CAPITOLO XI (F).

COMPLESSI E CONGRUENZE DI RETTE.

§ 93. — Formole preliminari.

A) Rette e complessi lineari.

1. Noi sappiamo che a coordinate $p_{ik} = - p_{ki}$ della retta unente i punti x, y, z, t ed x', y', z', t' si assumono i determinanti

$$p_{12} = x y' - x' y \,, \quad p_{13} = x z' - x' z \,, \ldots , \quad p_{34} = z t' - z' t \,.$$

Per due rette di coordinate p, q la condizione d'incidenza è:

$$S(p, q) = p_{12} q_{34} + p_{13} q_{42} + p_{14} q_{23} + p_{34} q_{12} + p_{42} q_{13} + p_{23} q_{14} = 0 \,.$$

Le coordinate p di una retta soddisfano alla

$$Sp^2 = 2 (p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23}) = 0 \,.$$

Un complesso lineare è l'insieme delle rette q le cui coordinate soddisfano a un'equazione di primo grado

$$S(\pi, q) = \pi_{12} q_{34} + \pi_{13} q_{42} + \ldots + \pi_{23} q_{14} = 0 \,.$$

Le $\pi_{rs} = - \pi_{rs}$ sono le *coordinate* del complesso; se

$$S\pi^2 = 2\,(\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23})$$

è nullo, il complesso è l'insieme delle rette che si appoggiano alla retta di coordinate $p_{rs} = \pi_{rs}$, che si chiama l'*asse del complesso.* Tali complessi si dicono *speciali.* Come è noto, due complessi lineari si incontrano in una *congruenza* lineare, tre complessi generalmente in un *regolo* (cioè in un sistema di generatrici di una quadrica), quattro complessi in due rette.

Diremo sovente retta p invece di dire retta di coordinate p_{rs}; complesso π invece di dire complesso di coordinate π_{rs}; se p è una retta, il complesso p è il luogo delle rette incidenti alla retta p..

Due complessi (lineari) π, π' sono detti *in involuzione* o *coniugati* se $S\,\pi\,\pi' = 0$. Un complesso lineare π è luogo delle rette p, tali che i complessi (speciali di asse) p sono coniugati a π.

Quando volessimo riservare gli indici ad indicare derivate, porremo:

$$p_{12} = p\,,\quad p_{13} = q\,,\quad p_{14} = r\,,\quad p_{34} = l\,,\quad p_{42} = m\,,\quad p_{23} = n\,;$$

$$\pi_{12} = \pi\,,\quad \pi_{13} = \varkappa\,,\quad \pi_{14} = \rho\,,\quad \pi_{34} = \lambda\,,\quad \pi_{42} = \mu\,,\quad \pi_{23} = \nu\,.$$

B) Alcune identità.

Siano dati n complessi $p_{12}^{(i)}, \ldots, p_{34}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ con $n = 5$ opp. $n = 6$. La matrice, o determinante delle loro coordinate si indicherà scrivendone la sola prima riga

$$(p_{12}^{(1)}p_{12}^{(2)} \ldots . p_{12}^{(n)}) \quad \text{o più semplicemente} \quad (p^{(1)}p^{(2)} \ldots . p^{(n)})$$

e, se $n = 5$, cioè se si tratta di una matrice, con questa scrittura indicheremo anche i suoi massimi minori col segno stabilito dalla seguente convenzione analoga a quella del § 1 A: si *aggiunge* alla matrice una sesta colonna, e si prendono i complementi algebrici dei suoi termini, indicando ordinatamente con π_{34}, π_{42}, π_{23}, π_{12}, π_{13}, π_{14} i complementi di $p_{12}^{(6)}$, $p_{13}^{(6)}$, $p_{14}^{(6)}, \ldots, p_{23}^{(6)}$.

Un determinante $(p^{(1)}\,p^{(2)} \ldots . p^{(6)})$ cambia di segno, scambiando p_{12} con p_{34}, p_{13} con p_{42}, p_{14} con p_{23}, ossia scambiando la terna p, q, r con l, m, n; noi, per moltiplicare $(p^{(1)}\, p^{(2)} \dots p^{(6)})$ per un determinante di egual tipo $(q^{(1)}\, q^{(2)} \dots q^{(6)})$, cambieremo di segno *uno* dei fattori scambiando in esso le terne citate e poi applicheremo la regola solita del prodotto di due determinanti. Troviamo così: *Il prodotto di* $(\mathrm{p}^{(1)}\, \mathrm{p}^{(2)} \dots \mathrm{p}^{(6)})$ *per* $(\mathrm{q}^{(1)}\, \mathrm{q}^{(2)} \dots \mathrm{q}^{(6)})$ *vale il determinante delle* $\mathrm{c}_{ij} = \mathrm{S}\mathrm{p}^{(i)}\, \mathrm{q}^{(j)}$ $(\mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, 2 \dots, 6)$ *cambiato di segno.*

Col *prodotto di due matrici*

$$(p^{(1)}\, p^{(2)} \dots p^{(5)}) \quad \text{e} \quad (q^{(1)}\, q^{(2)} \dots q^{(5)}),$$

una definente i numeri π_{rs}, l'altra i numeri $\varkappa_{rs}$ secondo le precedenti convenzioni, *indicheremo*

$$S\pi\varkappa = \pi_{12}\varkappa_{34} + \pi_{13}\varkappa_{42} + \dots + \pi_{34}\varkappa_{12}.$$

Questo prodotto si potrà ottenere per note regole sul calcolo delle matrici scambiando in una di esse la terna p_{12}, p_{13}, p_{14} con p_{34}, p_{42}, p_{23}, facendo il prodotto nel modo abituale, e quindi cambiando di segno il determinante così ottenuto. Perciò:

Il prodotto $(\mathrm{p}^{(1)}\, \mathrm{p}^{(2)} \dots \mathrm{p}^{(5)})\, (\mathrm{q}^{(1)}\, \mathrm{q}^{(2)} \dots \mathrm{q}^{(5)})$ *vale il determinante delle* $\mathrm{S}\,\mathrm{p}^{(i)}\, \mathrm{q}^{(h)}$ *cambiato di segno.*

C) Collineazioni e correlazioni.

Ad una collineazione T sulle coordinate x, y, z, t di punto corrisponde pure una collineazione (trasform. lineare intera omog.) sulle coordinate p_{rs} di retta che trasforma in sè l'equazione $Slp = 0$, e quindi moltiplica la forma Slp per un fattore. Noi senz'altro *escluderemo* le T a determinante negativo; e ci limiteremo pertanto (§ 2 B) a trasformazioni lineari che moltiplichino la Slp per un fattore positivo. Viceversa ogni trasf. lineare omogenea sulle p che moltiplichi Slp per un fattore positivo definisce una trasform. sulle rette dello spazio che porta rette incidenti in rette incidenti e che perciò equivale ad una collineazione o ad una reciprocità. I due casi si distinguono dal segno del determinante della trasformazione (§ 2 B). Così per es. la

$$l' = p\,,\quad m' = q\,,\quad n' = r\,,\quad p' = l\,,\quad q' = m\,,\quad r' = n$$

è a determinante negativo e definisce pertanto una reciprocità.

Se $\lambda^{(i)}$, $\pi^{(i)}$, sono per $i = 1, 2, \ldots, 6$ due sestuple di complessi, e se $S\lambda^{(i)}\lambda^{(j)} = S\pi^{(i)}\pi^{(j)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$, allora i determinanti $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(6)})$ e $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots, \pi^{(6)})$ sono uguali a meno del segno, come si riconosce innalzandoli al quadrato. Esiste perciò una proiettività o una correlazione che porta le λ nelle μ.

D) Equazioni di una retta.

La retta p, q, r, l, m, n ha in coordinate di punto le equazioni

$$ly + mz + nt = 0 \qquad -lx + rz - qt = 0$$

$$-mx - ry + pt = 0 \qquad -nx + qy - pz = 0\,,$$

che si riducono a due indipendenti. Il punto comune a un'altra retta p', q', ..., n' è il punto

$$lp' + mq' + nr'\,,\quad mn' - m'n\,,\quad nl' - n'l\,,\quad lm' - l'm\,.$$

Formole analoghe si ottengono per i piani, scambiando le terne p, q, r ed l, m, n.

§ 94. — La forma φ.

Se le p (cioè p, q, r, l, m, n) sono funzioni di un parametro $u = u_1$, oppure di 2 parametri $u = u_1$, $v = u_2$ oppure di 3 parametri $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$, la retta p descrive una rigata, od una congruenza, od un complesso. Sarà

(1) $Sp^2 = 0, \quad Spp_i = 0 \quad (i = 1;$ opp. $i = 1, 2;$ oppure $i = 1, 2, 3),$

cioè

(2) $$Spdp = 0 \quad \text{e quindi} \quad Sdp^2 = -Spd^2p.$$

Noi porremo

(3) $$\varphi = Sdp^2 = -Spd^2p = \sum_1^n a_{rs}\, du_r\, du_s$$

$$(n = 1, \quad \text{oppure, } 2 \text{ oppure } 3).$$

L'equazione $\varphi = 0$ caratterizza, tra le rette considerate, quelle infinitamente vicine ed incidenti alla retta p. Perciò nel caso delle rigate ($n = 1$) se φ *è identicamente nullo, la rigata è una sviluppabile.* Nel caso delle congruenze e dei complessi ($n = 2$, 3) l'essere φ identicamente nullo significa che ogni rigata della congruenza o complesso è sviluppabile. Prese due rette qualsiasi p e q della congruenza o complesso, uscenti l'una da un punto A, l'altra da un punto B, noi le potremo congiungere con una rigata della congruenza o complesso *avente la retta* AB *per direttrice.* Tale rigata, essendo sviluppabile, dovrà giacere in un piano passante per AB. Pertanto le rette p, q, cioè due rette qualsiasi della congruenza o complesso sono complanari. In conclusione:

Se φ *è identicamente nullo per una rigata, questa è una sviluppabile; se* φ *è identicamente nullo per una congruenza o complesso, questo ente si riduce alle rette poste in uno stesso piano od uscenti da uno stesso punto* (e perciò in particolare non può essere un complesso (*)).

(*) Se $\varphi = 0$ identicamente nel caso dei complessi, è $Sp^2 = Spp_i = Sp_i^2 = Sp_i\, p_j = 0$ per i, $j = 1$, 2, 3. Esisteranno perciò 4 rette a 2 a 2 incidenti aventi per coordinate rispettivamente le p, oppure le p_1, opp. p_2, oppure p_3. Esse sarebbero perciò rette poste in uno stesso piano, od uscenti da uno stesso punto. E quindi esisterebbe una relazione lineare $\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 + \varepsilon p_3 = 0$, che, cambiando parametri u_i, si può ridurre alla forma $\alpha p + \beta p_3 = 0$; la quale, moltiplicando le p per uno stesso fattore, si può ridurre al tipo $p_3 = 0$. Le p essendo perciò funzioni delle sole u_1, u_2, la retta p descrive al più una congruenza.

Noi *trascureremo* sempre questi casi elementari.

Se il descriminante A di φ è diverso da zero, potremo usare i simboli del calcolo assoluto; avremo allora:

$$a_{rs} = Sp_r p_s = - Spp_{rs} \tag{4}$$

donde, derivando covariantemente $Sp_r p_{st} + Sp_s p_{rt} = 0$ e $Spp_{rst} + + Sp_t p_{rs} = 0$. Scrivendo queste formole per $r, s, t = 1, 2$ oppure $1, 2, 3$, si trova in entrambi i casi:

$$Sp_r p_{st} = 0 \qquad Spp_{rst} = 0 \tag{5}$$

L'insieme delle superficie rigate che sono tra loro tangenti nei punti di una generatrice p ad esse comune definisce quella che diremo una *direzione* (di spazio rigato). Essa si può considerare come definita dalla retta p e dalla retta $p + dp$ consecutiva, che si deve considerare comune a tutte quelle rigate perchè tra loro tangenti in p. Dare dunque una tale *direzione* equivale a dare la proiettività tra i punti di p e i piani ivi tangenti alle rigate considerate: proiettività che si può pensare definita facendo corrispondere ad ogni punto di p il piano che lo proietta dalla retta consecutiva $p + dp$. Se le p sono funzioni di n parametri u_i, una direzione (di spazio rigato) uscente da p sarà definita dando i rapporti dei corrispondenti differenziali du_i.

§ 95. — I complessi di rette con $A = 0$.

Cominciamo a determinare i complessi, per cui il discriminante A della corrispondente forma φ è identicamente nullo. E dimostriamo che:

Se $A = 0$ *identicamente, il complesso è il luogo delle tangenti ad una superficie, o delle rette incidenti ad una curva.*

In tale caso infatti la forma φ è prodotto di due fattori lineari du_i, i quali saranno nulli entrambi per un sistema di valori $\dfrac{du_1}{\alpha_1} = \dfrac{du_2}{\alpha_2} = \dfrac{du_3}{\alpha_3}$, che sarà anzi indeterminato, se i citati fattori lineari coincidono. Siano $\Psi\ (u_1, u_2, u_3) = \text{cost.}$, e $X(u_1, u_2, u_3) = \text{cost.}$ gli integrali di $du_1 : du_2 : du_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$; assumendo le Ψ, X come nuovi parametri p. es. al posto di u_1, u_2, e indicandole senz'altro ancora con u_1, u_2, avremo che i citati fattori lineari saranno nulli per $du_1 = du_2 = 0$ e perciò non conterranno du_3. Quindi la forma φ avrà nulli i coefficienti a_{13}, a_{23}, a_{33}, cosicchè

$$Sp_3^2 = Sp_1 p_3 = Sp_2 p_3 = Spp_3 = 0\ .$$

Perciò le p_3 saranno coordinate di una retta incidente alla retta p e appartenente ai complessi p_1, p_2. Sia B il punto (pp_3) comune alle rette p, p_3 e β il piano pp_3. Calcoliamo le coordinate di questo punto e di questo piano. Supposto $l = -1$, la retta p ha per equazioni (in coordinate non omogenee di retta e in coordinate non omogenee di punto, se si suppone anche $t = 1$),

$$x = -rz + q\ ,\quad y = mz + n\ ,\quad \text{cosicchè:}$$

$$\varphi = dm\,dq + dn\,dr$$

E le $a_{i3} = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ diventano:

$$q_3 m_3 + n_3 r_3 = 0 \quad (q_i m_3 + m_i q_3) + (n_i r_3 + n_3 r_i) = 0 \quad (i = 1, 2)\ .$$

Esistono pertanto 3 parametri λ, μ, ν tali che

$$m_3 = \lambda n_3\ ,\quad r_3 = -\lambda q_3\ ,\quad m_1 = \lambda n_1 + \mu n_3\ ,\quad r_1 = -\lambda q_1 - \mu q_3\ ,$$

$$m_2 = \lambda n_2 + \nu n_3\ ,\quad r_2 = -\lambda q_2 - \nu q_3\ .$$

La retta p_3 avrà per coordinate

$$l_3 = 0\ ,\quad m_3,\quad n_3,\quad p_3,\quad q_3,\quad r_3 \qquad (p = qm + rn)$$

e pertanto è la retta congiungente i punti

$$(q_3,\quad n_3,\quad 0,\quad 0) \qquad (-r - \lambda q,\quad m - n\lambda,\quad 1,\quad -\lambda)\ .$$

Il punto B è perciò il punto di coordinate

$$x' = q + \frac{r}{\lambda}, \quad y' = n - \frac{m}{\lambda}, \quad z' = -\frac{1}{\lambda}, \quad t' = 1$$

e il piano β è il piano, che lo contiene, di equazione

$$n_3 (x + rz - q) - q_3 (y - mz - n) = 0 .$$

Poichè evidentemente è anche

(1) $$n_3 dx' - q_3 dy' + (r n_3 + m q_3) dz' = 0 ,$$

avremo:

Il punto B *ha al massimo* ∞^2 *posizioni* (*) *e il piano* β *non solo contiene* B, *ma è anche tangente al luogo del punto* B. (Il caso $q_3 = n_3 = 0$, escluso in questa trattazione, si può studiare in modo affatto simile).

§ 96. — L'elemento lineare proiettivo di un complesso.

A) Il complesso π e la forma χ.

Escluderemo il caso $A = 0$, esaurientemente trattato al § 95, lasciando al lettore di vedere quali delle seguenti considerazioni si possano estendere anche a tale caso. Così escluderemo dalla trattazione come *singolari* quelle eventuali generatrici del complesso

(*) Infatti, se avesse ∞^3 posizioni, allora per un valore generico di u, v, w le dx', dy', dz' sarebbero arbitrarie e non potrebbero soddisfare a (1). In altro modo si osservi che (1) equivale alle: $n_3 \frac{\partial x'}{\partial u_i} - q_3 \frac{\partial y'}{\partial u_i} + (rn_3 + + m q_3) \frac{\partial z}{\partial u_i} = 0$ per $i = 1, 2, 3$, dalle quali si deduce di nuovo lo stesso risultato.

per cui A fosse nullo. Diconsi complessi lineari π' *tangenti* al complesso dato in una generatrice p i complessi che soddisfano alle $S\pi' p = S\pi' p_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Uno di essi è lo stesso complesso p (cioè il complesso speciale di asse p); un altro sia π'; tutti i complessi lineari tangenti saranno quelli del fascio $\alpha p + \beta \pi'$, che soddisfano alle

$$S(\alpha p + \beta\pi')\, p = S(\alpha p + \beta\pi')\, p_i = 0\,.$$

I raggi del complesso infinitamente vicini a p, che giacciono in tale complesso tangente, sono caratterizzati dalla

$$S(\alpha p + \beta\pi')\left(p + dp + \frac{1}{2}\, d^2 p + \dots\right) = 0\,,$$

che si riduce alla

$$\alpha S p\, d^2 p + \beta S \pi' d^2 p = 0 \tag{1}$$

che, in virtù delle $S p\, dp = S\pi' dp = 0$, equivale alla:

$$\alpha S dp^2 + \beta S d\pi' dp = 0\,. \tag{1$_{\text{bis}}$}$$

Se noi consideriamo per un momento le du_i come coordinate omogenee di punto in un piano γ, avremo in (1) l'equazione di un *fascio di coniche*, una delle quali è la conica $\varphi = 0$. È eccezionale il solo caso *che tutte queste coniche coincidano*, ossia che *i complessi tangenti seghino tutti il complesso dato secondo le stesse rette infinitamente vicine a* p. Io dico che *questa proprietà caratterizza i complessi lineari*. Per dimostrarlo, premettiamo una formola di carattere generale. Supposto, com'è lecito, di assumere coordinate non omogenee di retta, e di scegliere 3 di queste a variabili u_i, porremo

$$l = 1\,,\quad q = u\,,\quad n = v\,,\quad r = w\quad (p = -mu - vw)\,. \tag{2}$$

Le coniche corrispondenti ai complessi lineari tangenti di coordinate λ, μ, ν, ecc. saranno (indicando per semplicità con p_{rs} ed m_{rs} derivate ordinarie e non covarianti)

(3) $$\lambda \Sigma p_{rs} du_r du_s + \varkappa \Sigma m_{rs} du_r du_s = 0$$

le quali anzi, tenuto conto del valore di p, saranno

(3)$_{\text{bis}}$ $$(\varkappa - \lambda u) \Sigma m_{rs} du_r du_s - 2\lambda (dm du + dv dw) = 0 .$$

Tali coniche (q) coincidono soltanto se è $m_{rs} = 0$ oppure se $p_{rs} = 0$ (nei quali casi il complesso è lineare, perchè m oppure p è funzione lineare di $u = q$, $v = n$, $w = r$), oppure se esiste un parametro σ tale che $p_{rs} = \sigma m_{rs}$. Derivando se ne deduce $\sigma_t m_{rs} = \sigma_s m_{rt}$. Queste equazioni lineari nelle σ_i danno $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (almeno nella nostra ipotesi che $A \neq 0$, cioè che il discriminante (m_{rs}) di una delle nostre coniche, tutte coincidenti per ipotesi tra di loro, sia differente da zero). Sarà dunque $\sigma = \text{cost.}$, $p - \sigma m$ funzione lineare di u, v, w; e quindi il complesso sarà lineare. *Escluso* dunque anche *il caso di nessun interesse dei complessi lineari, ai complessi lineari tangenti corrisponde dunque nel piano γ un effettivo fascio di coniche.* Tra queste noi ne potremo scegliere una in *modo intrinseco invariante* imponendo che sia apolare alla $\varphi = 0$, cioè che, posto $S d\pi' dp = \Sigma b_{rs} du_r du_s$, e indicato al solito con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in A diviso per A, sia:

$$0 = \Sigma A_{rs} (\alpha a_{rs} + \beta b_{rs}) = 2\alpha + \beta \Sigma b_{rs} B_{rs} ,$$

da cui si ricava un unico valore di α. Porremo $\pi = \alpha p + \beta \pi'$; le sue coordinate π (di complesso) risultano così determinate soltanto a meno di un fattore comune, che ora fisseremo in modo *intrinseco invariante* nel modo seguente. Posto $S \pi p_{rs} = - S \pi_r p_s = - c_{rs}$, sarà $\Sigma A_{rs} c_{rs} = 0$. Posto poi

(4) $$P = \frac{1}{3} \Delta_2 p , \quad Q = \frac{1}{3} \Delta_2 q , \ldots ,$$
$$N = \frac{1}{3} \Delta_2 n = \frac{1}{3} \Sigma A_{rs} n_{rs} ,$$

sarà :

$$(5)\qquad SpP = \frac{1}{3}\,\Sigma S A_{rs} p p_{rs} = -\frac{1}{3}\,\Sigma A_{rs} a_{rs} = -1\,.$$

Sarà ancora non soltanto

$$(6)\qquad S\pi p = S\pi p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

ma anche:

$$(7)\qquad S\pi P = \frac{1}{3}\, S\Sigma A_{rs} \pi p_{rs} = -\frac{1}{3}\,\Sigma A_{rs} c_{rs} = 0\,.$$

Dunque le π sono proporzionali ai minori della matrice

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(p, p_1, p_2, p_3, P)$$

e noi le sceglieremo proprio uguali a questi minori, ponendo così:

$$(8)\qquad \pi = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(p, p_1, p_2, p_3, P)$$

e quindi:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \chi &= S\,dp\,d\pi = -S\pi d^2 p = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(p, p_1, p_2, p_3, P, d^2 p) = \Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s\,. \end{aligned}$$

$$(10)\qquad \Sigma A_{rs} c_{rs} = 0\,.$$

Se ne deduce anche:

$$S\pi^2 = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & SpP \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & Sp_1P \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & Sp_2P \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & Sp_3P \\ SpP & Sp_1P & Sp_2P & Sp_3P & SP^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{A}{|A|} (S p P)^2 = \frac{A}{|A|} = sgn\, A\,.$$

Dunque

$$(11) \qquad S\pi^2 = \varepsilon\,, \qquad \text{ove} \quad \varepsilon = sgn\, A\,.$$

Il complesso π *non è mai speciale.* Di più si ha:

$$(11)_{\text{bis}} \qquad \frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, p_1, p_2, p_3, P, \pi) = S\pi^2 = \varepsilon\,.$$

B) L'elemento lineare proiettivo.

Si noti:

1) *Un cambiamento qualsiasi di variabili* u *non cambia la forma* φ, che quindi *è intrinseca* (propriamente); invece *sia le* π *che la* χ *sono impropriamente intrinseche*, perchè i cambiamenti di variabili u a Iacobiano negativo cambiano di segno le π e la forma χ.

2) *Moltiplicando le* x, y, z, t *per uno stesso fattore* σ, le p restano moltiplicate per σ^2, *la* φ *e la* a_{rs} *per* σ^4, le A_{rs} per $\frac{1}{\sigma^4}$; quindi i nuovi valori $\overline{P}$ delle P differiscono da $\frac{1}{\sigma^2} P$ per una combinazione lineare delle p, p_i: $\sqrt{|A|}$ resta moltiplicato per σ^6, *e quindi* χ *resta moltiplicato per* σ^2, *mentre le* π *restano inalterate.*

3) *Una collineazione a determinante* 1 *muta in sè stessa la* φ *e la* χ.

4) Una collineazione di determinante negativo è il prodotto di una collineazione 2), di una 3) e della $x' = -x$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$; la quale cambia il segno di p, q, r, lascia inalterate l, m, n; *essa* pertanto *cambia il segno della* φ, e quindi anche il segno ε di A ed il segno delle A_{rs} e di 3 delle coordinate di retta e *perciò lascia inalterata la* χ. *Noi di solito prescinderemo da queste trasformazioni,* che mutano la legge di orientazione delle rette. E potremo perciò *costantemente supporre* p. es. $\varepsilon = 1$.

5) Una correlazione T è prodotto dello scambio delle terne p, q, r ed l, m, n e di una collineazione T'; *ci limiteremo* alle correlazioni T tali che la T' sia *a determinante positivo.* Per studiare l'effetto, basti osservare *che lo scambio delle* p, q, r *ed* l, m, n *lascia* φ *inalterato, cambia* χ *di segno.*

In conclusione *il rapporto* $\varphi : \chi^2$ *è intrinseco invariante*, e noi lo chiameremo l'*elemento lineare proiettivo del complesso.* (Se non prescindessimo dalle (4) e dalle correlazioni speciali escluse in (5), dovremmo innalzarlo al quadrato). Si noti che il risultato precedentemente ottenuto sui complessi lineari si può anche enunciare dicendo: *I complessi lineari sono caratterizzati dalla* $\chi = 0$.

C) **Curvature proiettive e coordinate normali.**

L'indeterminazione (di un fattore) delle φ, χ si potrà togliere anche nel caso dei complessi, ricorrendo alle coordinate normali, come vedremo nel modo seguente. Consideriamo l'equazione che si ottiene uguagliando a zero il discriminante di $\omega\varphi + \chi$, che è, per le relazioni di apolarità

$$\omega^3 A + \omega \Sigma a_{rs} C_{rs} + C = 0 , \tag{12}$$

ove C è il discriminante di χ, e C_{rs} è il complemento algebrico di c_{rs} *non* diviso per C. Se si moltiplica χ per un fattore τ e φ per τ^2, le radici ω restano divise per τ. Le quantità intrinseche

$$I = \frac{C}{A}, \quad J = \frac{\Sigma a_{rs} C_{rs}}{A} \quad (I \text{ è impr. intrinseca}) \tag{13}$$

restano moltiplicate per $\frac{1}{\tau^3}$ o per $\frac{1}{\tau^2}$. Noi potremo imporre all'una o all'altra un valore numerico prefissato, e chiamare *normali* le coordinate corrispondenti: resta escluso il caso *anormale* $I = J = 0$, *quando cioè l'equazione in* ω *ha una radice tripla nulla.* (*)

(*) Questi ed altri complessi anormali sono studiati da *Paul Mentré*, Comptes Rendus t. 145 (20 Nov. 1922) pag. 941.

In coordinate normali *la forma* φ_2 *determina una geometria metrica*, (di cui essa è elemento lineare) *di carattere intrinseco invariante, per mezzo della quale si possono estendere ai complessi le nozioni metriche di angolo, distanza, geodetiche,* ecc., così *come l'elemento lineare* $\frac{\varphi}{\chi^2}$ *può servire a estendere la nozione di pangeodetiche.*

Si noti ancora che non varia, al variare di τ, la frazione

$$K = \frac{C^2 A}{(\Sigma a_{rs} C_{rs})^3} = \frac{I^2}{J^3}, \tag{14}$$

che si può dunque chiamare *curvatura proiettiva del complesso, perchè è una quantità intrinseca invariante* (*anche* per le collineazioni e reciprocità sopra escluse). Se ω_i sono le radici di (14), si ha:

$$\left\{\begin{aligned} &0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ &K = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}{(\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1)^2}. \end{aligned}\right. \tag{14$_{\text{bis}}$}$$

Ad ogni radice ω_i della (14) corrisponde una conica $\omega_i \varphi + \chi = 0$ scomposta in due rette, e *un corrispondente complesso lineare tangente.* Perciò: *A ogni complesso* Γ *lineare tangente corrisponde un'infinità quadratica di direzioni (di spazio rigato) tali che* Γ *è osculatore alle rigate del complesso iniziale uscenti in tali direzioni. Vi sono in generale tre e tre soli complessi* Γ *per cui questa infinità quadratica si spezza in due sistemi lineari. Io dico che questi complessi si possono chiamare bitangenti perchè toccano il complesso dato in due generatrici* p *e* p + dp *consecutive.*

Infatti dire che un complesso π' tocca il complesso dato in p e in $p + dp$ equivale a dire che

$$0 = S\pi' p = S\pi' p_i = S\pi' dp = S\pi' (p_i + dp_i) \tag{15}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

Le prime tre dicono che π' è un complesso tangente, cioè un complesso $\alpha p + \beta \pi$. Le ultime diventano:

$$\Sigma_k (\alpha a_{ik} + \beta c_{ik})\, du_k = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

le quali determinano appunto quei valori $\omega = \alpha : \beta$, che annullano (12). Ad ogni radice ω_i corrisponde generalmente un sistema di valori per $du_1 : du_2 : du_3$. Quindi: *Vi sono generalmente tre sistemi di* ∞^2 *rigate del complesso, tali che per ogni retta* p *del complesso esce una rigata di ciascuno di questi sistemi. Per ogni generatrice* p *di una di queste rigate passa un complesso lineare che tocca il complesso dato nella generatrice* p *e nella consecutiva* $\mathrm{p} + \mathrm{dp}$.

I tre valori dei rapporti $du_1 : du_2 : du_3$ si possono anche definire eliminando le π' da (15), come quei valori che annullano la matrice

$$(16) \qquad (p,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ dp_1,\ dp_2,\ dp_3) = 0\,.$$

Le rigate precedenti sono quelle che soddisfano alle (16): ciò che ne rende evidente il carattere invariantivo. Si noti che da quanto precede segue *che queste rigate sono determinate dall' elemento lineare proiettivo.* Di proprietà affatto analoghe godono altri sistemi di rigate, quelle corrispondenti ai quattro valori di $du_1 : du_2 : du_3$, che annullano contemporaneamente φ e χ, cioè ai 4 punti comuni alle coniche φ e χ. Per vederne chiaro il significato geometrico osserviamo che ad ogni punto $du_1 : du_2 : du_3$ della conica $\varphi = 0$ corrisponde una retta $p + dp$ del complesso incidente alla p, e quindi deferminante con questa un fascio di rette, il quale, contenendo due rette p e $p + dp$ consecutive del complesso, è un fascio *tangente al complesso, il quale apparterrà a tutti i complessi tangenti* (appunto perchè questi ne contengono le rette p e $p + dp$) *e quindi anche alla congruenza lineare loro intersezione,* che naturalmente si dice essere *la congruenza lineare tangente.* Essendo $S(\alpha p + \beta \pi)^2 = \pm \beta^2$ nulla solo per $\beta = 0$, *questa congruenza tangente ha le due direttrici coincidenti entrambe nella retta* p.

Le equazioni $\varphi = \chi = 0$ equivalgono alle $Spd^2 p = S\pi d^2 p = 0$, e significano perciò che le rigate soddisfacenti alle $\varphi = \chi = 0$ sono in ogni loro generatrice osculatrici ai corrispondenti complessi lineari tangenti, cioè alla congruenza lineare tangente. Quindi:

Esistono generalmente in un complesso 4 sistemi di ∞^2 *rigate soddisfacenti alle* $\varphi = \chi = 0$; *per ogni retta del complesso esce una rigata di ciascun sistema; ognuna di queste rigate è in una sua generatrice* p *osculatrice alla corrispondente congruenza lineare tangente.*

§ 97. — Le equazioni differenziali fondamentali nella teoria dei complessi.

A) Equazioni *I, II, III.*

Osserviamo che i sei complessi p, p_i, P, π sono *linearmente indipendenti*. Chè, se fosse

$$\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3 + \varepsilon P + \sigma \pi = 0,$$

allora, indicandone con π' il primo membro, la $S\pi'\pi = 0$ dà $\sigma = 0$, le $S\pi' p_i = 0$ danno $\beta a_{i1} + \gamma a_{i2} + \delta a_{i3} = 0$, donde, poichè $A \neq 0$, $\beta = \gamma = \delta = 0$. La $S\pi' p = 0$ dà $\varepsilon = 0$; e quindi dovrà anche essere $\alpha = 0$; la precedente equazione avrebbe tutti i cofficienti nulli. Pertanto sei quantità qualunque si possono esprimere come combinazione lineare delle precedenti. In particolare varranno delle formole:

$$p_{rs} = \alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3 + \tau P + \sigma \pi,$$

ove le α, $\beta, \ldots, \sigma$ dipenderanno dagli indici r, s. Ricordando le (5) del § 94 e (6), (7), (11) § 96, ed osservando che

$$-S p p_{rs} = a_{rs}, \quad S p_{rs} p_i = 0, \quad S p_{rs} \pi = -c_{rs}$$

si deduce $\tau = a_{rs}$, $0 = \beta a_{i1} + \gamma a_{i2} + \delta a_{i3}$, donde, poiché $A \neq 0$, $\beta = \gamma = \delta = 0$, $c_{rs} = -\sigma S\pi^2 = -\varepsilon\sigma$. Posto $\alpha = e_{rs} = e_{sr}$, si avrà in conclusione:

$$\text{(I)} \qquad p_{rs} = a_{rs} P - \varepsilon c_{rs} \pi + e_{rs} p.$$

Si noti che *la forma* $\psi = \Sigma e_{rs} du_r du_s$ *ha pure significato intrinseco, ed è apolare alla* φ, *come la* χ. Infatti da (I) si deduce

$$\text{(1)} \qquad p \Sigma A_{rs} e_{rs} = \Sigma A_{rs} p_{rs} - P \Sigma A_{rs} a_{rs} + \varepsilon \pi S A_{rs} c_{rs} =$$

$$= 3P - 3P = 0.$$

Come si comporti la ψ per effetto di una collineazione è cosa facile a studiare; noi osserveremo soltanto:

1) *Anche la ψ è una forma invariante, se si calcola in coordinate normali:*

2) *Se si assumono coordinate di retta non omogenee, p. es. si suppone* $1 = 1$, *la forma ψ si riduce alla* $\varepsilon \lambda \chi$ (infatti per $l = 1$, è $l_{rs} = 0$, $L = 0$; e la (I) dà per $p = l$ immediatamente il risultato enunciato).

3) *In generale dalle* (I) *si deduce che ψ è determinata dalla:*

$$\varphi S P^2 - \psi = \Sigma S P p_{rs} du_r du_s .$$

Le (I) *sono le equazioni fondamentali, esse determinano completamente il complesso,* (insieme a quelli ad esso proiettivi); *cosicchè la teoria delle tre forme φ, χ, ψ include quella di tutti gli invarianti proiettivi di un complesso; l'analogo delle equazioni di Codazzi (della geometria metrica delle superficie) sono date dalle condizioni d'integrabilità delle* (I) *e delle equazioni tratte dalla definizione delle forme φ, χ. Anzi le sole forme φ, χ determinano il complesso.*

Per dimostrarlo, osserviamo che, oltre alle:

$$S p_r p_s = - S p p_{rs} = a_{rs} \quad S p_i p_{rs} = 0 \quad - S \pi p_{rs} = c_{rs} = + S \pi_s p_r$$

valgono le:

$$S P \pi = 0 \quad \text{donde} \quad S P \pi_t = - S \pi P_t, \quad S \pi^2 = \varepsilon, \quad S \pi \pi_t = 0$$

$$S \pi p = S \pi p_t = S p \pi_t = 0$$

$$S p P = \frac{1}{3} \Sigma A_{rs} S p p_{rs} = - \frac{1}{3} \Sigma A_{rs} a_{rs} = - 1$$

$$S P p_t = \frac{1}{3} \Sigma A_{rs} S p_t p_{rs} = 0$$

e quindi anche $S p P_t = 0$,

$$S P_t p_s = - S P p_{st} = - a_{ts} S P^2 - e_{ts} \qquad \text{(per le (I))} .$$

Anche le P_t, π_t si potranno scrivere come combinazioni lineari delle p, p_t, P, π:

$$P_t = \alpha_t p + \sum_i \beta_t^i p_i + \gamma_t P + \sigma_t \pi$$

$$\pi_t = \mu_t p + \sum_i \nu_t^i p_i + \delta_t P + \nu_t \pi .$$

Per la $SP_t p = 0$ si ha $\gamma_t = 0$; dal valore di $SP_t p_s$ si deduce:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \beta_t^i a_{is} = -a_{ts} \, SP^2 - e_{ts} \\ \text{ossia } \beta_t^j = -\varepsilon_{tj} \, SP^2 - \sum_\sigma e_{t\sigma} A_{\sigma j} \quad \left(\begin{array}{ll} \varepsilon_{ii} = 0 & \\ \varepsilon_{ij} = 0 & \text{per } i \neq j \end{array} \right) \\ P_t = \alpha_t p + \sum_i \beta_t^i p_i + \sigma_t \pi . \end{array} \right.$$

E in modo simile si trova (per le $S\pi\pi_t = S\pi p_t = 0$, $S\pi_t p_r = = c_{tr}$ e $S\pi_t P = -S\pi P_t$)

$$\text{(III)} \qquad \pi_t = \varepsilon \sigma_t p + \sum_{ij} A_{ij} c_{jt} p_i .$$

Derivando (I) rispetto ad u_t, scambiando s con t, e sottraendo se ne deduce:

$$\text{(2)} \qquad p_{rst} - p_{rts} = \sum_{h,.k} (ts, rh) A_{hk} p_k =$$

$$= a_{rs}\left(\alpha_t p + \sum_i \beta_t^i p_i + \sigma_t \pi\right) - a_{rt}\left(\alpha_s p + \sum_i \beta_s^i p_i + \sigma_s \pi\right)$$

$$- \varepsilon c_{rst} \pi + \varepsilon c_{rts} \pi$$

$$- \varepsilon c_{rs}\left(\varepsilon \sigma_t p + \sum_{ij} A_{ij} c_{jt} p_i\right) + \varepsilon c_{rt}\left(\varepsilon \sigma_s p + \sum_{i,j} A_{ij} c_{js} p_i\right)$$

$$+ (e_{rst} - e_{rts}) p + e_{rs} p_t - e_{rt} p_s .$$

Siano $s \neq t$ e sia l differente da s, t, cosicchè s, t, l *sono una* *permutazione di* 1, 2, 3. Essendo p, p_i, π, P linearmente indipendenti, la (2) dà, confrontando i termini in π:

$$a_{rs}\sigma_t - a_{rt}\sigma_s = \varepsilon c_{rst} - \varepsilon c_{rts}.$$

Poichè $A \neq 0$, se ne deducono i valori delle σ dati per mezzo della e_{rs}, c_{rs} e loro derivate, come si riconosce p. es. moltiplicando per A_{rs}, sommando rispetto ad r. Confrontando i termini in p_l, si trova che la quantità

$$a_{rs}\beta_t^l - a_{rt}\beta_s^l = -a_{rs}\sum_\sigma e_{t\sigma}A_{\sigma l} + a_{rt}\sum_\sigma e_{s\sigma}A_{\sigma l} \qquad (s \neq t \neq l \neq s)$$

è pure individuata dalle a_{rs}, c_{rs}. Per $r = 1, 2, 3$ si hanno tre equazioni; dalle quali, come per le σ, si deduce che anche le

$$-\beta_t^l = \sum_\sigma e_{t\sigma}A_{\sigma l} \qquad (t \neq l)$$

sono determinate dalle forme χ ed φ (cioè dalle a_{rs} e c_{rs}). Altrettanto si deduce (confrontanto i termini in p_t) per la:

$$e_{rs} + a_{rt}\sum_\sigma e_{s\sigma}A_{\sigma t} - a_{rs}\sum_\sigma e_{t\sigma}A_{\sigma t} - a_{rs}SP^2$$

e quindi anche (essendo $s \neq t$) per le

$$e_{rs} - a_{rs}SP^2 - a_{rs}\sum_\sigma e_{t\sigma}A_{\sigma t}$$

(quando $s \neq t$, e quindi, per simmetria, anche quando $r \neq t$ cioè quando non è $r = s = t$).

Se dunque $r \neq s$, potremo dare alla t i valori 1, 2, 3. Sommando rispetto a t, ricordando che per le relazioni di apolarità è $\sum_{t,\sigma} A_{t\sigma}e_{t\sigma} = 0$, ne dedurremo per $r \neq s$ il valore di $e_{rs} - a_{rs}SP^2$. Resta dunque determinato (per mezzo delle a_{rs}, c_{rs} e loro derivate) anche il valore per $r \neq s$ di $a_{rs}\sum e_{t\sigma}A_{\sigma t}$, e quindi anche, se non sono nulle tutte le a_{rs} per $r \neq s$, il valore di $\sum e_{t\sigma}A_{\sigma t}$, e quindi anche quello di SP^2. Conoscendo già il valore di

$\sum_\sigma e_{t\sigma} A_{\sigma l}$ per $t \neq l$, ne potremo dedurre i valori di tutte le $e_{t\sigma}$.

Se fosse $a_{rs} = 0$ per $r \neq s$ (caso che potremmo del resto escludere con un cambiamento di variabili) le quantità precedenti si riducono ad e_{rs} per $r \neq s$, che dunque saranno determinate mediante le a_{rs}, c_{rs} e loro derivate; per $r = s$ esse si riducono ad $e_{rr} - a_{rr}[SP^2 - e_{tt} A_{tt}]$ $(r \neq t)$. Restano così determinate le $\frac{e_{rr}}{a_{rr}} - SP^2 - \frac{e_{tt}}{a_{tt}}$; poichè la relazione di coniugio dà $\sum_\sigma \frac{e_{\sigma\sigma}}{a_{\sigma\sigma}} = 0$, ciò basta a determinare sia le e_{rr} che SP^2. In ogni caso restano determinate le e, le β_r^s e SP^2. In particolare dunque la *terza forma* ψ è determinata dalle φ, χ. Confrontando in fine i termini in p si riconosce che le $a_{rs}\alpha_t - a_{rt}\alpha_s$, e quindi anche le α_t (perchè $A \neq 0$) si possono determinare appena note le quantità precedenti, cioè appena siano date le forme φ, χ.

Dunque, date le φ, χ, ψ, *anzi date le sole forme* φ, χ *sono determinate le* (I), (II), (III) *insieme alla* SP^2; *e quindi,* a meno di una collineazione, *è determinato il complesso.*

B) Applicabilità proiettiva dei complessi.

Questo teorema ammette una notevolissima interpretazione geometrica. Se noi estendiamo ai complessi di rette la nozione di complessi proiettivamente applicabili, il nostro risultato si enuncia, come ora proveremo:

I complessi di rette sono proiettivamente indeformabili; cioè due complessi proiettivamente applicabili sono proiettivi tra di loro. (se ci riferiamo ad applicabilità proiettive *del 2° ordine*).

Naturalmente diciamo che due complessi C, $\overline{C}$ sono proiettivamente applicabili del 2° ordine se le loro generatrici p, $\overline{p}$ sono in corrispondenza biunivoca (definita p. es. da uguali valori dei parametri u_i), e se, essendo p, $\overline{p}$ due generatrici omologhe, esiste una collineazione che porta $\overline{p}$ in $p' = p$ e il complesso $\overline{C}$ in un complesso C' tale che rigate omologhe uscenti da $p' = p$ nei due complessi C e C' ivi si osculano (hanno tre generatrici consecutive comuni). Io dico che in tal caso i due complessi hanno comuni le forme φ, χ (e quindi anche la forma ψ, e sono proiettivi per quanto abbiamo testè dedotto dalle condizioni di integrabilità).

Indicando per un momento con indici apposti alle coordinate p di retta le *derivate* ordinarie *delle* p si trova come al § 3 C che le nostre ipotesi equivalgono ad ammettere l'esistenza per ogni retta p del complesso di corrispondenti costanti σ, τ_i, ρ_i, ν_{ik} tali che per le rette p, p' valgono le:

$$(3) \qquad p' = \sigma p\,; \qquad p'_i = \sigma(p_i + \tau_i p)\,;$$

$$p_{ik} = \sigma(p_{ik} + \rho_i p_k + \rho_k p_i + \nu_{ik} p)$$

(le τ_i, ρ_i, ν_{ik} indicano varie costanti, e non derivate di una τ o di una ν). Si trova per la $\varphi = -Spd^2p$, che la forma φ' per C' vale (nella retta considerata) precisamente $\sigma^2\varphi$. Poichè p è una retta generica, e $\overline{C}$, C' sono proiettivi, esisterà una funzione σ delle u, v, w tale che la forma $\overline{\varphi}$ di $\overline{C}$ valga $\sigma^2\varphi$. Potremo dunque moltiplicare le coordinate delle rette di $\overline{C}$ per un tale fattore in guisa che sia $\overline{\varphi} = \varphi' = \varphi$ e che sia $\sigma = 1$. Potremo allora nelle (23) intendere che le p_{ik} siano derivate covarianti; e basterà ricordare il valore dato dalle (9) del § 96 sotto forma di determinante per le forme χ, χ', $\overline{\chi}$ per riconoscere che anche queste sono uguali tra loro.

Oss. Se invece di collineazioni, si fosse usata una reciprocità per portare $\overline{C}$ in C', avremmo concluso che $\varphi = \overline{\varphi}$, $\chi = -\overline{\chi}$.

Viceversa siano C, $\overline{C}$ due complessi per cui $\varphi = \overline{\varphi}$, $\chi = \overline{\chi}$; saranno uguali i segni ε, $\overline{\varepsilon}$ dei discriminanti di φ, $\overline{\varphi}$; e potremmo supporre p. es. $\varepsilon = \overline{\varepsilon} = 1$. Scegliamo ρ tale che $S(\overline{P} + \rho\overline{p})^2 = SP^2$, cioè il ρ dato dalla:

$$\rho = \frac{1}{2}(S\overline{P}^2 - SP^2). \ (*)$$

(*) Dal precedente teorema segue anzi $\rho = 0$, perchè SP^2 è completamente determinato dalle φ, χ.

Allora esisterà (§ 93 C) una proiettività a modulo ± 1 che porta le sestuple $\bar{p}$, $\bar{p}_i$, $\bar{\pi}$, $\bar{P} + \rho \bar{p}$ in p, p_i, π, P. Sia C' il complesso trasformato di $\bar{C}$ mediante questa proiettività; esso avrà per forme $\varphi' = \varphi$, $\chi' = \pm \chi$ secondo che la proiettività considerata è a modulo ± 1, cioè secondo che è una collineazione od una reciprocità. Se vale il segno superiore, le (I) relative ad C ed C' dicono tosto che tutte le differenze $p'_{rs} - p_{rs}$ sono uguali ad $(\bar{e}_{rs} + \rho a_{rs} - e_{rs}) p$; cosicchè sono soddisfatte le (3) con $\sigma = 1$, $\tau_i = \rho_i = 0$ e il teorema è dimostrato. Il secondo caso (che valgano i segni inferiori) è invece impossibile: esso si presenterebbe se i determinanti $(\bar{p}, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{P}, \bar{\pi})$ e $(p, p_1, p_2, p_3, P, \pi)$ avessero segno opposto, mentre entrambi hanno il segno di ε.

§ 98. — Le congruenze con $A = 0$.

I metodi che qui usiamo sono in parte gli stessi, che useremo nel caso generale; e molte delle considerazioni che faremo nel caso generale, si potrebbero ripetere con qualche modificazione anche se $A = 0$. In ogni modo, per evitare soverchie distinzioni, è bene studiare a parte, per poi completamente trascurare, il caso $A = 0$. In tal caso si possono scegliere i parametri $u = u_1$ e $v = u_2$ in guisa che:

$$\varphi = S\,dp^2 = -S\,p\,d^2p = a_{11}du^2, \qquad \text{cioè che}$$

(1) $a_{12} = a_{22} = 0$ ossia $Sp_u p_v = Sp_v^2 = 0$, $Spp_{uv} = Spp_{vv} = 0$.

Vi è una retta di coordinate p_v incidente alla p; il fascio da esse determinato, cioè il fascio delle rette $\rho p + \sigma p_v$ si dirà il fascio *tangente* alla congruenza nella generatrice p. I complessi π tangenti sono quelli che soddisfano alle: $S\pi p = S\pi p_i = 0$ $(i = 1, 2)$; e perciò i complessi $\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2$ sono tutti e soli i complessi coniugati ai complessi tangenti, e che perciò diremo *coniugati*. Essi sono speciali se $S(\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2)^2 = 0$, ossia se $\beta = 0$. *Gli unici complessi coniugati speciali sono i complessi* $\alpha p + \gamma p_2$, *che hanno per asse una retta del fascio tangente; il* *quale perciò contiene tutte e sole le rette comuni ai complessi tangenti. Questo fascio è anche l'insieme delle rette comuni ai complessi coniugati.* Infatti è identicamente

$$S(\rho p + \sigma p_v)(\alpha p + \beta p_u + \gamma p)_v = 0\,,$$

cosicchè le rette del fascio tangente appartengono a tutti i complessi coniugati; e questi complessi non hanno comune nessuna ulteriore retta p'; altrimenti i complessi tangenti sarebbero complessi del tipo $\alpha p + \beta p_v + \gamma p'$. Essi sarebbero tutti degeneri; altrettanto avverrebbe perciò dei coniugati; ciò che è assurdo perchè $S p_u^2 = a_{11} \neq 0$.

Sia P il vertice del fascio tangente, π il suo piano. Quando la retta p si muove nella congruenza, il punto P comincierà a muoversi in una direzione PP', ove P' è un punto infinitamente vicino a P. Poichè P è il punto comune alle rette p, p_v, la retta $P'P$ si appoggierà alle rette p, p_v, $p + dp$, $p_v + dp_v$, e in particolare apparterrà (almeno se $du \neq 0$) ai complessi p, p_v, $p_u = \dfrac{(p + dp) - p - p_v dv}{du}$ ed è perciò una retta del fascio tangente. Dunque il piano π di questo fascio, contenendo le rette PP', è tangente al luogo del punto P, la cosidetta *superficie focale* S (che può anche ridursi a una curva o ad un punto: casi questi, di cui non ci occuperemo neppure). Le rette p della congruenza inviluppano su S le linee $u = \text{cost.}$; poichè il piano π delle rette p e p_v, cioè di due tangenti consecutive ad una $u = \text{cost.}$, è il piano tangente ad S, le $u = \text{cost.}$ saranno asintotiche per S. *Le congruenze con* $A = 0$ *sono generalmente formate dalle tangenti a un sistema di asintotiche di una superficie* S.

§ 99. — Gli elementi geometrici fondamentali di una congruenza.

A) Fasci centrali e focali.

Supporremo d'ora in poi $A \neq 0$. Ad ognuna delle *due* radici $\beta_i^1 : \beta_i^2$ della $\varphi = 0$ $(i = 1, 2)$ considerata come equazione in $du : dv$ corrisponde un raggio $p + dp$ incidente al raggio p. Si noti che l'indice i non è indice di derivazione covariante, ma solo serve a distinguere le due radici. Le β sono determinate soltanto a meno di fattori. Poichè valgono in ogni caso le:

$$2\frac{A_{12}}{A_{22}} = -2\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{\beta_1^1}{\beta_1^2} + \frac{\beta_2^1}{\beta_2^2}, \quad \frac{A_{11}}{A_{22}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{\beta_1^1\,\beta_2^1}{\beta_1^2\,\beta_2^2},$$

noi potremo (e in infiniti modi) scegliere tali fattori in guisa che:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}A_{11} = \beta_1^1\beta_2^1, \quad A_{12} = \beta_1^1\beta_2^2 + \beta_2^1\beta_1^2, \quad \frac{1}{2}A_{22} = \beta_1^2\beta_2^2$$

donde si trae:

$$\frac{1}{4A} = \frac{1}{4}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) = -\frac{1}{4}(\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^1)^2$$

cosicchè potremo ottenere (scambiando caso mai le β_1 con le β_2) che sia anche in segno:

$$(2) \qquad \beta_1^1\beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^1 = \sqrt{-\frac{1}{A}}.$$

Sarà poi:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ \beta_1^1\beta_1^1 & \beta_1^1\beta_1^2 & \beta_1^2\beta_1^2 \\ \beta_2^1\beta_2^1 & \beta_2^1\beta_2^2 & \beta_2^2\beta_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{A}\sqrt{-\frac{1}{A}}.$$

I due raggi $p + dp$ incidenti a p incontrano p nei punti P_i comuni a p ed a $p_1\beta_i^1 + p_2\beta_i^2$, e determinano i piani π_i comuni a queste due rette ($i = 1, 2$). I punti P_i diconsi *fuochi*, i piani π_i *piani focali*, i fasci (P_i, π_i) fasci *tangenti* o con *Wälsch* fasci *centrali*, i fasci (P_1, π_2) e (P_2, π_1) fasci *focali*. *Le rigate della congruenza soddisfacenti alla* $\varphi = 0$ *sono le sviluppabili della congruenza; da ogni retta di questa escono pertanto due sviluppabili. I complessi coniugati* (cioè in involuzione con tutti i complessi tangenti) *sono i complessi* $\rho p + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2$; *essi sono speciali soltanto se*

$$S(\rho p + p_1\gamma^1 + p_2\gamma^2)^2 = 0,$$

ossia se $\gamma^1 : \gamma^2$ *coincide con una delle* $\beta_i^1 : \beta_i^2$ *; in tal caso hanno pertanto per asse una retta dei fasci centrali. Le rette centrali sono* perciò *tutte e sole le rette comuni a tutti i complessi tangenti. E viceversa un complesso lineare che contenga le rette centrali è un complesso tangente. Le rette comuni a tutti i complessi coniugati sono tutte e sole le rette focali.* (uniche rette incidenti a tutti i raggi centrali).

B) **Tangenti focali.**

Se il raggio p si sposta infinitamente poco, il fuoco P_i andrà in una nuova posizione P_i', il piano π_i in π_i'. Le rette $P_i P_i'$ e $\pi_i \pi_i'$ danno la direzione in cui si sposta P_i e l'asse intorno a cui comincia a rotare π_i. Poichè P_i è il punto comune ai raggi

$$p, \quad p_1 \beta_i^1 + p_2 \beta_i^2,$$

la retta P_i P_i' apparterrà ai complessi

$$p, \quad p_1 \beta_i^1 + p_2 \beta_i^2, \qquad dp, \quad d(p_1 \beta_i^1 + p_2 \beta_i^2)$$

cioè ai complessi (almeno se $\beta_i^1 : du \neq \beta_i^2 : dv$; cfr. la seg. nota a piè di pagina)

$$p, \quad p_1, \quad p_2, \quad \beta_i^1 dp_1 + \beta_i^2 dp_2 .$$

Perciò la retta P_i P_i' *e similmente la retta* π_i π_i' *sono rette focali appartenenti al complesso* $\beta_i^1 \mathrm{d}\mathrm{p}_1 + \beta_i^2 \mathrm{d}\mathrm{p}_2$ *o anche al complesso* $\sum\limits_{r,s} \mathrm{p}_{rs} \mathrm{du}_r \beta_i^s$. (*)

(*) Si noti che $\sum\limits_{rs} p_{rs} du_r \beta_i^s$ non può essere una combinazione lineare $\alpha p + \rho p_1 + \sigma p_2$ delle p, p_1, p_2. Altrimenti sarebbe

$$-\Sigma a_{rs} du_r \beta_i^s = Sp\left(\Sigma p_{rs} du_r \beta_i^s\right) = Sp\,(\alpha p + \rho p_1 + \sigma p_2)$$

e perciò $du_1 : du_2 = \beta_i^1 : \beta_i^2$, caso che abbiamo escluso. In questo caso si potrebbe dire che P_i sta fermo, che $P_i = P_i'$, cosicchè non ha senso parlare della retta P_i P_i'.

Se ne deduce anzitutto che le rette $P_i\, P'_i$ tangenti al luogo del punto P_i (i^{esima} falda focale) sono rette focali, *che cioè i fasci focali sono tangenti alle falde focali.* Cioè coincidono *il luogo del punto* P_1 *e l'inviluppo del piano* π_2, come pure *il luogo del punto* P_2 *e l'inviluppo del piano* π_1. Di più, se un raggio della congruenza si sposta nella direzione $du : dv$, la retta r_i in cui comincia il fuoco P_i a spostarsi, e la retta ρ_i intorno a cui comincia a rotare il piano π_i sono le rette focali appartenenti al complesso $\sum\limits_{r,s} p_{rs}\, du_r\, \beta_i^s$. Se questo complesso interseca uno dei fasci focali nelle rette p (comune ai due fasci), interseca necessariamente anche l'altro fascio nella retta p. Ciò che avviene se:

$$S p\, (\beta_i^1\, d p_1 + \beta_i^2\, d p_2) = 0\,,$$

ossia

$$\Sigma\, a_{rs}\, \beta_i^r\, du_s = 0\,, \quad \text{ossia} \quad du : dv = \beta_i^1 : \beta_i^2\,.$$

In tal caso l'altro fuoco P_j $(j \neq i)$ comincia a muoversi su una retta r_j, e l'altro piano focale π_j a rotare attorno ad una retta ρ_j appartenenti al complesso $\beta_j^1\, dp_1 + \beta_j^2\, dp_2$, cioè appartenenti al complesso

$$P = \Sigma\, p_{rs}\, \beta_i^r\, \beta_j^s = \frac{1}{2}\, \Sigma\, A_{rs}\, p_{rs} = \frac{1}{2}\, \Delta_2\, p\,, \tag{4}$$

che non varia scambiando gli indici i, j e a tutti i complessi $P + \alpha p + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2$, che si diranno i *complessi principali.*

Dunque: *ad ogni valore di* du : dv *corrispondono proiettivamente quattro rette: due* r_1 *e* ρ_2 *del fascio focale tangente alla prima falda focale, le altre due* r_2 *e* ρ_1 *del secondo fascio focale.* Se P_i si muove nella direzione r_i, il piano π_j tangente alla i^{esima} falda focale ruota attorno ρ_j $(i \neq j)$. Perciò sulla i^{esima} falda focale le rette r_i e ρ_j sono coniugate.

Se una delle coppie r_1, ρ_1 o (r_2, ρ_2) coincide con la retta p, l'altra coppia è data *dalle direzioni coniugate a* p *sulle due falde: queste direzioni sono l'intersezione dei fasci focali con uno dei complessi principali,* e diconsi le direzioni *principali.*

C) Asintotiche focali.

Le direzioni asintotiche della i^{esima} falda focale sono caratterizzate da ciò che r_i coincide con ρ_j, direzione coniugata di r_i. Le direzioni asintotiche delle due falde focali sono dunque caratterizzate da ciò che i 5 complessi p, p_1, p_2, $\Sigma p_{rs} \beta_i^r du_s$, ($i = 1, 2$) hanno una retta comune (la tangente asintotica considerata): in altre parole che il complesso

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, \; p_1, \; p_2, \; \Sigma p_{rs} \beta_1^r du_s, \; \Sigma p_{rs} \beta_2^r du_s),$$

coniugato a ciascuno dei 5 complessi precedenti, è un *complesso speciale*. Questa proposizione è in difetto se questa matrice è identicamente nulla, e non dà perciò le coordinate di alcun complesso. In questo caso i complessi $\Sigma p_{rs} \beta_i^r du_s$ ($i = 1, 2$) sarebbero una combinazione lineare dell'altro, e dei complessi p, p_1, p_2. Essi perciò determinerebbero gli stessi due raggi focali; e coinciderebbero pertanto non solo r_i con ρ_j, ma anche r_j con ρ_i; cioè *sulle due falde focali si corrisponderebbe uno dei sistemi di asintotiche e quindi anche l'altro.* In tutti i casi vediamo dunque che l'equazione che dà le direzioni asintotiche delle due falde focali si ottiene esprimendo che il quadrato simbolico (§ 93 B) della matrice (5) è nullo. (Se la matrice fosse indenticamente nulla, allora, come abbiamo testè provato, questo quadrato simbolico diverrebbe un quadrato effettivo e la congruenza sarebbe W). Questo quadrato ottenuto con le regole del § 93 B, è un determinante (diviso per A) che si riconosce immediatamente uguale al determinante seguente moltiplicato per $\varepsilon = sgn\, A$.

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \begin{vmatrix} 0 & \Sigma a_{rs} \beta_1^r du_s & \Sigma a_{rs} \beta_2^r du_s \\ \Sigma a_{rs} \beta_1^r du_s & S(\Sigma p_{rs} \beta^r du_s)^2 & S(\Sigma p_{rs} \beta_2^r du_s)(\Sigma p_{rs} \beta_1^r du_s) \\ \Sigma a_{rs} \beta_2^r du_s & S \Sigma p_{rs} \beta_1^r du_s \Sigma p_{rs} \beta_2^r du_s & S(\Sigma p_{rs} \beta_2^r du_s)^2 \end{vmatrix} = \\ & = S \begin{vmatrix} \Sigma a_{rs} \beta_1^r du_s & \Sigma a_{rs} \beta_2^r du_s \\ \Sigma p_{rs} \beta_1^r du_s & \Sigma p_{rs} \beta_2^r du_s \end{vmatrix}^2 = \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \Big\} = \begin{vmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 \end{vmatrix}^2 S\,(\Sigma\, p_{rs}\, du_r\, \delta u_s)^2$$

ove sia stato posto

$$(7) \qquad \delta u_1 = -a_{21}\, du_1 - a_{22}\, du \qquad \delta u_2 = a_{11}\, du_1 + a_{12}\, du_2$$

$$(\text{cosicchè} \quad \varphi = \delta u_2\, du_1 - du_2\, \delta u_1)\,.$$

§ 100. — La seconda forma fondamentale di una congruenza.

A) La forma Φ.

Siamo dalla (6) del § 99 indotti a introdurre nella teoria un nuovo sistema covariante

$$(1) \qquad h_{ijrs} = -S\, p_{rs}\, p_{ij}\,.$$

Derivando covariantemente la $S p_r\, p_{ij} = 0$, si ha:

$$(1)_{\text{bis}} \qquad h_{ijrs} = S p_r\, p_{ijs}\,.$$

Poichè $p_{ijs} - p_{isj} = -\sum\limits_{\sigma,\,\rho} (js,\, i\sigma)\, A_{\sigma\rho}\, p_\rho$, è:

$$h_{ijrs} - h_{isrj} = -S\Sigma\,(js,\, i\sigma)\, A_{\sigma\rho}\, p_\rho\, p_r = -(js,\, ir)\,.$$

Da queste equazioni si trae che le h_{ijrs} sono simmetriche nei loro indici, eccetto $h_{1212} = h_{2112} = h_{1221} = h_{2121}$ ed $h_{1122} = h_{2211}$, per cui vale la:

$$(2) \qquad h_{1122} - h_{1212} = -(12,\, 12) = -AK\,,$$

se K è la curvatura della forma φ. Allo studio di questo sistema covariante si può sostituire quello di un sistema simmetrico k_{ijrs}, ponendo:

(3) $$\Phi = - S\,(\Sigma\, p_{rs}\, du_r\, du_s)^2 = \Sigma\, k_{ijrs}\, du_r\, du_s\, du_i\, du_j\,.$$

Si noti che dalle formole che danno i $d^2 p$, $d^3 p$ si trae:

(4) $$S\,dp\,d^3 p = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, \delta^3 u_s + \Phi\,; \quad S\,(d^2 p)^2 = \Sigma\, a_{rs}\, \delta^2 u_r\, \delta^2 u_s - \Phi$$

che danno nuove definizioni della Φ.

Si ha:

(5) $$\begin{cases} h_{ijii} = k_{ijii} \quad (i = j \ \text{opp.}\ i \neq j\,;\ i,\ j = 1,\ 2) \\ 3\, k_{1122} = - S\, p_{11}\, p_{22} - 2\, S\, p_{12}^2 = h_{1122} + 2\, h_{1212} \end{cases}$$

che insieme alla (2) dà

$(5)_{\text{bis}}$ $$h_{1212} = k_{1122} + \frac{1}{3} A K \qquad h_{1122} = k_{1122} - \frac{2}{3} A K\,.$$

Le (5) *esprimono le* h_{ijrs} *mediante un sistema simmetrico* k_{ijrs}.

Dalla (6) *del* § 99 *si trae: L'equazione complessiva delle asintotiche sulle due falde focali è* [cfr. le (1)]:

(6) $$\Sigma\, h_{ijrs}\, du_i\, du_j\, \delta u_r\, \delta u_s = 0\,.$$

Come controllo, si può osservare che essa non muta scambiando i simboli d, δ, e ciò perchè ognuna delle coppie di asintotiche divide armonicamente il sistema delle sviluppabili, che danno su ogni falda focale un sistema coniugato. *La* (6) *dà il significato geometrico del nuovo sistema covariante* h_{ijrs}.

B) **Complessi bitangenti.**

Noi ci chiediamo ora: Esistono dei complessi lineari π bitangenti, cioè tangenti al complesso C in una retta p e in una retta $p + dp + \frac{1}{2}\, d^2 p + \frac{1}{6}\, d^3 p$, infinitamente vicina? È intuitivo, e il seguente calcolo lo dimostra, che, fissata la p, la retta infinitamente vicina non si può scegliere ad arbitrio. Infatti, oltre alle:

$$(\alpha) \qquad S p \pi = S p_1 \pi = S p_2 \pi = 0$$

devono valere anche le:

$$S(p_1 + dp_1)\pi = S(p_2 + dp_2)\pi = 0$$

$$S\pi\left(p + dp + \frac{1}{2} d^2 p + \frac{1}{6} d^3 p\right)\pi = 0$$

che, per le precedenti, si riducono alla:

$$(\beta) \qquad \begin{cases} S\pi(p_{i1}du_1 + p_{i2}du_2) = 0 \qquad (i = 1, 2) \\ S\pi \Sigma p_{rst} du_r du_s du_t = 0 . \end{cases}$$

Affinchè le (α), (β) siano compatibili dev' essere

$$(7) \qquad 0 = (p, p_1, p_2, p_{11}du_1 + p_{12}du_2, p_{21}du_1 + p_{22}du_2, \Sigma p_{rst} du_r du_s du_t)$$

equazione di 5° grado in $du : dv$.

Per una retta p *della congruenza escono* 5 *rigate soddisfacenti alla* (7), *queste rigate formano 5 sistemi di* ∞^1 *rigate ciascuna. Per ogni coppia di generatrici consecutive di una di queste rigate passa un complesso lineare che tocca in entrambe la congruenza. Si determinano così i complessi lineari bitangenti alla congruenza.* (*) Vedremo più avanti come *anche l'equazione* (7) *si possa scrivere facilmente per mezzo delle* h.

Possiamo trovare un'altra proprietà delle precedenti 5 direzioni (di spazio rigato) uscenti da una retta p della congruenza. La congruenza lineare iperosculatrice a tutte le rigate della congruenza uscenti dalla retta p in una direzione $du : dv$ è l'intersezione dei complessi lineari π soddisfacenti alle $S\pi p = S\pi dp = S\pi d^2 p = S\pi d^3 p = 0$, cioè:

(*) La parola *bitangenti* ha un significato precisato dalle (α) e (β).

$$0 = S\pi p = S\pi dp = S\pi(p_1 \delta^2 u + p_2 \delta^2 v + \Sigma p_{rs} du_r du_s) =$$

$$= S\pi(p_1 \delta^3 u + p_2 \delta^3 v + 3\Sigma p_{rs} du_r \delta^2 u_s + \Sigma p_{rst} du_r dv_s du_t).$$

Tenuto fermo $dv : du$, facciamo variare la rigata in guisa che $\delta^2 u$, $\delta^2 v$, $\delta^3 u$, $\delta^3 v$ variino nel modo più generale. La congruenza iperosculatrice descriverà generalmente tutto lo spazio rigato; noi ci chiediamo quando essa descriverà un complesso lineare π, ossia quando esiste un complesso π che soddisfa alle precedenti equazioni contemporaneamente per tutti i valori di $\delta^2 u$, $\delta^2 v$, $\delta^3 u$, $\delta^3 v$. Le precedenti equazioni equivalgono alle (α), (β), cosicchè possiamo dire:

I precedenti complessi bitangenti in una retta p *alla nostra congruenza, cioè tangenti in* p *e in* p + dp *sono i complessi lineari luogo delle congruenze lineari iperosculatrici a tutte le rigate della congruenza passanti per le rette* p *e* p + dp.

C) Complessi satelliti.

Ricordando che i complessi lineari tangenti sono tutti quelli che contengono i fasci tangenti o centrali, riesce spontaneo di cercare quello C_i tra essi che contiene anche tutti i fasci centrali infinitamente vicini al fascio (P_i, π_i) luogo delle rette $\alpha p + \beta_i^1 p_1 + + \beta_i^2 p_2$. Tale complesso sarà in involuzione con p, p_1, p_2, e sarà in involuzione con tutti i complessi

$$d(\beta_i^1 p_1 + \beta_i^2 p_2)$$

cioè sarà il complesso che è in involuzione con

$$p,\ p_1,\ p_2,\ \beta_i^1 p_{11} + \beta_i^2 p_{12},\ \beta_i^1 p_{12} + \beta_i^2 p_{22} \tag{8}$$

e quindi anche con tutti i complessi principali P, loro combinazioni lineari.

I complessi tangenti C_i *che contengono tutti i fasci centrali infinitamente vicini al fascio* (P_i, π_i) *sono i complessi satelliti* (Begleitcomplexe del Wälsch); *essi appartengono al fascio di complessi* *coniugato a tutti i complessi principali, fascio che chiameremo satellite. I complessi satelliti sono indeterminati o coincidenti soltanto se*

$$\frac{1}{A^2}(p\ p_1\ p_2\ p_{11}\ p_{12}\ p_{22}) = 0 \tag{9}$$

ossia quando è nulla l'espressione intrinseca (quadrato della precedente con le regole del § 93 B).

$$W = +\frac{1}{A^3}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & h_{1111} & h_{1112} & h_{1122} \\ a_{12} & h_{1211} & h_{1212} & h_{1222} \\ a_{13} & h_{2211} & h_{2212} & h_{2222} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ a_{11} & H_{11}^{11} & H_{11}^{12} & H_{11}^{22} \\ a_{12} & H_{12}^{11} & H_{12}^{12} & H_{12}^{22} \\ a_{22} & H_{22}^{11} & H_{22}^{12} & H_{22}^{22} \end{vmatrix} \tag{10}$$

ove
$$H_{ij}^{rs} = \Sigma A_{r\rho} A_{s\sigma} h_{\rho\sigma ij}$$

$$h_{rsij} = \Sigma a_{r\rho} a_{s\sigma} H_{rs}^{\rho\sigma}.$$

Per riconoscere che questo secondo valore di W è identico a precedente si osservi che, moltiplicando il terzo membro di (10) per

$$A^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ 0 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{22}+a_{12}^2 & a_{12}a_{22} \\ 0 & a_{12}^2 & 2a_{12}a_{22} & a_{22}^2 \end{vmatrix}$$

si ottiene il determinante del secondo membro.

Questa uguaglianza W = 0 *è la stessa ottenuta, esprimendo che le asintotiche si corrispondono sulle due falde focali.* Dato il suo carattere intrinseco basterà per verificarlo assumere le sviluppabili a rigate coordinate u, v. In tal caso si ha

$$a_{11} = a_{22} = 0 \qquad W A^3 = a_{12}^2 (h_{1111} h_{222} - h_{1122}^2)$$

mentre l'equazione delle asintotiche è (cfr. l'ultima delle (6) del precedente §)

$$h_{1111}\,du^4 - 2\,h_{1122}\,du^2 dv^2 + h_{2222}\,dv^4 = 0\,,$$

che ha una radice $du^2 : dv^2$ doppia proprio se $W = 0$.

La W $= 0$ *caratterizza le congruenze* W: *quelle cioè sulle cui falde focali si corrispondono le asintotiche, ossia per cui i complessi satelliti coincidono, ossia per cui vale la* (9) *e quindi le* p *soddisfano a una stessa equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine.*

D) Complesso osculatore di una congruenza *W*.

Quest' ultima proprietà ha una notevole interpretazione geometrica. Per vederla studiamo *nel caso generale* quale è il regolo osculatore a una rigata della congruenza. Esso è l' intersezione dei complessi lineari coniugati a

$$p,\quad dp = p_1 du + p_2 dv\,,\quad d^2 p = p_1\,\delta^2 u + p_2\,\delta^2 v + \Sigma\, p_{rs}\, du_r\, du_s\,.$$

Consideriamo tutte le rigate della congruenza uscenti dalla retta p in una determinata direzione $du : dv$ (di spazio rigato), cioè tenute fisse du, dv, facciamo variare $\delta^2 u$, $\delta^2 v$. Il regolo varierà, descrivendo la *congruenza intersezione dei complessi coniugati a*

$$p,\ p_1\,,\ p_2\,,\ \Sigma\, p_{rs}\, du_r\, du_s\,,$$

che è la congruenza lineare osculatrice a tutte le rigate della congruenza tangenti tra loro nella retta p *secondo la direzione* du : dv (di spazio rigato). Notiamo incidentalmente che le sue direttrici sono due rette focali, determinate da $du : dv$, mentre, data una di queste rette, il valore $du : dv$ dipende da un' equazione di secondo grado. Dunque:

Le congruenze osculatrici hanno per direttrici due rette focali, e stabiliscono così tra i fasci focali una corrispondenza $2 - 2$.

Al variare della direzione du : dv *la congruenza osculatrice genera un complesso quadratico; se però* W $= 0$, *ed esiste pertanto un unico complesso satellite* π *definito dalle* $S\,\pi\,p = S\,\pi\,p_i = S\,\pi\,p_{rs} = 0$, *questo complesso quadratico si riduce al complesso* *satellite* (contato due volte) *il quale perciò si può chiamare il complesso osculatore, perchè oscula tutte le rigate della congruenza uscenti da* p.

E) Fascio satellite e nuovi invarianti.

Posto

$$(11)\qquad \lambda_{(i)} = -\frac{1}{2}\Sigma h_{rs\rho\sigma}\beta_i^r\beta_i^s A_{\rho\sigma} \qquad (i=1,\ 2)$$

(questo i non si deve intendere essere un indice di calcolo assoluto, e tanto meno indica derivazione covariante) ciascuno dei due complessi

$$(12)\qquad \pi_{(i)} = \lambda_{(i)}p + \sum_{r,s} p_{rs}\beta_i^r\beta_i^s \qquad (i + 1,\ 2)$$

è in involuzione coi complessi principali, e appartiene perciò al fascio satellite. Poichè è una combinazione lineare dei complessi (8), esso è in involuzione anche col corrispondente complesso satellite. Si noti che, se $W \neq 0$, il fascio satellite non può essere tutto formato di complessi speciali. Infatti, assunte a rigate u, v le sviluppabili, è $a_{11} = a_{22} = 0$; i complessi satelliti sono i complessi $(p,\ p_1\ p_2\ p_{12}\ p_{ii})$ con $i = 1,\ 2$. Se tutti i complessi del loro fascio fossero speciali, sarebbe

$$(p\,p_1 p_2 p_{12} p_{ii})^2 = 0 \quad (i=1,2); \quad (p\,p_1 p_2 p_{12} p_{11})\,(p\,p_1 p_2 p_{12} p_{22}) = 0$$

che, sviluppate, danno $h_{1111} = h_{2222} = h_{1122} = 0$ e quindi $W = 0$.

Dunque: *Se* $W \neq 0$, *il fascio satellite contiene i due complessi satelliti, i complessi* (12) *coniugati ai satelliti, e contiene due soli complessi speciali: quelli che hanno per asse le direzioni principali,* le quali restano caratterizzate da questa proprietà e si possono facilmente calcolare. Esse hanno per coordinate

$$(13)\quad \rho\pi_1 + \sigma\pi_2 = \rho\,[\lambda_1\pi + \Sigma p_{rs}\beta_1^r\beta_1^s] + \sigma\,[\lambda_2\pi + \Sigma p_{rs}\beta_2^r\beta_2^s]$$

ove ρ, σ sono scelti in guisa che

$$(14) \qquad 0 = S(\rho\pi_1 + \sigma\pi_2)^2 = \rho^2 S\pi_1^2 + 2\sigma\rho S\pi_1\sigma_2 + \sigma^2 S\pi_2^2 .$$

Si noti che, innalzando al quadrato con le regole solite si trova:

$$(pp_1p_2\pi_1\pi_2P)^2 = A\,(S\pi_1^2 S\pi_2^2 - [S\pi_1\pi_2]^2).$$

Poichè per le (3) del § 99 A

$$(pp_1p_2\pi_1\pi_2P) =$$

$$= +(pp_1p_2p_{11}p_{12}p_{22}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \beta_1^1\beta_1^1 & 2\beta_1^1\beta_1^2 & \beta_1^2\beta_1^2 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \beta_2^1\beta_2^1 & 2\beta_2^1\beta_2^2 & \beta_2^2\beta_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}A_{11} & A_{12} & \frac{1}{2}A_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (pp_1p_2p_{11}p_{12}p_{22})\frac{1}{A}\sqrt{-\frac{1}{A}}$$

e poichè W é il quadrato del primo membro di (9), si ha

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (pp_1p_2\pi_1\pi_2P)^2 = -AW \\ S\pi_1^2 S\pi_2^2 - (S\pi_1\pi_2)^2 = -W . \end{array} \right.$$

Ora nel fascio satellite i due complessi satelliti, i loro coniugati, i complessi speciali aventi per asse una retta principale formano dei birapporti, che sono invarianti proiettivi della congruenza. Tutti essi sono noti, appena sia dato il rapporto R delle radici della (14). Al calcolo di R sostituiremo quello di

$$(16) \qquad \left(\frac{R-1}{R+1}\right)^2 = \frac{-S\pi_1^2 S\pi_2^2 + (S\pi_1\pi_2)^2}{(S\pi_1\pi_2)^2} =$$

$$= -\frac{W}{(S\pi_1\pi_2)^2} = \frac{4W}{2K + \Sigma h_{rsij} A_{ri} A_{sj}}.$$

Oss. Per provare quest'ultima formola si noti che, posto $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$,

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \beta_1^1\beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^1 = \sqrt{-\frac{1}{A}},$$

si ha:

$$\beta_1^r \beta_2^i = \frac{1}{2} A_{ri} + \varepsilon_{ri}$$

cosicchè

$$S\pi_1\pi_2 = \sum_{rs} p_{rs}\beta_1^r\beta_1^s \,\Sigma p_{ij}\beta_2^i\beta_2^j = -\frac{1}{4}\Sigma h_{rsij}(A_{ri} + \varepsilon_{ri})(A_{sj} + \varepsilon_{sj}) =$$

$$= -\frac{1}{4}\Sigma h_{rsij} A_{ri}A_{sj} - \frac{1}{4}\Sigma h_{rsij}\varepsilon_{ri}\varepsilon_{sj} - \frac{1}{2}\Sigma h_{rsij} A_{sj}\varepsilon_{ri} = (*)$$

$$= -\frac{1}{4}\Sigma h_{rsij} A_{ri}A_{sj} - \frac{1}{4}\Sigma (h_{1s2j} - h_{2s1j})\varepsilon_{sj}\sqrt{-\frac{1}{A}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\Sigma h_{rsij} A_{ri}A_{sj} + \frac{1}{4}(h_{1122} - h_{2112} - h_{1221} + h_{2211})\frac{1}{A} =$$

$$= -\frac{1}{4}\Sigma h_{rsij} A_{ri}A_{sj} - \frac{K}{2}.$$

In (16) *abbiamo un nuovo invariante proiettivo della congruenza; altri invarianti sono il birapporto delle* 4 *asintotiche; altri invarianti si trovano studiando il sistema delle forme fondamentali* φ *e* Φ. Ma sorgono le domande:

1ª) Si trovano così tutti gli invarianti proiettivi d'una congruenza?

(*) Quest'ultimo termine è nullo, come si riconosce scambiando r con i ed s con j, ed osservando che $A_{sj} = A_{js}$, $\varepsilon_{ri} = -\varepsilon_{ir}$.

2ª) Gli invarianti delle forme φ, Φ sono anche tutti invarianti della congruenza?

Alla seconda domanda si risponde subito. Le collineazioni e le reciprocità, o lasciano inalterate le forme φ, Φ, o le moltiplicano per uno stesso fattore; in realtà perciò unico invariante proiettivo è il loro rapporto. Anche qui possiamo però introdurre coordinate *normali*, evitando così di ricorrere a tale rapporto, imponendo a qualche invariante (p. es. a W, se la congruenza non è W) di avere qualche valore numerico prefissato *a priori*. Così la forma φ resta determinata; e ne concludiamo che *dalla congruenza resta determinata una geometria metrica (invariante per collineazioni) che può servire a definire la distanza di due rette della congruenza, le rigate geodetiche ecc.*

§ 101. — Le equazioni differenziali fondamentali.

Per rispondere affermativamente alla prima delle domande posteci in fine del § 100 basterà dimostrare che, note le forme φ, Φ, si può determinare la congruenza. Troveremo infatti (come per i complessi) un sistema di equazioni ai differenziali totali (le condizioni d'integrabilità delle quali sono nel caso attuale l'analogo delle equazioni di Codazzi nella geometria metrica delle superficie). Ci occuperemo per semplicità soltanto delle congruenze non W (per queste si dovrebbe cominciare a scrivere l'equazione del 2° ordine, cui soddisfano le p). Allora le p, p_i, p_{rs} sono linearmente indipendenti e potremo perciò trovare delle quantità α, γ, σ tali che:

$$\text{(I)} \qquad p_{rst} = \alpha_{rst}\, p + \sum_{i,j} \gamma_{rsti} A_{ij} p_j + \Sigma\, \sigma_{rstij} A_{im} A_{jn} p_{mn}\,.$$

Moltiplicando per p_n e sommando, si trova:

$$S p_n p_{rst} = S \sum_{i,j} \gamma_{rsti} A_{ij} p_j p_n = \gamma_{rstn}$$

cioè

$$(1) \qquad \gamma_{rsij} = h_{rsij} .$$

Moliplicando per p e sommando si trova

$$(2) \qquad 0 = \sum_{i,j,m,n} \sigma_{rstij} A_{im} A_{jn} a_{mn} .$$

Moltiplicando per p_{fg} ($f, g = 1, 2$) e sommando si trova:

$$(3) \qquad -S \dot{p}_{fg} p_{rst} = + \alpha_{rst} a_{fg} + \sum_{i,j,m,n} \sigma_{rstij} h_{mnfg} A_{im} A_{jn} =$$

$$= \alpha_{rst} a_{fg} + \Sigma \sigma_{rstij} H^{ij}_{fg} .$$

I primi membri sono noti, appena siano date le φ, Φ (*). Otteniamo così nelle (2) e (3) tenute fisse r, s, t, precisamente 4 equazioni lineari nelle σ_{rst11}, σ_{rst12}, σ_{rst22}, α_{rst}; il determinante delle incognite è il terzo membro di (10) § 100, cioè è $W \neq 0$. Le (1), (2) e (3) determinano perciò completamente le equazioni fondamentali (I).

§ 102. — L'elemento lineare proiettivo d'una congruenza.

Posto, indicando con ρ (u, v) un fattore di proporzionalità,

$$p = \rho \bar{p} , \quad \text{si ha} \quad \varphi = \rho^2 \bar{\varphi} \quad \text{cioè} \quad a_{rs} = \rho^2 \bar{a}_{rs}$$

$$\begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix} = \overline{\begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix}} + \varepsilon_{ir} \frac{\rho_s}{\rho} + \varepsilon_{is} \frac{\rho_r}{\rho} - \Sigma A_{i\sigma} \frac{\rho_\sigma}{\rho} a_{rs}$$

$$(\varepsilon_{ii} = 1 , \quad \varepsilon_{ir} = 0 \quad \text{per } i \neq r)$$

(*) Infatti, essendo $p_{rst} - p_{rts}$ combinazione lineare delle p_i, un'espressione $S p_{fg} p_{rst}$ è simmetrica in r, s, t, così come è simmetrica in f, g. Vi sono perciò 8 di queste espressioni distinte tra loro, le quali si determinano subito dalle equazioni ottenute derivando covariantemente le $h_{rsij} = - S p_{rs} p_{ij}$.

$$p_{rs} = \rho\,\overline{p}_{rs} + a_{rs}\Sigma A_{i\sigma}\rho_\sigma\,\overline{p}_i + \overline{p}\,a_{rs}\,\Sigma\frac{A_{i\sigma}\rho_i\rho_\sigma}{\rho} +$$

$$+\,\overline{p}\left(\overline{\rho}_{rs} - 2\,\frac{\rho_r\,\rho_s}{\rho}\right)$$

ove le $\overline{\rho}_{rs}$ indicano derivate covarianti di ρ rispetto a $\overline{\varphi}$. Perciò:

$$S\,(\Sigma\,p_{rs}\,du_r\,du_s)^2 = \rho^2 S\,(\Sigma\,\overline{p}_{rs}\,du_r\,du_s)^2 -$$

$$-\,\varphi^2\Sigma\frac{A_{i\sigma}\rho_i\rho_\sigma}{\rho^2} - 2\Sigma\left(\frac{\overline{\rho}_{rs}}{\rho} - 2\,\frac{\rho_r\,\rho_s}{\rho}\right)\varphi\,du_r\,du_s\,.$$

Cioè

$$\Sigma\,k_{rsij}\,du_r\,du_s\,du_i\,du_j = \rho^2\,\Sigma\,\overline{k}_{rsij}\,du_r\,du_s\,du_i\,du_j + B_2\,\varphi + B_0\,\varphi^2,$$

ove $B_l\,(l = 0,\ 2)$ sono forme di grado l, dipendenti dalla ρ. Dunque, se scomponiamo (§ 4 E)

$$\Sigma\,k_{rsij}\,du_r\,du_s\,du_i\,du_j$$

in una somma

$$\Phi_4 + \varphi\,\Phi_2 + \varphi^2\,\Phi_0\,,$$

ove Φ_r $(r = 0,\ 2,\ 4)$ sono forme di grado i, e Φ_4, Φ_2 sono *apolari* alla φ (*) allora sarà:

$$\Phi_4 = \rho^2\,\overline{\Phi}_4 \qquad \varphi = \rho^2\,\overline{\varphi}\,.$$

Il rapporto $\Phi_4 : \varphi$ è un invariante intrinseco, affatto analogo a quello che nella teoria delle superficie abbiamo chiamato l'elemento lineare proiettivo.

(*) Si noti che, se a rigate u, v scegliamo le sviluppabili, cosicchè $a_{11} = {}$ $= a_{22} = 0$, allora $\Phi_4 = k_{1111}\,du^4 + k_{2222}\,dv^4$,

$$\Phi_2 = 2\,[k_{1112}\,du^2 + k_{2221}\,dv^2] : a_{12}\,, \qquad \Phi_0 = \frac{3}{2}\,k_{1122} : a_{12}^2\,.$$

Se le u, v sono le sviluppabili ed esso vale $(\beta du^4 + \gamma dv^4) : du\,dv$, noi possiamo, cambiando il fattore ρ, ridurre le forme Φ_4 e Φ_0 alle:

$$\Phi_4 = \sqrt{\beta\gamma}\,(\beta d u^4 + \gamma d v^4) \qquad \varphi_2 = \sqrt{\beta\gamma}\, du\, dv$$

e chiamare queste *forme normali* e le corrispondenti *coordinate normali.* Questo metodo vale anche per le congruenze W, perchè basta ricordare l'equazione delle asintotiche delle falde focali quando $a_{11} = a_{22} = 0$ per riconoscere che nelle nostre ipotesi $\beta\gamma \neq 0$ in tutti i casi, anche se la congruenza è W.

Si noti che le deformazioni proiettive non mutano il precedente rapporto; infatti, assunte a linee u, v le sviluppabili, e *supposto che le due congruenze abbiamo comune la forma* φ, le $\overline{p}_{uu} = p_{uu} + ap$, ecc., caratteristiche (cfr. il seg. §) per due congruenze applicabili, dicono che $k_{iiii} = \overline{k}_{iiii}$. Da tali equazioni segue però anche $k_{1122} = \overline{k}_{1122}$; cioè per l'applicabilità proiettiva è inoltre necessario, che, scelte le coordinate di retta in guisa che le due congrenze abbiano comune la forma φ, *non solo i precedenti rapporti abbiano valori uguali per le due congruenze, ma che esse abbiano comune anche l'invariante* Φ_0.

Non ci occupiamo di approfondire questo teorema, perchè noi studieremo la precedente questione per tutt' altra via, e perchè, per approfondire il precedente risultato, sarebbe necessario studiare le condizioni d'integrabilità delle (I) del § 101.

Alcune altre osservazioni.

Nelle applicazioni alla teoria delle superficie l'uso delle coordinate di retta ha un ufficio di solito affatto secondario. Abitualmente si ricorre a coordinate di punto e di piano (*). Nella teoria delle congruenze ciò si compie nel modo più semplice usando le coordinate

(*) Però recentemente il Thomsen ha trattato la teoria delle superficie anche in coordinate di retta.

dei fuochi e dei piani focali. Si può anche ricorrere alle coordinate di un solo fuoco, dando in più sulla corrispondente falda focale il sistema coniugato, immagine delle sviluppabili; è questo il metodo che noi abbiamo già usato al Cap. V°. Si potrebbero anche usare contemporaneamente le coordinate di un fascio centrale, cioè le coordinate x di un fuoco, e le coordinate ξ del piano tangente all'*altra* falda focale, e studiare poi le espressioni $S\,dx\,d\xi$ e analoghe. Si potrebbe anche definire una congruenza partendo dai due fuochi. Se p. es. indichiamo con x ed x' i due fuochi e con u, v le sviluppabili, si potrebbe p. es. definire con Wilczynski una congruenza con equazioni differenziali di cui le prime sarebbero del tipo:

$$x_u = a\,x + b\,x' \qquad x'_v = c\,x + e\,x'.$$

§ 103. — Applicabilità di complessi e congruenze.

A) Applicabilità del primo ordine di due complessi.

Vogliamo ora trattare di alcuni più recenti studii del Cartan, il quale estese le precedenti definizioni del Fubini anche alla deformazione proiettiva (del primo ordine) dei complessi, ed enunciò senza dimostrazione qualche teorema per la deformazione proiettiva (del secondo ordine) delle congruenze di rette.

Due complessi C, C' luogo rispettivamente della retta p e della retta p', funzioni degli stessi parametri u_i $(i = 1, 2, 3)$ (ciò che stabilisce una corrispondenza tra le rette dei due complessi) sono proiettivamente applicabili del primo ordine, se per ogni sistema di valori delle u_i esiste una collineazione T che porta il complesso delle rette p' in un altro complesso $\overline{C}$, luogo delle rette $\overline{p}$, in guisa che per *i valori considerati delle* u_i valgono uguaglianze del tipo:

$$(\alpha) \qquad \overline{p} = \rho p \qquad \overline{p}_i = \sigma p_i + \tau_i p$$

ove ρ, σ, τ_i sono convenienti costanti (che varieranno col variare del sistema di valori dati alle u_i). Se, come possiamo supporre senza nulla togliere alla generalità, la T è unimodulare, è *identicamente*

$$S\,dp'^2 = S\,d\bar{p}^2 .$$

Ma dalle (α) segue che, per i valori considerati delle u_i, è:

$$S\,d\bar{p}^2 = \sigma^2 S\,dp^2 .$$

Quindi, poichè alle u_i possiamo dare un qualunque sistema generico di valori, sarà *identicamente*

$$S\,dp'^2 = \sigma^2 S\,dp^2$$

ove σ è una *funzione* delle u_i.

Cioè: *la condiz. necessaria per l'applicab. proiettiva del primo ordine di due complessi è che alle rigate sviluppabili dell'uno corrispondano rigate sviluppabili dell'altro.* Dimostreremo *che questa condizione è anche sufficiente.* Infatti in tal caso le forme $S\,dp^2$ e $S\,dp'^2$ dei due complessi sono proporzionali, e con una opportuna collineazione (*) applicata ad una di essi, potremo renderle uguali: Sarà allora, posto $p = p_0$, $p'_0 = p'$, $p_i = \dfrac{\partial p}{\partial u_i}$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$S\,p_i p_k = S\,p'_i p'_k \; (i, k = 0, 1, 2, 3) .$$

Esisterà perciò una trasform. lineare intera omogenea delle p, che muta in sè la forma $S\,p^2$, e porta i valori delle p_i (corrispondenti a un determinato sistema di valori delle u) nei corrispondenti p'_i. E questa trasform. definisce appunto una trasform. proiettiva dello spazio ambiente. Il problema della applicabilità proiettiva del prim'ordine di due complessi coincide dunque col problema della rappresentabilità conforme di due forme di secondo grado in tre differenziali du_i (forme differenziali quadratiche ternarie): problema già studiato e risoluto dal Cartan e dal Finzi.

(*) Questa collineazione sulle x, avrà un modulo, il cui segno è quello di $S\,dp'^2 : S\,dp^2$. Qui con x indichiamo coordinate di punto.

B) Applicabilità proiettiva di due congruenze. (*F*)

Per l'applicabilità proiett. del 1° ordine di due congruenze K, K' si trova come sopra la condizione che le forme Sdp^2, Sdp'^2 ad esse relative siano proporzionali fra loro, condizione che equivale all'altra che, trasformando una di esse con una opportuna proiettività, le due forme Sdp^2 e Sdp'^2 siano identiche. Quali ulteriori condizioni sono necessarie per l'applicabilità proiettiva del secondo ordine? Come sappiamo, bisognerà che per ogni sistema di valori delle u_i esista una collineazione tale, che se essa porta K' nella congruenza $\overline{K}$ luogo della retta $\overline{p}$, allora, *per il sistema di valori da noi considerato delle* u_i, valgano le:

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{lll} \overline{p}_{uu} = \varepsilon p_{uu} + 2\beta p_u + ap & \overline{p}_{uv} = \varepsilon p_{uv} + \beta p_v + \gamma p_u + bp & \\ & \overline{p} = \varepsilon p & \\ \overline{p}_{vv} = \varepsilon p_{vv} + 2\gamma p_v + cp & \overline{p}_u = \varepsilon p_u + lp & \overline{p}_v = \varepsilon p_v + mp \end{array} \right.$$

con β, γ, a, b, c, l, m costanti (che però varieranno al variare dei valori dati alle u). La identità $Sdp^2 = Sdp'^2$ dà $\varepsilon^2 = 1$, cioè $\varepsilon = \pm 1$. Mutando le p di segno, se $\varepsilon = -1$, potremo rendere $\varepsilon = 1$.

Uguaglianze affatto simili si hanno sostituendo alle p_{uu}, p_{uv}, p_{vv} le derivate covarianti rispetto alla $Sdp^2 = Sdp'^2 = Sd\overline{p}^2 = \Sigma a_{rs} du_r du_s$; si trova così (posto $\beta = \beta_1$, $\gamma = \beta_2$, $a = b_{11}$, $b = b_{12}$, $c = b_{22}$

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \overline{p}_{rs} = p_{rs} + c_{rs} p + \beta_r p_s + \beta_s p_r$$

ove:

$$c_{rs} = b_{rs} - \begin{Bmatrix} rs \\ 1 \end{Bmatrix} l - \begin{Bmatrix} rs \\ 2 \end{Bmatrix} m .$$

Ora:

$$S\overline{p}_v \overline{p}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u} S\overline{p}_u \overline{p}_v - S\overline{p}_u \overline{p}_{uv} = \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial v} = Sp_v p_{uu}$$

perchè K e $\overline{K}$ hanno gli stessi coefficienti a_{rs}. Perciò, nel punto considerato, si avrà in virtù delle (1):

(2) $-m a_{11} + 2\beta a_{12} = 0$ e similmente $-l a_{22} + 2\gamma a_{12} = 0$.

Così: $$S\overline{p}_v\,\overline{p}_{uv} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial u} = S p_v p_{uv}$$ donde:

$$(2)_{bis}\qquad \begin{cases} \beta a_{22} + \gamma a_{11} - m a_{12} = 0 & \text{e similmente:} \\ \gamma a_{11} + \beta a_{22} - l a_{12} = 0 . \end{cases}$$

Infine, poichè la differenza $h_{1122} - h_{1212}$ dipende soltanto dalla curvatura di

$$\Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s$$

e perciò ha valori uguali per le due congruenze, sarà ancora in virtù delle $(1)_{bis}$

$$(2)_{ter}\qquad \Sigma A_{rs}(\beta_r\beta_s + c_{rs}) = 0 .$$

Eliminando l, m dalle (2) e $(2)_{bis}$ si ha:

$$a_{11}(\beta a_{22} + \gamma a_{11}) = 2\beta a_{12}^2 \qquad a_{22}(\beta a_{22} + \gamma a_{11}) = 2\gamma a_{12}^2$$

cioè: $$a_{12}(a_{22}\beta - a_{11}\gamma) = 0 .$$

Dunque: *se* $a_{12} \neq 0$, sarà:

$$a_{22}\beta = a_{11}\gamma \quad \text{donde:}\quad 2\beta a_{11} a_{22} = 2\beta a_{12}^2, \qquad 2\gamma a_{11} a_{22} = 2\gamma a_{12}^2,$$

cioè, essendo nelle nostre ipotesi $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, per le (2), $(2)_{bis}$, $(2)_{ter}$

(3) (*se* $a_{12} \neq 0$) $\beta = \gamma = 0$, $l = m = 0$, $\Sigma A_{rs} c_{rs} = 0$.

Se invece fosse $a_{12} = 0$ si troverebbe:

$\gamma a_{11} = -\beta a_{22}$, $l = m = 0$ (perchè $a_{11} a_{22} \neq 0$) oltre alla $(2)_{ter}$.

Se $a_{11} = a_{22} = 0$, se cioè assumiamo a rigate u, v le sviluppabili delle due congruenze che necessariamente si corrispondono, le (3) danno:

$$(4) \qquad a_{11} = a_{22} = \beta = \gamma = l = m = c_{12} = b_{12} = 0$$

e le (1) diventano semplicemente:

$$(5) \quad \begin{cases} p = \bar{p}\,, \quad p_u = \bar{p}_u\,, \quad p_v = \bar{p}_v \\ \bar{p}_{uu} = p_{uu} + a p\,, \quad \bar{p}_{uv} = p_{uv}\,, \quad \bar{p}_{vv} = p_{vv} + c p\,. \end{cases}$$

Se noi ci muoviamo nella direzione $du : dv$ (di spazio rigato) le rette lungo cui si muovono i fuochi, o rotano i piani focali costituiscono due coppie di rette, ciascuna delle quali è determinata (§ 99 A) come quella coppia di rette, che è intersezione di certi 4 complessi lineari. Basta osservare le formole precedenti per riconoscere che il sistema lineare ∞^3 determinato da questi 4 complessi relativi ad una congruenza coincide col sistema lineare analogo relativo alla seconda congruenza, che cioè *corrispondentemente alla direzione* du : dv *di spazio rigato, i fuochi della* K *e quelli della* $\overline{\mathrm{K}}$ *si muovono in una stessa direzione così come i piani focali di* K *e quelli della* $\overline{\mathrm{K}}$ *rotano intorno alla stessa direzione.* Dal che segue anche in particolare (come si potrebbe anche dedurre dalle formole (6) del § 99) che ai sistemi coniugati di una falda focale di K corrispondono sistemi coniugati della falda omologa di $\overline{K}$; cioè che *le falde focali di* K *sono tangenti alle falde omologhe di* $\overline{\mathrm{K}}$ *e che le asintotiche delle falde focali di* K *corrispondono alle asintotiche delle falde omologhe di* $\overline{\mathrm{K}}$.

Supponiamo ora viceversa *che per ogni valore di* $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$ *le rette in cui cominciano a muoversi i fuochi od a rotare i piani focali siano le stesse rette sia per la congruenza* K *che per* $\overline{\mathrm{K}}$, e siano soddisfatte le

$$(6) \qquad p = \bar{p}\,, \quad \bar{p}_u = p_u + l p\,, \quad \bar{p}_v = p_v + m p\,.$$

Allora i citati due sistemi lineari di ∞^3 complessi relativi a K coincidono coi sistemi lineari omologhi relativi a $\overline{K}$. Se le u, v sono per es. le sviluppabili, questi sistemi lineari sono uno quello definito dai complessi p, p_u, p_v, $p_{uu}du + p_{uv}dv = dp_u$, l'altro quello definito dai complessi p, p_u, p_v, dp_v. Affinchè sia soddisfatta la nostra ipotesi dovranno dunque valere (per il sistema di valori u_i da noi considerato) le:

$$\overline{p}_{uu} = r p_{uu} + s p_u + t p_v + a p$$

$$\overline{p}_{uv} = r p_{uv} + m' p_u + l' p_v + b p$$

$$\overline{p}_{vv} = r p_{vv} + t' p_u + s' p_v + c p$$

ove r, s, t, ecc. sono opportune costanti.

Poichè $a_{12} = -S p p_{uv} = -S \overline{p}\, \overline{p}_{uv}$, dovrà essere $r = 1$. Con ragionamenti analoghi ai precedenti dalla $S p_u p_{uv} = 0 = S \overline{p}_u \overline{p}_{uv}$ si trae: $l' a_{12} - l a_{12} = 0$, cioè $l = l'$ e analogamente $m = m'$.

Dalla $S \overline{p}_u \overline{p}_{uu} = S p_u p_{uu} = 0$ si trae $t = 0$, e analogamente $t' = 0$

» $S \overline{p}_u \overline{p}_{vv} = S p_u p_{vv}$ » » $s' = 0$, » » $s = 0$

» $h_{1122} - h_{1212} = \overline{h}_{1122} - \overline{h}_{1212}$ si trae infine:

$$l m = l' m' = c_{12} = b - \binom{12}{1} l - \binom{12}{2} m = b$$

cosicchè, le equazioni da aggiungere alle (6) sono le:

$$\text{(7)} \qquad \overline{p}_{uu} = p_{uu} + a p \qquad \overline{p}_{uv} = p_{uv} + m p_u + l p_v + l m p$$

$$\overline{p}_{vv} = p_{vv} + c p\,.$$

Le (6), (7) coincidono con le (5), se $l = m = 0$. Dunque: *La coincidenza delle sopra citate rette su cui si muovono i fuochi, e di quelle attorno a cui ruotano i piani focali per la congruenza* K *e per una conveniente trasformata proiettiva* $\overline{\mathrm{K}}$ *di* K′, *è condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di* K, K′, *quando si suppongono soddisfatte le* $\mathrm{p} = \overline{\mathrm{p}}$, $\mathrm{p}_i = \overline{\mathrm{p}}_i$.

C) Studio delle falde focali di congruenze applicabili (del secondo ordine).

Supporremo qui le sviluppabili $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ reali, lasciando al lettore la facile estensione al caso di congruenze con sviluppabili complesse.

Sia x un fuoco di una retta generica p della congruenza K; esso generi una superficie S; sia

$$(8) \qquad p = (x\,x_v) \qquad (u,\ v \text{ essendo le sviluppabili}).$$

Se x' è il fuoco omologo della retta p' corrispondente alla p nella congruenza K', le asintotiche della superficie S' luogo di x' corrisponderanno alle asintotiche della superficie S luogo di x; e noi potremo normare le x' in guisa che

$$(9) \qquad (x'\,x'_u\,x'_v\,d^2 x') = (x\,x_u\,x_v\,d^2 x)\,.$$

Resterà nelle x' soltanto una indeterminazione di segno, e sarà:

$$p' = R\,(x'\,x'_v) \qquad (R = \text{funzione di } u,\ v).$$

Posto

$$(10) \quad \begin{cases} x_{uv} = M x_u + Q x_v + p_{12} x & \text{(cosa lecita, perchè } u, v \text{ sono coniugate)} \\ x'_{uv} = M' x'_u + Q' x'_v + p'_{12} x\,, \end{cases}$$

si avrà:

$$(11) \qquad p_u = (x_u + Q x\,,\ x_v - M x) \qquad p_v = (x\,x_{vv})$$

$$S\,p_u\,p_v = (x\,x_u\,x_v\,x_{vv}) = (x'\,x'_u\,x'_v\,x'_{vv})\,.$$

Confrontando con $S p'_u p'_v$, che, per le precedenti ipotesi, è uguale a $S p_u p_v$, se ne deduce $R^2 = 1$, cioè $R = \pm 1$. Porremo $R = \omega = \pm 1$, scrivendo:

$$(12) \qquad p' = \omega (x' x'_v) \qquad (\omega = \pm 1).$$

Ora per ogni sistema di valori delle u, v deve esistere una proiettività unimodulare che porta il punto x' nel punto $\bar{x} = x$, una retta tangente ad S' nella tangente omologa di S, le coordinate p' nelle p, le p'_u e p'_v nelle p_u, p_v. Indicando col simbolo $\equiv$ due quantità che si corrispondano in tale proiettività, dovrà dunque essere *per i valori considerati delle* u, v:

$$(13) \qquad x' \equiv r x \qquad x'_u \equiv \sigma x_u + \lambda x \qquad x'_v \equiv \sigma x_v + \tau x$$

$$(14) \quad \begin{cases} p' = \omega (x' x'_v) \equiv (x x_v) \\ p'_u = \omega (x' x'_{uv}) + \omega (x'_u x'_v) \equiv (x x_{uv}) + (x_u x_v) \\ p'_v = \omega (x' x'_{vv}) \equiv (x x_{vv}). \end{cases}$$

Poichè da (13) si ha $(x' x'_v) \equiv r \sigma (x x_v)$, da (14) si deduce:

$$(15) \qquad \omega r \sigma = 1 \quad \text{cioè} \quad \omega = r \sigma = \pm 1.$$

Se è $x'_{vv} \equiv \bar{x}_{vv}$, cioè se $\bar{x}_{vv}$ sono le quantità omologhe ad x'_{vv} nella nostra collineazione (cioè sono i valori di $\dfrac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2}$ nel punto considerato calcolati per la superficie $\bar{S}$ trasformata di S' nella collineazione) sarà *(nel punto considerato)* per l'ultima delle (14):

$$\omega (x' x'_{vv}) \equiv \omega r (x \bar{x}_{vv}) = (x x_{vv})$$

ossia

$$x'_{vv} \equiv \frac{x_{vv}}{\omega r} + n x \qquad (n = \text{conveniente parametro})$$

donde:

$$(x' x'_u x'_v x'_{vv}) \equiv \omega \sigma^2 (x x_u x_v x_{vv})$$

e per la (9): $\omega \sigma^2 = 1$, $\sigma = \pm 1$, $\omega = 1$.

Cambiando eventualmente il segno delle x', che abbiamo osservato essere non ancora determinate di segno, potremo rendere $\sigma = 1$, e quindi per (15)

$$\omega = \sigma = r = 1 .$$

Quella delle (14) che corrisponde a p'_u diventa, se la nostra collineazione porta x'_{uv} in $\bar{x}_{uv}$

$$(x\,\bar{x}_{uv}) + \omega\,(x_u + \lambda x\,,\ \ x_v + \mu x) = (x\,x_{uv}) + (x_u\,x_v)$$

cioè:

$$(\omega - 1)\,(x_u\,x_v) + \lambda\,\omega\,(x\,x_v) + \mu\,\omega\,(x_u\,x) + (x\,,\ \bar{x}_{uv} - x_{uv}) = 0$$

$$(\omega - 1)\,(x_u\,x_v) + (x\,,\ \lambda\,\omega\,x_v - \tau\,\omega\,x_u + \bar{x}_{uv} - x_{uv}) = 0\,.$$

Donde si ricava, oltre che di nuovo $\omega = 1$, anche la:

$$x'_{uv} \equiv \bar{x}_{uv} = x_{uv} + \tau\,x_u - \lambda\,x_v + \rho\,x\,.$$

Da (10), (13) si trae, ponendo $\delta M = M' - M$, $\delta Q = Q' - Q$ e analoghe:

$$x'_{uv} \equiv M'\,(x_u + \lambda x) + Q'\,(x_v + \mu x) + p'_{12}\,x = x_{uv} + x_u\,\delta M +$$

$$+ x_v\,\delta Q + x\,(\delta p_{12} + M'\lambda + Q'\mu)\,.$$

Confrontando con la precedente si trae: $\tau = \delta M$, $\lambda = -\delta Q$ e infine

$$\rho = \delta p_{12} + M'\lambda + Q'\mu = \delta p_{12} + Q\,\delta M - M\,\delta Q\,.$$

Cosicchè in conclusione le nostre formole sono *(per il considerato sistema di valori delle* u, v*)*

$$x' \equiv x \qquad x'_u \equiv x_u - x\,\delta Q \qquad x'_v \equiv x_v + x\,\delta M$$

(16)

$$x'_{vv} \equiv x_{vv} + n\,x \quad x'_{uv} \equiv x_{uv} + x_u\,\delta M + x_v\,\delta Q + x\,(\delta p_{12} + Q\,\delta M - M\,\delta Q)\,.$$

Nel seguito sottintenderemo sovente che le nostre formole valgono solo per i considerati valori delle u, v.

Dovremo ora trovare sotto quali condizioni avviene che, dando alle u, v gli incrementi du, dv, il secondo fuoco

$$(17) \qquad x'_1 = x'_v - M' x' \quad \left[\text{non si confonda con} \quad x'_1 = \frac{\partial x'}{\partial u}\right]$$

della congruenza K' si sposti lungo una retta, che nella nostra collineazione è trasformata della retta lungo cui si sposta il secondo fuoco

$$(18) \qquad x_1 = x_v - M x$$

della congruenza K, insieme alla proprietà analoga per il secondo piano focale.

La (17) dà per le (16)

$$x'_1 \equiv x_v + x\,\delta M - M' x = (x_v + x\,\delta M) - (M + \delta M)\, x =$$

$$= x_v - M\,x \equiv x_1$$

cioè *(per i considerati valori delle* u, v*)*

$$(19) \qquad x'_1 \equiv x_1 \,.$$

Ora valgono le:

$$x_{1u} = \frac{\partial x_1}{\partial u} = x_{uv} - M_u x - M x_u = Q x_v + (p_{12} - M_u)\, x\,;$$

$$x_{1v} = x_{vv} - M_v x - M x_v$$

insieme alle analoghe per x'_{1u}, x'_{1v}. La condizione sopra enunciata per i fuochi si enuncia dicendo che esistono dei parametri R, L, T tali che

$$R\,x'_{1u} + L\,x'_1 \equiv x_{1u} \qquad R\,x'_{1v} + T\,x'_1 \equiv x_{1v}\,.$$

La prima dice che:

$$R\,[Q'\,x'_v + (p'_{12} - M'_u)\,x'] + L\,x'_1 \equiv Q\,x_v + (p_{12} - M_u)\,x$$

la quale, per le

$$x' \equiv x\,, \qquad x'_v \equiv x_v + x\,\delta P\,,$$

equivale alla:

$$R\,(Q + \delta Q)\,x_v + x\,[R\,(Q + \delta Q)\,\delta M + R\,p'_{12} - R\,M'_u] +$$

$$+ L\,(x_v - M\,x) = Q\,x_v + (p_{12} - M_u)\,x\,.$$

Le seconda equivale similmente alla:

$$R\,(x_{vv} + \nu\,x) - M'_v\,x - M'\,(x_v + x\,\delta M) + T\,x_v - T\,P\,x =$$

$$+ x_{vv} - M_v\,x - M\,x_v\,.$$

Confrontando in questa i termini in x_{vv} si trae $R = 1$. Confrontando poi gli altri termini nella seconda e nella prima equazione trovata si ha:

$$T = \delta M = \mu \qquad n = \delta M_v + M'\,\delta M + M\,\delta M = \delta M_v + \delta\,(M^2)$$

$$L = -\,\delta Q = \lambda \qquad (Q + \delta Q)\,\delta M + \delta\,p_{12} - \delta M_u + M\,\delta Q = 0\,.$$

cioè *(per i considerati valori delle* u, v*)*

(20) $$x'_{1u} - x'_1\,\delta Q \equiv x_{1u} \qquad x'_{1v} + x'_1\,\delta M \equiv x_{1v}$$

(21) $$n = \delta M_v + \delta\,(M^2)$$

(I) $$\delta\,(M\,Q + p_{12} - M_u) = 0\,.$$

Le (19) e (20) sono affatto analoghe alle prime delle (16); la (21) *determina* n.

La relazione più importante è la (I)*; essa dice che le equazioni* (10) *di Laplace relative al nostro sistema coniugato per le due superficie* S *ed* S′ *hanno uguale il primo invariante (per il sistema considerato di valori delle* u, v*). Si noti che le equazioni* (10) *sono relative alle coordinate di punto* (F).

D) Continuazione. - Formole duali delle precedenti.

Riassumendo noi abbiamo con le (16), (21) e (I) tenuto conto delle $p' \equiv p$, $p'_i \equiv p_i$, e del fatto che nella nostra collineazione si corrispondono le rette lungo cui cominciano a muoversi i fuochi x, x_1 ed x', x'_1 quando le u, v ricevono gli incrementi du, dv. Per trovare tutte le condizioni affinchè le congruenze siano proiettivamente applicabili, basterà trovare quando nella nostra collineazione si corrispondono le rette intorno a cui cominciano a rotare i piani focali.

Osserviamo a tal fine che le rette (ξ, ξ_u) ed (x, x_v) coincidono, e che il rapporto delle (ξ, ξ_u) alle omóloghe $(x\, x_v)$, dipendendo soltanto dalle a_{rs}, è identicamente uguale al rapporto delle $(\xi' \xi'_u)$ alle omologhe $(x' x'_v)$. Perciò, posto $p = (\xi \xi_u)$, potremo ragionare su queste come prima sulle $(x x_v)$. *E allora, per dualità, noi possiamo senz'altro prevedere il risultàto finale.* Ma, per essere completi e perchè sia ben chiaro il tutto, preferiamo trovare tale risultato per via diretta. Dobbiamo dunque ricercare le rette attorno a cui ruotano i piani focali quando le u, v ricevono gli incrementi du, dv. I piani focali ξ, ξ' tangenti ad S, S' ruotano attorno alle tangenti alle S, S' coniugate delle rette su cui cominciano a muoversi i fuochi x, x'; la nostra condizione è quindi certo soddisfatta per tali piani perchè su S, S' si corrispondono asintotiche e sistemi coniugati. La condizione relativa ai secondi piani focali sarà pure soddisfatta in modo analogo allora soltanto che anche S_1 ed S'_1 si corrispondano con conservazione delle asintotiche (e quindi anche dei sistemi coniugati). Scriviamo dunque questa condizione.

Le coordinate ξ, ξ' sono date da

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{|A|}}(x\, x_u\, x_v) \qquad \text{e analoghe per } \xi' \equiv \xi\,.$$

Varranno equazioni del tipo:

$$(10)_{\text{bis}} \quad \xi_{uv} = \mu\, \xi_u + \varkappa\, \xi_v + \pi_{12}\, \xi\,, \quad \xi'_{uv} = \mu' \xi'_u + \varkappa' \xi'_v + \pi'_{12} \xi'\,.$$

La teoria delle superficie insegna che $M+\mu$, $Q+\varkappa$ dipendono solo dai simboli di Christoffel per la forma F_2 comune ad S, S'. Perciò $\mu+M$ e $\varkappa+Q$ sono rispettivamente uguali a $\mu'+M'$, $\varkappa'+Q'$. Posto $\delta\mu=\mu'-\mu$ e analoghe, sarà così:

$$(10)_{\text{ter}} \qquad \delta\mu=-\delta M \qquad \delta\varkappa=-\delta Q.$$

Poichè, se $T\xi'$, $T\xi'_u$ ecc. sono i trasformati di ξ', ξ'_u ecc. mediante la nostra collineazione:

$$0=S\xi'_u x'=S(T\xi'_u)(Tx')=Sx(T\xi'_u), \quad 0=Sx\xi_u-$$

$$-a_{11}=S\xi'_u x'_u=S(T\xi'_u)T(x'_u)=S(T\xi'_u)(x_u-x\delta Q)=Sx_u(T\xi'_u)-$$

$$-a_{11}=Sx_u\xi_u,$$

sarà

$$Sx[(T\xi'_u)-\xi_u]=0, \quad Sx_u[(T\xi'_u)-\xi_u]=0$$

$$\text{e analogamente} \quad Sx_v[(T\xi'_u)-\xi_u]=0;$$

sarà perciò:

$$T\xi'_u=\xi_u+\alpha_1\xi \quad \text{ossia} \quad \xi'_u\equiv\xi_u+\alpha_1\xi, \quad \xi'_v\equiv\xi_v+\alpha_2\xi.$$

Si tratta di determinare α_1 ed α_2; a tal fine si noti che l'identità dei coefficienti a_{rs} della F_2 per S ed S' provano che

$$S(\xi_u+\alpha_1\xi)(x_{vv}+nx)-S(\xi_v+\alpha_2\xi)(x_{uv}+x_u\delta M+x_v\delta Q+$$

$$+x[\delta p_{12}+Q\delta M-M\delta Q])=S(T\xi'_u)(Tx'_{vv})-S(T\xi'_v)(Tx'_{uv})=$$

$$=S\xi'_u x'_{vv}-S\xi'_v x'_{uv}=\frac{\partial a_{22}}{\partial u}-\frac{\partial a_{12}}{\partial v}=S\xi_u x_{vv}-S\xi_v x_{uv}.$$

Se ne deduce $\alpha_1=-\delta Q$ e similmente $\alpha_2=\delta M$, donde (nel punto considerato):

$$(16)_{\text{bis}} \qquad \xi'_u\equiv\xi_u-\xi\delta Q \quad \xi'_v\equiv\xi_v+\xi\delta M \quad (\text{oltre alla } \xi'\equiv\xi).$$

Dalle $(10)_{\text{bis}}$ e $(10)_{\text{ter}}$ si deduce poi:

$$(16)_{\text{ter}} \qquad \xi'_{uv} \equiv \xi_{uv} - \xi_u \delta M - \xi_v \delta Q + (\mu \delta \varkappa - \varkappa \delta \mu + \delta \pi_{12}) \xi .$$

Posto al solito $2X = \Delta_2 x = \dfrac{1}{a_{11}} x_{11} + \dfrac{1}{a_{22}} x_{22}$ si ha:

$$S X \xi_i = 0 ; \quad \text{quindi} \ \frac{1}{a_{11}} S \xi_i x_{uu} + \frac{1}{a_{22}} S \xi_i x_{vv}$$

ha un valore dipendente solo dalle a_{rs} e perciò ha *lo stesso valore sulle due superficie.* Poichè

$$S \xi'_i x'_{vv} = S (T \xi'_i) (T x'_{vv}) = S (\xi_i + \alpha_i \xi) (x_{vv} + n x) = S \xi x_{vv} + \alpha_i a_{22} ,$$

se ne deduce che

$$S \xi'_i x'_{uu} = S (T \xi') (T x'_{uu}) = S (\xi_i + \alpha_i \xi) (T x'_{uu}) = S \xi_i x_{uu} - \alpha_i a_{11} .$$

Perciò:

$$S x' \xi'_{uu} = a_{11} = S x \xi_{uu} ;$$

$$S x'_u \xi'_{uu} = - \frac{\partial a_{11}}{\partial u} - S \xi'_u x'_{uu} = - \frac{\partial a_{11}}{\partial u} - S \xi_u x_{uu} -$$

$$- a_{11} \delta Q = S x_u \xi_{uu} - a_{11} \delta Q .$$

Così

$$S x'_v \xi'_{uu} = - \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - S \xi'_u x'_{uv} = - \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - S (T \xi'_u) (T x'_{uv}) =$$

$$= - \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - (\xi_u - \xi \delta Q) (x_{uv} + x_u \delta M + x_v \delta Q + x [\ldots]) =$$

$$= - \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - S \xi_u x_{uv} + a_{11} \delta M = S x_v \xi_{uu} + a_{11} \delta M .$$

In conclusione:

$$S (x_i + \alpha_i x) \xi_{uu} = S x_i \xi_{uu} + \alpha_i a_{11} = S x'_i \xi'_{uu} = S (x_i + \alpha_i x) (T \xi'_{uu})$$

$$S x' \xi'_{uu} = S x (T \xi'_{uu}) = S x \xi_{uu} ,$$

ossia :

$$S x (T \xi'_{uu} - \xi_{uu}) = 0 \qquad S (x_i + \alpha x) (T \xi'_{uu} - \xi_{uu}) = 0 .$$

Perciò :

$$(16)_{\text{quater}} \qquad T \xi'_{uu} = \xi_{uu} + \nu x \qquad \text{ossia} \quad \xi'_{uu} \equiv \xi_{uu} + \nu x ,$$

dove ν è un parametro che calcoleremo ben presto.

Le $(16)_{\text{bis}}$, $(16)_{\text{ter}}$, $(16)_{\text{quater}}$ sono le formole *duali* delle (16). Le due seconde falde focali sono inviluppate dai piani

$$\xi_1 = \xi_u - \varkappa \xi \qquad \xi'_1 = \xi'_u - \varkappa' \xi' .$$

Valgono le :

$$\xi'_{1v} = \xi'_{uv} - \varkappa'_v \xi' - \varkappa' \xi'_v = \mu' \xi'_u + (\pi'_{12} - \varkappa'_v) \xi' \equiv \mu' \xi_u +$$

$$+ (\pi'_{12} - \mu' \delta Q - \varkappa'_v) \xi =$$

$$= \xi_{1v} + \xi_u \delta \mu + \xi (\delta \pi_{12} - \mu' \delta Q - \delta \varkappa_v) =$$

$$= \xi_{1v} + \xi_1 \delta \mu + \xi (\delta \pi_{12} + \varkappa \delta \mu + \mu' \delta \varkappa - \delta \varkappa_v)$$

cioè

$$(20)_{\text{bis}} \qquad \xi'_{1v} \equiv \xi_{1v} + \xi_1 \delta \mu + \xi (\delta \pi_{12} + \delta [\varkappa \mu] - \delta \varkappa_v)$$

e le

$$\xi'_{1u} = \xi'_{uu} - \varkappa'_u \xi' - \varkappa' \xi'_u \equiv \xi_{uu} + \nu \xi - \varkappa'_u \xi - \varkappa' (\xi_u - \xi \delta Q) =$$

$$= \xi_{1u} - \xi_u \delta \varkappa + \xi (+ \nu - \delta \varkappa'_u + \varkappa' \delta Q) =$$

$$= \xi_{1u} - \xi_1 \delta \varkappa - \xi (\varkappa \delta \varkappa - \varkappa' \delta Q - \nu + \delta \varkappa'_u)$$

cioè

$$(20)_{\text{ter}} \qquad \xi'_{1u} \equiv \xi_{1u} - \xi_1 \delta \varkappa + \xi (\nu \delta [\varkappa^2 + \varkappa_u]) .$$

Le $(20)_{\text{bis}}$ e $(20)_{\text{ter}}$ sono *duali* delle (20). Le equazioni delle asintotiche sulle due falde focali si ottengono annullando

$$S(\xi'_{1u}du + \xi'_{1v}dv)(x'_{1u}du + x'_{1v}dv) \qquad \text{e analoga in } \xi_1,\ x_1.$$

Poichè nella prima alle ξ'_{1u}, ξ'_{1v}, x'_{1u}, x'_{1v} possiamo sostituire $T\xi'_{1u}$ e analoghe, otterremo per le formole precedenti che la differenza di queste due forme è:

$$\{(\nu - \delta[\varkappa^2 + \varkappa'_u])\,du + \delta(\pi_{12} + \varkappa\mu - \varkappa_v)\,dv\} \times$$
$$\times\, S(\xi x_{1u}du + \xi x_{1v}dv) \quad (*)$$

ove:

$$S(\xi x_{1u}) = -Sx_1\xi_u = 0 \qquad S(\xi x_{1v}) = -Sx_1\xi_v = a_{22}\,.$$

Tale differenza è pertanto

$$a_{22}\{(\nu - \delta[\varkappa^2 + \varkappa'_u])\,du + \delta(\pi_{12} + \varkappa\mu - \varkappa_v)\,dv\}\,dv.$$

Essendo le u, v coniugate anche sulle seconde falde focali, sarà:

$$(21)_{\text{bis}} \qquad \nu = \delta(\varkappa^2 + \varkappa'_u)$$

che ci dà la ν con una formola *duale* della (21), che dava n.

Si avrà dunque corrispondenza delle asintotiche sulle seconde falde focali soltanto se

$$\text{(II)} \qquad \delta(\pi_{12} + \varkappa\mu - \varkappa_v) = 0\,,$$

formola duale della (I). Questa formola, insieme alle precedenti, si poteva anche ottenere, come già dicemmo, ripetendo i precedenti ragionamenti, già svolti per le coordinate x ed x' di punto, per le coordinate ξ, ξ' di piano tangente. L'uguaglianza degli invarianti $(p_{12} + QM - M_u)$ e $(\pi_{12} + \varkappa\mu - \varkappa_v)$ è anche sufficiente per l'applicabilità proiettiva delle due congruenze. In tal caso la

(*) Si ricordi che $S\xi x_1 = S\xi_1 x_1 = S\xi_1 x_{1u} = S\xi_1 x_{1v} = 0$.

collineazione T che porta x', x'_u, x'_v, x'_{vv} in x, $x_u - x\delta Q$, $x_v + x\delta M$, $x_{vv} + x\delta(M_v + M^2)$ è unimodulare perchè $(x' x'_u x'_v x'_{vv}) = (x x_u x_v x_{vv})$. I calcoli precedenti dimostrano che la T porta ciascuna falda focale di K' in una superficie $\overline{S}$ tale che una direzione tracciata su $\overline{S}$ ed uscente dal punto assegnato coincide con la direzione omologa della corrispondente falda focale di K. Poichè valgono poi le $p \equiv p'$, $p_i \equiv p'_i$, segue appunto che K, K' sono applicabili.

Possiamo adunque asserire: *Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due congruenze* (del 2° ordine) *è che le asintotiche di una prima falda focale dell'una corrispondano alle asintotiche della falda focale omologa dell'altra, e che su tali falde il sistema coniugato delle sviluppabili abbia* p. es. *lo stesso primo invariante per la corrispondente equazione di Làplace relativa alle coordinate di punto, e lo stesso secondo invariante per l'equazione di Laplace relativa alle coordinate di piano tangente.*

Naturalmente *si corrisponderanno anche le asintotiche delle seconde falde focali.*

E) Trasformazione delle precedenti condizioni.

Di più notiamo che, per note proprietà degli invarianti di una equazione di Laplace, il precedente teorema lascia completamente indeterminato il fattore di proporzionalità per le coordinate di punto e di piano tangente delle considerate falde focali. Se esse sono scelte nel modo sopra citato, si osservi che, oltre alle

$$M = \binom{12}{1} + \frac{a_{121}}{a_{11}} \qquad Q = \binom{12}{2} + \frac{a_{122}}{a_{22}}$$

valgono le:

$$\mu = \binom{12}{1} - \frac{a_{121}}{a_{11}} \qquad \varkappa = \binom{12}{2} - \frac{a_{122}}{a_{22}};$$

sostituendo alla (II) la differenza ottenuta sottraendola dalla (I), si otterrà essendo $\delta \binom{rs}{t} = 0$ perchè $a_{rs} = a'_{rs}$:

$$\delta(\pi_{12} - p_{12}) + \delta\left(\frac{a_{121}}{a_{11}}\right)_u + \delta\left(\frac{a_{122}}{a_{22}}\right)_v - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta a_{122}}{a_{22}} -$$

$$- 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\delta a_{121}}{a_{11}} = 0 .$$

Ora essendo $a_{12} = 0$ le (11) del § 14 B dicono, ricordando le relazioni di coniugio, che:

$$\pi_{12} - p_{12} = \frac{a_{1121} - a_{1112}}{a_{11}} = - \frac{a_{2221}}{a_{22}} - \frac{a_{1112}}{a_{11}} =$$

$$= - \frac{1}{a_{22}}\left(\frac{\partial a_{222}}{\partial u} - 3\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}a_{122} - 3\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}a_{222}\right) -$$

$$- \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial a_{111}}{\partial v} - 3\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}a_{111} - 3\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}a_{112}\right) =$$

$$= - \frac{1}{a_{22}}\left(\frac{\partial a_{222}}{\partial u} - \frac{3}{2}\frac{\partial \log a_{11}}{\partial v}a_{122} - \frac{3}{2}\frac{\partial \log a_{22}}{\partial u}a_{222}\right) -$$

$$- \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial a_{111}}{\partial v} - \frac{3}{2}\frac{\partial \log a_{11}}{\partial v}a_{111} - \frac{3}{2}\frac{\partial \log a_{22}}{\partial u}a_{112}\right)$$

ossia:

$$(22) \qquad \pi_{12} - p_{12} = - \frac{1}{a_{22}}\frac{\partial a_{222}}{\partial u} - \frac{1}{a_{11}}\frac{\partial a_{111}}{\partial v} .$$

Sostituendo a $\pi_{12} - p_{12}$ questo valore, la formola precedente diventa:

$$- \frac{1}{a_{22}}(\delta a_{222})_u - \frac{1}{a_{11}}(\delta a_{111})_v - \delta\left(\frac{a_{222}}{a_{22}}\right)_u - \delta\left(\frac{a_{111}}{a_{11}}\right)_v +$$

$$+ \frac{1}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\frac{\delta a_{111}}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u}\frac{\delta a_{222}}{a_{22}} = 0$$

ossia:

$$\delta\left(\frac{a_{222}}{a_{22}}\right)_u + \delta\left(\frac{a_{111}}{a_{11}}\right)_v = 0 . \tag{23}$$

Dunque: *Alla identità* (II) *dei due invarianti per l' equazione di Laplace relativa alle coordinate di piano tangente si potrà sostituire la* (23), *che contiene solo coefficienti dell' elemento lineare proiettivo ed è quindi identicamente soddisfatta se le falde focali* S *ed* S' *sono proiettivamente applicabili.*

Notiamo un' altra forma che si può dare a (23) per le relazioni di coniugio:

$$\delta\left(\frac{a_{112}}{a_{11}}\right)_u + \delta\left(\frac{a_{122}}{a_{22}}\right)_v = 0$$

ossia:

$$\delta\left[\binom{12}{1} + \frac{a_{112}}{a_{11}}\right]_u + \delta\left[\binom{12}{2} + \frac{a_{122}}{a_{22}}\right]_v = 0$$

ossia:

$$\delta\,(M_u + Q_v) = 0 . \tag{24}$$

Riferendoci dunque alle *sole* equazioni (10) in coordinate di punto possiamo dire:

Due congruenze sono proiettivamente applicabili se p. es. le prime falde focali si corrispondono con conservazione delle asintotiche, cosicchè si possa supporre che esse abbiano uguale forma F_2; *e se le equazioni di Laplace* (10) *per le coordinate di punto rispetto al sistema coniugato determinato dalle sviluppabili abbiano uguali primi invarianti ed eguali valori di* $M_u + Q_v$.

Non riesce poi difficile del resto verificare che solo in tal caso le $p = (x\,x_v)$ soddisfano a tutte le condizioni (5).

F) Il caso singolare di Cartan.

La rigata $du : dv = L$ ha nel punto $x + \rho\,x_1$ il piano tangente ξ'' determinato dalle:

$$S\xi''x = S\xi''x_1 = 0$$

$$S\xi''(Lx_u + x_v) + \rho S\xi''(Lx_{1u} + x_{1v}) = 0 .$$

Quindi

$$\xi'' = \xi + \sigma\xi_u$$

ove

$$-\sigma L a_{11} + \rho S(\xi + \sigma\xi_u)\,x_{vv} = 0 ,$$

ossia

$$-\sigma L a_{11} + \rho a_{22} - \rho\sigma\left\{\binom{22}{1} + \frac{a_{221}}{a_{11}}\right\} a_{11} = 0 .$$

Dunque, se $\delta a_{221} = 0$, tale piano tangente è lo stesso per rigate omologhe. L'uguaglianza degli invarianti dà poi $\delta a_{222} = 0$.

Dunque: *Se le falde focali omologhe delle due congruenze sono proiettivamente applicabili, rigate omologhe delle due congruenze hanno in punti omologhi due piani tangenti che si corrispondono nella collineazione che porta una delle due congruenze in una terza congruenza, che ha un contatto di secondo ordine con l'altra delle congruenze assegnate.*

G) Nuova trasformazione delle precedenti condizioni.

Date le superficie S, S' vogliamo vedere se esse possono essere falde focali di congruenze applicabili. I precedenti risultati non si possono applicare senz'altro, se non si conoscono le linee corrispondenti alle sviluppabili.

Variando le precedenti notazioni, siano u, v le asintotiche delle S, S', che necessariamente si corrispondono; e sia $du - \rho\,dv = 0$ l'equazione delle linee inviluppate sulle S, S' dalle sviluppabili delle congruenze. Per i risultati del § 17 C, avremo che: *Le* S, S' *sono falde focali di due congruenze applicabili, se su di esse si corrispondono le asintotiche* u, v, *e se esiste una funzione* ρ (u, v) *tale che sulle due superficie le due quantità:*

$$(\beta\rho)_v - \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)_u \tag{25}$$

e

$$
(26)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\rho^2\left(-L+\rho\beta_u-\frac{1}{2}\beta^2\rho^2+2\beta\rho_u\right)+\\
&+\left(M-\frac{\gamma_v}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\rho^2}+2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^2}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

abbiano uguali valori. In tal caso le nostre congruenze sono quelle formate dalle tangenti alle linee $\mathrm{du}-\rho\,\mathrm{dv}=0$ *delle due superficie* S, S′.

H) Il caso singolare.

Un caso particolare notevole si ottiene (Cfr. F) supponendo che le due superficie S, S' siano proiettivamente applicabili, ossia abbiano uguali β, γ. Allora la condizione (25) è soddisfatta qualunque sia la ρ. E per le linee $\frac{du}{dv}=\rho$ inviluppate sulle superficie dai raggi della congruenza si ha:

$$\rho^2\,\delta L-\delta M=0\,,\quad \text{ossia}\quad du^2\,(\delta L)-dv^2\,(\delta M)=0\,.$$

Non potendo essere $\rho=0$, ∞, sarà $\delta L \neq 0$, $\delta M \neq 0$ e, come segue dal § 16 D, potremo perciò rendere, mutando i parametri delle u, v, $\delta L=\delta M=1$. Dovrà essere allora $\beta_v=\gamma_u$; e le nostre linee saranno le $u\pm v=\text{cost}$, le quali formano un sistema coniugato R. Si ha dunque il caso particolare già enunciato dal Cartan (che lo ha chiamato il caso *singolare*) senza alcuna dimostrazione: *Una classe di congruenze applicabili si trova scegliendo due superficie* R *applicabili, e tirando le tangenti all'uno od all'altro dei due sistemi di linee che su di esse formano un sistema coniugato* R. Questo caso è anche dal nostro punto di vista *singolare,* perchè soltanto per esso la condizione relativa a (25) è soddisfatta *identicamente* (qualunque sia ρ). Questo caso si può anche caratterizzare come il caso delle congruenze W, le cui trasformate di Laplace sono ancora congruenze W, oppure con la proprietà geometrica enunciata in F.

Tranne l'enunciato del Cartan che una congruenza è in generale proiettivamente indeformabile del 2° ordine, e che le congruenze deformabili (le precedenti escluse) dipendono da una funzione arbitraria di due variabili, non si ha finora alcuna ricerca sulle classi di superficie S, S' che si trovano nelle condizioni sopra enunciate.

I) Altra deduzione delle formole precedenti.

Le formole ottenute in G si possono naturalmente dedurre direttamente, assumendo fin da principio coordinate asintotiche u, v sulle nostre due superficie, ed applicando le formole del § 41 del Cap V. Abbiano le due superficie la stessa $a_{12} = e^{\theta}$, e siano:

$$x_1 = \mu x + 2\,(A\,x_u + B\,x_v) \qquad x_1' = \mu' x' + 2\,(A' x_u' + B' x_v')$$

i secondi fuochi delle nostre due congruenze, dove μ è dato dalla (2) del citato §, e μ' è la quantità analoga calcolata per la seconda superficie. Sarà $A : B = \rho$. Si vede facilmente che la proiettività che porta la congruenza K' in una congruenza $\overline{K}$ che ha il voluto contatto con K deve portare x' in x, la retta $(x' x_u')$ in $(x\,x_u)$, ecc.; e che più precisamente si ha (con conveniente scelta delle coordinate omogenee) (cfr. le (5) del § 103)

$$x' \equiv x \quad x_u' \equiv x_u + l\,x \quad x_v' \equiv x_v + m\,x$$

$$x_{uv}' \equiv x_{uv} + \Lambda x + m x_u + l x_v \quad \text{ove } 2l + \frac{A}{B}\,\delta\beta = 2m + \frac{B}{A}\,\delta\gamma = 0\,.$$

Esprimendo che al variare di $dv : du$ i fuochi x_1 ed x_1' si muovono in una stessa direzione, che cioè $x_1' \equiv x_1$, $R\,x_{1u}' + S\,x_v' \equiv x_{1u}$, $R\,x_{1v}' + T\,x_1' \equiv x_{1v}$, si trova eliminando Λ, R, S, T che:

$$A\left[-\frac{1}{2}\,\frac{A}{B}\,\mu\,\delta\,\beta + \delta\,\mu_u + 2\,A\,\delta\,p_{11} + l\,(\mu + \delta\,\mu + \right.$$

$$\left. + 2\,A_u + 2\,A\,\theta_u) + 2m\,(B_u + A\,\beta + A\,\delta\,\beta)\right] =$$

$$= B\left[-\frac{1}{2}\frac{B}{A}\mu\,\delta\gamma + \delta\mu_v + 2B\,\delta p_{22} + m(\mu + \delta\mu + \right.$$

$$\left. + 2B_v + 2B\theta_v) + 2l(A_v + B\gamma + B\,\delta\gamma)\right].$$

Sostituendo a μ, l, m i loro valori, osservando che:

$$\delta\mu = \frac{A^2}{B}\,\delta\beta + \frac{B^2}{A}\,\delta\gamma,$$

la precedente condizione diventa per le (5) del § 16:

$$0 = 2A^2\,\delta q_{11} + \frac{A^3}{B}\,\delta\beta_u - 2A^2\,\delta\beta_v +$$

$$+ \delta\beta\left[2A^2\frac{B_v}{B} - 2A\,A_v + 2A^2\frac{A_u}{B} - 2\frac{A^3}{B^2}B_u - \frac{A^4}{B^2}\beta\right] -$$

$$- 2B^2\,\delta q_{22} - \frac{B^3}{A}\,\delta\gamma_v + 2B^2\,\delta\gamma_u +$$

$$+ \delta\gamma\left[2B^2\frac{A_u}{A} - 2B\,B_u + 2B^2\frac{B_v}{B} - 2\frac{B^3}{A^2}A_v - \frac{B^4}{A^2}\gamma\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\,\delta\left[\left(\frac{A^2}{B}\beta\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,\delta\left[\left(\frac{B^2}{A}\gamma\right)^2\right].$$

La condizione analoga per i piani focali si ottiene semplicemente mutando β, γ, B in $-\beta$, $-\gamma$, $-B$. Potremo dunque annullare separatamente quei termini della formola precedente che con tale cambiamento mutano di segno e quelli che restano immutati.

I primi danno:

$$A^2\left(-2\,\delta\beta_v + 2\frac{B_v}{B}\,\delta\beta - 2\frac{A_v}{A}\,\delta\beta\right) +$$

$$+ B^2\left(2\,\delta\gamma_u - 2\frac{A_u}{A}\,\delta\gamma + 2\frac{B_u}{B}\,\delta\gamma\right) = 0$$

ossia, poichè $A:B=\rho$, si ritrova la condizione che $(25)_{\text{bis}}$ ha uguali valori sulle due superficie.

Dai termini che restano immutati di segno si ritrova che:

$$A^2\left(2\,q_{11}+\rho\,\beta_u+2\,\beta\,\rho_u-\frac{1}{2}\,\rho^2\beta^2\right)+$$

$$+\,B^2\left(-\,2\,q_{22}-\frac{\gamma_v}{\rho}+2\,\gamma\,\frac{\rho_v}{\rho^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\gamma^2}{\rho^2}\right)$$

ha uguali valori sulle due superficie. Si ritrova cioè la condizione relativa a (26).