)\,\varphi_x(x, y) + (Y - y)\,\varphi_y(x, y);$$

en la développant, on trouve

$$-[ax+by+(2)]X-[bx+cy+(2)]Y+Z$$
$$+\frac{1}{2}[ax^2+2bxy+cy^2+(3)]=0.$$

Nous pourrons choisir par conséquent comme coordonnées non homogènes de ce plan les suivantes :

$$\xi=-ax-by+(2),\qquad \eta=-bx-cy+(2),$$
$$\tau=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+(3),\qquad \zeta=1.$$

Et, si $ac-b^2\neq 0$, nous déduirons que

$$(1_2)\qquad \tau=\frac{1}{2(ac-b^2)}(c\xi^2-2b\xi\eta+a\eta^2)+(3);$$

qui est l'équation corrélative de l'équation (1_1) (¹).

Par des considérations corrélatives aux précédentes, nous sommes conduit aux droites définies par les équations

$$(2_2)\qquad \tau=0,\qquad c\xi^2-2b\xi\eta+a\eta^2=0.$$

Mais il est facile de démontrer que ces droites coïncident avec celles qui sont définies par les équations (2). En effet un plan, dont l'équation est $Z+\xi X+\eta Y=0$, et la coordonnée τ est par conséquent nulle, passe par le point x, y, o du plan tangent seulement si $\xi:\eta=y:-x$; si ce point x, y du plan tangent $z=0$ satisfait à la seconde des équations (2), les ξ, η satisferont précisément à la seconde des équations (2_1). En considérant les ξ, η, τ comme des coordonnées non homogènes d'un point de l'espace, nous en déduisons : *Si une corrélation porte une surface* S *dans la surface* Σ, *et le point* O *de* S *dans le plan tangent en* Ω *à* Σ, *alors elle porte les tangentes asymptotiques à* S *en* O *dans les tangentes asymptotiques à* Σ *en* Ω.

Si $a=c=0$, *la tangente asymptotique* $z=x=0$ *coïncide avec la droite* $\tau=\eta=0$ *et la* $z=y=0$ *avec la* $\tau=\xi=0$.

L'intersection s du précédent plan tangent en A avec le plan $z=0$

(¹) Ici avec (n) nous indiquons une expression en ξ, η au moins de l'ordre n.

tangent en O est la droite

$$Z = 0, \qquad (ax + by)X + (bx + cy)Y + (2) = 0,$$

où, comme d'ordinaire, (2) est une expression au moins du deuxième ordre en x, y. Supposons que le point A se déplace sur une courbe C sortant de O, et appartenant à la surface S. La tangente r à C en O soit la droite $Z = 0$, $X : Y = m : n$ (m, n = const.). Pour $A = O$ la position limite de la droite s sera la droite ρ définie par les équations

$$Z = 0, \qquad (am + bn)X + (bm + cn)Y = 0;$$

c'est-à-dire la droite ρ sera définie par les équations

$$Z = 0, \qquad X : Y = m' : n',$$

où le rapport m', n' est donné par l'équation

$$(3) \qquad amm' + b(mn' + m'n) + cnn' = 0.$$

La tangente ρ est appelée la *tangente conjuguée* à la tangente r; en remarquant que l'équation (3) est symétrique en $m : n$ et en $m' : n'$, on trouve que : *Si la tangente ρ est conjuguée à r, la tangente r est à son tour conjuguée à ρ.*

Une tangente $X : Y = m : n$ est conjuguée à elle-même (coïncide avec la conjuguée $X : Y = m' : n'$), *seulement si*

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = 0,$$

c'est-à-dire *si elle est une tangente asymptotique.*

On peut donner une simple interprétation géométrique de l'équation (3) : *deux tangentes conjuguées sont deux tangentes qui séparent harmoniquement les asymptotiques.* Pour le démontrer de la manière la plus simple, il suffit de choisir le tétraèdre de référence de manière que la droite $z = x = 0$ et la droite $z = y = 0$ soient les tangentes asymptotiques. On aura alors $a = c = 0$; les (1_1) et (1_2) se réduiront à

$$(1_3) \qquad z = bxy + (3), \qquad \zeta = \frac{1}{b}\xi\eta + (3).$$

L'équation (3) se réduit à $m : n + m' : n' = 0$; ce qui démontre que deux tangentes conjuguées séparent harmoniquement les tangentes asymptotiques $x = 0$ et $y = 0$.

14. Coordonnées curvilignes sur une surface. — Nous savons que l'on peut définir une surface en donnant une équation entre les coordonnées d'un quelconque de ses points [par exemple l'équation (1) du paragraphe 12]. Cette équation doit être homogène si les coordonnées, dont on fait usage, sont homogènes. Mais on peut aussi la définir, en donnant ces coordonnées comme fonctions de deux paramètres indépendants $u_1 = u$ et $u_2 = v$, que nous appellerons les *coordonnées curvilignes* des points de la surface. Si par exemple $t = 1$, $x = u = u_1$, $y = v = u_2$, il suffira de donner z comme fonction de $u = x$ et de $v = y$, et l'on est reconduit à l'équation (1). En général on appellera lignes *coordonnées* sur la surface les deux familles de courbes, lieux des points pour lesquels l'une ou l'autre des u_i a une valeur constante. Si l'on change les u_i, en remplaçant u par une fonction quelconque $U(u)$ de la seule u, et v par une fonction quelconque $V(v)$ de la seule v, *les lignes coordonnées ne seront pas changées;* nous dirons que *nous avons changé les paramètres des lignes coordonnées.*

Pour que les équations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$
$$t = 1$$

définissent une surface, il faut et suffit que les paramètres u, v soient deux paramètres essentiels, c'est-à-dire que la matrice

$$(x_u, x_v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nulle. En coordonnées homogènes, une surface sera définie par des équations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \qquad t = t(u, v);$$

et la surface ne sera pas changée, si l'on multiplie les $x, y, \ldots$ par un même facteur $\rho(u, v) \neq 0$. La condition précédente devient

$$(4) \qquad (x, x_u, x_v) = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_u & y_u & z_u & t_u \\ x_v & y_v & z_v & t_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

En effet, en multipliant les x, y, z, t par $\rho \neq 0$, les mineurs de cette matrice restent multipliés par ρ^3. La matrice reste différente de zéro si elle était différente de zéro et réciproquement. En posant $\rho = t^{-1}$, on vérifie que l'inégalité (4) est équivalente à la précécente.

Il va sans dire que nous supposons que les x, y, z, t possèdent finies et continues toutes les dérivées, dont nous ferons usage, et que nous regardons comme singuliers et excluons de notre étude les points, où $(x, x_u, x_v) = 0$.

Les coordonnées ξ, η, ζ, τ du plan ξ tangent à S en x sont définies par les

$$(5) \qquad S\xi x = S\xi x_u = S\xi x_v = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\xi x = S\xi\, dx = 0.$$

En différentiant la première, on en déduit

$$(5_1) \qquad S\xi x = Sx\xi_u = Sx\xi_v = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\xi x = Sx\, d\xi = 0.$$

De ces équations on déduit aussi

$$(6) \qquad \xi = \rho(x, x_u, x_v), \qquad x = \sigma(\xi, \xi_u, \xi_v),$$

où $\rho \neq 0$ est arbitraire, et où σ est un facteur, qui dépendra du choix, que nous avons fait pour le facteur ρ. Si nous changeons le facteur ρ, et posons

$$\xi' = \rho'(x, x_u, x_v) = \frac{\rho'}{\rho}\xi,$$

nous aurons

$$(\xi', \xi'_u, \xi'_v) = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3 (\xi, \xi_u, \xi_v),$$

$$x = \sigma'(\xi', \xi'_u, \xi'_v) = \sigma'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3 (\xi, \xi_u, \xi_v).$$

En comparant avec la deuxième des équations (6) nous trouvons

$$\sigma'\rho'^3 = \sigma\rho^3.$$

Si nous posons $\rho' = \sqrt[4]{|\sigma\rho^3|}$, nous en déduisons $\sigma' = \pm\rho'$. Remarquons que *la valeur absolue de ρ' reste complètement déterminée*, pendant que *son signe reste arbitraire*. En écrivant ξ et ρ au lieu de ξ', ρ', nous aurons

$$(6_1) \qquad \xi = \rho(x, x_u, x_v), \qquad x = \varepsilon\rho(\xi, \xi_u, \xi_v) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

(Plus loin nous déterminerons la valeur de ρ, ε.)

Si nous substituons aux u, v deux nouvelles coordonnées curvilignes u', v', on trouve

$$\begin{aligned}(x, x_{u'}, x_{v'}) &= r(x, x_u, x_v)\\ (\xi, \xi_{u'}, \xi_{v'}) &= r(\xi, \xi_u, \xi_v)\end{aligned} \qquad \left[r = \frac{d(u, v)}{d(u', v')}\right];$$

d'où

$$\xi = \rho'(x, x_{u'}, x_{v'}), \qquad x = \varepsilon\rho'(\xi, \xi_{u'}, \xi_{v'}) \qquad (\rho' = \rho r^{-1}).$$

Ces équations sont tout à fait analogues aux équations (6_1). Nous en déduisons que la méthode, par laquelle nous avons défini les ξ, ne dépend pas du choix des coordonnées curvilignes u, v. Nous dirons que les ξ sont les coordonnées du plan tangent *correspondant* aux coordonnées x de point; elles sont déterminées à moins du signe. Si *l'on multiplie les x par un même facteur, les correspondantes ξ restent aussi multipliées par le même facteur*. La méthode (Čech [10]) par laquelle nous avons défini les ξ, est analogue à celle dont nous avons fait usage pour les courbes.

15. Les asymptotiques en coordonnées curvilignes quelconques. — Pour définir une ligne de la surface, il suffit de donner les coordonnées curvilignes u, v de ses points comme fonctions d'un paramètre t. Nous considérons deux courbes C, C_1 de la surface

$$u = u(t), \qquad v = v(t), \qquad u = u_1(t), \qquad v = v_1(t),$$

sortant d'un même point $O(u = u_0,\ v = v_0)$. Nous indiquerons par du, dx, ... les différentielles prises le long de C, et par δu, δx, ... les différentielles prises le long de C_1. Les tangentes en O à ces deux courbes seront conjuguées seulement si le plan $\xi + d\xi$ passe par le point $x + \delta x$ $[x = x(u_0, v_0) \ldots]$, c'est-à-dire si

$$(7) \qquad S\, dx\, \delta\xi = 0,$$

qui est équivalente à la

$$(7_1) \qquad S\, d\xi\, \delta x = 0.$$

La tangente à C sera asymptotique, seulement si elle est conjuguée à elle-même, c'est-à-dire si

$$(7_2) \qquad S\, d\xi\, dx = 0.$$

Des équations (5) et (5_1) on déduit, en différentiant et en posant

$$F_2 = S\xi\, d^2x = a_{11}\, du^2 + 2a_{12}\, du\, dv + a_{22}\, dv^2$$
$$(\text{avec } a_{12} = a_{21},\ u = u_1,\ v = u_2)$$

que

(8) $$F_2 = S\xi\, d^2x = -S\, d\xi\, dx = S x\, d^2\xi = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s,$$

(8_1) $$a_{11} = S\xi x_{uu} = -S\xi_u x_u = S x\xi_{uu},$$

(8_2) $$a_{12} = a_{21} = S\xi x_{uv} = -S\xi_u x_v = -S\xi_v x_u = S x\xi_{uv},$$

(8_3) $$a_{22} = S\xi x_{vv} = -S\xi_v x_v = S x\xi_{vv}.$$

L'équation (7_2) *des directions asymptotiques est par conséquent* $F_2 = 0$. Nous dirons qu'une ligne C de la surface S est *asymptotique*, si chacune de ses tangentes est une tangente asymptotique à S. *La* $F_2 = 0$ *sera l'équation différentielle des lignes asymptotiques.* Dans un point O (non parabolique) $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$; de chaque point O (non parabolique) sortent par conséquent deux asymptotiques. Des équations (6_1) et (8) on déduit

(8_4) $$F_2 = \rho(x,\ x_u,\ x_v,\ d^2x) = \varepsilon\rho(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v,\ d^2\xi).$$

D'après la règle de multiplication des déterminants, on déduit, en se rappelant les équations (5) et (8), que

$$F_2^2 = \varepsilon\rho^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & -a_{11} & -a_{12} & L \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} & M \\ F_2 & P & Q & N \end{vmatrix},$$

où les valeurs de L, M, N, P, Q ne nous intéressent pas. On aura, par conséquent,

$$F_2^2 = -\varepsilon\rho^2 A F_2^2 \qquad (A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2),$$

d'où l'on déduit (au moins pour les surfaces *réelles*)

(9) $$\varepsilon = -\operatorname{sgn} A, \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{|A|}}, \qquad A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

On peut transformer ces équations. Si nous posons

(10) $$(x,\ x_u,\ x_v,\ d^2x) = b_{11}\, du^2 + 2b_{12}\, du\, dv + b_{22}\, dv^2,$$

nous avons

$$a_{rs} = \rho\, b_{rs}, \qquad A = \rho^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2),$$

d'où l'on déduit

$$(10_1)\qquad \rho=\frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}b_{22}-b_{12}^2|}},\qquad \varepsilon=-\operatorname{sgn}(b_{11}b_{22}-b_{12}^2).$$

Ces équations permettent de calculer ρ, ε, *si l'on connaît les équations paramétriques* $x=x(u,v)$ *de la surface.* Remarquons encore :

Si l'on multiplie les x *par un même facteur* $\sigma(u,v)\neq 0$, *la forme* F_2 *reste multipliée par* σ^2; *la* F_2 *est une forme presque intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle peut changer seulement de signe, quand on change les coordonnées curvilignes* u, v. La seconde des équations (10_1) nous dit que $\varepsilon=-1$, *si les asymptotiques sont imaginaires et que* $\varepsilon=1$ *si les asymptotiques sont réelles.* Nous renvoyons à la *G. P. D.* (§ 13 A) pour l'interprétation géométrique de ce résultat.

L'équation $S\xi\, d^2x=0$ des asymptotiques nous dit (si nous nous rappelons les identités $S\xi x=S\xi\, dx=0$) que les points x, $x+dx$, $x+dx+\frac{1}{2}d^2x$ d'une même asymptotique appartiennent au plan ξ tangent à S en x. *Chacune des asymptotiques sortant d'un point* x *de* S *a par conséquent comme plan osculateur en* x *le plan tangent à* S *en* x.

On pourrait évidemment partir de cette propriété *projective*, pour définir les asymptotiques. On pourrait en déduire une simple démonstration géométrique que, si une transformation homographique ou une corrélation porte une surface S dans une surface S', elle porte aussi les asymptotiques de S dans les asymptotiques de S'. On peut aussi le vérifier par le calcul. Si l'on multiplie les x, y, z, t par un même facteur $\sigma(u,v)\neq 0$, ou si l'on soumet les x, y, z, t à une transformation linéaire homogène à coefficients constants et à déterminant différent de zéro, le déterminant (x, x_u, x_v, d^2x) reste multiplié par un facteur différent de zéro, et l'équation $(x, x_u, x_v, d^2x)=0$ reste équivalente à elle-même. Pour étudier les corrélations il suffit de remarquer qu'en échangeant les x avec les ξ, l'équation

$$S\xi\, d^2x=S x\, d^2\xi=0$$

des asymptotiques reste inaltérée.

Remarquons encore qu'en posant $t = 1$, $u = x$, $v = y$

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + (3),$$

l'équation $(x, x_u, x_v, d^2x) = 0$ des tangentes asymptotiques se réduit (dans le point $x = y = 0$) précisément à la

$$a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2 = 0,$$

qui est équivalente à l'équation (2), qui a été notre point de départ.

16. **Les coordonnées curvilignes asymptotiques.** — Nous voulons d'abord compléter l'étude des cas, que nous avons exclus jusque maintenant, c'est-à-dire l'étude des surfaces, pour lesquelles l'équation des asymptotiques est une identité, ou a une seule racine $du : dv$ double.

Supposons que l'équation $F_2 = 0$ possède une seule racine $dv : du = \varphi(u, v)$ double. De chaque point de la surface sort une seule asymptotique [définie par l'équation différentielle $dv : du = \varphi(u, v)$]. Nous pourrons changer les coordonnées curvilignes de manière que ces asymptotiques soient définies par une équation $v = 0$; l'équation $F_2 = 0$ aura la seule racine $dv = 0$ double et par conséquent

$$a_{11} = S\xi x_{uu} = -S\xi_u x_u = 0,$$
$$a_{12} = S\xi x_{uv} = -S\xi_u x_v = 0.$$

Mais on a aussi $S\xi_u x = 0$. En comparant les équations

$$S\xi_u x_u = S\xi_u x_v = S\xi_u x = 0$$

avec les

$$S\xi x_u = S\xi x_v = S\xi x = 0,$$

on trouve, d'après (4), que les ξ_u sont proportionnelles aux ξ. On pourra alors trouver un facteur $\lambda(u, v) \neq 0$ de manière que les dérivées des $\xi' = \lambda\xi$ par rapport à la u soient nulles. Les ξ', que nous pouvons considérer comme coordonnées du plan tangent, seront par conséquent des fonctions du seul paramètre v. *La surface est donc l'enveloppe* (seulement) *de* ∞^1 *plans* (et non de ∞^2 plans, comme dans le cas général) et sera *développable*. Réciproquement *les points d'une surface développable* S *sont tous paraboliques*.

En effet, les coordonnées ξ, η, ... de ces plans seront des fonctions d'un seul paramètre v. Si l'on choisit ce paramètre comme seconde coordonnée curviligne sur la surface, on trouve que

$$a_{11} = -\mathrm{S}\,\xi_u x_u = 0, \qquad a_{12} = -\mathrm{S}\,\xi_u x_v = 0,$$

et la $\mathrm{F}_2 = 0$ se réduit à la $dv^2 = 0$.

Si l'équation des asymptotiques est une identité, on démontre de la même manière que $\xi_u = \xi_v = 0$ et que les ξ sont par conséquent des constantes. *Une surface à lignes asymptotiques indéterminées se réduit à un plan* (au plan ξ).

Dorénavant nous étudions seulement le cas général, en excluant les plans et les surfaces développables. L'équation $\mathrm{F}_2 = 0$ aura deux racines

$$du : dv = \varphi(u, v), \qquad du : dv = \psi(u, v),$$
$$\varphi(u, v) \neq \psi(u, v).$$

Considérons les asymptotiques qui satisfont à la $du : dv = \varphi$, et les asymptotiques satisfaisant à la $du : dv = \psi$. Nous pourrons choisir des nouvelles coordonnées curvilignes de manière que ces deux systèmes d'asymptotiques soient définis l'un par les équations $u =$ const., l'autre par les équations $v =$ const. Les lignes asymptotiques seront alors les lignes coordonnées. Les paramètres $u = u_1$ et $v = u_2$ ne seront pas complètement définis; en effet (§ 14) on pourra substituer à u une fonction $\mathrm{U}(u)$ de u, et à v une fonction $\mathrm{V}(v)$ de v. L'équation $\mathrm{F}_2 = 0$ devra être satisfaite par $du = 0$ et par $dv = 0$; on aura par conséquent

$$(11) \qquad a_{11} = \mathrm{S}\,\xi x_{uu} = -\mathrm{S}\,\xi_u x_u = \mathrm{S}\,x\,\xi_{uu} = 0,$$

$$(11_1) \qquad a_{22} = \mathrm{S}\,\xi x_{vv} = -\mathrm{S}\,\xi_v x_v = \mathrm{S}\,x\,\xi_{vv} = 0,$$

$$(11_2) \qquad \begin{cases} \mathrm{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -a_{12}^2, \\ a_{12} = \mathrm{S}\,\xi x_{uv} = -\mathrm{S}\,\xi_u x_v = -\mathrm{S}\,\xi_v x_u = \mathrm{S}\,x\,\xi_{uv}. \end{cases}$$

Nous supposerons $\varepsilon = 1$ et les asymptotiques réelles; nos formules sont cependant valables même si les asymptotiques sont imaginaires, mais dans ce cas on ne doit pas exclure de faire usage de nombres imaginaires. Des formules des paragraphes précédents on déduit, d'après (11), (11_1) et (11_2)

$$(11_3)\qquad (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uu}) = (\xi,\ \xi_u,\ \xi_v,\ \xi_{uu}) = 0,$$

$$(11_4)\qquad (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{vv}) = (\xi,\ \xi_u,\ \xi_v,\ \xi_{vv}) = 0,$$

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \xi = \rho(x,\ x_u,\ x_v), & x = \rho(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v), \\ \rho = \dfrac{\omega}{a_{12}} & (\omega = \pm 1), \end{array}\right.$$

$$(13)\qquad a_{12} = \rho(x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) = \frac{\omega}{a_{12}}(x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}),$$

$$(13_1)\qquad \omega a_{12}^2 = (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) = (\xi,\ \xi_u,\ \xi_v,\ \xi_{uv}) \qquad (\omega = \pm 1).$$

Si les u, v sont réelles, et si l'on ne veut pas introduire des nombres imaginaires, il faudra par conséquent poser

$$(13_2)\qquad \omega = \operatorname{sgn}(x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) \quad (^1)$$

qui change de signe, en échangeant les u, v.

La tangente asymptotique $(x,\ x_u)$ coïncide avec la conjuguée $(\xi,\ \xi_u)$; de même les droites $(x,\ x_v)$ et $(\xi,\ \xi_v)$ coïncident. On aura par conséquent

$$(x,\ x_u) = \lambda(\xi,\ \xi_u), \qquad (x,\ x_v) = \mu(\xi,\ \xi_v),$$

où λ, μ sont deux facteurs qu'il s'agit de déterminer. On a

$$\begin{aligned} \omega a_{12}^2 &= (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) = \mathrm{S}(x,\ x_u)(x_v,\ x_{uv}) \\ &= \lambda\,\mathrm{S}(\xi,\ \xi_u)(x_v,\ x_{uv}) = \lambda \begin{vmatrix} \mathrm{S}\xi x_v & \mathrm{S}\xi x_{uv} \\ \mathrm{S}\xi_u x_v & \mathrm{S}\xi_u x_{uv} \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & \mathrm{S}\xi_u x_{uv} \end{vmatrix} = \lambda a_{12}^2. \end{aligned}$$

On en déduit $\lambda = \omega$; on démontre aussi que $\mu = -\omega$. On a enfin

$$(13_3)\qquad (x,\ x_u) = \omega(\xi,\ \xi_u), \qquad (x,\ x_v) = -\omega(\xi,\ \xi_v).$$

Si nous nous déplaçons sur la surface dans une direction quelconque, on aura

$$(x,\ dx) = (x,\ x_u)\,du + (x,\ x_v)\,dv = \omega[(\xi,\ \xi_u)\,du - (\xi,\ \xi_v)\,dv].$$

On en déduit que *les droites*

$$(14)\qquad (x,\ dx) \pm (\xi,\ d\xi)$$

---

(1) Si l'on change le signe de ρ, le signe de a_{12} sera aussi changé.

sont les tangentes asymptotiques. Ce résultat (Čech [12]) *est évidemment intrinsèque* (c'est-à-dire est valable pour tout choix des coordonnées curvilignes u, v).

Remarquons que le résultat ne serait pas si simple, si l'on n'avait pas défini les coordonnées ξ correspondant aux x.

17. Les équations différentielles fondamentales. — D'après les équations (13_3) et (4) on déduit que l'on peut trouver des fonctions α, β, γ, ε, p_{11}, p_{22} des u, v de manière que

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \alpha x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \varepsilon x_v + p_{22} x. \end{aligned}$$

En les dérivant, on en déduit

$$(\mathrm{I}_1)\quad \begin{cases} x_{uuu} = (\alpha_u + \alpha^2 + p_{11})x_u + (\beta_u + \alpha\beta) x_v + (p_{11u} + \alpha p_{11})x + \beta x_{uv}, \\ x_{uuv} = (\alpha_v + \beta\gamma) x_u + (\beta_v + \beta\varepsilon + p_{11})x_v + (p_{11v} + \beta p_{22})x + \alpha x_{uv}, \\ x_{uvv} = (\gamma_u + \gamma\alpha + p_{22})x_u + (\varepsilon_u + \beta\gamma) x_v + (p_{22u} + \gamma p_{11})x + \varepsilon x_{uv}, \\ x_{vvv} = (\gamma_v + \varepsilon\gamma) x_u + (\varepsilon_v + \varepsilon^2 + p_{22})x_v + (p_{22v} + \varepsilon p_{22})x + \gamma x_{uv}. \end{cases}$$

On peut en déduire les valeurs des dérivées quatrièmes comme combinaisons linéaires des x, x_u, x_v, x_{uv}; et l'on obtient les conditions d'intégrabilité en identifiant les valeurs de

$$\frac{\partial}{\partial u} x_{uvv}, \qquad \frac{\partial}{\partial v} x_{uuv}.$$

Maintenant nous comparerons seulement les coefficients de x_{uv} dans ces expressions; et nous trouverons $\alpha_v = \varepsilon_u$, de manière que nous aurons à démontrer *l'existence d'une fonction θ telle que $\theta_u = \alpha$, $\theta_v = \varepsilon$.*

D'après les équations précédentes on déduit, en dérivant la (13_1),

$$\begin{aligned} 2\omega a_{12} \frac{\partial a_{12}}{\partial u} &= (x, x_{uu}, x_v, x_{uv}) + (x, x_u, x_v, x_{uuv}) \\ &= 2\alpha(x, x_u, x_v, x_{uv}) = 2\theta_u \omega a_{12}^2. \end{aligned}$$

On obtient une équation analogue en dérivant (13_1) par rapport à v. On en déduit que l'on peut poser $\alpha = \theta_u$, $\varepsilon = \theta_v$, où $\theta = \log|a_{12}|$;

les équations pour les x deviennent par conséquent

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x & (\alpha = \theta_u), \\ x_{vv} = \gamma\ x_u + \theta_v x_v + p_{22} x & (\varepsilon = \theta_v); \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \begin{cases} |a_{12}| = e^{\theta}, \\ (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) = (\xi,\ \xi_u,\ \xi_v,\ \xi_{uv}) = \omega a_{12}^2 = \omega\, e^{2\theta}. \end{cases}$$

Nous les appellerons les *équations fondamentales* pour les x.

Dans un autre chapitre, nous en étudierons toutes *les conditions d'intégrabilité.*

En développant pour les ξ des considérations semblables, nous trouverons des équations analogues

$$\begin{aligned} \xi_{uu} &= \theta_u \xi_u + \beta' \xi_v + \pi_{11} \xi, \\ \xi_{vv} &= \gamma'\ \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi, \end{aligned}$$

avec la même fonction θ, définie par l'équation (I_2). Nous voulons déterminer les β', γ', π_{ii}.

En dérivant l'identité $S\xi_u x_u = 0$, on trouve d'après les équations précédentes, et en se rappelant que $S\xi x_u = S\xi_u x = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= S\xi_u x_{uu} + Sx_u \xi_{uu} = S\xi_u(\theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x) \\ &\quad + Sx_u(\theta_u \xi_u + \beta' \xi_v + \pi_{11}\xi) \\ &= \beta S\xi_u x_v + \beta' S x_u \xi_v = -(\beta + \beta') a_{12}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\beta' = -\beta$; de la même manière on démontre que $\gamma' = -\gamma$. On trouve ainsi *les équations fondamentales pour les* ξ

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \xi_{uu} = \quad \theta_u \xi_u - \beta\ \xi_v + \pi_{11} \xi, \\ \xi_{vv} = -\gamma\ \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi. \end{cases}$$

Nous déterminerons maintenant les π_{ii}, en écrivant d'autres identités remarquables. On a

$$\begin{aligned} S\xi_u x_{uv} &= \frac{\partial}{\partial u} S\xi_u x_v - Sx_v \xi_{uu} \\ &= -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - Sx_v(\theta_u \xi_u - \beta\xi_v + \pi_{11}\xi) = -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} + \theta_u a_{12} = 0 \end{aligned}$$

et, d'une manière analogue, on trouve

$$(15) \qquad S\xi_u x_{uv} = S\xi_v x_{uv} = Sx_u \xi_{uv} = Sx_v \xi_{uv} = 0.$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} S\xi_u x_{uuv} &= -S\xi_{uu}x_{uv} = -S(\theta_u\xi_u - \beta\xi_v + \pi_{11}\xi)x_{uv} \\ &= -\pi_{11}S\xi x_{uv} = -\pi_{11}a_{12}. \end{aligned}$$

Mais, en se rappelant les (I_1), la (15) et les identités

$$S\xi_u x_u = S\xi_u x = 0,$$

on trouve que le premier membre est aussi égal à

$$S\xi_u(\beta_v + \beta\theta_v + p_{11})x_v = -(\beta_v + \beta\theta_v + p_{11})a_{12}.$$

On en déduit par conséquent

(16) $$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta\theta_v,$$

et par la même méthode on démontre que

(16_1) $$\pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u.$$

Si l'on connaît les équations (I), *on connaît aussi les* (II) *et réciproquement.*

Des équations (15) on peut déduire une formule importante pour nous. On trouve

$$Sx_{uv}\xi_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}S\xi_u x_{uv} - S\xi_u x_{uvv} = -S\xi_u x_{uvv}.$$

D'après les (I_1), on a par conséquent

(15_1) $$Sx_{uv}\xi_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)a_{12} = a_{12}^2\Omega,$$

où

$$\Omega = \frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv} + \beta\gamma).$$

Remarquons que, si l'on échange les β, γ, p_{ii} avec les $-\beta$, $-\gamma$, π_{ii}, les équations (16) et (16_1) restent transformées en elles-mêmes.

Encore une remarque qui nous sera utile plus loin. D'après les équations (I) et (I_1) on a

$$(x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}) = \beta^2(x, x_u, x_v, x_{uv}) = \omega\beta^2 a_{12}^2.$$

Par la même méthode on démontre que

$$(\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uuu}) = \omega\beta^2 a_{12}^2.$$

Nous aurons par conséquent :

$$(x,\ x_u,\ x_{uu},\ x_{uuu}) = (\xi,\ \xi_u,\ \xi_{uu},\ \xi_{uuu}). \tag{17}$$

En nous rappelant que les coordonnées ξ du plan tangent à la surface sont aussi les coordonnées du plan osculateur à l'asymptotique $v = \text{const.}$, nous déduisons de l'équation précédente que l'*on arrive à la même normalisation des ξ, en les considérant ou comme les coordonnées du plan tangent à la surface, ou comme les coordonnées du plan osculateur à une asymptotique* (§ 8).

Nous pouvons utiliser ce théorème, pour résoudre très simplement un problème intéressant; nous aurons en même temps démontré par un exemple quelle simplicité les coordonnées définies dans les précédents paragraphes peuvent porter dans beaucoup de problèmes.

Remarquons d'abord que, si nous changeons les paramètres des asymptotiques, en choisissant comme nouveaux paramètres une fonction $U(u)$ de u, et une fonction $V(v)$ de v, les nouvelles valeurs $\overline{\beta}$ et $\overline{\gamma}$ de β, γ satisfont aux équations

$$\overline{\beta}\,\frac{dU^2}{dV} = \beta\,\frac{du^2}{dv}, \qquad \overline{\gamma}\,\frac{dV^2}{dU} = \gamma\,\frac{dv^2}{du}. \tag{18}$$

Nous retrouverons plus loin ces équations, qui sont une simple conséquence des équations (I).

Nous déterminerons maintenant les surfaces, dont toutes les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. D'après l'équation (17) et les résultats du paragraphe 9, chaque asymptotique $v = \text{const.}$ appartiendra à un complexe linéaire seulement si $Sx_{uuu}\xi_{uuu} = 0$. D'après la première des équations (I_1) et d'après l'équation analogue pour les ξ, cette condition devient

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = \beta\gamma \quad [1].$$

Les $u = \text{const.}$ appartiendront, elles aussi, à des complexes linéaires si

$$\frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} = \beta\gamma.$$

[1] Ici on suppose $\beta \neq 0$; dans l'équation suivante on supposera $\gamma \neq 0$. Nous verrons plus tard que, si $\beta\gamma = 0$, la surface est réglée et notre étude devient encore plus simple (*cf.* la *G. P. D.* déjà citée).

De ces deux équations on déduit que

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u\, \partial v} = \beta\gamma.$$

En particulier nous aurons

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

c'est-à-dire $\beta : \gamma$ est le produit d'une fonction de u par une fonction de v. La (18) démontre qu'en changeant les paramètres des asymptotiques on pourra rendre $\beta = \gamma$. Et alors notre équation se réduit à la $\frac{d^2 \log \beta}{du\, dv} = \beta^2$, dont l'intégrale générale est

$$(19) \qquad \gamma = \beta = \frac{\sqrt{U'V'}}{U + V},$$

où U est une fonction arbitraire de u, V de v. Nous renvoyons à la *G. P. D.* pour l'étude complète de ces surfaces qui n'offre plus aucune difficulté.

L'étude systématique de la géométrie différentielle projective des surfaces générales a été commencée en 1908 par M. Wilczynski ([14], [15], [16], [17], [18]). M. Wilczynski y suppose choisi le facteur des coordonnées homogènes de manière que (dans notre notation) $\theta =$ const. M. Fubini, dans ses premières recherches relatives (*voir* par exemple [5], [8], [11]), a fait usage des coordonnées $x(u, v)$ *normales* (*voir* plus loin, § 23). Or toutes les formules de M. Fubini restent valables pour *chaque* choix du facteur des coordonnées homogènes (*cf.* Čech [14]).

Pour les surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires, *voir* Peter [1], Keraval [1], Bompiani [2], C. Segre [9], Sullivan [1], [3], Terracini [6], [8], [13]; *voir* aussi *G. P. D.*, § 18, 47, 49, ainsi que l'Appendice IV (écrite par M. Terracini).

On trouvera d'amples développements dans la *G. P. D.* (Chap. II) qui contient beaucoup de méthodes pour la définition de la forme fondamentale F_2 et ses applications à des questions géométriques.