Capitolo XII.

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA PROIETTIVO - DIFFERENZIALE NEGLI IPERSPAZI.

---

§ 104. — Le forme fondamentali delle ipersuperficie.

A) Preliminari geometrici. (*F*)

Riprendiamo gli stessi metodi che ci hanno servito per le superficie. In uno spazio S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni siano x, $y, \ldots, t$ un sistema di $n+2$ coordinate omognee; talvolta porremo la prima di esse uguale ad 1, le n successive a x_1, $x_2, \ldots$, x_n, l'ultima a z. Le x_i e la z costituiranno un sistema di $n+1$ coordinate non omogenee. Sia data una ipersuperficie V_n; senza limitare la generalità potremo supporre che $z=0$ sia l'iperpiano tangente nel punto O generico $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. A meno di termini del quart'ordine varrà uno sviluppo:

$$z = P_2(x) + P_3(x),$$

ove P_i è (per $i = 2, 3$) un polinomio omogeneo di grado i nelle x. La $P_2 = 0$ definisce le direzioni lungo le quali l'iperpiano tangente incontra V_n; direzioni che pertanto formano un cono quadrico, detto cono *asintotico*. Le quadriche di S_{n+1}, la cui intersezione con V_n ha in O un cono di terzo grado di direzioni tangenti, sono le quadriche la cui equazione è del tipo:

$$z - P_2 + z(hz + P) = 0, \quad \text{ove } P = \Sigma h_i x_i \quad (h, h_i = \text{cost.}).$$

Il cono cubico di direzioni tangenti in O alla quadrica ed a V_n è

$$P_3 + P_2 P = 0 .$$

Vi sono ∞^n di questi coni dipendenti dalle costanti h. Se il discriminante A di P_2 è diverso da zero, ve ne è tra essi uno e uno solo (cfr. Introd. § 4 B) *apolare* o *coniugato* a P_2.

Ponendo $\tau = P_2$, $\xi_i = x_i P_2$, nello spazio π_n ad n dimensioni, ove le ξ_i, τ sono coordinate omogenee si trova una ipersuperficie W di terzo grado con punto doppio; il cono tangente nel punto doppio di W è l'immagine del cono asintoto; le sezioni iperpiane l'immagine dei coni cubici precedenti, la sezione *principale* l'immagine del cono cubico apolare al cono asintoto.

Se $A = 0$, potremmo talvolta al cono cubico apolare a P_2 sostituire un altro cono definito pure in modo invariante; p. es. se $n = 3$ sostituire ad esso il cono immagine di quella sezione piana di W che passa per due delle rette di W, che escono dal punto $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ma tale considerazione introduce degli irrazionali.

B) **Formole fondamentali.** (F)

Passiamo al lato analitico della trattazione; supponiamo le $x, y, \ldots, t$ funzioni di n parametri $u_1, u_2, \ldots, u_n$, e, *per ora*, indichiamo provvisoriamente con indici apposti alle $x, y, \ldots$ le loro derivate.

Poniamo:

$$(1) \qquad \begin{cases} F_2 = \lambda(x,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ d^2 x) \\ \Phi_3 = \lambda(x,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ d^3 x) - \dfrac{3}{2}\, dF_2 . \end{cases}$$

Come nel caso delle superficie si prova che $F_2 = 0$ è l'equazione del cono asintotico e che $\Phi_3 = 0$ è l'equazione di uno dei citati coni cubici (variabile con λ e col fattore per cui si moltiplicano le coordinate omogenee). Tra questi coni cubici quello

apolare ad F_2 si trova, come ora proveremo, ponendo $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n+2]{|B|}}$,
se B è il discriminante di

$$(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, d^2 x) = \Sigma b_{rs} du_r du_s .$$

Posto B_{rs} uguale al compl. algebrico di b_{rs} in B, diviso per B, e

$$\Phi_3 = \lambda \Sigma b_{rst} du_r du_s du_t ,$$

si avrà in tale ipotesi

$$b_{rst} = (x x_1 x_2 \ldots x_n x_{rst}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{rs}}{\partial u_t} + \frac{\partial b_{rt}}{\partial u_s} + \frac{\partial b_{st}}{\partial u_r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2(n+2)}\left(b_{rs}\frac{\partial \log B}{\partial u_t} + b_{rt}\frac{\partial \log B}{\partial u_s} + b_{st}\frac{\partial \log B}{\partial u_r}\right),$$

e quindi

$$\sum_{r,s} B_{rs} b_{rst} = \sum_{r,s} B_{rs}\left[(x x_1 x_2 \ldots x_n x_{rst}) - \frac{\partial b_{rt}}{\partial u_s}\right] - \sum_r \begin{Bmatrix} r\, t \\ r \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log B}{\partial u_t},$$

ove $\begin{Bmatrix} r\, t \\ r \end{Bmatrix}$ sono i simboli di Christoffel di seconda specie per la $\Sigma b_{rs} du_r du_s$. Gli ultimi due termini del secondo membro si elidono; basterà dunque provare che è nullo il primo, cioè che è nullo

$$(2) \qquad \sum_i \sum_{r,s} B_{rs} (x x_1 \ldots x_{i-1} x_{is} x_{i+1} \ldots x_n x_{rt})$$

Ora, se $X, Y \ldots$ è un sistema di quantità tali che $(x x_1 \ldots x_n X) = 1$, dalla definizione delle b_{rs} segue che valgono delle formole

$$x_{rs} = b_{rs} X + \mu_{rs} x + \sum_j \nu_{rsj} x_j ,$$

ove le μ, ν sono quantità che ora non ci interessano. Pertanto la (2) vale

$$\sum_i \sum_{r,s} B_{rs} \left[\nu_{isi} b_{rt} - b_{is} \nu_{rti}\right] = \sum_i (\nu_{iti} - \nu_{iti}) = 0 ,$$

come si doveva provare.

Il valore della forma Φ_3 corrispondente a questo valore di λ si indicherà con F_3. In generale ogni altro valore di Φ_3 differisce da F_3 per il prodotto di F_2 per una forma di primo grado. Ma noi intenderemo sempre *di aver fissato* $\frac{1}{\lambda} = \sqrt[n+2]{|B|}$.

E porremo

$$(3) \qquad \begin{cases} F_2 = \Sigma a_{rs} du_r du_s = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} (x\, x_1 \ldots x_n d^2 x) \\ F_3 = \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t \end{cases}$$

ove A è il discriminante di F_2, e quindi $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}$.

Le forme F_2, F_3 sono determinate dalla ipersuperficie in modo *impropriamente intrinseco* (perchè cambiando e soltanto di segno per trasformazioni sulle u_r a Iacobiano negativo) e *invariante* per collineazioni a modulo 1. Le collineazioni a modulo -1 le cambiano di segno; quelle moltiplicative le moltiplicano per uno stesso fattore positivo, cosicchè in ogni caso $\dfrac{F_3}{F_2}$ è *intrinseco invariante* e riceve il nome di *elemento lineare proiettivo.*

Notiamo che, se n è dispari, alla $\sqrt[n+2]{|B|}$ potremo sostituire la $\sqrt[n+2]{B}$, senza timore di introdurre quantità immaginarie nel caso di ipersuperficie reali.

Invece di considerare la ipersuperficie come luogo di punti la possiamo anche considerare come inviluppo di iperspazi ξ, $\eta, \ldots, \tau$, cioè degli iperpiani tali che:

$$(4) \qquad S\xi x = S\xi x_i = 0 \quad \text{e pertanto anche} \quad S x \xi_i = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots, n) .$$

Queste ξ, $\eta, \ldots, \tau$ sono dalle (4) determinate solo a meno di un fattore, che resterà completamente determinato se imponiamo che

$$(5)\qquad S\xi d^2 x = - S d\xi dx = S x d^2\xi = F_2$$

da cui segue

$$(x x_1 x_2 \ldots x_n d^2 x)(\xi\xi_1 \ldots \xi_n d^2\xi) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & F_2 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \ldots\ldots \\ 0 & a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \ldots\ldots \\ F_2 & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} A F_2^2 .$$

Posto $\varepsilon = sgn\,(-1)^{n-1} A$, se ne deduce per (3) che la posizione (5) sulle ξ equivale a porre

$$(\xi\xi_1 \ldots \xi_n d^2\xi) = \varepsilon\,(x x_1 \ldots x_n d^2 x) = \varepsilon F_2 \sqrt{|A|} .$$

Si avrà

$$(6)\qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{|A|}}(x x_1 \ldots x_n) ; \qquad x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) .$$

Sarà poi, come si deduce dalla definizione di F_3 e dalle (6):

$$(7)\qquad F_3 = S\xi d^3 x - \frac{3}{2} dF_2 = dF_2 - S d\xi d^2 x - \frac{3}{2} dF_2 =$$

$$= - S d\xi d^2 x - \frac{1}{2} dF_2 = dF_2 + S d x d^2\xi - \frac{1}{2} dF_2 =$$

$$= \frac{1}{2} dF_2 + S d x d^2\xi = \frac{3}{2} dF_2 - S x d^3\xi$$

od anche (Čech)

$$(8)\qquad F_3 = \frac{1}{2} S\,(d x d^2\xi - d\xi d^2 x) = \frac{1}{2} S\,(\xi d^3 x - x d^3\xi) .$$

Scegliendo in altro modo il fattore di indeterminazione per le ξ, questa formola non darebbe più F_3 apolare ad F_2, ma un' altra forma del sistema lineare delle Φ_3, cioè $\sigma F_3 + F_2 \Sigma \sigma_i du_i$; perchè, se $\bar{\xi} = \rho\xi$, allora

$$S(dx d^2 \bar{\xi} - d\bar{\xi}\, d^2 x) = \rho S(dx d^2\xi - d\xi d^2 x) +$$

$$+ d\rho(2Sdx d\xi - S\xi d^2 x) = \rho S(dx d^2\xi - d\xi d^2 x) - 3d\rho F_2 .$$

Indicando con x_r, x_{rs} ecc. derivate *covarianti* rispetto ad F_2, sarà anche:

(9) $$a_{rs} = - S\xi_r x_s = - S\xi_s x_r = S\xi\, x_{rs} = Sx\xi_{rs} .$$

Poichè

$$d^3 x = \Sigma x_r \delta^3 u_r + 3\Sigma x_{rs} du_r \delta^2 u_s + \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t ,$$

$$dF_2 = 2\Sigma a_{rs} du_r \delta^2 u_s ,$$

si trae tosto dalle precedenti che

$$F_3 = \Sigma(S\xi\, x_{rst})\, du_r du_s du_t ,$$

donde, derivando covariantemente le (9) (*):

(10) $$a_{rst} = S\xi\, x_{rst} = - S\xi_t x_{rs} = - S\xi_r x_{st} = - S\xi_t x_{rs} =$$

$$= Sx_t \xi_{rs} = Sx_r \xi_{ts} = Sx_s \xi_{rt} = - Sx\xi_{rst} .$$

Le relazioni di coniugio danno poi:

(11) $$\sum_{r,s} A_{rs} a_{rst} = 0 \quad \text{per } t = 1, 2, \ldots, n.$$

(*) Si ricordi che le derivate covarianti delle a_{rs} sono nulle, e perciò *non* sono indicate con a_{rst}.

C) **Le equazioni differenziali fondamentali.**

Potremo infine scrivere le equazioni differenziali che dalle forme F_2, F_3 (e, per ora, da una terza forma P) permettono di risalire all'ipersuperficie. Poniamo:

$$X = \frac{1}{n} \Delta_2 x \quad \text{e analoghe.}$$

Sarà

(12) $$S X \xi = \frac{1}{n} \Sigma A_{rs} S \xi x_{rs} = \frac{1}{n} \Sigma A_{rs} a_{rs} = 1 .$$

(13) $$S X \xi_i = \frac{1}{n} \sum_{r, s} A_{rs} S \xi_i x_{rs} = -\frac{1}{n} \sum_{r, s} A_{rs} a_{rsi} = 0$$

e quindi, derivando la penultima, anche

(14) $$S \xi X_i = 0 .$$

Analogamente si definiscono le Ξ, e si dimostrano per queste le formole duali delle precedenti. Allora le x, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, X sono linearmente indipendenti, e pertanto valgono formole del tipo:

$$x_{rs} = \lambda_{rs} x + \sum_t \mu_{rst} x_t + \nu_{rs} X$$

ove le λ, μ, ν sono quantità da determinare. Moltiplicando per ξ e sommando si trova:

$$\nu_{rs} = S \xi x_{rs} = a_{rs} .$$

Moltiplicando per ξ_i e sommando, si trova

$$-a_{irs} = S \xi_i x_{rs} = -\sum_t \mu_{rst} a_{ti} , \quad \text{cioè} \quad \mu_{rst} = \sum_i A_{it} a_{tri}$$

cosicchè si ha in conclusione: (F)

(I) $$x_{rs} = \sum_{t, i} a_{rst} A_{ti} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x .$$

Moltiplicando per A_{rs} e sommando rispetto r, s, si trae:

$$\Sigma A_{rs} p_{rs} = 0 . \tag{15}$$

Dunque: Si presenta, come nel caso delle superficie, necessaria l'introduzione di una nuova forma intrinseca

$$P = \Sigma p_{rs} du_r du_s$$

pure apolare ad F_2 (ma, come le F_2, F_3 invariante solo per collineazioni unimodulari). Formole analoghe si hanno per le ξ:

$$\xi_{rs} = - \sum_{t,\, i} a_{rst} A_{ti} \xi_i + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi , \tag{I$_{\text{bis}}$}$$

ove ancora la forma

$$\Pi = \Sigma \pi_{rs} du_r du_s$$

è apolare alla F_2. Derivando covariantemente la (I), se ne deduce poi:

$$x_{rst} = \Sigma a_{rsti} A_{tj} x_j + \Sigma a_{rst} A_{tj} (\Sigma a_{tjh} A_{hk} x_k) + p_{rsi} x + p_{rs} x_i +$$

$$+ a_{rsi} X + \Sigma a_{rst} A_{tj} p_{tj} x + a_{rs} X_i .$$

Ora per le $S \xi X_i = 0$, varrà una formola del tipo: $X_i = g_i x + \sum_h l_i^h x_h$ (della determinazione delle g, l ci occuperemo altrove). Quindi:

$$x_{rsi} = \sum_j [\Sigma a_{rsti} A_{tj} + \Sigma a_{rst} A_{tk} a_{ikh} A_{hj} + a_{rs} l_i^{(j)}] x_j + \tag{16}$$

$$+ (p_{rsi} + \lambda_i a_{rs}) x + p_{rs} x_i .$$

Valgono formole duali per le ξ_{rsi}.

D) Alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Noi abbiamo escluso in molti punti del precedente paragrafo che $A = 0$. Quale significato ha tale esclusione? Esso si trova subito, osservando che per $A = 0$ vi è almeno una direzione $du_1 : du_2 : \ldots : du_n$ doppia per il cono asintoto; essa, cambiando variabili, si può portare nella $du_2 = du_3 = \ldots = du_n = 0$, cosicchè sarà $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$; cioè, oltre alle

$$(17) \qquad S\xi x = S\xi x_1 = \ldots = S\xi x_n = 0\,, \quad \text{varranno le:}$$

$$(17)_{\text{bis}} \qquad S\xi_1 x = S\xi_1 x_1 = \ldots = S\xi_1 x_n = 0\,.$$

Ora, avendo noi supposto che la nostra varietà sia proprio una ipersuperficie, composta di ∞^n punti, e non meno, la matrice $(x x_1 \ldots x_n)$ non é nulla. E le ξ dalle (17) sono determinate a meno di un fattore. Dal confronto di (17) ed $(17)_{\text{bis}}$ si deduce pertanto che le ξ_1 sono proporzionali alle ξ, che cioè vale un'equazione:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho\,\xi \qquad (\rho = \text{fattore di proporzionalità})\,.$$

Quindi potremo moltiplicare le ξ per un tale fattore che $\xi_1 = 0$. Quindi l'iperpiano tangente ξ dipenderebbe dalle sole $n-1$ variabili $u_2, u_3, \ldots, u_n$. E viceversa. Perciò:

Se la nostra varietà è non soltanto luogo proprio di ∞^n punti, ma anche inviluppo proprio di ∞^n iperpiani, cioè è una vera ipersuperficie sia come luogo di punti, che come inviluppo di iperpiani, allora $A \neq 0$. *E viceversa.*

Se $A = 0$, gli iperpiani tangenti saranno dunque ∞^r con $r < n$. Scegliamo i parametri u in guisa che le ξ non dipendano dalle u_i con $i > r$. Poichè i punti x sono i punti soddisfacenti alle:

$$(18) \qquad S\xi_h x = S\xi x = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

essi saranno del tipo:

$$(19) \qquad x = x^{(0)} + \sum_{h=1}^{s} v_h\, x^{(h)} \qquad (h = 1,\, 2, \ldots,\, s = n - r)$$

se $x^{(0)}$, $x^{(1)}, \ldots,$ $x^{(s)}$ sono un sistema completo di soluzioni delle (18). E perciò la V_n sarà luogo di ∞^r spazii lineari S_s, nei punti di uno qualsiasi dei quali ha uno stesso iperpiano tangente. É pure importante un'altra osservazione valida nel caso più generale: *Se*

$$u_i = u_i\,(u_1,\, u_2, \ldots,\, u_{\nu-1}) \qquad (i = \nu,\, \nu + 1, \ldots,\, n)$$

sono le equazioni che definiscono la sezione V' di V_n con uno spazio lineare a ν dimensioni, allora, sostituendo in F_2, Φ_3 *alle* $\mathrm{u}_\nu, \ldots, \mathrm{u}_n$ *i precedenti valori, si trovano le forme corrispondenti che indicheremo con* F'_2 *e* Φ'_3 *di questa sezione V'.*

Dato il carattere intrinseco e invariante (per collineazioni a modulo 1) delle nostre formole, e dato che uno spazio lineare od è un iperpiano, oppure è sezione di iperpiani, potremo supporre che sia $\nu = n$, che l'iperpiano segante sia $x = 0$, e infine che sulla V_n valga la $x = u_1$. In tali ipotesi, se $(x,\, y, \ldots,\, t)$ e $(\xi,\, \eta, \ldots,\, \tau)$ è un elemento di V_n, di cui il punto giaccia sull'iperpiano segante, allora $(y, \ldots,\, t)$ ed $(\eta, \ldots,\, \tau)$ sono evidentemente in quest'ultimo le coordinate dello stesso punto e del corrispondente S_{n-1} che, nell'iperpiano segante $x = 0$ considerato come spazio totale, è l'iperpiano ivi tangente alla V'. Basta ricordare le $F_2 = -S\, d\,x\, d\xi$, $\Phi_3 = \dfrac{1}{2} S\,(d\,x\, d^2\xi - d\xi\, d^2 x)$, perchè il nostro enunciato risulti evidente. Ne segue subito:

Se $\mathrm{F}_3 = 0$, *ossia se una, e quindi tutte le forme* Φ_3 *sono divisibili per* F_2, *allora, se* $A \neq 0$, *la nostra ipersuperficie è una quadrica e viceversa.*

Infatti, se Φ_3, è divisibile per F_2, ciò avverrà, per l'osserv. precedente, anche per l'intersezione di V_n con uno spazio lineare S_3 generico a tre dimensioni, in cui l'intersezione citata sarà una superficie, che avrà la sua forma Φ'_3 divisibile per F'_2, cioè $F'_3 = 0$; e quindi, come già ci è noto, sarà una quadrica. Poichè ogni S_3 generico taglia V_n in una quadrica, anche V_n stessa sarà una quadrica di S_{n+1}.

A questa dimostrazione si può fare un'obiezione. Il teorema che le superficie di un S_3, per cui Φ_3' è divisibile per F_2', sono quadriche vale nell'ipotesi sempre sottintesa che F_2' abbia un discriminante diverso da zero. Che cosa avverrebbe nella dimostrazione precedente se la F_2' della sezione di V_n con un S_3 generico avesse un discriminante sempre uguale a zero, cioè F_2' fosse sempre un quadrato perfetto? In tal caso necessariamente anche F_2 sarebbe un quadrato perfetto (e in particolare avrebbe $A = 0$ contro l'ipotesi fatta nell'enunciato). Ma possiamo facilmente esaurire la ricerca, abbandonando l'ipotesi $A \neq 0$. La sezione di V_n con un S_3 generico sarebbe sempre una sviluppabile (od un caso limite di questa). Le generatrici delle sviluppabili intersezione di V_n con tutti gli S_3 che escono da un punto generico O di V_n sono *rette* appartenenti a V_n, per cui $F_2 = 0$ e (poichè F_2 è un quadrato) formano di solito un S_{n-1} lineare intersezione di V_n con l'iperpiano tangente in O. Lungo una linea qualunque di questo S_{n-1} si dimostra (come nel teorema iniziale di questo §) che l'iperpiano tangente non cambia. *La ipersuperficie è perciò inviluppo di* ∞^1 *iperpiani* (le cui caratteristiche sono i precedenti spazii S_{n-1}): *ecco le uniche ipersuperficie per cui non solo* $A = 0$, *ma anche* Φ_3 *è divisibile per* F_2.

Infine le ipersuperficie per cui F_2 *è identicamente nullo sono gli iperpiani.*

§ 105. — La quadrica di Čech.

$A)$ Polarità e quadrica di Čech.

Possiamo ora definire la *quadrica di Čech*, che è la generalizzazione della *conica osculatrice a una curva piana* e della *quadrica di Lie per le superficie*. Consideriamo (sempre se $A \neq 0$), per un punto generico $O = (x)$ della nostra ipersuperficie, quella corrispondenza che al punto di coordinate

$$\lambda x + \mu X + \sum_i \nu^i x_i$$

fa corrispondere l'iperpiano

$$\lambda\xi + \mu\Xi + \Sigma\nu^i\xi_i,$$

sempre inteso di aver fissato i fattori di proporzionalità per le x, ξ nel modo sopra definito (*). Se dunque moltiplichiamo le x per uno stesso fattore ρ, le ξ restano moltiplicate pure per ρ, e, come si vede facilmente, la reciprocità sopra definita resta invariata. Tale reciprocità è dunque definita in modo invariante e naturalmente anche intrinseco (per ogni punto della V_n). Affinchè il punto $\lambda x + \mu X + \Sigma\nu^i x_i$ e l'iperpiano $\lambda'\xi + \mu'\Xi + \Sigma\nu'^i\xi_i$ si appartengano, dev'essere:

$$(\lambda\mu' + \lambda'\mu)\,\Sigma a_{ik}\nu^i\nu'^{(h)} + \mu\mu' SX\Xi = 0\,.$$

La simmetria nelle variabili accentate o non accentate dimostra che la nostra reciprocità non è che la polarità rispetto alla quadrica

$$2\lambda\mu + \mu^2 SX\Xi - \Sigma a_{ih}\nu^i\nu^h = 0$$

che chiameremo la *quadrica di Čech. Le quadriche nel fascio determinato dalla quadrica di Čech, e dall'iperpiano tangente* $\mu^2 = 0$ *contato due volte sono tutte e sole le quadriche che intersecano* V_n *nel cono di direzioni avente per equazione* $F_3 = 0$. Infatti un punto di V_n posto in un intorno di O ha per coordinate

$$x + dx + \frac{1}{2}\,d^2x + \frac{1}{6}\,d^3x + \ldots =$$

(*) Si ricordi la definizione di X, Ξ del § 104 C. Si vede facilmente che al punto

$$\lambda x + \Sigma\nu^i x_i + \frac{\mu}{2}\Sigma A_{rs}x_{rs}$$

corrisponde il piano

$$\lambda\xi + \Sigma\nu^i x_i + \frac{\mu}{2}\,\Sigma A_{rs}\xi_{rs}$$

anche supponendo che gli indici delle x e ξ indichino derivate ordinarie (non covarianti).

$$= x + \Sigma x_i du_i + \frac{1}{2}(\Sigma x_i \delta^2 u_i + \Sigma x_{rs} du_r du_s) +$$

$$+ \frac{1}{6}(\Sigma x_i \delta^3 u_i + 3\Sigma x_{rs} du_r \delta^2 u_s + \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t)$$

cioè, tenendo conto delle equazioni fondamentali:

$$\lambda x + \mu X + \Sigma \nu^i x_i, \quad \text{ove:}$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}\Sigma p_{rs} du_r du_s + \ldots$$

$$\mu = \frac{1}{2} F_2 + \frac{1}{2}\Sigma a_{rs} du_r \delta^2 u_s + \frac{1}{6} F_3 + \ldots$$

$$\nu^i = du_i + \frac{1}{2}\delta^2 u_i + \frac{1}{2}\Sigma a_{rsj} A_{ji} du_r du_s + \ldots$$

Cosicchè in un punto dell'intorno di O si ha:

$$2\lambda\mu - \Sigma a_{ih} \nu^{(i)} \nu^{(h)} = F_2 + \Sigma a_{rs} du_r \delta^2 u_s + \frac{1}{3} F_3 - F_2 -$$

$$- \Sigma a_{ih} du_h \delta^2 u_i - \Sigma a_{rsh} du_r du_s du_h + \ldots = -\frac{2}{3} F_3 + \ldots$$

I termini di grado inferiore (terzo) si annullano appunto sul cono $F_3 = 0$.

A questo proposito, anche senza entrare in particolari di dimostrazione, vogliamo aggiungere una osservazione. Come risulterà da un teorema di Čech, che ben presto proveremo, il luogo delle rette polari di un punto x' dell'iperpiano tangente rispetto alle coniche osculatrici delle sezioni di V_n con un piano S_2 passante per la retta $x'x$ è un *iperpiano* ξ' passantè per x. Questo iperpiano ξ' si può anche definire come l'iperpiano polare di x' rispetto a una qualsiasi delle quadriche del § 104 A e B, a cui corrisponde un cono Φ_3 di direzioni contenente la retta $x'x$. Nell'uno o nell'altro di questi modi equivalenti si stabilisce una corrispondenza birazionale tra gli iperpiani ξ' della stella x e i punti x' dell'iperpiano tangente ξ (*). Agli iperpiani ξ' che passano per una retta *generica* uscente da x corrisponde nell'iperpiano tangente ξ (ad n dimensioni) una ipersuperficie (ad $n-1$ dimensioni) cubica con punto doppio in x, la quale ha in x il cono $F_2 = 0$ di direzioni come cono tangente; questa ipersuperficie è immagine del sistema lineare delle forme Φ_3 (**).

Al teorema di Moutard corrisponde un analogo teorema di Čech.

B) Teorema di Čech.

1. *Sia* ω *un* S_ν $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$ *tangente in un punto* O *ad un' ipersuperficie* V_n (con $A \gtrless 0$; le quadriche di *Čech* in O (a ν dimensioni) *delle ipersuperficie* V_ν *sezioni di* Σ *mediante tutti gli spazi* $S_{\nu+1}$ *passanti per* ω *riempiono una quadrica ad* n *dimensioni.*

Posto $\nu = 1$, $n = 2$, si ottiene il teorema di Moutard.

Per dimostrare il teorema nel caso generale, scegliamo la piramide di riferimento [indico con $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ le coordinate omogenee] in modo che le equazioni di ω siano

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-\nu+1} = 0$$

ed inoltre che $x_1 = 0$ sia l'equazione dell'iperpiano tangente a V_n in O. In O si avrà pertanto:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \ldots = \frac{\partial x_1}{\partial u_n} = 0 . \tag{1}$$

Scegliamo i parametri $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in modo che le tangenti a V_n in O situate in ω siano quelle per cui

---

(*) Se $n = 2$, tale corrispondenza è la corrispondenza Σ_1 di Moutard studiata al Cap. IX.

(**) Cfr. E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2ª ed., Cap. XV, nº 1.

$$du_{\nu+1} = du_{\nu+2} = \dots du_n = 0 \,. \tag{2}$$

Un $S_{\nu+1}$ passante per ω è determinato da equazioni del tipo:

$$x_2 - \lambda_1 x_1 = 0\,, \quad x_3 - \lambda_2 x_1 = 0\,, \dots \quad x_{n-\nu+1} - \lambda_{n-\nu}\, x_1 = 0 \tag{3}$$

in cui le λ siano costanti qualunque. Esso interseca V_n in una V_ν; le coordinate dei punti di V_ν si ottengono facilmente in funzione di $u_1, u_2, \dots u_\nu$; basta infatti, date le $x_1 \dots x_{n+2}$ su V_n in funzione di $u_1, \dots u_n$, calcolare $u_{\nu+1} \dots u_n$ come funzioni di $u_1 \dots u_\nu$ dalle equazioni (3) ottenendo p. es.

$$\begin{aligned} u_{\nu+1} &= \varphi_{\nu+1}(u_1, u_2 \dots u_\nu;\ \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-\nu})\,, \\ &\;\;\vdots \\ u_n &= \varphi_n(u_1, u_2 \dots u_\nu;\ \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-\nu})\,, \end{aligned} \tag{4}$$

e sostituire poi le $\varphi_{\nu+k}$ al posto di $u_{\nu+k}$ nelle x_i. Dall'ipotesi (2) si vede subito che si ha in O, qualunque siano le λ,

$$\frac{\partial \varphi_{\nu+1}}{\partial u_i} = \dots = \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots \nu). \tag{5}$$

Calcoliamo anche i valori delle derivate seconde delle φ in O. Dalle (3) si deduce

$$\frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_j \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \right) +$$

$$+ \sum_{k,l} \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j} + \sum_k \frac{\partial x_\rho}{\partial u_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} = \lambda_{\rho-1} \left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_j} + \right.$$

$$+ \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_j \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \right) + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j} +$$

$$\left. + \sum_k \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} \right]. \qquad \begin{array}{l} \rho = 2, 3 \dots n - \nu + 1 \\ i, j = 1, 2 \dots \nu;\ k, l = \nu + 1, \nu + 2, \dots n. \end{array}$$

Nel punto O valgono le (1) e le (5), sicchè le precedenti si riducono ivi alle

$$\frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_k \frac{\partial x_\rho}{\partial u_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} = \lambda_{\rho-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_j} .$$

Il determinante $\left| \frac{\partial x_\rho}{\partial u_k} \right|$ $(\rho = 2,\ 3 \ldots n - \nu + 1,\ \ k = \nu + 1,\ \nu + 2, \ldots n)$ si riconosce subito diverso da zero, sicchè si trova nel punto O

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} = c_{ij,k}^{(0)} + c_{ij,k}^{(1)} \lambda_1 + \ldots + c_{ij,k}^{(n-\nu)} \lambda_{n-\nu} ,$$

dove le c sono costanti numeriche.

C) Continuazione e fine della dimostrazione.

Passiamo al calcolo delle forme fondamentali F_2', F_3' per V_ν. Essendo F_2, F_3 quelle di V_n, dalla formola del § 104 (5) e dal secondo teorema del § 104 *D* si deduce tosto che

$$F_2' = [\sigma F_2] , \quad F_3' = \left[\sigma \left(F_3 - 3 \frac{d\sigma}{\sigma} F_2\right)\right] ,$$

dove (anche nel seguito) le parentesi [ ] indicano la sostituzione (4) e σ si sceglie in modo che F_3' risulti apolare a F_2'. Ciò determina univocamente $\frac{d\sigma}{\sigma}$; sia

$$(7) \qquad \frac{d\sigma}{\sigma} = E_1 du_1 + \ldots + E_\nu du_\nu .$$

É importante osservare che, lasciando le λ indeterminate, le E risultano funzioni razionali delle $[a_{rs}]$, $[a_{rst}]$ e $\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}$ $(k = \nu + 1, \ldots n,\ i = 1 \ldots \nu)$, sicchè le $\frac{\partial E_j}{\partial u_i}$ sono polinomî lineari nelle

$\dfrac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j}$ con coefficienti funzioni razionali delle $[a_{rs}]$, $[a_{rst}]$, $\left[\dfrac{\partial a_{rs}}{\partial u_p}\right]$, $\left[\dfrac{\partial a_{rst}}{\partial u_p}\right]$, $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}$. Le (5) e (6) mostrano quindi che si ha nel punto O

$$\text{(8)} \qquad \begin{gathered} E_i = e_i , \\ \frac{\partial E_i}{\partial u_j} = e_{ij}^{(0)} + e_{ij}^{(1)} \lambda_1 + \ldots + e_{ij}^{(n-\nu)} \lambda_{n-\nu} \end{gathered}$$

dove le e sono costanti. Di più, comunque si fissino le λ, il secondo membro della (7) è un differenziale esatto. Per fissare completamente σ, noi poniamo la condizione che sia $\sigma = 1$ nel punto O per tutti i valori delle λ; sicchè in O

$$\text{(8)}_{\text{bis}} \qquad \sigma = 1 , \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u_i} = E_i , \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial E_i}{\partial u_j} + E_i E_j .$$

Dalla prima nota a piè di pagina al § 105 A risulta, ragionando similmente come al § 105 D, che l'S_ν polare del punto

$$\text{(9)} \qquad \mu [x] + \mu_1 \frac{\partial [x]}{\partial u_1} + \ldots + \mu_\nu \frac{\partial [x]}{\partial u_\nu} + \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 [x]}{\partial u_i \partial u_j}$$

rispetto alla quadrica di Čech di V_ν sta nell'iperpiano

$$\text{(10)} \qquad \mu [\sigma \xi] + \mu_1 \frac{\partial [\sigma \xi]}{\partial u_1} + \ldots + \mu_\nu \frac{\partial [\sigma \xi]}{\partial u_\nu} + \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 [\sigma \xi]}{\partial u_i \partial u_j}$$

dove $[\sigma F_2] = \Sigma b_{ij} du_i du_j$ e B_{ij} sono i complessi algebrici di b_{ij} nel det. $|b_{ij}|$ divisi per il det., la parentesi [ ] indicando al solito la sostituzione (4). Ora per i valori delle u corrispondenti al punto O, le (9) e (10) diventano per le (5), (6), (8) e $(8)_{\text{bis}}$:

$$y \equiv \mu x + \mu_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \ldots + \mu_\nu \frac{\partial x}{\partial u_\nu} + \sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_k C_k^{(0)} \frac{\partial x}{\partial u_k} +$$

$$+ \lambda_1 \sum_k C_k^{(1)} \frac{\partial x}{\partial u_k} + \ldots + \lambda_{n-\nu} \sum_k C_k^{(n-\nu)} \frac{\partial x}{\partial u_k} ,$$

$$\eta \equiv \mu \xi + \mu_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + e_1 \xi \right) + \ldots + \mu_\nu \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_\nu} + e_\nu \xi \right) +$$

$$+ \sum_{ij} A_i \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_j} + e_i \frac{\partial \xi}{\partial u_j} + e_j \frac{\partial \xi}{\partial u_i} + e_i e_j \xi \right) +$$

$$+ \sum_k C_k^{(0)} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} + D^{(0)} \xi +$$

$$+ \lambda_1 \left(\sum_k C_k^{(1)} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} + D^{(1)} \xi \right) + \ldots + \lambda_{n-\nu} \left(\sum_k C_k^{n-\nu} \frac{\partial \xi}{\partial u_\nu} + D^{(n-\nu)} \xi \right),$$

$$(i, j = 1, 2 \ldots \nu ; \quad k = \nu + 1, \quad \nu + 2 \ldots n)$$

dove

$$C_k^{(\rho)} = \sum_{ij} A_{ij} c_{ij,k}^{(\rho)} , \quad D^{(\rho)} = \sum_{ij} A_{ij} e_{ij}^{(\rho)} \qquad (\rho = 0, 1, 2 \ldots n - \nu).$$

Il punto y sta sulla quadrica di Čech di V_ν se $S y \eta = 0$. Ora questa è un'equazione quadratica (non omogenea) (che sarebbe facile scrivere) negli $n + 1$ parametri

$$\mu, \mu_1, \ldots \mu_\nu , \lambda_1 , \lambda_2 \ldots \lambda_{n-\nu} .$$

Potendosi tali parametri riguardare come coordinate (non omog.) di y, il teorema è stabilito.

§ 106. — Rette normali; coordinate normali.

Sia per ogni punto x di V_ν assegnata una retta uscente da x e *non* posta sull'iperpiano tangente ξ; sia $x' \neq x$ un punto di questa retta. Sarà

$$S \xi x' \neq 0 .$$

Ogni altro punto della retta avrà coordinate del tipo $x' + \rho x$; affinchè esso sia un *fuoco*, cioè sia intersezione della retta considerata e di una retta infinitamente vicina uscente dal punto $x + dx = x + \Sigma x_i du_i$ della ipersuperficie V, dovranno esistere due parametri β, γ tali che:

$$d(x' + \rho x) = \beta x + \gamma x' .$$

Scriviamo le coordinate x' nella forma

$$x' = \lambda x + X + \Sigma \nu^{(i)} x_i .$$

L'iperpiano $\xi_i + \alpha_i \xi$, che passa per x, passerà anche per x' se

$$0 = S x' (\xi_i + \alpha_i \xi) = - \nu_i + \alpha_i \quad \text{ossia} \quad \alpha_i = \nu_i ,$$

ove ν_i è il sistema duale del sistema controvariante ν^i

$$\nu_i = \sum_r a_{ir} \nu^r , \quad \nu^i = \sum_r A_{ir} \nu_r .$$

Dire che $d(x' + \rho x)$ è combinazione lineare di x, x' è come dire che esso giace sugli iperpiani $\xi_i + \nu_i \xi$ (che si intersecano appunto nella retta considerata) cioè che

$$S(\xi_i + \nu_i \xi)\, d(x' + \rho x) = 0 , \quad \text{ossia} \quad S(x' + \rho x)\, d(\xi_i + \nu_i \xi) = 0$$

cioè

$$\sum_k du_k \left\{ \rho a_{ik} + S x' \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_k} - \nu_i \nu_k + \frac{\partial \nu_i}{\partial u_k} \right\} = 0 .$$

Eliminando le du_k, si trova un'equazione di grado n in ρ, a cui corrisponderanno n fuochi del nostro raggio. Supponiamo che *essa abbia tutte le radici distinte*; è facile riconoscere che le n direzioni corrispondenti $du_1 : du_2 : \ldots : du_n$ sono *a* 2 *a* 2 *coniugate rispetto al cono asintotico*, soltanto se $\dfrac{\partial \nu_i}{\partial u_k} = \dfrac{\partial \nu_k}{\partial u_s}$, ossia se $\Sigma \nu_i du_i$ *è un differenziale esatto* $d\nu$ (ciò si prova p. es. scegliendo le u in modo che nel punto considerato queste direzioni coincidano con le direzioni coordinate $[du_1 = du_2 = \ldots = du_{i-1} = du_{i+1} = \ldots = = du_n = 0]$ e imponendo poi la condizione $a_{ik} = 0$ per $i \neq k$).

Viceversa, se $\Sigma \nu_i du_i$ è un differenziale esatto, cambiando il fattore di proporzionalità per la x, ξ, potremo rendere $\nu_i = 0$. Ed è facile riconoscere che nelle nostre ipotesi le n direzioni considerate sono (per $\nu_i = 0$) a due a due coniugate rispetto al cono asintotico.

In tal caso l'insieme delle nostre rette si dice essere una congruenza *coniugata* alla V_n (estendendo locuzioni già usate nella teoria delle superficie).

Le congruenze coniugate a V_n *sono quelle formate dalle intersezioni dei piani* $(e^{\nu}\xi)_i$, *che coincidono con la retta congiugente* x *ad* $\mathrm{X} + \Sigma \nu^i \mathrm{x}_i$. *In altre parole, facendo variare il solito fattore di proporzionalità, si ottengono dalle rette intersezioni dei piani* ξ_i, *ossia dalle rette congiungenti* x *ad* X *tutte e sole le congruenze coniugate alla nostra ipersuperficie* (almeno se ci limitiamo a congruenze con fuochi distinti). Per questa congruenza le n direzioni citate sono quelle dello n^{edro} autopolare rispetto al cono asintoto $F_2 = 0$ e all'altro cono quadrico definito dall'uguagliare a zero la forma $\Pi = \Sigma \pi_{rs} du_r du_s$ duale della forma P.

Ad ognuna di queste congruenze potremo dare il nome di congruenze delle *normali*. Come ne sceglieremo una nel modo più semplice possibile? Questa domanda, per quanto ora si è detto, equivale all'altra: Come si fissano nel modo più semplice i fattori di proporzionalità per le coordinate di punto x e di iperpiano tangente, ben inteso in modo che sia sempre soddisfatta la (5) o la (6) del § 104 B? O, in altre parole ancora, tra le coppie di forme φ_2, φ_3 tali che $\varphi_2 : \varphi_3 = F_2 : F_3$, come ne fissiamo una in modo intrinseco invariante col metodo più semplice possibile? Noi p. es., analogamente a quanto si è fatto (§ 15 C) nel caso $n = 2$, potremmo (F) costruire un invariante *assoluto* I del sistema delle forme F_2, F_3 formando il quoziente di due convenienti potenze dei discriminanti di F_3 ed F_2, e moltiplicare poi le x, ξ per un tale fattore che questo quoziente I abbia, se possibile, un valore numerico prefissato. Ma per $n > 2$ vi sono altri metodi: quelli (F) che, invece che ai discriminanti, ricorrono ad altri invarianti del sistema delle forme F_2, F_3. Tutti questi metodi ricorrono per la determinazione di ρ a sole derivate terze. Questa molteplicità di metodi che si presenta nel caso $n > 2$ è dovuta al fatto seguente. Se ρ e ρ' sono due fattori, ciascuno dei quali può servire, secondo i metodi precedenti, a *normare* le coordinate e le forme fondamentali, allora $\rho : \rho'$ (che è un'espressione formata da prodotti e quozienti di invarianti simultanei di F_2, F_3) è *una curvatura proiettiva* della ipersuperficie; un numero cioè (dipendente da derivate di ordine non superiore al terzo) *di carattere intrinseco invariante.* Queste *curvature* non esistono nel caso $n = 2$.

Per la generalizzazione alle ipersuperficie della nozione di linee di Segre rinviamo alla Memoria del Čech: *I fondamenti della geometria proiettivo - differenziale secondo il metodo di Fubini.* (Ann. di Matematica 1923 Ser. 3 tomo 31), ove si troverà anche una generalizzazione delle superficie *isotermo - asintotiche.*

§ 107. — L'applicabilità proiettiva delle ipersuperficie. (F)

I metodi stessi, che abbiamo usato per le superficie e per i complessi di rette, si applicano sia alla definizione di ipersuperficie proiettivamente applicabili, sia al teorema:

Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due superficie è che abbiano uguale elemento lineare proiettivo $F_3 : F_2$, o, ciò che è lo stesso, *che le coordinate omogenee dei loro punti si possano scegliere in modo che le due ipersuperficie definiscano una stessa coppia di forme* F_2 *ed* F_3. Trovare le ipersuperficie applicabili su una ipersuperficie data corrisponde dunque, date le forme F_2 ed F_3 a trovare le possibili forme P tali che siano soddisfatte le condizioni di integrabilità delle equazioni fondamentali, che senz'altro riscriviamo:

$$x_{\rho s} = \Sigma a_{\rho st} A_{ti} x_i + a_{\rho s} X + p_{\rho s} x. \tag{1}$$

Le condizioni d'integrabilità sono:

$$x_{\rho st} - x_{\rho ts} = - \Sigma (st, \rho h) A_{hk} x_k$$

che scriveremo nella forma:

(2) $$\sum_\rho A_{r\rho}(x_{\rho st} - x_{\rho ts}) = -\Sigma (st,\ \rho h) A_{hk} A_{r\rho} x_k .$$

Porremo anche:

(3) $$X_t = g_t x + \sum_i l_t^i x_i = g_t x + \Sigma l_{ti} A_{ij} x_j .$$

Porremo $p_i^t = \sum_j p_{ij} A_{jt}$. Sviluppando (2) tenendo conto delle (1) e (3) si deve ottenere una identità in x, x_j, ed X. Ma il coefficiente di X si riconosce tosto nullo nei due membri Uguagliando pertanto nei due membri i coefficienti di x_k e di x, si trova:

(4) $$[st,\ rk] = \eta_{rs} l_t^k - \eta_{tr} l_s^k + \eta_{tk} p_s^r - \eta_{sk} p_t^r .$$

(5) $$\sum_\rho A_{r\rho}\left[p_{\rho st} - p_{\rho ts} + \sum_h (a_{s\rho h} p_t^h - a_{t\rho h} p_s^h)\right] + \eta_{rs} g_t - \eta_{rt} g_s = 0$$

ove è posto: $\eta_{rr} = 1$, $\eta_{rs} = 0$ per $r \neq s$, ed è posto anche

$$[st,\ rk] = \Sigma A_{kh} A_{r\rho} \times$$

$$\times \left[a_{h\rho ts} - a_{h\rho st} + (ts,\ \rho h) + \sum_{i,j} A_{ij} (a_{\rho it} a_{hjs} - a_{\rho si} a_{htj})\right] (*) .$$

Esprimendo che, derivando le (3), si trova $X_{ts} = X_{st}$, si deduce in modo simile:

(6) $$\begin{cases} l_{st} = l_{ts} \\ g_{ts} + \Sigma l_{th} A_{hj} p_{js} = g_{st} + \Sigma l_{sh} A_{hj} p_{jt} \\ g_t \eta_{sk} - g_s \eta_{tk} + \Sigma A_{hk} (l_{hts} - l_{hst}) + \sum_{\rho, h} (l_t^\rho a_{\rho sh} - l_s^\rho a_{\rho th}) A_{hk} = 0 . \end{cases}$$

Le (4) danno

(*) Si notino le identità: $[st,\ rk] = -[ts,\ rk]$

$$[st,\ rk] + [st,\ kr] = \sum_{h,j} A_{ri} A_{hj} (a_{jits} - a_{jist})$$

$$[st,\ sk] - [ts,\ ks] = \Sigma A_{kj} A_{si} a_{ijts} .$$

$$(7)\quad \begin{cases} [st,\ rs] = -p_t^r \quad (\text{per } t \neq r,\ r \neq s,\ t \neq s) \\ [st,\ ss] = l_t^s - p_t^s \quad (s \neq t) \\ [st,\ sr] = l_t^r \quad (t \neq s,\ t \neq r,\ s \neq r) \\ [st,\ st] = l_t^t + p_s^s \quad (s \neq t) \end{cases}$$

mentre la relazione di coniugio di P ed F_2 dà:

$$(8)\qquad \sum_s p_s^s = 0 .$$

Se $n > 2$, ed $r \neq t$, potrò trovare un indice s differente sia da r, che da t; cosicchè la prima e la terza equazione danno tutte le l_t^r, p_t^r in funzione dei coefficienti delle forme F_2, F_3, dai quali soltanto dipendono i simboli $[\ldots]$. L'ultima poi delle (7), insieme alla (8) permettono di determinare le p_s^s e le l_t^t. E l'ultima delle (6) permette poi di determinare anche le g_t. Dunque, date le forme F_2 ed F_3, sono determinate le g, le l, ed anche la forma P.

Dunque: *Una ipersuperficie* (ad $n > 2$ dimensioni di uno spazio ad $n+1$ dimensioni) *è proiettivamente indeformabile.* Cioè: *Due ipersuperficie proiettivamente applicabili sono anche proiettive tra di loro.* Questi teoremi valgono naturalmente nel caso $A \neq 0$ cioè per le ipersuperficie luogo proprio di ∞^n punti, e inviluppo di ∞^n iperpiani. Del come si possa estendere la ricerca al caso $A=0$ non ci occuperemo qui rinviando a una nota di uno degli A. (*)

Sarà bene piuttosto vedere con Čech il significato geometrico di alcune delle quantità che si sono presentate nel calcolo precedente. Così la $\Sigma l_{st}\, du_s\, \delta u_t = 0$ (ove le du_i, δu_i definiscono due differenti direzioni) è un'equazione di carattere intrinseco. Sia t

---

(*) *Fubini* Il problema della deform. proiett. delle superficie. Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5, vol. 27_2, pag. 147 (anno 1918). Chi desideri vedere come si possa affrontare la ricerca delle ipersuperficie con un gruppo continuo di deform. proiettive in sè stesse veda la Mem. dello stesso A.: *Fondamenti di geom. proiettivo-differ.* Rend. del Circ. Matem. di Palermo (1910) tomo 43. Cfr. anche CARTAN Sur la déform. project. des surfaces. Annales de l'École Norm. Supér.

la retta tangente a V_n nella direzione definita dai du, e τ la tangente all'ipersuperficie luogo del punto X nella direzione dei δu, t' la tangente a V_n nel punto considerato che incontra τ. *L'equazione citata è la condizione perchè* t *e* t' *siano coniugate* (rispetto al cono asintoto). Ciò si dimostra subito, osservando che τ è la retta dal punto X al punto $\Sigma X_r \delta u_r = x \Sigma g_r \delta u_r + \Sigma A_{ij} l_{rj} x_i \delta u_r$; cosicchè t' è la retta dal punto x al punto $x + \Sigma x_i d' u_i$, ove

$$d' u_i = \sum_{rj} A_{ij} l_{rj} \delta u_r , \quad \text{cosicchè}$$

$$\Sigma a_{ik} d' u_i du_k = \Sigma l_{rk} \delta u_r du_k .$$

La equazione $\Sigma g_t du_t = 0$ *caratterizza quelle direzioni, tali che la tangente alla direzione corrispondente sulla ipersuperficie luogo del punto* X *incontra l'intersezione degli iperpiani* ξ *e* Ξ.

Accanto alle (3) valgono formole duali:

$$\Xi_i = \gamma_i \xi + \sum_t \lambda_i^t \xi_t . \tag{3$_{\text{bis}}$}$$

Da esse si trae

$$\gamma_i = S X \Xi_i , \quad g_i = S X_i \Xi , \quad \text{donde:}$$

$$\Sigma \gamma_i du_i + \Sigma g_i du_i = d S X \Xi .$$

Quindi *in particolare,* se uno dei differenziali $\Sigma \gamma_i du_i$ e $\Sigma g_i du_i$ è esatto, è esatto anche l'altro. Teorema che si può rendere intuitivo nel modo seguente. Se g è una funzione il cui differenziale è $\Sigma g_i du_i$, allora l'iperpiano passante per $X - gx$ e tangente alla ipersuperficie W luogo di questo punto (determinata a meno della costante additiva che figura in g) è l'iperpiano passante per $X - gx$ e per i punti

$$(X - g x)_i = g x_i + \sum_t l_i^t x_t .$$

Se questi punti sono indipendenti, esso passa per tutti i punti x_i, cioè passa per l'intersezione degli iperpiani ξ e Ξ. Viceversa, se esiste una ipersuperficie W posta in corrispondenza biunivoca con V_n e tale che un punto di W stia sulla retta (x, X), mentre l'iperpiano tangente passi per l'intersezione degli iperpiani omologhi ξ, Ξ, il differenziale $\Sigma g_i du_i$ è esatto. Ma, poichè le ipotesi fatte sono autoduali, ne segue che anche $\Sigma \gamma_i du_i$ è esatto, come avevamo già provato per via analitica.

§ 108. — Alcune generalizzazioni.

La precedente teoria si può generalizzare alle varietà di ∞^n elementi, ciascuno composto di un punto x e di un corrispondente iperpiano ξ che passa per x, dipendenti da n parametri u_i e soddisfacenti alle:

$$S\xi x = S\xi x_i = S\xi_i x = 0\,,$$

anche quando lo spazio ambiente è a $n+d+1$ dimensioni con $d>0$. (Per $d=0$ si ritorna alla teoria delle ipersuperficie). Pongasi

$$F_2 = S\xi d^2 x = -S d\xi d x = S x d^2 \xi = \Sigma a_{rs} du_r du_s$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} S\,(d\,x d^2 \xi - d\xi d^2 x) = \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t\,.$$

Moltiplicando le x per uno stesso fattore ρ, le ξ per un fattore σ, i nostri elementi restano immutati, e le forme F_2, Φ_3 si mutano in $\rho\sigma F_2$, $\rho\sigma\Phi_3 + \frac{3}{2}(\sigma d\rho - \rho d\sigma) F_2 = \rho\sigma\left[\Phi_3 + \frac{3}{2} F_2 d\log\frac{\rho}{\sigma}\right]$. Nel sistema lineare $\Phi_3 + F_2 \Sigma \lambda_i du_i$ potremmo scegliere una forma F_3 apolare ad F_2, almeno se (come supporremo d'ora in poi) il discriminante A di F_2, è diverso da zero. Ma *generalmente* non si possono, se $d>0$, determinare, come per le ipersuperficie, i fattori ρ, σ in modo che Φ_3 coincida con F_3, ossia non potremo più scrivere le relazioni di apolarità tra $\Sigma a_{rst} du_r du_s du_t$ ed F_2. Per definire un punto analogo al punto X, dovremo perciò accontentarci di definirlo come uno dei punti che soddisfano alle:

$$S\xi X = 1 \quad S\xi_i X = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Se X è una soluzione di queste equazioni, le altre ne differiranno per una combinazione delle $X^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, d)$, essendo x, $X^{(\lambda)}$ $d+1$ punti linearmente indipendenti soddisfacenti alle:

$$S\xi X^{(\lambda)} = 0 \quad S\xi_i X^{(\lambda)} = 0 ,$$

e cioè posti nello spazio (pseudonormale) *caratteristico* intersezione degli iperpiani ξ e ξ_i. Si noti che l'apice (λ) non è qui un simbolo di calcolo assoluto. In modo correlativo si definiscano Ξ e $\Xi^{(\lambda)}$. Valgono equazioni del tipo:

$$x_{rs} = \Sigma a_{rst} A_{ti} x_i + a_{rs} X + \rho_{rs} x + \sum_{\lambda} p_{rs}^{(\lambda)} X^{(\lambda)}$$

$$\xi_{rs} = -\Sigma a_{rst} A_{ti} \xi_i + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi + \sum_{\lambda} \pi_{rs}^{(\lambda)} \Xi^{(\lambda)} .$$

Diciamo che due tali varietà V_n, V'_n di elementi in corrispondenza biunivoca sono *proiettivamente applicabili in due punti omologhi* A, A', *se, proiettando dallo spazio caratteristico di* V_n *i piani osculatori in* A *alle curve di* V_n *uscenti da* A, *e dallo spazio caratteristico di* V'_n *i piani osculatori in* A' *alle curve omologhe di* V'_n *uscenti da* A', *si trovano stelle collineari.*

Vale il seg. teorema di Čech, per la cui dimostrazione (affatto simile a quella da noi data per le ipersuperficie) rinviamo alla Mem. del Čech più volte citata:

Due varietà V_n *e* V'_n *sono proiettivamente applicabili, se hanno uguale elemento lineare proiettivo* $F_3 : F_2$. Ne segue che, in caso affermativo, anche *le varietà correlative sono proiettivamente applicabili tra loro.*

§ 109. — Le superficie V_2 non paraboliche in S_4 e la loro prima forma fondamentale.

Diamo un altro esempio del modo con cui i metodi svolti in questo libro (*) si possono applicare ad altri tipi di varietà iperspaziali, studiando le varietà V di punti a *due* dimensioni contenute in uno spazio a quattro dimensioni, in cui x, y, z, t, w, o ξ, η, ζ, τ, ω sono coordinate non omogenee di punto o di iperpiano. La V sia definita dando queste in funzione di due parametri $u = u_1$ e $v = u_2$. Soli iperpiani tangenti sono gli ∞^1 iperpiani soddisfacenti a

$$(1) \qquad S\xi x = S\xi x_1 = S\xi x_2 = 0 \, .$$

Cerchiamo se tra essi ve ne sono di quelli bitangenti, cioè tangenti in due punti x ed $x + dx$, così chiamando gli iperpiani soddisfacenti alle (1) e alle:

(*) I risultati di questo e dei seg. §§ sono dovuti al Fubini. Questi in altre due Note: *Nuove ricerche di geom. proiettivo - differenziale* (Rend. della R. Acc. dei Lincei ser. 5 vol. 29_2) e *I differenziali controvarianti* (ibidem) si propone di esaminare come i metodi svolti in questo libro si possano applicare alla varietà V_r luogo di punti contenute in uno spazio S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni per $2 \leq r < n$. Uno dei metodi proposti è di studiare l'insieme delle proiezioni di V_r sugli S_{r+1} di S_{n+1}, proiezioni che in S_{r+1} sono ipersuperficie; le forme F_2 ed F_3 per queste dipendono dalla proiezione eseguita; e perciò, data V_r, non sono determinate, ma descrivono sistemi lineari di forme. L'estensione duque si ottiene sostituendo a una coppia di forme F_2 ed F_3 la coppia di due sistemi lineari di forme quadratiche e cubiche, la cui teoria è ancora da costruire.

Si potrebbe anche cercare di costruire una teoria che assuma a punto di partenza delle forme isolate; ma non sempre si trova facilmente come prima forma una forma differenziale quadratica. Si presentano di solito invece forme di grado superiore al secondo. Se quindi non si riesce, coi metodi della teoria delle forme, a dedurne delle forme covarianti quadratiche, bisognerebbe costruire un calcolo assoluto rispetto a forme di grado maggiore di 2. Cosa molto complicata, perchè si trovano formole in cui compare a denominatore lo Hessiano della forma considerata.

$$S\xi(x+dx)=S\xi(x_1+dx_1)=S\xi(x_2+dx_2)=0$$

cioè alle:

(2) $$S\xi x=S\xi x_1=S\xi x_2=S\xi dx_1=S\xi dx_2=0.$$

Queste equazioni nelle ξ sono compatibili se

(3) $$(x,\ x_1,\ x_2,\ dx_1,\ dx_2)=0.$$

Questa è evidentemente un'equazione di carattere intrinseco invariante. Posto

$$(x\,x_1\,x_2\,dx_1\,dx_2)=\Sigma b_{rs}du_r du_s,$$

si debbono distinguere due casi:

α) Il caso *(parabolico)* in cui $B=b_{11}b_{22}-b_{12}^2=0$, che noi per brevità trascuriamo:

β) Il caso generale in cui $B \neq 0$. Cominciamo ad occuparci di questo, ponendo:

$$\frac{(x\,x_1\,x_2\,dx_1\,dx_2)}{\sqrt[3]{|B|}}=\Sigma a_{rs}du_r du_s=F_2$$

il cui discriminante A vale $B:|B|^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{B}$.

Questa forma è *propriamente* intrinseca, è *invariante* per trasformazioni a modulo $+1$, cambia di segno per collineazioni a modulo -1, si moltiplica per $\rho^{\frac{5}{3}}$, se moltiplichiamo le $x, y, \ldots$ per uno stesso fattore positivo ρ. É utile osservare però che noi potremmo trascurare le collineazioni a modulo negativo anche perchè, cambiando di segno tutti i coefficienti di una collineazione, questa non muta, mentre il suo modulo cambia di segno.

Le due direzioni soddisfacenti alla $F_2=0$ sono le direzioni corrispondenti ai due iperpiani bitangenti, che noi indicheremo con $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$.

Il fascio $\lambda\xi^{(1)}+\mu\xi^{(2)}$ è il fascio degli iperpiani S_3 tangenti;

il suo sostegno è il piano S_2 tangente. *Un iperpiano tangente incontra la superficie* V_2 *data nelle due direzioni determinate da*

$$0 = S(\lambda \xi^{(1)} + \mu \xi^{(2)}) d^2 x = -\lambda S d\xi^{(1)} dx - \mu S d\xi^{(2)} dx =$$
$$= \lambda S x d^2 \xi^{(1)} + \mu S x d^2 \xi^{(2)} .$$

Al variare di λ, μ, *questa coppia descrive un' involuzione, i cui raggi doppii sono le direzioni definite da* $F_2 = 0$, *che si ottengono ponendo* $\lambda = 0$ *oppure* $\mu = 0$. Infatti (p. es. per $\mu = 0$) si ha la coppia

$$S \xi^{(1)} d^2 x = S \xi^{(1)} (x_{uu} du^2 + 2 x_{uv} du dv + x_{vv} dv^2) = 0 .$$

Ma il primo membro è un quadrato perfetto; infatti la direzione corrispondente su V_2 a $\xi^{(1)}$ annulla $S \xi^{(1)} dx_1 = S \xi^{(1)} (x_{uu} du + x_{uv} dv)$ e $S \xi^{(1)} dx_2 = S \xi^{(2)} (x_{nv} du + x_{vv} dv)$, cioè annulla le derivate (rispetto a du o dv) del primo membro della equazione considerata.

Quindi: *Mentre un iperpiano generico tangente in un punto generico* O *di* V_2 *incontra* V_2 *in una linea che in* O *ha un punto doppio, i soli iperpiani* $\xi^{(1)}$ *e* $\xi^{(2)}$ *la incontrano in una linea che in* O *ha un cuspide, e si dicono perciò iperpiani cuspidali.*

Così si possono chiamare *cuspidali* (principali, caratteristiche) le linee di V_2 per cui $F_2 = 0$. Esse formano 2 sistemi di ∞^1 linee ciascuno, e sono in qualche modo l'analogo delle asintotiche di una superficie dello spazio ordinario.

Ancora una osservazione sulla forma F_2, che noi assumeremo a base di un calcolo assoluto. I 6 punti x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22} non possono essere linearmente indipendenti, perchè punti di un S_4. Tra essi intercederà pertanto una relazione lineare completamente determinata (a meno di un fattore inessenziale). Perchè se ne intercedessero due, allora p. es. le x_{uu}, x_{vv} sarebbero combinazioni lineari di x, x_u, x_v, x_{uv}; altrettanto avverrebbe di dx_u, dx_v; e quindi le b_{rs} sarebbero tutte nulle, mentre qui si suppone $B \neq 0$. Tale relazione lineare si trova subito. Aggiungendo alla matrice $(x\, x_u\, x_v\, x_{11}\, x_{12}\, x_{22})$ una riga uguale alla prima, si ha un determinante di sesto ordine con due righe uguali e quindi identicamente nullo. Sviluppandolo secondo gli elementi della riga aggiunta si trova

$$(x\, x_u\, x_v\, x_{11}\, x_{12})\, x_{22} - (x\, x_1\, x_2\, x_{11}\, x_{22})\, x_{12} + (x\, x_1\, x_2\, x_{12}\, x_{22})\, x_{11} -$$

$$- (x\, x_1\, x_{11}\, x_{12}\, x_{22})\, x_2 + (x\, x_2\, x_{11}\, x_{12}\, x_{22})\, x_1 - (x_1\, x_2\, x_{11}\, x_{12}\, x_{22})\, x = 0$$

cioè, dividendo per

$$A \sqrt[3]{|B|} = \varepsilon \sqrt[3]{B^2} \qquad (\varepsilon = \operatorname{sgn} A)$$

$$(4) \qquad A_{22}\, x_{22} + 2 A_{12}\, x_{12} + A_{11}\, x_{11} + l^{(1)} x_1 + l^{(2)} x_2 + m\, x = 0$$

ove le l, m sono definite dalle:

$$m = - \varepsilon\, (x_1\, x_2\, x_{11}\, x_{12}\, x_{22}) : \sqrt[3]{B^2}$$

$$l^{(1)} dv - l^{(2)} du = \varepsilon\, (x\ dx\ x_{11}\, x_{12}\, x_{22}) : \sqrt[3]{B^2}$$

(Notisi che $(x\ dx\ x_{11}\, x_{12}\, x_{22}) : \sqrt[3]{|B|}$ è un' espressione intrinseca).

Se ne deduce subito che *le linee principali coincidono con le caratteristiche dell' equazione cui soddisfano le coordinate dei punti della* V_2: ciò che spiega perchè a tali linee si dia anche il nome di linee *caratteristiche.*

Assunte a linee u, v le linee cuspidali, si ha $a_{11} = a_{22} = 0$, e $x_{uv} = x_{12}$; e tale equazione diventa:

$$(5) \qquad 2 A_{12}\, x_{uv} + l^{(1)} x_1 + l^{(2)} x_2 + m\, x = 0\,.$$

Gli iperpiani cuspidali $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ diventano l' uno l' iperpiano

$(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})$ passante per i punti x, x_u, x_v, x_{uu}

l' altro iperpiano

$(x\, x_u\, x_v\, x_{vv})$ passante per i punti x, x_u, x_v, x_{vv}.

Ciò rende evidente che: *Gli iperpiani cuspidali sono quegli iperpiani tangenti che osculano* (hanno un contatto tripunto con) *le linee cuspidali. I due piani* S_2 *osculatori alle linee cuspidali di un sistema in due punti consecutivi di una linea cuspidale dell' altro sistema giacciono in un iperpiano cuspidale.* Infatti i piani osculatori in un punto x e in un punto $x + x_v dv$ alle linee $v =$ cost. uscenti da essi sono i piani l'uno dei punti x, x_v, x_{uu}, l'altro dei punti $x + x_v dv$, $x_u + x_{uv} dv$, $x_{uu} + x_{uuv} dv$. In virtù della (5) e della equazione che se ne deduce derivando rispetto ad u, si riconosce che questi punti giacciono tutti nell'iperpiano dei punti x, x_u, x_v, x_{uu}.

Poichè le proiezioni V_2' di V_2 su un S_3 hanno in questo S_3 per coordinate di un loro punto quattro combinazioni lineari a coefficienti costanti delle x, y, z, t, w, che ancora soddisferanno alle (4) o (5), si ha: *Alle linee cuspidali o caratteristiche di* V_2 *corrisponde su una superficie di* S_3, *che dalle* V_2 *si ottenga con una proiezione, un sistema coniugato.*

Le tangenti alle linee cuspidali di un sistema in due punti consecutivi delle linee cuspidali dell'altro sistema [p. es. la retta dei punti x, x_1 e la retta dei punti $x + x_2 dv$, $x_1 + x_{12} dv$] *giacciono nel piano* S_2 *tangente* (piano dei punti x, x_u, x_v) *e perciò si incontrano in un punto. Altrettanto dicasi per le tangenti alle linee cuspidali dell'altro sistema. I due punti* $2 A_{12} x_1 + l^{(2)} x$, $2 A_{12} x_2 + l^{(1)} x$ *così ottenuti sono quelli che si ottengono da* x *mediante la trasformazione di Laplace applicata alla* (5). *Essi generano pertanto due superficie,* trasformate di Laplace della data, *tra cui intercede corrispondenza delle linee principali.*

Risultati correlativi si ottengono per i sistemi W_2 di ∞^2 iperpiani.

Per ogni iperpiano π *di* W *esistono* ∞^1 *punti di contatto posti su una retta. Da ognuno di questi punti* P *escono due iperpiani di* W *infinitamente vicini a* π; *cioè il cono circoscritto a* W *da uno di questi punti* P *ha* π *come iperpiano bitangente. I due iperpiani citati coincidono per due sole posizioni* P′ *e* P″ *del punto* P: *cioè i coni circoscritti da* P′ *o da* P″ *a* W *hanno, potremmo dire,* π *come iperpiano stazionario* (*). Possiamo definire (per dualità) le sviluppabili *principali* ecc. ecc.

Applichiamo questi risultati alle due varietà $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ decritte dagli iperpiani $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$. Occupiamoci p. es. di

$$\xi^{(1)} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uu}) .$$

(*) Cioè sono duali di una linea in cui a π corrisponde un punto doppio a tangenti coincidenti.

La retta di contatto corrispondente è l'intersezione di $\xi^{(1)}$, $\xi^{(1)}_u$, $\xi^{(1)}_v$. E, per semplicità di calcolo, scriviamo la (5) nella forma:

$$x_{uv} = g^{(1)} x_1 + g^{(2)} x_2 + n x . \tag{6}$$

Si trova, *scrivendo senz'altro* ξ *anzichè* $\xi^{(1)}$, e tenendo conto di questa:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_u &= g^{(2)} \xi + (x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}) \\ \xi_v &= 2 g^{(1)} \xi + (x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uu}) . \end{aligned} \right. \tag{7}$$

I punti x ed x_u giacciono pertanto in ξ, ξ_u, ξ_v. Quindi: *La rigata delle rette tangenti alle linee principali* v = cost. *è la rigata delle rette di contatto della varietà* $W^{(1)}$ *formata dai corrispondenti iperpiani principali* $\xi^{(1)}$. E un risultato analogo vale per $W^{(2)}$. E si osservi che tale rigata è il luogo dei punti $x + w x_u$ (*) e che appunto valgono le:

$$S \xi (x + w x_u) = S \xi (x + w x_u)_u = S \xi (x + w x_u)_v =$$

$$= S \xi (x + w x_u)_w = 0$$

cioè *che la rigata* V_3 *formata dalle tangenti alle linee principali* v = cost. *ha come iperpiano tangente lungo tutta una generatrice il corrispondente iperpiano principale* $\xi^{(1)}$.

Si può dimostrare facilmente che *le due rigate* V_3 *sono trasformate di Laplace l'una dell'altra, e che le corrispondenti sviluppabili principali o caratteristiche corrispondono proprio alle linee principali della superficie iniziale* V_2.

Infatti i sei punti x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}, x_{uuu} di uno spazio a *quattro* dimensioni non possono essere linearmente indipendenti, e, poichè i primi cinque non sono legati da alcuna relazione lineare, l'ultimo x_{uuu} è combinazione lineare dei precedenti. Basta dunque vedere la prima delle (7), e ricordare la definizione di $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ per dedurre che $\xi^{(1)}_u$ è combinazione lineare di $\xi^{(1)}$ e di $\xi^{(2)}$; altrettanto si trova per $\xi^{(2)}_v$: ciò che prova il nostro teorema.

(*) Non si confonda con la w del § 109.

Troviamo su una generatrice di una delle nostre ipersuperficie rigate, p. es. di $V_3^{(1)}$ i due punti principali. Essi sono i punti comuni a ξ, ξ_u, ξ_v e rispettivamente a ξ_{uu} od a ξ_{vv}; cioè essi sono quei punti $x' = x + w' x_u$ della retta di contatto che soddisfano alla: $S\,\xi_{uu}\,x' = 0$ [oppure $S\,\xi_{vv}\,x' = 0$], che, per le $S\,\xi_u\,x' = 0$ [$S\xi_v x' = 0$] è equivalente alla $S\,\xi_u\,x'_u = 0$ [oppure $S\xi_v x'_v = 0$]. Il primo punto è perciò $x' = x$ (per cui $w' = 0$). Il secondo è $x' = x_u - g^{(2)} x$, per cui $x'_v = g^{(1)} x_u + (n + g_v^{(2)})\,x$. Quindi:

I trasformati di Laplace del punto x *sono insieme allo stesso punto* x , *i punti principali delle due ipersuperficie rigate formate dalle tangenti principali dell'uno o dell'altro sistema.*

§ 110. — La seconda forma fondamentale di una V_2 in S_4.

A) La forma F_5.

Per completare la determinazione della nostra superficie occorrono altri elementi oltre la forma F_2 e l'equazione (4) o (6) del § 109. Per trovarli potremmo ricorrere a semplici considerazioni analitiche, o procedere per via geometrica. Scegliamo questa seconda via. Gli S_2 osculatori ad una linea C uscente da un punto x di V_2 sono quelli determinati dai tre punti

$$x, \quad \Sigma\, x_r\, du_r, \quad \Sigma\, x_r\, \delta^2 u_r + \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, du_s\,.$$

Se noi teniamo fissi x e la direzione $du_1 : du_2$, facendo variare la linea C uscente in questa direzione, gli S_2 osculatori descriveranno lo S_3 determinato dai punti

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, du_s$$

che noi chiameremo lo S_3 *osculatore* nel punto x alla direzione $du : dv$, perchè è osculatore a tutte le curve uscenti da x in tale direzione.

Quali sono le curve tali che lo S_3 *osculatore in un loro punto* *alla loro direzione coincide con lo* S_3 *iperosculatore alla curva? (cioè ha un contatto quadripunto con questa?).* Esse sono evidentemente le curve, per cui la forma impropriamente intrinseca

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{|A|}}(x,\ x_1,\ x_2,\ \Sigma x_{rs} du_r du_s,\ d^3 x)$$

è nulla. Questa forma vale evidentemente

$$3\,\frac{du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u}{\sqrt{|A|}}(x,\ x_1,\ x_2,\ x_{11}du + x_{12}dv,\ x_{21}du + x_{22}du) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{|A|}}(x,\ x_1,\ x_2,\ \Sigma x_{rs} du_r du_s,\ \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t) =$$

$$= 3\sqrt{|A|}\,F_2\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) + \Phi_5$$

ove:

$$(2) \qquad \Phi_5 = \frac{1}{\sqrt{|A|}}(x,\ x_1,\ x_2,\ \Sigma x_{rs} du_r du_s,\ \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t)$$

è pure una forma (impropriamente (*)) intrinseca dipendente però *dai soli differenziali primi.* Essa resta, come F_2, invariata per collineazioni a modulo 1; vediamo ciò che avviene quando le x, $y, \ldots$, si moltiplicano per uno stesso fattore ρ. La F_2 si muta in $\overline{F}_2 = \rho^{\frac{5}{3}} F_2$. Facilmente si verifica col calcolo effettivo dei nuovi valori di $\delta^2 u$, $\delta^2 v$ che il nuovo valore di

$$\sqrt{A}\,F_2\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)$$

è

$$\rho^{\frac{10}{3}}\sqrt{A}\,F_2\,(du\,\delta^2 u - dv\,\delta^2 u) + F_2^2 R_1,$$

ove R_1 è una forma di primo grado in du, dv, che dipende da ρ.

(*) perchè tali sono $\frac{1}{\sqrt{|A|}}(x,\ x_1,\ x_2,\ d^2x,\ d^3x)$ e $3\sqrt{|A|}\,F_2\,(du\,\delta^2 v -$ $- dv\,\delta^2 u)$, di cui essa è differenza.

Poichè anche $\frac{1}{\sqrt{|A|}}(x, x_1, x_2, d^2x, d^3x)$ resta moltiplicato per $\rho^5 : \rho^{\frac{5}{3}} = \rho^{\frac{10}{3}}$, troviamo che il nuovo valore di Φ_5 vale

$$\overline{\Phi}_5 = \rho^{\frac{10}{3}} \Phi_5 - 3F_2^2 R_1 .$$

Cerchiamo di sostituire alla Φ_5 una forma di comportamento più semplice. Servirà ancora il metodo delle forme *apolari*, che ci ha tante volte servito in questo libro. Cerchiamo di scrivere Φ_5 nella forma:

$$\Phi_5 = F_5 + F_2 F_3 + F_2^2 F_1, \quad (*)$$

ove F_5 ed F_3 siano apolari ad F_2. Poniamo:

$$X = \frac{1}{2} \Sigma A_{rs} x_{rs} = -\frac{1}{2} l^{(1)} x_1 - \frac{1}{2} l^{(2)} x_2 - \frac{m}{2} x$$

$$\Sigma \overline{x}_{rs} du_r du_s = \Sigma x_{rs} du_r du_s - XF_2, \quad \text{cosicchè}$$

$$\Sigma A_{rs} \overline{x}_{rs} = 0$$

(cioé la forma $\Sigma \overline{x}_{rs} du_r du_s$ è apolare ad F_2) e, derivando:

$$\Sigma \overline{x}_{rst} du_r du_s du_t = \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t - F_2 dX$$

$$dX = -\frac{1}{2} l^{(1)} dx_1 - \frac{1}{2} l^{(2)} dx_2 + \text{ termini in } x, x_1, x_2 .$$

$$\Sigma A_{rs} \overline{x}_{rst} = 0 .$$

(*) Questa trasformazione, che io ho chiamato *divisione covariante di* Φ_5 *per* F_2, è possibile in uno e in uno solo modo, come si vede p. es. osservando che, se F_2 è scritto nella forma $2a_{12}\, du\, dv$, le F_i sono del tipo $a\, du^i + b\, dv^i$. Se F_2, Φ_5 hanno carattere intrinseco, lo hanno pure le forme F_1, F_3, F_5 così determinate (§ 4 E).

Sarà poi:

$$\Phi_5 = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\left(x,\ x_1,\ x_2,\ dx_1 du + dx_2 dv,\ -\frac{1}{2} l^{(1)} dx_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} l^{(2)} dx_2\right) F_2 + \frac{1}{\sqrt{A}}(x,\ x_1,\ x_2,\ \Sigma\, x_{rs} du_r du_s,\ \Sigma\, \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t) =$$

$$= -\frac{1}{2}(l^{(2)} du - l^{(1)} dv) F_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{|A|}}(x,\ x_1,\ x_2,\ \Sigma\, \bar{x}_{rs} du_r du_s,\qquad \Sigma\, \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t).$$

[Si ricordi che X è combinazione lineare delle x, x_1, x_2]. Poichè, se φ_2 e φ_3 sono due forme apolari alla F_2, il loro prodotto si può scrivere nella forma $\varphi_5 + \varphi_1 F_2^2$, ove φ_5 è apolare ad F_2 (*), ne otteniamo in conclusione (essendo $\Sigma\, \bar{x}_{rs} du_r du_s$ e $\Sigma\, \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t$ apolari ad F_2) che

$$\Phi_5 = F_1 F_2^2 + F_5,$$

ove F_1 è una forma di primo grado in du, dv, F_5 una forma di quinto grado apolare ad F_2. *Moltiplicando le* x *per un fattore positivo* ρ, la F_1 si trasforma in modo complicato, mentre F_5 si muta semplicemente in $\rho^{\frac{10}{3}} F_5$, cosicchè

$$\frac{F_5}{F_2^2}$$

resta *invariato;* questa espressione è un *invariante* (improprio).

Anche qui possiamo definire delle coordinate *normali*, imponendo che il quoziente Δ di convenienti potenze dei discriminanti di

(*) Ciò si vede subito, riducendo F_2 alla forma $2 a_{12} du\, dv$.

F_2, F_5, quoziente che è una espressione intrinseca, abbia un valore numerico prefissato. Sarà *anormale* il caso $\Delta = 0$. I valori corrispondenti φ_1, φ_2, φ_5, delle F_1, F_2, F_5, delle tre forme costituiscono un sistema di forme *intrinseco* ed *invariante* della nostra superficie. Si tratta di vedere se da esse questa è determinata.

B) Significato geometrico della F_5.

Prima di occuparci di questo problema, cerchiamo di trovare il significato geometrico della nuova forma F_5. Assumiamo coordinate non omogenee, ponendo $w = 1$. Chiameremo iperpiano all'infinito l'iperpiano $w = 0$; e sia O un punto generico della superficie. L'iperpiano $w = 0$ è per ora assoggettato alla sola condizione di non contenere O. Sceglieremo ad assi delle x, y le tangenti principali, a iperpiani $z = 0$ e $t = 0$ i corrispondenti iperpiani tangenti cuspidali. Trascurando i termini di 4° ordine varranno nell'intorno di O formole del tipo

$$z = x^2 + h_{111} x^3 + 3 h_{112} x^2 y + 3 h_{122} x y^2 + h_{222} y^3 + \dots$$

$$t = y^2 + k_{111} x^3 + 3 k_{112} x^2 y + 3 k_{122} x y^2 + k_{222} y^3 + \dots$$

dove le h, k sono delle costanti. Le quadriche che tagliano la V_2 in una linea che in O ha un punto quadruplo sono le quadriche

$$\lambda (t - y^2 - k_{111} xz - 3 k_{112} z y - 3 k_{122} x t - k_{222} y t) +$$

$$+ \mu (z - x^2 - h_{111} x z - 3 h_{112} z y - 3 h_{122} x t - h_{222} y t) +$$

$$+ \nu z^2 + 2 \rho z t + \sigma t^2 = 0 .$$

Per $\lambda = 0$ contengono l'asse delle y, per $\mu = 0$ l'asse delle x. Nel punto $(x', 0, 0, 0, 0, w')$ dell'asse delle x quelle delle precedenti quadriche che contengono l'asse delle x hanno come iperpiano tangente

$$x' (- k_{111} z - 3 k_{122} t) + w' t = 0$$

cosicchè l'iperpiano $z=0$ ha (se $k_{111} \neq 0$) come punto di contatto $\frac{w'}{x'} = 3k_{122}$. Se noi scegliamo *questo punto* come punto all'∞ dell'asse delle x (cioè come punto $y=z=t=w=0$, punto che si poteva ancora scegliere ad arbitrio sull'asse delle x) sarà $k_{122}=0$. Così sarà $h_{112}=0$, purchè a punto all'∞ dell'asse delle y scegliamo (se $h_{222} \neq 0$) il punto di contatto dell'iperpiano $t=0$ con quelle delle nostre quadriche che passano per l'asse delle y. In sostanza noi con ciò *abbiamo fissato sul piano tangente* xy *una retta* (la congiungente i precedenti punti di contatto, per cui facciamo passare l'iperpiano $w=0$). Prendiamo ora il piano polare del punto all'∞ dell'asse delle x rispetto a quelle delle nostre quadriche che passano per l'asse delle y:

$$-2x - h_{111}z - 3h_{122}t = 0 .$$

Se noi lo assumiamo a iperpiano coordinato $x=0$ (ciò che è lecito, com'è ben evidente) sarà $h_{111}=h_{122}=0$. In modo analogo scegliendo l'iperpiano $y=0$, otterremo $k_{222}=k_{112}=0$. In questo modo i nostri sviluppi si riducono alla forma:

$$t = y^2 + Ax^3 + \dots \qquad z = x^2 + A'y^3 + \dots$$

ove, come prima, sono trascurati i termini di quart'ordine.

Gli iperpiani $z=0$, $t=0$, $x=0$, $y=0$ sono stati completamente determinati; resta solo *l'arbitrarietà dell'iperpiano* w $=0$ (scelto per iperpiano all'∞), *per il quale è soltanto fissata la retta del piano tangente* xy, *per cui deve passare. Il punto all'*∞ *dell'asse delle* x *ha come iperpiani polari rispetto alle nostre quadriche* $\lambda A'z + 2\mu x = 0$, *i quali sono il fascio di iperpiani attorno al piano* $x=z=0$, *che,* come vedremo, *è osculatore a una linea principale. E analogamente dicasi del piano* $y=z=0$.

Infatti $z=0$, essendo un iperpiano cuspidale, contiene tre punti infinitamente vicini della corrispondente linea principale; basterà dimostrare che in O su tale linea è $d^2x=0$. Troviamo l'equazione delle linee principali. Posto $x=u$, $y=v$, essa è:

$$0 = \begin{vmatrix} dz_x & dt_x \\ dz_y & dt_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2dx + \dots & 6Axdx + \dots \\ 6A'ydy + \dots & 2dy + \dots \end{vmatrix}$$

ove i termini non scritti sono binomii di primo grado in dx, dy, i cui coefficienti sono nulli del second' ordine almeno per $x = y = 0$. Tale equazione è dunque

$$0 = P_{11} dx^2 + 2(1 + P_{12}) dx dy + P_{22} dy^2$$

ove le P sono infinitesime almeno del second' ordine per $x = y = 0$. Differenziando si avrà, trascurando i termini nulli per $x = y = 0$

$$dx d^2 y + dy d^2 x = 0 .$$

Quindi una direzione principale è $dx = 0$, e per la linea principale corrispondente vale la $d^2 x = 0$, come volevamo provare. (Che anche $z = 0$ sia osculatore, si può provare anche osservando che, trascurando i termini nulli per $x = y = 0$ si ha: $d^2 z = = 2 dx^2$, che è nullo per $dx = 0$). Si noti che è anche

$$F_2 = Q_{12} dx^2 + 2(1 + Q_{12}) dx dy + Q_{22} dy^2, \tag{3}$$

ove le Q sono pure infinitesimi del second' ordine almeno per $x = y = 0$, i simboli di Christoffel invece almeno del primo. Nel punto O pertanto $\delta^2 x = d^2 x$, $\delta^2 y = d^2 y$. Ricordando questo, se ne deduce che le derivate seconde covarianti di z e di t rispetto $x = u = u_1$ ed $y = v = u_2$ coincidono in O con le ordinarie. E, poichè

$$d^3 z = z \delta^3 x + z_y \delta^3 y + \Sigma z_{rs} du_r \delta^2 u_s + \Sigma z_{rst} du_r du_s du_t ,$$

$$z_x = z_y = 0 \quad \text{(nel punto } O)$$

e la stessa formola vale, sostituendo a $\delta^2 u_s$ le $d^2 u_s$, alle derivate covarianti le ordinarie, avremo che in O anche le derivate terze covarianti di z e di t rispetto ad $x = u_1$ ed $y = u_2$ coincidono con le ordinarie. Si calcola così subito che, a meno di un fattore *puramente numerico*, è, nel punto O:

$$F_5 = A dx^5 - A' dy^5 .$$

L' intersezione della nostra superficie coll' iperpiano $x - \mu y = 0$

è una curva, che dall'iperpiano tangente $z + \lambda t = 0$ è intersecata nei punti ove

$$x^2 + \lambda y^2 + A' y^3 + \lambda A x^3 + \ldots = 0, \quad \text{ossia:}$$

$$0 = (\lambda + \mu^2) y^2 + (A' + \lambda A \mu^3) y^3 + \ldots$$

Avremo un punto *quadruplo* d'intersezione in O se

$$\lambda + \mu^2 = 0 \qquad A' + \lambda A \mu^3 = 0$$

ossia

$$\lambda = -\mu^2 \qquad A' - A \mu^5 = 0 .$$

Gli iperpiani $\mathrm{x} - \mu y = 0$ *tagliano* V_2 *in una curva che ha con un iperpiano tangente* (precisamente con $z - \mu^2 t = 0$) *una intersezione quadrupla soltanto quando l'iperpiano considerato passa per una delle* 5 *direzioni che annullano* F_5.

Oss. Nel ragionamento precedente si è escluso che $k_{111} = 0$ oppure $h_{222} = 0$. Se fosse $k_{111} = 0$ le nostre quadriche ($\mu = 0$) che passano per l'asse delle x avrebbero tutte sull'asse delle x per punto doppio il punto

$$x = \frac{1}{3 k_{122}} .$$

Dunque anche in questo caso si può rendere k_{122} nullo prendendo questo punto doppio a punto all'∞ dell'asse delle x. Altrettanto dicasi di h_{112}. Se $k_{111} = 0$ oppure $h_{222} = 0$ (caso in cui quelle delle nostre quadriche che passano per l'asse delle x o per l'asse delle y hanno un punto doppio) si ha questa unica differenza *che la* F_5 *si riduce ad una quinta potenza* od *è identicamente nulla* (se $\mathrm{k}_{111} = \mathrm{h}_{222} = 0$): in questo caso analogo a quello delle rigate e delle quadriche dello spazio ordinario), *il discriminante di* F_5 *è nullo* (caso *anormale*, perchè non si possono coi metodi precedenti normare le coordinate di un punto della V_2). Abbiamo così trovato un primo carattere geometrico delle superficie anormali.

I due punti scelti come punti all' ∞ *degli assi delle* x, y (punti di contatto di $z = 0$ e $t = 0$ con certe quadriche) *non* *sono che i due punti trasformati di Laplace del punto* x, (sopra trovati per tutt'altra via). Infatti nel sistema di coordinate testè definito tali punti all'∞ hanno uno per coordinate x_u, y_u, z_u, t_u, $w = 0$ e l'altro x_v, y_v, z_v, t_v, 0 (tutte calcolate nel punto O della V_2). Basterà dimostrare che nel punto O i coefficienti g delle (6) del § 109 sono nulli; e, poichè nel punto O si ha $x_u = 1$, $y_v = 1$, $x_v = y_u = 0$, basterà provare che ivi $x_{uv} = y_{uv} = 0$. Si avranno infatti in O due sviluppi

$$x = u + \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + \dots \qquad y = v + pu^2 + 2quv + rv^2 + \dots$$

Sostituendo nella F_2, data dalla (3), i coefficienti di du^2 e di dv^2 devono risultare identicamente nulli. Ora tali coefficienti si trovano, con la materiale sostituzione

$$4(pu + qv) + \dots, \qquad 4(\beta u + \gamma v) + \dots,$$

dove i termini trascurati sono del secondo grado. Perciò in particolare $p = q = \beta = \gamma = 0$, da cui segue appunto che per $u = v = 0$ si ha $x_{uv} = y_{uv} = 0$. Segue anche $x_{vv} = y_{uu} = 0$, cioè *che il piano* $x = z = 0$ *è osculatore alla linea* $u = 0$, il *piano* $y = t = 0$ *alla* $v = 0$, *come già sapevamo*. Possiamo dedurre un nuovo modo di definire geometricamente gli iperpiani $x = 0$, $y = 0$. Così p. es. l'iperpiano $x = 0$ é un iperpiano passante per il piano osculatore della $v = 0$; se $x' = 0$ è uno qualsiasi degli iperpiani passanti per esso, gli altri sono $x' + \lambda z = 0$. Quello da noi scelto per iperpiano $x = 0$ è *l'unico tale* che $\mathrm{z} - \mathrm{x}^2 = 0$ *sia una quadrica, la cui intersezione con* V_2 *sia una linea avente in* O *un punto triplo, le cui tangenti coincidono con la direzione principale* $\mathrm{y} = 0$ (con l'asse delle x). Le quadriche $z - x^2 = 0$, o anche più generalmente le quadriche $\lambda z^2 + 2\mu z t + \nu z^2 + z - x^2 = 0$ sono facilmente definibili per via geometrica.

§ 111. — Le equazioni differenziali fondamentali. (F)

Per risalire dalle forme F_1, F_2, F_5 alle superficie dovremo al solito ricorrere ad equazioni differenziali, le cui condizioni d'integrabilità daranno tutte le relazioni intercedenti tra le forme.

Noi ci limiteremo a studiarle nel caso che le u, v siano le linee principali, scrivendole nella forma:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_{uuu} &= A\,x_{vv} + B\,x_{uu} + p\,x_u + q\,x_v + r\,x \\ x_{vvv} &= B'\,x_{vv} + A'\,x_{uu} + \varkappa\,x_u + \pi\,x_v + \rho\,x \\ x_{uv} &= h\,x_u + k\,x_v + l\,x\,. \end{aligned}\right.$$

Notiamo, che posto $a_{12} = e^{\alpha}$, si ha

$$(x\,x_u\,x_v\,x_{uu}\,x_{vv}) = 2\,e^{3\alpha}$$

donde, derivando rispetto u, oppure rispetto v:

$$(2)\qquad (2\,k + B) = 3\,\alpha_u\,,\quad (2\,h + B') = 3\,\alpha_v\,.$$

D'altra parte

$$F_1 F_2^2 + F_5 = e^{-\alpha}\,(x,\; x_1\,,\; x_2\,,\; x_{uu}\,du^2 + x_{vv}\,dv^2,\; \Sigma\,x_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t)\,.$$

Ora

$$x_{111} = \frac{\partial\,x_{11}}{\partial u} - 2\,\alpha_u\,x_{11} = \frac{\partial}{\partial u}\,(x_{uu} - \alpha_u\,x_u) - 2\,\alpha_u\,(x_{uu} - \alpha_u\,x_u)$$

$$x_{112} = \frac{\partial\,x_{11}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\,(x_{uu} - \alpha_u\,x_u) = \frac{\partial}{\partial u}\,(x_{uv}) - \alpha_{uv}\,x_u - \alpha_u\,x_{uv}$$

$$x_{221} = \qquad\qquad = \frac{\partial}{\partial v}\,(x_{uv}) - \alpha_{uv}\,x_v - \alpha_v\,x_{uv}$$

$$x_{222} = \qquad\qquad = \frac{\partial}{\partial v}\,(x_{vv} - \alpha_v\,x_v) - 2\,\alpha_v\,(x_{vv} - \alpha_v\,x_v)\,.$$

Quindi:

$$F_1 F_2^2 + F_5 = 2\,e^{2\alpha} \times$$

$$\left|\begin{matrix} du^2 & dv^2 \\ (B - 3\,\alpha_u)\,du^3 + 3\,h\,du^2\,dv + A'\,dv^3 & A\,du^3 + 3\,k\,du\,dv^2 + (B' - 3\alpha_v)\,dv^3 \end{matrix}\right|$$

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & F_1 F_2^2 + F_5 = 2\,e^{2\alpha}\left[A\,du^5 - A'\,dv^5\right] + \\
& + 2\,e^{2\alpha} du^2 dv^2 \left[\left\{3\,(k+\alpha_u) - B\right\} du + \left\{B' - 3\,(h+\alpha_v)\right\} dv\right].
\end{aligned}
$$

Assegnare F_1, F_5, F_2 equivale in virtù delle (2) e (3) ad assegnare le A, A', B, B', h, k. Dimostreremo che possiamo calcolare i residui coefficienti l, p, q, r, π, $\varkappa$, ρ. Ora derivando l'ultima delle (1) si deduce, tenendo conto della prima:

$$
\begin{aligned}
x_{uuuv} &= h\,A\,x_{vv} + (2\,h_u + l + h\,B + h\,k)\,x_{uu} + \\
& + (h\,p + \lambda)\,x_u + (h\,q + \mu)\,x_v + (h\,r + \nu)\,x
\end{aligned}
$$

ove λ, μ, ν sono espressioni formate con le h, k, l e loro derivate, che ci è inutile scrivere esplicitamente.

Dalla prima delle (1) si deduce, tenendo conto delle altre:

$$
\begin{aligned}
x_{uuuv} &= (B_v + A\,A' + B\,h)\,x_{uu} + (A_v + A\,B' + q)\,x_{vv} + \\
& + (A\,\varkappa + p_v + p\,h + \tau)\,x_u + (A\,\pi + q_v + p\,k + r + z)\,x_v + \\
& + (A\,\rho + r_v + p\,l + w)\,x
\end{aligned}
$$

ove τ, z, w sono formate esclusivamente con le A, B, A', B', h, k, l. Confrontando successivamente i coefficienti di x_{uu}, x_{vv}, x_u, x_v, x, si determinano l'uno dopo l'altro i valori di

$$
l \qquad q \qquad p_v + A\,\varkappa \qquad A\,\pi + p\,k + r \qquad A\,\rho + r_v + p\,l - h\,r\,.
$$

Similmente dal calcolo di x_{vvvu} si deducono i valori

$$
l \qquad \varkappa \qquad \pi_u + A'\,q \qquad A'\,p + \pi\,h + \rho \qquad A'\,r + \rho_u + \pi\,l - h\,\rho\,.
$$

Cosicchè in conclusione restano determinati

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & l\,,\ q\,,\ \varkappa\,,\ p_v\,,\ \pi_u\,,\ r + A\,\pi + p\,k\,,\ \rho + A'\,p + \pi\,h\,, \\
& A\,\rho + r_v + p\,l - h\,r\,,\ A'\,r + \rho_u + \pi\,l - h\,\rho
\end{aligned}
$$

In particolare sarà

$$r = -A\pi - pk + M \qquad \rho = -A'p - \pi h + N$$

ove M, N sono note; sostituendo questi valori di r, p nelle ultime delle (4), che sono pure note, si trovano, notando che ρ_v, π_u sono noti, i valori di

$$(5) \quad \begin{cases} -p(-AA' + l - k_v + hk) + (A\pi)_v = p(+AA' + \\ \qquad + I) + (A\pi)_v \\ -\pi(-AA' + l - h_u + hk) + (A'p)_u = \\ \qquad\qquad = \pi(AA' + \mathcal{J}) + (A'p_u), \end{cases}$$

ove I, $\mathcal{J}$ sono gli invarianti dell'ultima delle (1). Insieme ai valori già noti di π_v, p_u ciò basta generalmente a determinare π, p, tutt'al più a meno di costanti arbitrarie.

Senza entrare in particolari di questa ricerca, vogliamo piuttosto caratterizzare le superficie *anormali* (con $A = 0$ oppure $A' = 0$). Se p. es. $A = 0$, la prima delle (1) dà

$$(6) \qquad x_{uuu} = B\,x_{uu} + p\,x_u + q\,x_v + r\,x\,.$$

Se $q = 0$, le $v =$ cost. apparterranno ad un piano S_2, perchè ogni S_2 osculatore (contenente x, x_u, x_{uu}) è anche iperosculatore (contiene x_{uuu}). Se $q \neq 0$, si ricavi dalla (6) il valore di x_v e lo si sostituisca nella equazione che si deduce derivando la stessa (6) rispetto ad u, e sostituendo ad x_{uv} il valore dato dall'ultima delle (1). Si troverà un'equazione lineare omogenea che lega x, x_u, x_{uu}, x_{uuu} ed x_{uuuu}. Le *cinque* soluzioni x, y, z, t, w di questa equazione non identica del *quarto* ordine sono dunque legate da un'equazione

$$(7) \qquad r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 t + r_5 w = 0$$

dove le r sono funzioni della sola v; alla stessa equazione soddisferebbero le

$$\frac{\partial^i x}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial^i y}{\partial u^i}, \ldots, \quad \frac{\partial^i w}{\partial u^i} \qquad \text{per } i = 1, 2, 3$$

e quindi per (6) le $x_v, \ldots, w_v$. Sarebbe pertanto anche

$$\text{(8)} \qquad \frac{dr_1}{dv} x + \frac{dr_2}{dv} y + \ldots + \frac{dr_5}{dv} w = 0 .$$

Confrontando le (7), (8) si ha che due casi sono possibili:

1°) Le $\frac{dr_i}{dv}$ sono proporzionali alle r_i; sopprimendo un fattore comune, sarebbe $r_i =$ cost., e quindi la nostra V_2 apparterrebbe ad un S_3, caso che abbiamo escluso.

2°) Le (7), (8) sono equazioni distinte, e rappresentano perciò un S_2 che contiene la corrispondente $v =$ cost. Ritorniamo cioè al caso $q = 0$; del resto avevamo sopra già calcolato il valore di q; da quel calcolo si deduce appunto che, se $A = 0$, anche $q = 0$. In conclusione dunque: *Le superficie anormali sono tutte e sole quelle per cui uno dei sistemi di linee principali è formato da linee piane* (di un S_2). *Se la forma* F_5 *fosse identicamente nulla* ($A = A' = 0$), *ciò avverrebbe per entrambi i sistemi di linee principali, e viceversa.* (*)

(*) Per l'estensione del concetto di superficie proiettivamente applicabili cfr. le Note del Dr. Bersano:

« Contatti del secondo e del terzo ordine tra varietà iperspaziali ». Rend. Istituto Lombardo Vol. LVI (1923) e « Sulla applicabilità proiettiva di una particolare classe di varietà iperspaziali » Rend. Lincei, Vol. XXXII serie V (1923).

In dette Note si dimostrano i seguenti teoremi:

I. Condizione necessaria e sufficiente perchè due varietà V_k di S_n siano proiettivamente applicabili del secondo (del terzo) ordine é che – essendo le due V_k riferite biunivocamente in modo che a punti omologhi spettino eguali valori delle coordinate curvilinee – siano collineari le configurazioni degli S_2 [S_3] osculatori – in punti omologhi – a curve omologhe. (Questo teorema costituisce un'estensione del teorema di Čech di cui al § 20 B).

II. Condizione necessaria e sufficiente perchè due V_k di S_n – che siano ciascuna soluzione di una e una sola equazione alle derivate parziali del secondo ordine – siano proiettivamente applicabili del 2° ordine, è che i

§ 112. — Superficie rigáte appartenenti ad uno spazio ad un numero impari di dimensioni. (Č)

Questo e il seguente § riassumono i metodi del Čech per lo studio delle superficie rigate.

Consideriamo una rigata R appartenente allo spazio S_r ad $r = 2n + 1$ dimensioni. Per definire R, partiamo da due curve C_y e C_z, in corrispondenza biunivoca, le coordinate y e z dei punti di C_y e C_z essendo funzioni di un parametro v. Indichiamo con apici le derivate rispetto a v. Il punto generico x di R è

$$(1) \qquad x = t_1 y + t_2 z .$$

---

coni caratteristici uscenti da punti omologhi siano generati da direzioni omologhe. (La corrispondenza tra le due V_k è la stessa di quella del teor. I).

Ne segue che, perchè due V_2 di S_4 siano proiettivamente applicabili del secondo ordine, occorre e basta che le due forme F_2 differiscano soltanto per un fattore.

In quanto alla applicabilitá del 3⁰ ordine, essa trae di conseguenza la collinearità delle due V_2. Infatti se due V_2 (V', V'') sono proiettivamente applicabili del 3⁰ ordine, ad ogni punto O di V' si potrà associare una V''' collineare con V'' e avente in O un contatto del terzo ordine con V'. V''' e V' saranno perciò, in O, legate dalle:

$$x' = x''' ; \quad x'_r = x'''_r ; \quad x'_{rs} = x'''_{rs} ; \quad x'_{rst} = x'''_{rst} + \chi_{st} x'''_r +$$
$$+ \chi_{rt} x'''_s + \chi_{rs} x'''_t \quad (r,\ s,\ t = 1,\ 2) \quad \text{e analoghe}$$

dove $x', \ldots ;\ x''', \ldots,$ sono le coordinate non omogenee rispettivamente di V' e V''' ed è posto: $x_{rst} = \dfrac{\partial^3 x}{\partial u_r \, \partial u_s \, \partial u_t}$. Ne segue che le forme f_1, f_2, f_5 costruite per V' coincidono con quelle costruite per le V'''. Ma V'' e V''' sono collineari, e nella I nota è anzi dimostrato che esistono infinite collineazioni che mutano V'' in una V''' avente in O un contatto del 3⁰ ordine con V'. Tra queste omografie scegliamo quelle che sono unimodulari. Ne seguirà che V' e V'' hanno le stesse forme fondamentali f_1, f_2, f_5. Se ne trae ancora (teor. I) che: Due V_2 di S_4 sono collineari se sono tali le configurazioni degli S_3 osculatori a curve omologhe uscenti da punti omologhi.

Supponiamo, limitandoci a tale caso *generale*, che il determinante

$$(y\,x\,y'\,z' \ldots y^{(n)}\,z^{(n)})$$

non sia identicamente zero, ed, escludendo gli eventuali punti isolati in cui tale determinante svanisce, scegliamo il parametro v in modo che sia identicamente

$$(y\,z\,y'\,z' \ldots y^{(n)}\,z^{(n)}) = \omega = \pm 1\,. \tag{2}$$

La teoria che andiamo ad esporre è la generalizzazione del metodo già usato al Cap. IV nel caso particolare $n = 1$. I punti $y, z, \ldots y^{(n)}, z^{(n)}$ essendo linearmente indipendenti, le coordinate di y e z soddisfano alle equazioni differenziali

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} a_i\,y^{(i)} + b_i\,z^{(i)}, \qquad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} c_i\,y^{(i)} + d_i\,z^{(i)}\,. \tag{3}$$

Derivando (2) si deduce che

$$a_n + d_n = 0\,. \tag{4}$$

È evidente che l'iperpiano

$$\xi = (y\,z\,y'\,z' \ldots y^{(n-1)}\,z^{(n-1)},\quad t_1\,y^{(n)} + t_2\,z^{(n)}) \tag{5}$$

contiene gli S_n osculatori a tutte le curve di R passanti per il punto (1) di R. Esso si dice pertanto l'iperpiano n — tangente (o n — osculatore) di R in x. Si dicono, con Bompiani, *quasiasintotiche* le curve di R tali che, in ogni loro punto, l'iperpiano n — tangente ξ contenga l'S_{n+1} osculatore alla curva. Proprietà caratteristica di una quasiasintotica è evidentemente

$$S\,\xi\,\frac{d^{n+1}}{dv^{n+1}}\,(t_1\,y + t_2\,z) = S\,\xi\,[t_1\,y^{(n+1)} + t_2\,z^{(n+1)} +$$

$$+ (n+1)\,(t_1'\,y^{(n)} + t_2'\,z^{(n)})] = 0\,.$$

Sostituendovi i valori di $y^{(n+1)}$, $z^{(n+1)}$ dati dalle equazioni differenziali (3) ed il valore (5) di ξ si trova

$$(6) \qquad (n+1)(t_1 t_2' - t_2 t_1') + b_n t_1^2 + (d_n - a_n) t_1 t_2 - c_n t_2^2 = 0 .$$

Dalla forma di quest'equazione differenziale si deduce subito il teorema di Bompiani:

Le curve quasiasintotiche di R *segnano sulle generatrici punteggiate tutte proiettive tra di loro.* Di più si vede come al Cap. IV § 34 A, che possiamo scegliere y e z in modo che il punto (1) descriva una quasiasintotica sempre che $t_1 : t_2$ sia costante. Sotto tale ipotesi l'equazione (6) deve ridursi a $t_1 t_2' - t_2 t_1' = 0$ sicchè

$$b_n = c_n = d_n - a_n = 0 .$$

Confrontando con (4) vediamo che

$$a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

sicchè le equazioni (3) diventano

$$(7) \qquad y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)} , \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)} .$$

Le nostre ipotesi restano soddisfatte, introducendo η e ζ al posto di y e z mediante le formole (*) (λ, μ, ν, ρ, essendo numerici)

$$(8) \qquad \eta = \lambda y + \mu z , \quad \zeta = \nu y + \rho z , \quad \lambda\rho - \mu\nu = 1 .$$

Come al Cap. IV § 34 B vediamo che, τ_1, τ_2 essendo cogredienti a t_1, t_2, le *n forme bilineari*

$$(9) \quad f_i(t, \tau) = -b_i t_1 \tau_1 + a_i t_1 \tau_2 - d_i t_2 \tau_1 + c_i t_2 \tau_2 \qquad (i = 0, 1 \dots n-1)$$

(*) Per brevità, supponiamo *orientate* le generatrici di R sicchè non abbiamo bisogno di studiare il caso $\lambda\rho - \mu\nu < 0$.

non cambiano per la trasformazione (8). *E lo stesso vale adunque delle forme quadratiche*

$$(10)\qquad f_i(t) = - b_i t_1^2 + (a_i - d_i)\, t_1 t_2 + c_i t_2^2 \qquad (i = 0,\ 1 \ldots n-1)$$

e delle espressioni

$$(11)\qquad 2 j_i = a_i + d_i \qquad (i = 0,\ 1 \ldots n-1)\,.$$

La rigata R è evidentemente determinata, a meno di collineazioni, dalle forme bilineari (9) o, ciò che è lo stesso, dalle forme quadratiche (10) e dalle j_i. Ma tali forme non sono ancora *invarianti;* infatti le nostre ipotesi restano soddisfatte facendo la trasformazione

$$(12)\qquad Y = \rho\, y\,,\quad Z = \rho\, x\,,\quad V = \int |\rho|^{\frac{2}{n}}\, dv\,.$$

Alle equazioni (3) corrispondono le altre due della stessa forma

$$\frac{d^{n+1} Y}{d V^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^{n-1} Y}{d V^{n-1}} + B_i \frac{d^{n-1} Z}{d V^{n-1}}\,,$$

$$\frac{d^{n+1} Z}{d V^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{d^{n-1} Y}{d V^{n-1}} + D_i \frac{d^{n-1} Z}{d V^{n-1}}\,.$$

Un facile calcolo dà che

$$(13)\qquad \begin{gathered} A_{n-1} - D_{n-1} = |\rho|^{-\frac{4}{n}} (a_{n-1} - d_{n-1}), \\ B_{n-1} = |\rho|^{-\frac{4}{n}}\, b_{n-1}\,,\quad C_{n-1} = |\rho|^{-\frac{4}{n}}\, c_{n-1} \end{gathered}$$

mentre gli altri coefficienti delle equazioni (7) si trasformano in modo complicato. Se ne deduce

$$(13)_{\text{bis}}\qquad \begin{gathered} (A_{n-1} - D_{n-1})^2 + 4 B_{n-1} C_{n-1} = |\rho|^{-\frac{8}{n}} \times \\ \times \left[(a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4 b_{n-1} c_{n-1}\right]. \end{gathered}$$

Se il discriminante di $f_{n-2}(t)$ è diverso da zero, possiamo quindi togliere ogni ambiguità in modo intrinseco ed invariante supponendo che

$$(14) \qquad (a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4 b_{n-1} c_{n-1} = 4 \varepsilon , \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

Possiamo dire *arco proiettivo* di R la variabile v corrispondente alle ipotesi (2) e (14). Le forme bilineari (9) corrispondenti all'ipotesi (14) sono intrinseche ed invarianti.

É facile dedurne il sistema completo degli invarianti proiettivi di R. Per maggior chiarezza, riprendiamo la notazione del Cap. IV ponendo

$$(15) \qquad - b_{n-1} = A , \quad a_{n-1} - d_{n-1} = 2 B, \quad c_{n-1} = C$$

sicchè

$$f_{n-1}(t) = A t_1^2 + 2 B t_1 t_2 + C t_2^2 ,$$

$$B^2 - A C = \varepsilon = \pm 1$$

e poniamo, come al Cap. IV, § 35 B

$$(16) \qquad B'^2 - A' C' = h , \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = k .$$

Supposto $h \neq 0$, noi sappiamo da l. c. che h e k determinano $f_{n-1}(t)$ a meno di sostituzioni (8) a coefficienti numerici. Posto ancora

$$g(t) = \begin{vmatrix} A t_1 + B t_2 , & B t_1 + C t_2 \\ A' t_1 + B' t_2 , & B' t_1 + C' t_2 \end{vmatrix} ,$$

le forme quadratiche $f_{n-1}(t)$, $f'_{n-1}(t) = A' t_1^2 + 2 B' t_1 t_2 + C' t_2^2$ e $g(t)$ sono linearmente indipendenti, se $h \neq 0$, cosicchè valgono delle identità della forma

$$f_i(t) = L_i f_{n-1}(t) + M_i f'_{n-1}(t) + N_i g(t) \quad (i = 0, 1 \dots n-2) .$$

È chiaro che (sotto le ipotesi (14) e $h \neq 0$), *il segno* $\varepsilon = \pm 1$ *e le quantità*

$$(17) \quad \begin{matrix} h\ (h > 0 \ \text{se} \ \varepsilon = -1), \quad k, \quad j_i \quad (i = 0, 1 \ldots n-1) \\ L_i, \quad M_i, \quad N_i \quad (i = 0, 1 \ldots n-2) \end{matrix}$$

formano un sistema completo di invarianti proiettivi di R.

§ 113. — Superficie rigate appartenenti ad uno spazio ad un numero pari di dimensioni. (C)

Consideriamo ora una rigata R appartenente ad uno spazio S_r a $r = 2n$ dimensioni. Come nel caso di r impari, definiamo la rigata mediante due curve direttrici C_y e C_z, sicchè il punto generico di R è anche qui

$$(1) \qquad x = t_1 y + t_2 z$$

y e z dipendendo dal parametro v. Limitiamoci al caso generale supponendo che non siano nulli identicamente tutti i minori del massimo ordine della matrice

$$(2) \qquad \xi = (y z y' z' \ldots y^{(n-1)} z^{(n-1)}) .$$

Tali determinanti sono le coordinate dell'iperpiano ξ che è evidente $(n-1)$ — tangente in tutti i punti della generatrice yz di R. L'iperpiano ξ è di più n — tangente nel punto (1) se

$$(3) \qquad (y z y' z' \ldots y^{(n-1)} z^{(n-1)}, \quad t_1 y^{(n)} + t_2 z^{(n)}) = 0 ,$$

mentre negli altri punti della generatrice (yz) lo spazio n — tangente riempie tutto lo spazio ambiente S_r. Si osservi che la (3) determina univocamente il punto (1) della generatrice generica di R; infatti nel caso contrario, $y^{(n)}$ e $z^{(n)}$ sarebbero per ogni v combinazioni lineari dei punti che compaiono nella matrice (2) donde si concluderebbe facilmente che lo spazio d'appartenenza di S_r avrebbe meno di $2n$ dimensioni, contro l'ipotesi. Determinando, per ogni valore di v, il rapporto $t_1 : t_2$ dalla (3), il punto (1) descrive una curva ben determinata di R che diremo col Bompiani la *curva quasiasintotica* di R. Essa è pertanto l'unica curva di R in cui punti lo spazio n — tangente a R ha dimensione $< 2n$.

Supponiamo d'ora innanzi che la curva C_y sia quasiasintotica sicchè

$$(4) \qquad (y\,z\,y'\,z' \ldots y^{(n-1)}\,z^{(n-1)}\,y^{(n)}) = 0\,;$$

e scegliamo il parametro v in modo che sia identicamente

$$(4)_{\text{bis}} \qquad (y\,z\,y'\,z' \ldots y^{(n-1)}\,z^{(n-1)}\,z^{(n)}) = 1\,,$$

escludendo senz'altro i valori isolati di v in cui il determinante $(4)_{\text{bis}}$ sia uguale a zero. Dalla (4) si deduce che le coordinate di y e z soddisfano all'equazione differenziale della forma

$$(5) \qquad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}\,.$$

In generale $b_{n-1} \neq 0$; se $b_{n-1} \equiv 0$, la (5) dimostra che, in ogni punto della quasiasintotica C_y, l'S_n osculatore a C_y sta nello spazio $(n-1)$ — tangente ivi ad R. Limitiamoci a trattare il caso generale $b_{n-1} \neq 0$.

Le equazioni (4) e $(4)_{\text{bis}}$ restano soddisfatte senza cambiare il parametro v sostituendo a y e z rispettivamente η e ζ dove

$$(6) \qquad \eta = \rho^{n+1} y\,, \quad \zeta = \rho^{-n} z + \lambda\, y$$

ρ e λ essendo funzioni qualunque di v. Ne vogliamo approfittare per semplificare la (5). Eseguendo la (6), alla (5) corrisponde la

$$\eta^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \eta^{(i)} + \beta_i \zeta^{(i)}$$

dove, come un facile calcolo dimostra,

$$(7) \quad \alpha_{n-1} = a_{n-1} - \lambda \rho^n b_{n-1} + n(n+1)\frac{\rho'}{\rho}\,, \quad \beta_{n-1} = \rho^{2n+1} b_{n-1}\,.$$

Possiamo pertanto scegliere ρ e λ in modo che risulti

$$(8) \qquad \alpha_{n-1} = 0\,, \quad \beta_{n-1} = 1\,;$$

infatti a tale scopo occorre e basta scegliere

$$(8)_{\text{bis}} \quad \rho = b_{n-1}^{\;-\frac{1}{2n+1}}\,, \quad \lambda = b_{n-1}^{\;-\frac{n+1}{2n+1}}\left[a_{n-1} - \frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{b'_{n-1}}{b_{n-1}}\right].$$

Le equazioni (4) e $(4)_{\text{bis}}$ restano pure soddisfatte facendo la trasformazione

$$(9) \qquad \mathfrak{y} = \sigma^n y\,, \quad \mathfrak{z} = z\,, \quad \mathfrak{v} = \int \sigma\, dv\,.$$

Alla (5) corrisponde ora la

$$\frac{d^n \mathfrak{y}}{d\mathfrak{v}^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{a}_i \frac{d^i \mathfrak{y}}{d\mathfrak{v}^i} + \mathfrak{b}_i \frac{d^i \mathfrak{z}}{d\mathfrak{v}^i}$$

ed un facile calcolo prova che

$$(9)_{\text{bis}} \quad \mathfrak{a}_{n-1} = \frac{1}{\sigma}\left[a_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}\right], \quad \mathfrak{b}_{n-1} = \sigma^{n-1} b_{n-1}\,.$$

Posto ancora

$$Y = \rho^{n+1}\mathfrak{y}\,, \quad Z = \rho^{-n}\,\mathfrak{z} + \lambda\mathfrak{y}\,, \quad V = \mathfrak{v}\,,$$

sarà, analogamente alla (5),

$$\frac{d^n Y}{d V^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i Y}{d V^i} + B_i \frac{d^i Z}{d V^i}\,.$$

Affinchè risulti $A_{n-1} = 0$, $B_{n-1} = 1$, occorre e basta secondo le $(8)_{\text{bis}}$ che

$$(9)_{ter} \quad \rho = \mathfrak{b}_{n-1}^{-\frac{1}{2n+1}}, \quad \lambda = \mathfrak{b}_{n-1}^{-\frac{n+1}{2n+1}} \left[\mathfrak{a}_{n-1} - \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{d \log \mathfrak{b}_{n-1}}{d \mathfrak{v}}\right].$$

Supponiamo ora che sia $a_{n-1} = 0$, $b_{n-1} = 1$ (il che si poteva raggiungere mediante una trasformazione (6)). Le equazioni $(9)_{bis}$ diventano

$$\mathfrak{a}_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} \frac{\sigma'}{\sigma^2}, \quad \mathfrak{b}_{n-1} = \sigma^{n-1},$$

sicchè le $(9)_{ter}$ dànno

$$\rho = \sigma^{-\frac{n-1}{2n+1}}, \quad \lambda = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2n+1} \sigma^{-\frac{n^2+4n+1}{2n+1}} \sigma'.$$

Abbiamo pertanto ottenuto il risultato: *Si possono in infiniti modi scegliere le curve* C_y *e* C_z, *i fattori delle coordinate* y *e* z, *e il parametro* v, *in modo che valga la* $(4)_{bis}$ *e la*

$$(10) \qquad y^{(n)} = z^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}.$$

La più generale trasformazione che non lede tali ipotesi è

$$(11) \qquad \begin{gathered} Y = \tau^{n^2+n+1} y, \quad Z = \tau^{n(n-1)} z + \frac{3}{2} n(n+1) \tau^{n^2-n-1} \tau' y, \\ V = \int \tau^{2n+1} dv, \end{gathered}$$

τ *essendo funzione arbitraria di* v $(\tau \neq 0)$.

Eseguendo la (11), alla (10) corrisponde la

$$\frac{d^n Y}{d V^n} = \frac{d^{n-1} Z}{d V^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} A_i \frac{d^i Y}{d V^i} + B_i \frac{d^i Z}{d V^i}.$$

Un calcolo piuttosto lungo e che ometto, dà

$$(12) \qquad B_{n-2} = \tau^{-(2n+1)} \left[b_{n-2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} \frac{\tau'}{\tau}\right],$$

$$
(12)_{\text{bis}} \qquad
\begin{aligned}
A_{n-2} = \tau^{-2(2n+1)} \Big[a^{n-2} &- \frac{3}{2}\, n\,(n+1)\, \frac{\tau'}{\tau}\, b_{n-2} + \\
+ \frac{1}{6}\, n(n^2-1)\,(n-4)\, \frac{\tau''}{\tau} &- \frac{1}{24}\, n(n^2-1)\,(4n^2-19n-42)\, \frac{\tau'^2}{\tau^2} \Big] .
\end{aligned}
$$

Derivando la (12) e confrontando con la $(12)_{\text{bis}}$ si deduce che

$$
(12)_{\text{ter}} \qquad
\begin{aligned}
&(n+2)\, A_{n-2} + \frac{1}{3}\, n\,(n+1)\,(n-4)\, \frac{d\, B_{n-2}}{d\, V} - \\
&- \frac{1}{6}\, \frac{n\,(n+1)\,(4n^2-5n+10)}{(n-1)\,(n+2)}\, B^2_{n-2} = \\
&= \tau^{-2(2n+1)} \Big[(n+2)\, a_{n-2} + \frac{1}{3}\, n\,(n+1)\,(n-4)\, b'_{n-2} - \\
&- \frac{1}{6}\, \frac{n\,(n+1)\,(4n^2-5n+10)}{(n-1)\,(n+2)}\, b^2_{n-2} \Big] .
\end{aligned}
$$

L'ultima equazione prova che si può *in generale* togliere ogni ambiguità supponendo

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
a_{n-2} = &- \frac{1}{3}\, \frac{n\,(n+1)\,(n-4)}{n+2}\, b'_{n-2} + \\
&+ \frac{1}{6}\, \frac{n\,(n+1)\,(4n^2-5n+10)}{(n-1)\,(n+2)^2}\, b^2_{n-2} + \varepsilon
\end{aligned}
$$

dove a ε^2 si può dare un valore numerico scelto comunque, purchè diverso da zero, p. es. $\varepsilon = \pm 1$.

Il parametro v corrispondente a (13) può dirsi l'*arco proiettivo* di R; le y e z son perfettamente determinate a meno di una sostituzione unimodulare a coefficienti numerici. Dalla (4) si deduce derivando che, accanto alla (10) vale l'equazione della forma

$$
(14) \qquad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, y^{(i)} + d_i z^{(i)} .
$$

Ed è chiaro che il segno ε e le quantità

$$a_i, \quad b_j, \quad c_k, \; d_k \quad (i = 0, \; 1 \ldots n-3; \; j = 0, \; 1 \ldots n-2; \; k = 0, \; 1 \ldots n-1)$$

formano un sistema completo di invarianti proiettivi di R.

La normalizzazione ora esposta diventa impossibile se vale la (13) con $\varepsilon = 0$. In tal caso il procedimento più rapido è il seguente. La (12) prova che si può in ogni caso scegliere v in modo che sia $b_{n-2} = 0$. Ma tale normalizzazione non è invariante, perchè la condizione $b_{n-2} = 0$ resta inalterata ponendo

$$Y = \tau^{n^2+n+1} y, \quad Z = \tau^{n(n-1)} z, \quad V = \tau^{2n+1} v, \quad \tau \text{ costante.}$$

Mediante tale sostituzione, le a_i, b_i, c_i, d_i si cambiano rispettivamente in A_i, B_i, C_i, D_i dove

$$A_i = t^{n-i} a_i, \quad B_i = t^{n-i-1} b_i, \quad C_i = t^{n-i+2} c_i, \quad D_i = t^{n-i+1} d_i, \quad t = \tau^{2n+1}.$$

Nel caso eccezionale [quando $\varepsilon = 0$ nella (13)], facendo $b_{n-2} = 0$ sarà anche $a_{n-2} = 0$. Sia $a_{n-2} = b_{n-2} = 0$, ma p. es. $a_{n-3} \neq 0$. Allora il differenziale

$$a_{n-3}^{-\frac{1}{n-3}} dv = dw \tag{15}$$

e le quantità

$$\frac{1}{a_{n-3}} \frac{d a_{n-3}}{dw}, \quad \frac{a_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-i}} \quad (i = 0, 1 \ldots n-4), \quad \frac{b_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-i-1}} \quad (i = 0, 1 \ldots n-3),$$

(16)

$$\frac{c_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-i+2}} \quad (i = 0, \; 1 \ldots n-1), \quad \frac{d_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-i+1}} \quad (i = 0, \; 1 \ldots n-1)$$

sono evidentemente invarianti proiettivi di R; e la R è completamente determinata a meno di collineazioni, date le quantità (16) in funzione della variabile w definita da (15). Si osservi che, per determinare le (16), le quadrature non sono necessarie che in apparenza.