Capitolo X.

INTORNO DI UN PUNTO DI UNA SUPERFICIE.
QUADRICHE DI MOUTARD E CONO DI SEGRE.

Questo capitolo, che un lettore frettoloso potrà omettere in prima lettura, è destinato a studiare e caratterizzare in modo geometrico ed invariante per collineazioni l'intorno del quarto ordine di un punto di una superficie: ciò che porterà a illustrare geometricamente il significato degli invarianti fondamentali da noi già trovati per via analitica.

§ 85 — **Enunciato di alcuni teoremi per le quadriche di Moutard.**

Strumento essenziale di questa ricerca è lo studio delle quadriche di Moutard. Cominceremo a studiare il sistema delle quadriche di Moutard che appartengono alle diverse tangenti di una superficie (non sviluppabile) S in un suo punto generico x. Ecco come procederemo. Essendo t una tangente ad S in x, t' la tangente coniugata, M_t e $M_{t'}$ le quadriche di Moutard appartenenti rispettivamente a t e t', ed r una retta incidente a t (che però non passa per x nè sta nel piano ξ tangente a S in x), noi daremo una serie di semplici costruzioni geometriche, che permettono di trovare le rette polari r' e r'' di r rispetto a M_t e a $M_{t'}$; fatto ciò, la costruzione di M_t (e di $M_{t'}$) è pure fatta: infatti la quadrica M_t è evidentemente determinata se sappiamo costruire la polare rispetto a M_t di ogni retta r incidente a t; del resto, ricordando (*) che il piano polare rispetto a M_t di ogni punto situato su t (t') corrisponde a quel punto nella corrispondenza Σ (1) (Σ (—3)), sappiamo costruire, appena note le Σ (c), il piano polare rispetto a M_t di ogni punto situato in ξ, sicchè basta, per completare la determinazione di M_t, costruire la polare r' di *una* retta r incidente a t.

La costruzione di r' e r'' da r sarà completamente discussa ai §§ seguenti; qui vogliamo premettere per maggior chiarezza, l'enunciato dei risultati (**).

Sia P il punto d'incontro di r con ξ, π il piano che congiunge r ad x. Il problema di determinare le rette r' e r'' *dalla retta* r si può ricondurre a due altri molto più semplici, a costruire cioè un certo punto z situato in ξ ed un certo piano ζ passante per x, *la posizione di* z *e* ζ *non dipendendo che dalla* t. Supponiamo per un momento di conoscere z e ζ. Sia r_0 la polare reciproca di r rispetto alla quadrica di Lie, y_1 e η_1 siano rispettivamente il punto corrispondente a π e il piano corrispondente a P nella corrispondenza $\Sigma\left(\frac{3}{2}\right)$. Ancora, sia ζ_1 il coniugato armonico del piano π rispetto alla coppia di piani ξ e ζ; e z_1 sia il coniugato armonico del punto P rispetto alla coppia di punti x e z; sia l_1 la retta intersezione dei piani η_1 e ζ_1, e l_2 sia la retta che congiunge i punti y_1 e z_1. Allora le rette r' e r'' appartengono al regolo (che può ridursi ad un fascio ordinario) determinato dalle rette r_0, l_1, l_2 e sono, dentro il regolo, determinate dai birapporti

(*) Cap. IX § 81 D.

(**) I principali risultati di questo Cap. furono dedotti per la prima volta, nella Memoria di Čech: *L'intorno di un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo,* Annali di Matematica (3) 31, pp. 191 e segg. Ivi si è fatto uso delle coordinate asintotiche e del metodo di Wilczynski. Qui invece faremo tutti i calcoli in coordinate curvilinee qualunque, senza che ne risultino delle complicazioni gravi. Ciò prova i vantaggi che possiede il metodo delle *forme* differenziali, introdotto dal Fubini nella geometria proiettiva, sul metodo (più vecchio) delle *equazioni* differenziali usato dal Wilczynski.

$$(l_1 l_2 r_0 r') = 3 \,, \quad (l_1 l_2 r_0 r'') = \frac{1}{3} \,.$$

Ciò posto, resta da vedere come si possano costruire il punto z e il piano ζ. Sia ancora m il punto che corrisponde a ζ, e μ il piano che corrisponde a z nella corrispondenza $\Sigma\left(-\frac{5}{4}\right)$. Basta costruire m e μ. Ciò è particolarmente semplice se S è *rigata*. In tal caso infatti m è semplicemente l'intersezione (diversa da x) di t' con la quadrica W_1 (Cap. V § 35 C) (*) e similmente μ è il piano tangente (diverso da ξ) alla quadrica W_2 passante per t'. Supponiamo invece che S non sia rigata. Per costruire m e μ anche in questo caso, indichiamo con τ_1 e τ_2 le due tangenti asintotiche ad S in x, con s lo spigolo e con d la direttrice. Siano R_1 e R_2 le due rigate asintotiche di S (Cap. IX, § 81 E) passanti per x e precisamente R_i contenga la retta τ_i $(i = 1, 2)$. Siano σ_i e δ_i i piani che congiungono τ_i rispettivamente allo spigolo ed alla direttrice. Infine C_1^1 (C_1^2) sia la conica del piano ξ che corrisponde nella $\Sigma\left(\frac{3}{4}\right)$ *relativa alla rigata* R_1 (R_2) al fascio di piani contenente i piani σ_1 e δ_2 $(\sigma_2$ e $\delta_1)$. Il punto m è allora l'intersezione (diversa da x) di t' con quella conica del fascio determinato da C_1^1 e C_1^2 la cui tangente in x è la polare lineare di t rispetto alla terna delle tangenti di Darboux.

Le dimostrazioni degli enunciati che precedono si trovano ai §§ 86, 87, 88; al § 90 esaminiamo la connessione delle quadriche di Moutard relative ad una superficie S non rigata con quelle relative alle rigate asintotiche di S. Infine studiamo di nuovo al § 91 il cono di Segre e le pangeodetiche del Fubini. Questi due §§ non riguardano pertanto le quadriche di Moutard; ciònonostante, il metodo di cui ci serviremo essendo analogo alla determinazione della posizione del punto z e del piano ζ (v. sopra) abbiamo ritenuto opportuno metterli al presente Cap.

(*) Si ricordi in questa connessione che noi abbiamo trovato, al Cap. IX § 82 C, un legame fra W_1 e le Σ (c).

§ 86 — Rette polari rispetto ad una quadrica di Moutard.

A) Rette r_0, r', r'' polari di una retta r rispetto alla quadrica di Lie e alle quadriche di Moutard relative a due direzioni coniugate.

1. Consideriamo una superficie S non sviluppabile e fissiamo su essa un punto x ed una tangente non asintotica $t = (x\,dx)$ uscente da x. La polarità rispetto alla quadrica di Moutard M_t appartenente a t è data dalle equazioni (2) e $(2)_{\text{bis}}$ del Cap. IX § 80. Sia $t' = (x D x)$ la tangente coniugata di t ed $M_{t'}$ la quadrica di Moutard appartenente ad essa. Per trovare le equazioni della polarità rispetto ad $M_{t'}$, occorre nelle formole citate sostituire Du_i a du_i e quindi (*) εdu_i a Du_i. Si trova così che il piano

$$\sigma_0 \xi + \sigma_1 d\xi + \sigma_2 D\xi + \sigma_3 \Xi$$

è il piano polare del punto

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X$$

rispetto a $M_{t'}$ se

$$\sigma_0 = \rho_0 - 2\frac{F_3}{F_2}\rho_1 - \frac{2}{3}\frac{F_3'}{F_2}\rho_2 +$$

$$+\left(\frac{2\varepsilon}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i}{F_2^2} + \frac{2\varepsilon}{9}\frac{F_3'^2}{F_2^3} - 2\frac{F_3^2}{F_2^3} - \frac{\Pi - P}{F_2}\right)\rho_3\,,$$

$$\sigma_1 = \rho_1 + 2\frac{F_3}{F_2^2}\rho_3\,,\quad \sigma_2 = \rho_2 - \frac{2\varepsilon}{3}\frac{F_3'}{F_2^2}\rho_3\,,\quad \sigma_3 = \rho_3\,.$$

(*) Cfr. Cap. VI § 56.

Ciò posto, sia r una retta che intersechi t, ma non passi per x nè stia in ξ. Supponiamo che r sia determinata dal punto

$$r_0 x + r_1 dx$$

di t e dal punto generico

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X\,,$$

sicchè possiamo porre

$$(1) \qquad r = (r_0 x + r_1 dx\,, \quad \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X)\,.$$

Siano r_0, r', r'' le rette polari rispettivamente rapporto alla H (quadrica di Lie), ed alle M_t e $M_{t'}$. Per le equazioni ricordate troviamo subito

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} r_0 = (r_0\rho_1 - r_1\rho_0)\,(\xi d\xi) + r_0\rho_2\,(\xi D\xi) + r_0\rho_3\,(\xi\,,\,\Xi) \;+ \\ + r_1\rho_2\,(d\xi D\xi) + r_1\rho_3\,(d\xi,\,\Xi) \end{aligned}$$

$$(1)_{\text{ter}} \qquad \begin{aligned} r' = \Big\{ r_0\left(\rho_1 - \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2^2}\,\rho_3\right) - r_1\Big[\rho_0 + 2\,\frac{F_3'}{F_2}\,\rho_2 \;+ \\ + \left(\frac{2}{3}\,\frac{\Sigma a_{rsti}\,du_r\,du_s\,du_t\,du_i}{F_2^2} + \frac{2}{9}\,\frac{F_3^2}{F_2^3} + 2\varepsilon\,\frac{F_3'^2}{F_2^3} + \frac{\Pi - P}{F_2}\right)\rho_3\Big]\Big\}\,(\xi d\xi) \;+ \\ + \left(r_0 + \frac{2}{3}\,\frac{F_3}{F_2}\,r_1\right)\left(\rho_2 + 2\varepsilon\,\frac{F_3'}{F_2^2}\,\rho_3\right)(\xi D\xi) + \left(r_0 + \frac{2}{3}\,\frac{F_3}{F_2}\,r_1\right)\rho_3\,(\xi\Xi) \;+ \\ + r_1\left(\rho_2 + 2\varepsilon\,\frac{F_3'}{F_2^2}\,\rho_3\right)(d\xi D\xi) + r_1\rho_3(d\xi,\,\Xi)\,, \end{aligned}$$

$$r'' = \Big\{ r_0\left(\rho_1 + 2\,\frac{F_3}{F_2^2}\,\rho_2\right) - r_1\Big[\rho_0 - \frac{2}{3}\,\frac{F_3'}{F_2}\,\rho_2 \;+$$

$$+\left(\frac{2\varepsilon}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}\,du_r\,du_s\,Du_t\,Du_i}{F_2^2}+\frac{2\varepsilon}{9}\frac{F_3'^2}{F_2^3}+2\frac{F_3^2}{F_2^3}-\frac{\Pi-P}{F_2}\right)\rho_3\Bigg]\Bigg\}(\xi d\xi)+$$

(1)quater

$$+\left(r_0-2\frac{F_3}{F_2}r_1\right)\left(\rho_2-\frac{2\varepsilon}{3}\frac{F_3'}{F_2^2}\rho_3\right)(\xi D\xi)+\left(r_0-2\frac{F_3}{F_2}r_1\right)\rho_3\,(\xi\Xi)+$$

$$+r_1\left(\rho_2-\frac{2\varepsilon}{3}\frac{F_3'}{F_2^2}\rho_3\right)(d\xi D\xi)+r_1\rho_3\,(d\xi,\Xi)\,.$$

B) **Le rette l del regolo $r_0\,r'\,r''$.**

Noi poniamo (*)

(2) $$l_1=3r'+r''-4r_0\,,\quad l_2=r'+3r''-4r_0$$

sicchè

$$l_1=-r_1\left[\frac{16}{3}\frac{F_3'}{F_2}\rho_2+\left(2\frac{\Sigma a_{rsti}du_r\,du_s\,du_t\,du_i}{F_2^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\varepsilon}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}\,du_r\,du_s\,Du_t\,Du_i}{F_2^2}+\frac{8}{3}\frac{F_3^2}{F_2^3}+\frac{56\,\varepsilon}{9}\frac{F_3'^2}{F_2^3}+2\frac{\Pi-P}{F_2}\right)\rho_3\right](\xi d\xi)+$$

(2)bis

$$+\frac{16\,\varepsilon}{3}\frac{F_3'}{F_2^2}\left(r_0+\frac{F_3}{F_2}r_1\right)\rho_3\,(\xi D\xi)+\frac{16\,\varepsilon}{3}\frac{F_3'}{F_2^2}r_1\rho_3\,(d\xi D\xi)\,,$$

$$l_2=\left[\frac{16}{3}\frac{F_3}{F_2^2}r_0-r_1\left(\frac{2}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}du_r\,du_s\,du_t\,du_i}{F_2^2}+2\varepsilon\frac{\Sigma a_{rsti}du_r\,du_s\,Du_t\,Du_i}{F_2^2}+\right.\right.$$

(2)ter $$\left.\left.+\frac{56\,\varepsilon}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3}+\frac{8\varepsilon}{3}\frac{F_3'^2}{F_2^3}-2\frac{\Pi-P}{F_2}\right)\right]\rho_3\,(\xi d\xi)-$$

(*) l_1 e l_2 sono le rette di cui si parla già al § 85.

$$-\frac{16}{3}\frac{F_3}{F_2}r_1\left(\rho_2-\varepsilon\frac{F_3'}{F_2^2}\rho_3\right)(\xi D\xi)-\frac{16}{3}\frac{F_3}{F_2}r_1\rho_3(\xi\Xi).$$

È chiaro che l_1 rappresenta una retta passante per x (*) ed l_2 una retta che giace nel piano ξ. Di più, detto P l'intersezione di ξ con r e π il piano che congiunge x ad r, sicchè per la (1)

$$(3)\qquad P=r_0x+r_1dx,\quad \pi=-\varepsilon F_2\rho_2\xi+\rho_3D\xi,$$

la posizione delle rette l_1 e l_2 evidentemente non cambia se la retta r descrive il fascio di centro P e di piano π; ciò si vede subito osservando che nelle $(2)_{\text{bis}}$ e $(2)_{\text{ter}}$ non compaiono più ρ_0 e ρ_1. Si può pertanto prevedere che le rette l_1 e l_2 saranno più facilmente costruibili che le rette r' e r'', il che è importante perchè, come ora mostreremo, r' e r'' sono ben determinate, date r_0, l_1 e l_2.

In generale (**) le tre rette r_0, l_1, l_2 determinano un regolo (serie rigata d'una quadrica). Se $F_3=0$, ossia se t è una tangente di Darboux, le $(1)_{\text{bis}}$, $(2)_{\text{bis}}$ e $(2)_{\text{ter}}$ mostrano senza difficoltà che r_0, l_1 e l_2 appartengono ad un fascio il cui piano passa per t' (***); se invece $F_3'=0$, ossia se t è una tangente di Segre, r_0, l_1 e l_2 appartengono pure ad un fascio il cui centro sta su t'. (****) Ma comunque si scelga t, le (2) mostrano che le rette r' e r'' appartengono al regolo o fascio determinato dalle r_0, l_1 e l_2. Dentro tal regolo esse sono determinate, come abbiamo già enunciato, dai birapporti

$$(4)\qquad (l_1l_2r_0r')=3,\quad (l_1l_2r_0r'')=\frac{1}{3}.$$

Ciò si può dedurre dalle sole (2), come il lettore vedrà facilmente da sè; ma lo si può dedurre anche facilmente se si osserva che i

(*) giacchè vi passano i piani ξ, $d\xi$, $D\xi$.

(**) sempre se $F_3F_3'\neq 0$. La dimostrazione è facile.

(***) il piano del fascio è il piano polare di P rispetto ad H.

(****) il centro del fascio è il polo di π rispetto ad H.

punti d'incontro con t' e i piani che congiungono a t' le rette r', r'', r_0, corrispondono rispettivamente al piano π e al punto P nelle Σ (1), Σ (— 3), Σ (0), mentre il punto d'incontro di l_2 con t' corrisponde a π e il piano $(l_1 t')$ corrisponde a P in $\Sigma\left(\frac{3}{2}\right)$. (*)

C) I punti y_1, z_1, ed i piani η_1, ζ_1.

Si verifica facilmente che la $(2)_{\text{bis}}$ può scriversi

$$l_1 = (\eta_1 \zeta_1) \tag{5}$$

dove

$$\eta_1 = \left(r_0 + \frac{F_3}{F_2} r_1\right) \xi + r_1 d\xi , \tag{5$_{\text{bis}}$}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \Bigg[& \frac{16}{3} \frac{F_3'}{F_2} \rho_2 + \left(2 \frac{\Sigma a_{rsti} du_r du_s du_t du_i}{F_2^2} + \right. \\ & + \frac{2\varepsilon}{3} \frac{\Sigma a_{rsti} du_r du_s Du_t Du_i}{F_2^2} + \frac{8}{3} \frac{F_3^2}{F_2^3} + \\ & \left. + \frac{56\varepsilon}{9} \frac{F_3'^2}{F_2^3} + 2 \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3 \Bigg] \xi + \frac{16\varepsilon}{3} \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3 D\xi . \end{aligned} \tag{5$_{\text{ter}}$}$$

Similmente possiamo scrivere anche l_2; si ha e precisamente

$$l_2 = (y_1 z_1) \tag{6}$$

dove

$$y_1 = \left(-\varepsilon F_2 \rho_2 + \frac{F_3'}{F_2} \rho_3\right) x + \rho_3 Dx , \tag{6$_{\text{bis}}$}$$

(*) Ciò si vede subito dalle seguenti equazioni $(5)_{\text{bis}}$ e $(6)_{\text{bis}}$ ricordando le $(1)_{\text{ter}}$ e le $(1)_{\text{quater}}$ del Cap. IX § 81.

$$z_1 = \left[-\frac{16\varepsilon}{3}\frac{F_3}{F_2^2} r_0 + r_1 \left(\frac{2\varepsilon}{3} \frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i}{F_2^2} + \right.\right.$$

$$(6)_{\text{ter}} \qquad + 2\frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i + }{F_2^2} \frac{56\varepsilon}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3} +$$

$$\left.\left. + \frac{8}{3}\frac{F_3'^2}{F_2^3} - 2\varepsilon\frac{\Pi - P}{F_2}\right)\right] x + \frac{16\varepsilon}{3}\frac{F_3}{F_2^2} r_1\, dx\,.$$

La (6) si deduce subito dalla $(2)_{\text{ter}}$ trasformandola dapprima secondo le formole (*)

$$(7) \qquad \begin{aligned} &(\xi d\xi) = \varepsilon\,(x D x)\,, \quad (\xi D\xi) = (x d x)\,, \\ &(\xi\,\Xi) = \frac{\varepsilon}{F_2}(dx\,Dx)\,, \quad (d\xi\, D\xi) = F_2\,(x X)\,, \\ &(d\xi,\ \Xi) = -\varepsilon\Omega\,(x D x) - \varepsilon\,(Dx,\ X)\,, \\ &(D\xi,\ \Xi) = -\Omega\,(x dx) - (dx,\ X)\,. \end{aligned}$$

La dimostrazione delle (7) è lasciata al lettore come facile esercizio. Esse si possono provare partendo dalle (**)

$$(7)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} &(x\,dx\,Dx) = -\varepsilon F_2\,\xi\,, \quad (x\,dx X) = D\xi\,, \\ &(x Dx X) = \varepsilon\, d\xi\,, \quad (dx\,Dx X) = \varepsilon F_2\,(-\Omega\xi + \Xi)\,. \end{aligned}$$

P. es. per provare la prima delle (7), osserviamo che dalla (12) dell' Introduzione si deduce

$$[(x\,dx\,Dx)\,, \quad (x\,dx X)] = (x\,dx)\,(x\,dx\,Dx X)$$

e facciamo uso delle $(7)_{\text{bis}}$. In altro modo si possono dedurre le (7) dalle (4) del Cap. IX § 80. P. es. si vede subito dalle citate eq. (4) che si può determinare α in modo che sia

---

(*) Si ricordi che $\Omega = S X \Xi$.

(**) Le prime due $(7)_{\text{bis}}$ sono le (2) e $(2)_{\text{bis}}$ del Cap. IX § 81. La terza si riduce subito alla seconda. La dimostrazione dell' ultima è lasciata al lettore.

$$(\xi d\xi) = \alpha (x D x) .$$

Ora

$$S(\xi d\xi)(dxX) = \alpha S(xDx)(dxX) = -\alpha(x\,dx\,Dx\,X) = \varepsilon\alpha F_2 ;$$

d'altra parte, per la (11) dell'Introduzione,

$$S(\xi d\xi)(dxX) = \begin{vmatrix} S\xi dx & S\xi X \\ Sd\xi dx & Sd\xi X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -F_2 & 0 \end{vmatrix} = F_2 , \text{ ecc.}$$

D) Determinazione dei punti e piani precedenti.

La retta l_1 appare così come intersezione dei piani η_1 e ζ_1, e la retta l_2 come congiungente i punti y_1 e z_1. Ora dalle (3), $(5)_{\text{bis}}$ e $(6)_{\text{bis}}$ si vede subito, ricordando le $(1)_{\text{ter}}$ e $(1)_{\text{quater}}$ del Cap. IX § 81 che y_1 corrisponde a π e η_1 corrisponde a P in $\Sigma\left(\frac{3}{2}\right)$. Il problema di determinare l_1 e l_2 e quindi per le (4) anche quello di determinare r' e r'' si riduce pertanto a trovare la posizione del punto z_1 e del piano ζ_1. Dalle $(5)_{\text{ter}}$ e $(6)_{\text{ter}}$ si vede del resto che z_1 non dipende che dal punto P e ζ_1 non dipende che dal piano π. Ma possiamo andare più oltre.

Osserviamo dapprima che i punti P e z_1 stanno su t e i piani π e ζ_1 passano per t. Precisamente le $(5)_{\text{ter}}$ e $(6)_{\text{ter}}$ mostrano che il punto

$$z_1 - \frac{16\varepsilon}{3}\frac{F_3}{F_2^2} P$$

coincide geometricamente con x e similmente il piano

$$\zeta_1 - \frac{16\varepsilon}{3}\frac{F_3'}{F_2^2}\pi$$

coincide geometricamente con ξ. Posto pertanto

$$z_1 + \frac{16\varepsilon}{3}\frac{F_3}{F_2^2} P = \frac{\varepsilon r_1}{F_2^2} z , \tag{8}$$

$$(8)_{\text{bis}} \qquad \zeta_1 + \frac{16\varepsilon}{3}\frac{F'_3}{F_2^2}\pi = \frac{\rho_3}{F_2^2}\zeta,$$

il punto z_1 è il coniugato armonico di P rispetto alla coppia x e z; il piano ζ_1 è il coniugato armonico di π rispetto alla coppia di piani ξ e ζ, sicchè tutto si riduce a determinare la posizione del punto z e del piano ζ. (*)

Dalle $(6)_{\text{ter}}$ e (8) si calcola (**)

$$(9) \qquad \begin{aligned} z = \Big(\frac{2}{3}\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + 2\varepsilon\,\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i + \\ + \frac{80}{9}\frac{F_3^2}{F_2} + \frac{4}{3}JF_2^2 - 2F_2(\Pi - P)\Big)\, x + \frac{32}{3}F_3\, dx. \end{aligned}$$

Similmente si trova dalle $(5)_{\text{ter}}$ e $(8)_{\text{bis}}$

$$(9)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \zeta = \Big(2\,\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + \frac{2\varepsilon}{3}\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i + \\ + \frac{80\varepsilon}{9}\frac{F'^2_3}{F_2} - \frac{4}{3}JF_2^2 + 2F_2(\Pi - P)\Big)\,\xi + \frac{32\varepsilon}{3}F'_3 D\xi. \end{aligned}$$

E) Il punto m e il piano μ.

Dalla (9) si vede che il punto z non dipende che dalla tangente t (ricordiamo che esso sta su t). Variando t, z descrive evidentemente nel piano ξ una curva razionale che in generale è del sesto ordine e ha nel punto x un punto quintuplo in cui le tangenti ad essa sono le tangenti asintotiche e le tangenti di Darboux. Correlativamente si dica per il piano ξ.

(*) Cfr. § 85.

(**) Abbiamo fatto uso dell'identità (4) del Cap. VI § 57.

Per il seguito è importante osservare che più semplicemente del punto z e del piano ζ si comporta il piano μ e il punto m che loro corrispondono in $\Sigma\left(-\frac{5}{4}\right)$. Si trova infatti dalle (9) e $(9)_{\text{bis}}$ ricordando di nuovo le $(1)_{\text{ter}}$ e $(1)_{\text{quater}}$ del Cap. IX § 81 che si può porre

$$(10)\qquad \begin{aligned} m = \Big[& 2\,\Sigma\, a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + \frac{2\varepsilon}{3}\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i \\ & - \frac{4}{3} J F_2^2 + 2 F_2 (\Pi - P)\Big]\, x + \frac{32\varepsilon}{3} F_3' Dx\,, \end{aligned}$$

$$(10)_{\text{bis}}\qquad \begin{aligned} \mu = \Big[& \frac{2}{3}\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + 2\,\varepsilon\,\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i + \\ & + \frac{4}{3} J F_2^2 - 2 F_2 (\Pi - P)\Big]\, \xi + \frac{32}{3} F_3\, d\xi\,. \end{aligned}$$

Il punto m sta su t' e il piano μ passa per t'. Variando t, m descrive nel piano ξ una curva razionale che in generale è del quarto ordine e possiede in x un punto triplo in cui le sue tangenti sono le tangenti di Darboux. Correlativamente per μ. Ai §§ seguenti esamineremo come si possano costruire m e μ.

§ 87 — Costruzione del punto m e del piano μ.

A) Caso di una superficie rigata.

Cominciamo col caso semplice di una superficie S *rigata* ($J = 0$). Supponiamo

$$a_{11} = a_{22} = 0\,, \quad a_{12} = \omega = \pm 1\,, \quad x = y + uz\,,$$

sicchè (Cap. IV § 31)

$$F_2 = 2\omega\, du\, dv\,, \quad F_3 = \omega\,(A + 2\,Bu + Cu^2)\, dv^3,$$

$$F_3' = \omega F_3\,, \quad \Pi - P = 2\,(B + Cu)\, dv^2,$$

$$\Sigma\, a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i = \omega\,[2\,(B + Cu)\, du +$$

$$+ (A' + 2\,B'u + C'u^2)\, dv]\, dv^3\,,$$

$$\Sigma\, a_{rsti}\, du_r\, du_s\, Du_t\, Du_i = \omega\,[-2\,(B + Cu)\, du +$$

$$+ (A' + 2\,B'u + C'u^2)\, dv]\, dv^3\,.$$

L'equazione (10) del § precedente diventa pertanto

$$\frac{3\,\omega}{8}\,\frac{m}{dv^3} = [4\,(B + Cu)\, du + (A' + 2\,B'u + C'u^2)\, dv]\,(y + uz) +$$

$$+ 4\,(A + 2\,Bu + Cu^2)\,[-z\, du + (y' + uz')\, dv]\,.$$

Il secondo membro è lineare in $du : dv$. Variando du, dv, il punto m descrive quindi semplicemente una *retta*. In particolare posto $dv = 0$ si trova il punto

$$(B + Cu)\, y - (A + Bu)\, z$$

che è il coniugato armonico di x rispetto ai punti flecnodali di (yz), e posto $du = 0$, si trova il punto

$$(A' + 2\,B'u + C'u^2)\,(y + uz) + 4\,(A + 2\,Bu + Cu^2)\,(y' + uz')$$

che è il polo della generatrice (yz) rispetto alla conica osculatrice dell'asintotica curva di S passante per x (Cap. IV, § 35 C, (12)). Dunque, variando anche u, il punto m descrive, come abbiamo enunciato (§ 85), la quadrica W_1 se $B^2 - AC \neq 0$ oppure il piano W_1 se $B^2 - AC = 0$ (Cfr. Cap. V, §§ 35 C, e 36 B). Correlativamente troviamo che, variando $du : dv$ e u, il piano μ inviluppa la quadrica (o il punto) W_2. Si ricordi che W_1 e W_2 sono polari rispetto ad H.

B) Superficie non rigate.

Supponiamo invece che S *non* sia rigata ($J \neq 0$). Cominciamo con l'osservazione che le (10) e $(10)_{bis}$ del § 86 possono scriversi, ricordando le (1) e $(3)_{ter}$ del Cap. VI § 58

$$(1)\qquad \begin{aligned} m = \Big[\Big(\frac{dJ}{J} - \frac{2}{3}\,\Sigma\psi_i du_i\Big)F_3 + \varepsilon\Big(\frac{1}{3}\frac{DJ}{J} - 2\,\Sigma\psi_i Du_i\Big)F_3' - \\ - \frac{4}{3}\,JF_2^2 + F_2\Sigma\Big(\frac{J^r}{J} + 2\,\psi^r\Big)a_{rst}\,du_s du_t\Big]\,x + \frac{32\varepsilon}{3}F_3' Dx\,, \end{aligned}$$

$$(1)_{bis}\qquad \begin{aligned} \mu = \Big[\Big(\frac{1}{3}\frac{dJ}{J} - 2\,\Sigma\psi_i du_i\Big)F_3 + \varepsilon\Big(\frac{DJ}{J} - \frac{2}{3}\Sigma\,\psi_i Du_i\Big)F_3' + \\ + \frac{4}{3}JF_2^2 - F_2\Sigma\Big(\frac{J^r}{J} + 2\,\psi^r\Big)a_{rst}\,du_s du_t\Big]\,\xi + \frac{32}{3}F_3\,d\xi\,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$(2)\qquad f_i = \Sigma\, a_{irs}\,du_r\,du_s\,,$$

sicchè

$$(2)_{bis}\qquad F_3 = \Sigma f_i du_i\,,\quad F_3' = \Sigma f_i Du_i\,,$$

$$\Sigma\Big(\frac{J^r}{J} + 2\,\psi^r\Big)a_{rst}\,du_s\,du_t = \Sigma f_i\Big(\frac{J^i}{J} + 2\psi^i\Big)$$

ed anche

$$(2)_{ter}\qquad JF_2^2 = 2\,\Sigma\,a_{rs}^i f_i\,du_r\,du_s$$

Per dimostrare la $(2)_{ter}$, partiamo dall'identità (4) del Cap. VI § 57. Per le $(2)_{bis}$ si deduce da essa (*)

(*) Si ricordi anche l'equazione $(1)_{bis}$ del Cap. VI § 57.

$$\frac{1}{2} JF_2^3 = -F_3 \Sigma f_i\, du_i + \varepsilon F'_3 \Sigma f_i\, Du_i =$$

$$= -\varepsilon \Sigma a_{rst}\, du_r\, Du_s\, Du_t\, \Sigma f_s\, du_s +$$

$$+ \varepsilon \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, Du_t\, \Sigma f_s\, Du_s =$$

$$= \varepsilon \begin{vmatrix} \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, Du_t & \Sigma f_s\, du_s \\ \Sigma a_{rst}\, du_r\, Du_s\, Du_t & \Sigma f_s\, Du_s \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon \begin{vmatrix} \Sigma a_{rt_1}\, du_r\, Du_t & f_1 \\ \Sigma a_{rt_2}\, du_r\, Du_t & f_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du & dv \\ Du & Dv \end{vmatrix}$$

donde per la $(5)_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 56

$$\frac{1}{2} JF_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} \Sigma a_{rt_1}\, du_r\, Du_t & f_1 \\ \Sigma a_{rt_2}\, du_r\, Du_t & f_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon \Sigma \vartheta^{pq} a_{rtq} f_q\, du_r\, Du_t$$

$$= \varepsilon \Sigma \vartheta^{pq} a^{ti} \vartheta_{ik} a_{rtp} f_q\, du_r\, du_k$$

$$= \varepsilon \Sigma \vartheta^{pq} \vartheta_{ik} a^i_{rp} f_q\, du_r\, du_k$$

$$= \varepsilon \Sigma \vartheta^{pq} b_{rpk} f_q\, du_r\, du_k = \Sigma a^q_{rk} f_q\, du_r\, du_k\,, \quad \text{c. d. d.}$$

Sostituendo le $(2)_{\text{bis}}$ e $(2)_{\text{ter}}$ nelle (1) e $(1)_{\text{bis}}$, quest' ultime diventano

$$\begin{aligned} m = &\left[\left(\frac{dJ}{J} - \frac{2}{3}\Sigma \psi_i du_i\right) \Sigma f_i du_i + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\frac{DJ}{J} - 2\Sigma \psi_i Du_i\right)\Sigma f_i Du_i - \right. \\ &\left. - \frac{8}{3}\Sigma a^i_{rs} f_i du_r\, du_s + \Sigma\left(\frac{J^i}{J} + 2\psi^i\right) f_i \,.\, F_2\right] x + \frac{32\varepsilon}{3}\Sigma f_i Du_i \,.\, Dx\,, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mu = &\left[\left(\frac{1}{3}\frac{dJ}{J} - 2\Sigma \psi_i du_i\right) \Sigma f_i du_i + \varepsilon\left(\frac{DJ}{J} - \frac{2}{3}\Sigma \psi_i Du_i\right)\Sigma f_i Du_i + \right. \\ &\left. + \frac{8}{3}\Sigma a^i_{rs} f_i du_r\, du_s - \Sigma\left(\frac{J^i}{J} + 2\psi^i\right) f_i \,.\, F_2\right] \xi + \frac{32}{3}\Sigma f_i du_i \,.\, d\xi\,. \end{aligned} \tag{3$_{\text{bis}}$}$$

C) **Coniche** C **e coni** Γ.

Il punto m si ottiene dando nella (3) ai du_i i valori corrispondenti alla tangente data t, e sostituendo a f_i i loro valori (2). Ora *fissando comunque* f_i *e variando* du_i, il punto rappresentato dal secondo membro di (3) descrive una conica C situata in ξ. Correlativamente il secondo membro di $(3)_{bis}$ rappresenta un cono quadrico Γ di centro x. Di più, variando ora anche f_i, le coniche C descrivono, come si vede subito, un *fascio* $[C]$ *di coniche* nel piano ξ di cui x è un punto base, e i coni Γ formano una *schiera* $[\Gamma]$ *di coni* di centro x di cui ξ è un piano base; e la tangente a C nel punto base x corrisponde a quel valore di $du:dv$ per cui

$$\Sigma f_i du_i = 0$$

ed è pertanto la tangente ad S di coordinate

$$(x, \ \Sigma \vartheta^{rs} f_r x_s); \tag{4}$$

e similmente, la tangente coniugata alla (4) è la generatrice di Γ nel piano base ξ.

La costruzione di m e μ si riduce quindi a determinare il fascio $[C]$ e la schiera $[\Gamma]$. Infatti, *il punto* m *sta su* t′ *e su quella conica del fascio* [C] *la cui tangente in* x *è la polare lineare di* t *rispetto alla terna delle tangenti di Darboux;* ciò risulta dal confronto di (2) e (4). Correlativamente, μ *passa per* t′ *ed è piano tangente a quel cono della schiera* $[\Gamma]$ *che tocca* ξ *lungo la stessa polare lineare di* t *rispetto alla terna di tangenti di Darboux.*

Basta considerare soltanto (e così si è fatto nella Memoria citata al § 85) la coppia delle coniche del fascio $[C]$ (e la coppia di coni di $[\Gamma]$) che si ottengono supponendo in (3) e $(3)_{bis}$ $\Sigma a^{rs} f_r f_s = 0$; geometricamente esse sono quelle coniche del fascio che toccano in x le tangenti asintotiche di S. Infatti 1° la quaterna di tangenti di S formata dalle due tangenti asintotiche di S, da t' e dalla polare lineare di t rispetto alla terna di tangenti di Darboux, 2° la quaterna di punti su t' formata dalle intersezioni di t' (diverse da x) colle due coniche sopra dette, dal punto x e dal punto m,

3° la quaterna correlativa alla precedente

sono tre quaterne proiettive.

§ 88 — I fasci di coniche C_k.

1. Generalizzando un poco i risultati del § precedente, consideriamo le coniche C_k del piano ξ che sono descritte dal punto rappresentato da

$$\left[\left(\frac{dJ}{J}-\frac{2}{3}\Sigma\psi_i du_i\right)\Sigma f_i du_i+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\frac{DJ}{J}-2\Sigma\psi_i Du_i\right)\Sigma f_i Du_i - \right. \tag{1}$$
$$\left. -\frac{8k}{3}\Sigma a^i_{rs} f_i du_r du_s+\Sigma\left(\frac{J^i}{J}+2\psi^i\right)f_i F_2\right]x+\frac{32\varepsilon}{3}\Sigma f_i Du_i\,.\,Dx$$

se variano le du_i, mentre le f_i e k restano fisse. Variando anche le f_i, otteniamo un fascio $[C_k]$ di coniche; in particolare per $k=1$ ritorniamo al fascio $[C]$ del § precedente.

Correlativamente potremmo considerare i coni Γ_k ottenuti dall'espressione

$$\left[\left(\frac{dJ}{J}-\frac{2}{3}\Sigma\psi_i\, du_i\right)\Sigma f_i\, du_i+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\frac{DJ}{J}-\frac{2}{3}\Sigma\psi_i\, Du_i\right)\Sigma f_i\, Du_i + \right. \tag{1)bis}$$
$$\left. +\frac{8k}{3}\Sigma a_{rs} f_i\, du_r\, du_s-\Sigma\left(\frac{J^i}{J}+2\psi^i\right)f_i\, F_2\right]\xi+\frac{32}{2}\Sigma f_i\, du_i\,.\,d\xi\,;$$

ma ciò è inutile, giacchè Γ_{-k} è polare di C_k rispetto ad H, come si vede subito.

Per trovare il significato geometrico del fascio $[C_k]$ (k qualunque, ma fisso) basta caratterizzare le due coniche del fascio che toccano nel punto base x le tangenti asintotiche di S. Siano τ_1, τ_2 le tangenti asintotiche di S in x, e C^i_k la conica del fascio $[C_k]$ che tocca τ_i in x.

I valori di f_i corrispondenti p. es. a C^1_k soddisfano all' equazione

$$\Sigma a^{rs} f_r\, f_s = 0 \tag{2}$$

e quindi anche alle (è $f^i = \Sigma a^{ik} f_k$)

$$(2)_{\text{bis}} \qquad f^i = \sqrt{\varepsilon}\ \Sigma \vartheta^{ir} f_r \quad (*)$$

Dimostriamo che: *l'intersezione* (diversa da x) *di* C_k^1 *con* τ_2 *sta sul secondo spigolo*. Per calcolare la detta intersezione, ricordiamo il fatto che ogni tangente asintotica è polare lineare dell'altra rispetto alla terna di tangenti di Darboux (**); ciò mostra che l'espressione del punto cercato si può ottenere da (1) sostituendovi a du_i valori tali che sia

$$(3) \qquad \Sigma a_{rs}^i f_i\, du_r\, du_s = 0\,.$$

Sarà allora evidentemente anche $F_2=0$ e quindi per la (3) del Cap. IX § 84 (***)

$$(3)_{\text{bis}} \qquad Du_i = -\sqrt{\varepsilon}\ du_i\,, \quad F_2 = 0\,.$$

Tenendo conto di (2), $(2)_{\text{bis}}$, (3) e $(3)_{\text{bis}}$ vediamo che tutti i termini di (1) che restano diversi da zero son divisibili per $\Sigma f_i\, du_i$. Scartando questo fattore resta l'espressione

$$\left(\frac{dJ}{J} - \frac{2}{3}\,\Sigma\psi_i\, du_i + \frac{1}{3}\,\frac{dJ}{J} - 2\Sigma\psi_i\, du_i\right) dx + \frac{32}{3}\, dx =$$

$$= \frac{32}{3}\left[dx - \frac{1}{4}\left(\Sigma\psi_i\, du_i - \frac{1}{2}\,\frac{dJ}{J}\right) x\right],$$

che rappresenta infatti un punto dello spigolo (Cap. IX § 84, $(1)_{\text{ter}}$).

La tangente alla conica C_k in un suo punto qualunque si ottiene, com'è ben noto, eseguendo sull'espressione (1) l'operazione polare

$$\lambda^1 \frac{\partial}{\partial(du_1)} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial(du_2)}$$

($\lambda^1 : \lambda^2$ è il parametro del punto mobile sulla tangente). Posto ($\lambda_i = \Sigma a_{ik}\lambda^k$)

$$\Lambda^i = \Sigma\vartheta^{ir}\lambda_r$$

tale tangente si ottiene pertanto da

(*) Passando a C_k^2 occorre evidentemente cambiare il segno di $\sqrt{\varepsilon}$.

(**) Cfr. anche le (4) e $(4)_{\text{bis}}$ del Cap. IX § 84.

(***) Cfr. la nota (*).

$$\left[\left(\frac{dJ}{J}-\frac{2}{3}\Sigma\psi_i\,du_i\right)\Sigma f_i\,\lambda^i+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\,\frac{DJ}{J}-2\,\Sigma\psi_i\,Du_i\right)\Sigma f_i\,\Lambda^i+\right.$$

$$+\left(\frac{\Sigma J_i\,\lambda^i}{J}-\frac{2}{3}\Sigma\psi_i\,\lambda^i\right)\Sigma f_i\,du_i+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\,\frac{\Sigma J_i\,\Lambda^i}{J}-2\,\Sigma\psi_i\,\Lambda_i\right)\Sigma f_i\,Du_i-$$

(4)

$$\left.-\frac{16k}{3}\,\Sigma a^i_{rs}\,f_i\,du_r\,\lambda^s+2\,\Sigma\left(\frac{J^i}{J}+2\psi^i\right)f_i\,\Sigma a_{rs}\,du_r\,\lambda^s\right]x+$$

$$+\frac{32\varepsilon}{3}\,(\Sigma f_i\,Du_i\,.\,\Sigma x_i\,\Lambda^i+\Sigma f_i\,\Lambda^i\,.\,Dx)\,.$$

Applicando ciò alla tangente di C^1_k nel suo punto precedentemente determinato, dobbiamo semplificare la (4) mediante le $(2)_{\text{bis}}$, (3) e $(3)_{\text{bis}}$. Noi vogliamo determinare l'intersezione della detta tangente con τ_1 mostrando che esso *sta sulla seconda direttrice.* A tal fine possiamo porre

$$\lambda^i=\Sigma\vartheta^{ir}f_r\,,\quad f_r=-\,\varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{ir}\,\lambda^i$$

sicchè

$$\Lambda^i=\sqrt{\varepsilon}\;\lambda^i=\sqrt{\varepsilon}\;\Sigma\,\vartheta^{ir}f_r$$

e

$$\Sigma f_i\,\lambda^i=\Sigma f_i\,\Lambda^i=0\,.$$

Inoltre

$$\Sigma a^i_{rs}\,f_i\,\lambda^s\,du_r=\varepsilon\,\Sigma a^i_{rs}\,\vartheta_{it}\,\lambda^t\,\lambda^s\,du_r=$$

$$=\varepsilon\,\Sigma\,b_{rst}\,\lambda^s\,\lambda^t\,du_r=0\,,$$

per il fatto che ogni tangente asintotica è polare dell' altra rispetto alla terna delle tangenti di Segre. Nell' espressione (4) risultano quindi nulli tutti i termini che contengono come fattore o $\Sigma f_i\,\lambda^i$ oppure $\Sigma f_i\,\Lambda^i$, e il termine che contiene k. Di più, essendo

$$\Sigma a_{rs}\,du_r\,\lambda^s=\Sigma a_{rs}\,\vartheta^{st}\,f_t\,du_r=-\,\Sigma f_i\,Du_i=\sqrt{\varepsilon}\;\Sigma f_i\,du_i\,,$$

si può scartare il fattore $\Sigma f_i\,du_i$ e rimane

$(4)_{\text{bis}}$

$$\left[\frac{\Sigma J_i\,\lambda^i}{J}-\frac{2}{3}\Sigma\psi_i\,\lambda^i-\frac{1}{3}\,\frac{\Sigma J_i\,\lambda^i}{J}\,2\,\Sigma\psi_i\,\lambda^i+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{\varepsilon}\;\Sigma\left(\frac{J^i}{J}+2\psi^i\right)f_i\right]x-\frac{32}{3}\,\Sigma x_i\,\lambda^i$$

Ora essendo

$$\Lambda^i=\sqrt{\varepsilon}\;\lambda^i\,,$$

ossia

$$\sqrt{\varepsilon}\ \Sigma\,\vartheta^{ir}\lambda_r = \varepsilon\lambda^i\,,$$

si deduce

$$f_p = -\,\varepsilon\Sigma\,\vartheta_{ip}\lambda^i = -\sqrt{\varepsilon}\ \Sigma\,\vartheta^{ir}\,\vartheta_{ip}\lambda_r\,,$$

oppure

$$f_i = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\ \lambda_i\,,$$

e quindi

$$2\sqrt{\varepsilon}\ \Sigma\left(\frac{J^i}{J}+2\psi^i\right)f_i = 2\,\Sigma\left(\frac{J^i}{J}+2\psi^i\right)\lambda_i =$$

$$= 2\ \frac{\Sigma J_i\lambda^i}{J} + 4\Sigma\psi_i\lambda^i\,.$$

L'espressione $(4)_{\rm bis}$ diventa pertanto

$$\left(\frac{8}{3}\ \frac{\Sigma J_i\lambda^i}{J}+\frac{16}{3}\Sigma\psi_i\lambda^i\right)x - \frac{32}{3}\,\Sigma x_i\lambda^i =$$

$$= -\frac{32}{3}\left[\Sigma x_i\lambda^i - \frac{1}{2}\left(\Sigma\psi_i\lambda^i + \frac{1}{2}\Sigma J_i\lambda^i\right)x\right],$$

che rappresenta infatti un punto della seconda direttrice come si vede dal confronto con la $(1)_{\rm bis}$ del Cap. IX § 84.

Riassumiamo il risultato:

Scegliendo comunque k, *la conica* C_k^1 (*) *del piano* ξ *passa per* x *ed ha ivi la tangente* τ_1. *Il secondo punto d'intersezione di* C_k^1 *con* τ_2 *sta sul secondo spigolo. La tangente a* C_k^1 *in questo punto interseca* τ_1 *in un punto situato sulla seconda direttrice.*

Ora questo è evidentemente conseguenza immediata (**) del teorema:

Sia R_2 *la rigata asintotica di* S *che ha per generatrice* τ_2. *I punti di* C_k^1 *corrispondono nella* $\Sigma\left(\frac{3\,k}{4}\right)$ *relativa a* R_2 *ai piani del fascio determinato dal piano che congiunge* τ_2 *al primo spigolo e dal piano che congiunge* τ_1 *alla prima direttrice.* (***)

(*) Similmente per C_k^2.

(**) Cfr. Cap. IX § 81 E.

(***) La conseguenza di questo teorema per il problema di costruire le quadriche di Moutard è già stata enunciata al § 85.

La dimostrazione è immediata se facciamo uso di coordinate asintotiche (u, v) su S. Infatti, l'espressione (1) diventa in tal caso, usando per semplicità forme normali $(\beta\gamma = a_{12})$,

$$\left[-\frac{8}{3}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du^2 f_1 - \frac{8}{3}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv^2 f_2 - \frac{8k}{3}(\beta du^2 f_2 + \gamma dv^2 f_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{16}{3} du\, dv \left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} f_2 + \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} f_1\right)\right] x + \frac{32}{3}(f_1 du - f_2 dv)(x_u du - x_v dv).$$

Per fissare le idee, sia $(x x_v)$ la generatrice τ_2 di R_2. La conica C_k^1 si otttiene, supponendo $f_1 = 0$, sicchè C_k^1 è descritta dal punto

$$\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv^2 + k\beta du^2 - 2\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du\, dv\right) x + 4\, dv\,(x_u du - x_v dv).$$

La corrispondenza $\Sigma\left(\frac{3k}{4}\right)$ relativa a R_2 associa (cfr. Cap. IX alla fine del § 81), il punto

$$\left(s_0 s_2 - \frac{k\beta}{4} s_1^2\right) x + s_1 s_2 x_u + s_2^2 x_v$$

ed il piano

$$s_0 \xi + s_1 \xi_u + s_2 \xi_2 .$$

La conica C_k^1 corrisponde pertanto nella $\Sigma\left(\frac{3k}{4}\right)$ relativa a R_2 al fascio di piani

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du - \frac{1}{4}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv\right) \xi - \xi_u du + \xi_v dv .$$

In particolare per $du = 0$ otteniamo il piano

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\xi + \xi_v$$

che contiene τ_2 e il primo spigolo, e per $dv = 0$ il piano

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\xi + \xi_u$$

che contiene τ_1 e la prima direttrice (Cfr. Cap. III, § 25 B), c. d. d.

§ 89 — Significato geometrico degli invarianti proiettivi più semplici di una superficie.

A) Intorno del quarto ordine di una superficie.

In questo § ci occuperemo di superficie S non rigate e faremo uso di forme normali ($J = -1$). Gli invarianti proiettivi più semplici di S sono del quarto ordine:

$$(1) \qquad \begin{gathered} \Phi = \Sigma a^{ik} \psi_i \psi_k, \quad \Psi = \Sigma a^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l, \quad \Psi' = \Sigma b^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l \\ \Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \frac{1}{2} \Phi^3. \end{gathered}$$

(Cap. VI, § 59 A). Sarebbe facile dimostrare che ogni invariante proiettivo di S del quarto ordine è funzione razionale di Φ, Ψ, Ψ'. Ora dalle ricerche dei §§ precedenti risulta che *l'intorno del quarto ordine di S relativo ad un suo punto generico x è perfettamente determinato dalla quadrica di Lie H e dalle due coniche* C_k^1, C_k^2 (*). Infatti, dal teorema finale del § precedente risulta subito, confrontando con quelli del Cap. IX, § 81 E e § 81 F che le Σ (c) relative al punto x di S sono completamente determinate date Σ (0) (che è parte della polarità rispetto ad H) e C_k^1, C_k^2; ciò posto, i teoremi enunciati al § 85 e provati negli ulteriori §§ mostrano che, date H, C_k^1 e C_k^2, possiamo costruire la quadrica di Moutard appartenente a qualsiasi tangente a S in x, e quindi anche la conica osculatrice (di contatto cinquepunto) in x di ogni sezione piana di S passante per x.

Gli invarianti (1) sono quindi invarianti proiettivi della figura composta da H, C_k^1, C_k^2 (fissando k a piacere nostro). Più precisamente, noi dimostreremo che essi sono già invarianti della coppia di coniche C_k^1 e C_k^2. Per brevità *ci limitiamo all'ipotesi* $\Phi \neq 0$; sarà un utile esercizio per il lettore di effettuare i calcoli analoghi nell'ipotesi $\Phi = 0$.

(*) k essendo una costante fissata a piacere. P. es. possiamo supporre $k = 1$.

B) Invarianti delle coniche C_k^1 e C_k^2.

Il fascio di coniche nel piano ξ determinato dalle C_k^1 e C_k^2 possiede un punto base in x. Siano y_1, y_2, y_3 le altre intersezioni di C_k^1 e C_k^2. Noi calcoleremo i birapporti

$$(\tau_i),\quad (xy_1),\quad (xy_2),\quad (xy_3),\quad i=1,2$$

τ_1 e τ_2 essendo le due tangenti asintotiche a S in x. Per ciò che si è detto sopra, tali birapporti sono funzioni degli invarianti (1).

Cerchiamo dapprima la posizione delle rette $(x\,y_\nu)$ $(\nu=1,2,3)$. A tale scopo, occorre cercare il valore di $f_1:f_2$ tale che sia riducibile la conica C_k rappresentata dall'espressione (1) del § 88 ossia, giacchè adesso supponiamo $J=-1$, dall'espressione

$$(2)\qquad \begin{aligned}(\Sigma\,\psi_i du_i\,.\,\Sigma f_i du_i + 3\varepsilon\Sigma\,\psi_i Du_i\,.\,\Sigma f_i Du_i + 4k\Sigma\,a_{rs}^{i} f_i du_r du_s\,-\\ -\,3\Sigma\,\psi^i f_i\,.\,\varphi_2)\,x - 16\varepsilon\Sigma f_i Du_i\,.\,Dx\,.\end{aligned}$$

Si vede senza difficoltà (*) che le coniche C_k riducibili si ottengono scegliendo $f_1:f_2$ soddisfacente all'equazione cubica

$$(3)\qquad \Sigma\,\psi^r f_r\,.\,\Sigma\,a^{rs} f_r f_s - 2k\Sigma\,a^{rst} f_r f_s f_t = 0\,.$$

Dalla forma dell'espressione (2) si deduce poi subito che le rette (xy_i) sono quelle rette $(x\,d\,x)$ per cui $du_1:du_2$ soddisfa all'equazione cubica

(*) x essendo un punto base del fascio $[\,C_k\,]$, per trovare le coniche riducibili occorre evidentemente scegliere le f_i in (2) in modo che il coefficiente di x risulti divisibile per $\Sigma f_i\,Du_i = \Sigma f_i\,a^{ir}\,\vartheta_{rs}\,du_s = \Sigma f^r\,\vartheta_{rs}\,du_s = \sqrt{|A|}\,(f^1 du_2 - f^2 du_1)$, oppure che esso si annulli ponendo $du_i = f^i$. Fatta tale sostituzione, si arriva subito alla (3). (Essendo $du_i = f^i$, sarà

$$Du_i = \Sigma\,\vartheta^{ir}\,a_{rs} f^s = \Sigma\,\vartheta^{ir} f_r\,)\,.$$

$$(3)_{\rm bis} \qquad 2k\varphi_3' + \varphi_2 \Sigma \psi_i Du_i = 0\,.$$

Le tangenti coniugate alle $(x\,y_i)$ sono date da

$$(3)_{\rm ter} \qquad 2k\varphi_3 - \varphi_2 \Sigma \psi_i du_i = 0\,.$$

Dobbiamo pertanto determinare i birapporti R_1 e R_2 delle quaterne composte dalle radici di $(3)_{\rm bis}$ e dall'una o dall'altra radice di $\varphi_2 = 0$. Sostituiremo del resto $(3)_{\rm ter}$ a $(3)_{\rm bis}$ in questo calcolo, il che è evidentemente lecito. Per far comprendere bene tal calcolo un po' complicato, facciamo una breve digressione.

C) Alcune formole preliminari.

L'identità $(4)_{\rm bis}$ del Cap. VI § 57 B mostra che le forme differenziali cubiche

$$\varphi_3 + \sqrt{\varepsilon}\,\varphi_3', \quad \varphi_3 - \sqrt{\varepsilon}\,\varphi_3' \quad (*)$$

sono cubi di forme lineari; poniamo pertanto

$$(4) \qquad \varphi_3 + \sqrt{\varepsilon}\,\varphi_3' = 2\,\omega_1^3\,, \quad \varphi_3 - \sqrt{\varepsilon}\,\varphi_3' = 2\,\omega_2^3\,,$$

sicchè

$$(4)_{\rm bis} \qquad \varphi_3 = \omega_1^3 + \omega_2^3\,, \quad \varphi_3' = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,(\omega_1^3 - \varepsilon_2^3)\,.$$

Dall'identità citata risulta di più

$$(2\,\omega_1\,\omega_2)^3 = \varphi_2^3\,,$$

sicchè possiamo supporre

(*) Fissiamo a piacere il segno di $\sqrt{\varepsilon}$.

$$(4)_{\text{ter}} \qquad \varphi_2 = 2\,\omega_1\,\omega_2 \,. \quad (*)$$

La forma ω_1 è determinata a meno di un fattore che è radice cubica dell'unità; scelto tal fattore, anche ω_2 è ben determinata.

Scriviamo ancora $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ per indicare le forme che si ottengono dalle ω_1, ω_2 sostituendo a du_i i differenziali coniugati Du_i. È chiaro che $\bar{\omega}_i$ differisce da ω_i soltanto per un fattore. Per determinare tale fattore diamo in ω_i e $\bar{\omega}_i$ alle du, dv dei valori che annullano ω_j $(i \gtrless j)$. Si vede allora subito che è (cfr. la (3) del Cap. IX § 84)

$$\bar{\omega}_i = \pm\, \varepsilon \sqrt{\varepsilon}\; \omega_i \,.$$

Ora sostituendo i differenziali coniugati in (4), otteniamo (**)

$$\varepsilon \varphi_3' + \sqrt{\varepsilon}\; \varphi_3 = 2\,\bar{\omega}_1^3 \,, \quad \varepsilon \varphi_3' - \sqrt{\varepsilon}\; \varphi_3 = 2\,\bar{\omega}_2^3 \,,$$

sicchè infine

$$(4)_{\text{quater}} \qquad \bar{\omega}_1 = \varepsilon \sqrt{\varepsilon}\; \omega_1 \,, \quad \bar{\omega}_2 = -\,\varepsilon \sqrt{\varepsilon}\; \omega_2 \,.$$

Dimostriamo adesso che, posto

$$(5) \qquad \Sigma\, \psi_i\, du_i = \lambda_1\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2 \,,$$

è

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \lambda_1^3 = 2\,\frac{(\Psi - \sqrt{\varepsilon}\; \Psi')^2}{\Phi^3} \,, \quad \lambda_2^3 = 2\,\frac{(\Psi + \sqrt{\varepsilon}\; \Psi')^2}{\Phi^3}$$

$$2\,\lambda_1\,\lambda_2 = \Phi \,.$$

Infatti sostituendo nella (5) Du_i al posto di du_i, otteniamo per le $(4)_{\text{quater}}$

(*) Le forme linenri ω_1 e ω_2 sono (anche in notazione) identiche a quelle che stanno alla base del metodo cinematico usato da Cartan nelle sue ricerche relative alla deformazione proiettiva.

(**) Cap. VI, § 57, $(1)_{\text{bis}}$ e $(1)_{\text{ter}}$.

$$\Sigma \vartheta_{ri} \psi^r du_i = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} (\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2)$$

e, confrontando con (5), deduciamo che:

$$(6) \qquad \begin{aligned} 2\lambda_1 \omega_1 &= \Sigma (\psi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r) du_i , \\ 2\lambda_2 \omega_2 &= \Sigma (\psi_i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r) du_i . \end{aligned}$$

Si deduce pertanto da $(4)_{ter}$

$$2\lambda_1 \lambda_2 . \Sigma a_{ik} du_i du_k = \Sigma (\psi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r)(\psi_k - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{sk} \psi^s) du_i du_k .$$

È evidentemente lecito sostituire in quest'identità a^{ik} al posto di $du_i du_k$. Fatto ciò, risulta

$$4\lambda_1 \lambda_2 = \Sigma a^{ik} \psi_i \psi_k + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r \psi^i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{sk} \psi^s \psi^k -$$

$$- \varepsilon \Sigma \vartheta_{ri} \vartheta_{sk} a^{ik} \psi^r \psi^s .$$

Il secondo e terzo membro a destra sono evidentemente nulli; il quarto

$$- \varepsilon \Sigma \vartheta_{ri} \vartheta_{sk} a^{ik} \psi^r \psi^s = - \varepsilon \Sigma \vartheta_{ri} \vartheta_{sk} a^{ik} a^{pr} a^{qs} \psi_p \psi_q ,$$

essendo

$$\Sigma \vartheta_{ri} a^{ik} a^{pr} = \vartheta^{pk} , \quad \Sigma \vartheta^{pk} \vartheta_{sk} = \begin{cases} -\varepsilon & \text{se } p = s \\ 0 & \text{se } p \gtrless s \end{cases}$$

vale $\Sigma a^{pq} \psi_p \psi_q = \Phi$, sicchè l'ultima delle $(5)_{bis}$ è provata.
Ora dalle (4) e (6) si deduce

$$4\lambda_1^3 (\varphi_3 + \sqrt{\varepsilon} \varphi'_3) = \Sigma (\psi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r)(\psi_k + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{sk} \psi^s) \times$$

$$\times (\psi_l + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{tl} \psi^t) du_i du_k du_l ,$$

$$4\lambda_2^3 (\varphi_3 - \sqrt{\varepsilon} \varphi'_3) = \Sigma (\psi_i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r)(\psi_k - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{sk} \psi^s) \times$$

$$\times (\psi_l - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta_{tl} \psi^t) du_i du_k du_l .$$

Sostituendo qui a^{ikl} a $du_i du_k du_l$, otteniamo

$$4\lambda_1^3\left(\Psi+\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right)=\Sigma a^{ikl}\psi_i\psi_k\psi_l+3\sqrt{\varepsilon}\,\Sigma\vartheta_{ri}a^{ikl}\psi^r\psi_k\psi_l+$$

$$+3\varepsilon\Sigma\vartheta_{ri}\vartheta_{sk}a^{ikl}\psi^r\psi^s\psi_l+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\Sigma\vartheta_{ri}\vartheta_{sk}\vartheta_{tl}\psi^r\psi^s\psi^t\,,$$

$$4\lambda_2^3\left(\Psi-\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right)=\Sigma^{ikl}\psi_i\psi_k\psi_l-3\sqrt{\varepsilon}\,\Sigma\vartheta_{ri}a^{ikl}\psi^r\psi_k\psi_l+$$

$$+3\varepsilon\Sigma\vartheta_{ri}\vartheta_{sk}a^{ikl}\psi^r\psi^s\psi_l-\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\Sigma\vartheta_{ri}\vartheta_{sk}\vartheta_{tl}\psi^r\psi^s\psi^t\,.$$

Ma dal Cap. VI § 57 (3), $(3)_{\text{bis}}$ e § 59 (1) si deduce:

$$\Sigma\vartheta_{ri}a^{ikl}\psi^r\psi_k\psi_l=-\Psi',$$

$$\Sigma\vartheta_{ri}\vartheta_{sk}a^{ikl}\psi^r\psi^s\psi_l=\varepsilon\Psi\,,$$

$$\Sigma\vartheta_{ri}\vartheta_{sk}\vartheta_{tl}a^{ikl}\psi^r\psi^s\psi^t=-\varepsilon\Psi',$$

sicchè risulta

$$4\lambda_1^3\left(\Psi+\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right)=4\left(\Psi-\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right),$$

$$4\lambda_2^3\left(\Psi-\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right)=4\left(\Psi+\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right),$$

onde osservando che l'identità (§ 59, (2)) che vale fra gli invarianti Φ, Ψ, Ψ' può scriversi

$$\left(\Psi+\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right)\left(\Psi-\sqrt{\varepsilon}\,\Psi'\right)=\frac{1}{2}\,\Phi^3$$

e ricordando l'ipotesi fatta che $\Phi \neq 0$ otteniamo anche le altre $(5)_{\text{bis}}$.

D) Birapporti R_1 ed R_2.

Dopo questa digressione, ritorniamo ai birapporti R_1 e R_2. Precisamente indico con R_1 (R_2) il birapporto della quaterna composta dalla terna delle radici di $(3)_{\text{bis}}$, o ciò che è lo stesso di $(3)_{\text{ter}}$, e dalla radice di $\omega_1=0$ ($\omega_2=0$). Per le $(4)_{\text{bis}}$, $(4)_{\text{ter}}$ e (5) la $(3)_{\text{ter}}$ può scriversi

$$k\left(\omega^3+\omega_2^3\right)-\left(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2\right)\omega_1\omega_2=0\,,$$

sicchè R_1 per es. è il birapporto delle radici della forma biquadratica

$$(7) \qquad k\,\omega_1^4 - \lambda_1\,\omega_1^3\,\omega_2 - \lambda_2\,\omega_1^2\,\omega_2^2 + k\,\omega_1\,\omega_2^3 .$$

Ora è ben facile calcolare R_1. Si trova (*)

$$(8) \qquad \frac{R_1^2\,(R_1-1)^2}{(R_1+1)^2\,(2\,R_1-1)^2\,(R_1-2)^2} =$$

$$= k^2\,\Phi^3\,\frac{\Phi^5 + 64\,k\,(\Psi'^2 + \varepsilon\,\Psi'^2) - 36\,k^2\,\Phi^4 - 108\,k^4\,\Phi^3}{[8\,(\Psi + \sqrt{\varepsilon}\,\Psi')^2 + 9\,k\,\Phi^4 - 54\,k^3\,\Phi^3]^2} .$$

Per dimostrare la (8), ricordiamo (**) che data una forma biquadratica

$$a_0\,\omega_1^4 + a_1\,\omega_1^3\,\omega_2 + a_2\,\omega_1^2\,\omega_2^2 + a_3\,\omega_1\,\omega_2^3 + a_4\,\omega_2^4$$

essa possiede due invarianti (relativi)

$$i = a_2^2 - 3\,a_1\,a_3 + 12\,a_0\,a_4 ,$$

$$j = 27\,a_1^2\,a_4 + 27\,a_0\,a_3^2 + 2\,a_2^3 - 72\,a_0\,a_2\,a_4 - 9\,a_1\,a_2\,a_3$$

mediante cui il birapporto R delle radici della forma si esprime secondo la formola

$$\frac{(R^2 - R + 1)^3}{[(R+1)\,(2\,R-1)\,(R-2)]^2} = \frac{i^3}{j^2}$$

o meglio (per il nostro scopo)

$$\frac{R^2\,(R-1)^2}{[(R+1)\,(2\,R-1)\,(R-2)]^2} = \frac{4\,i^3 - j^2}{27\,j^2} .$$

(*) L'equazione che dà R_2 differisce dall'(8) soltanto nel segno di $\sqrt{\varepsilon}$.

(**) Cfr. p. es. *Cesaro* (Corso di Analisi Algebrica; Cap 51 §§ 2 e 3).

Nel caso particolare della forma (7) è

$$i = \lambda_2^2 + 3k\lambda_1, \quad j = -2\lambda_2^3 - 9k\lambda_1\lambda_2 + 27k^3,$$

$$i^3 = \lambda_2^6 + 9k\lambda_1\lambda_2 . \lambda_2^3 + 27k^2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 27k^3\lambda_1^3$$

e quindi secondo le $(5)_{bis}$

$$i^3 = 4\,\frac{(\Psi + \sqrt{\varepsilon}\,\Psi')^4}{\Phi^6} + 9k\,\frac{(\Psi + \sqrt{\varepsilon}\,\Psi')^2}{\Phi^2} +$$

$$+ \frac{27}{4}\,k^2\Phi^2 + 54k^3\,\frac{(\Psi - \sqrt{\varepsilon}\,\Psi')^2}{\Phi^3},$$

$$j = -4\,\frac{(\Psi + \sqrt{\varepsilon}\,\Psi')^2}{\Phi^3} - \frac{9}{2}k\Phi + 27k^3,$$

$$4i^3 - j^2 = 27\left(\frac{1}{4}k^2\Phi^2 + 16k^3\,\frac{\Psi^2 + \varepsilon\Psi'^2}{\Phi^3} - 9k^4\Phi - 27k^6\right)$$

onde si arriva subito alla formola cercata (8).

§ 90. — Quadriche di Moutard relative alle rigate asintotiche.

Sia S una superficie non rigata riferita alle linee coordinate asintotiche. (*) Sia $t = (x\,dx) = (x\,x_u)\,du + (x\,x_v)\,dv$ una tangente a S in x. *La quadrica di Moutard M appartenente a t* è il luogo del punto (**)

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X \tag{1}$$

dove

(*) In questo § non supponiamo che le coordinate siano normalizzate.
(**) Cap. IX, § 80 B, $(2)_{quater}$.

$$
\begin{aligned}
M \equiv 2\rho_0\rho_3 &- 2a_{12}\,du\,dv\,(\rho_1^2-\rho_2^2) + \frac{2}{3}\,\frac{\beta\,du^3+\gamma\,dv^3}{du\,dv}\,\rho_1\rho_3 + \\
&+ 2\omega\,\frac{-\beta\,du^3+\gamma\,dv^3}{du\,dv}\,\rho_2\rho_3 + \left[\frac{1}{6}\,\frac{\beta}{a_{12}}\,\frac{\partial\log(\beta:a_{12}^2)}{\partial u}\,\frac{du^2}{dv^2} + \right. \\
&+ \frac{1}{6}\,\frac{\beta}{a_{12}}\,\frac{\partial\log(a_{12}\beta)}{\partial v}\,\frac{du}{dv} + \frac{1}{6}\,\frac{\gamma}{a_{12}}\,\frac{\partial\log(a_{12}\gamma)}{\partial u}\,\frac{dv}{du} + \\
(2)\qquad &+ \frac{1}{6}\,\frac{\gamma}{a_{12}}\,\frac{\partial\log(\gamma:a_{12}^2)}{dv}\,\frac{dv^2}{du^2} - \frac{1}{36}\,\frac{(\beta\,du^3+\gamma\,dv^3)^2}{(a_{12}\,du^3\,dv^3)^2} + \\
&+ \frac{1}{4}\,\frac{(\beta\,du^3-\gamma\,dv^3)^2}{(a_{12}\,du^3\,dv^3)^2} + \frac{1}{2a_{12}}\,(\beta_v+\beta\theta_v)\,\frac{du}{dv} + \\
&\left. + \frac{1}{2a_{12}}\,(\gamma_u+\gamma\theta_u)\,\frac{dv}{du} + \Omega\right]\rho_3^2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Siano ora, come al Cap. IX § 81 F, pag. 477, R_1 e R_2 le due *rigate asintotiche* di S passanti per x (*). Noi vogliamo determinare le equazioni delle *quadriche di Moutard* M_1 *e* M_2 *relative rispettivamente a* R_1 *e a* R_2 *ed appartenenti a* t. (**) A tale scopo osserviamo che dalle (5) del § 81 F si deduce che: 1° i simboli di Christoffel formati per $F_2^{(1)}$ sulla $\bar{u}=0$ hanno gli stessi valori come quelli formati per F_2 sulla $u=0$ e quindi che in $(\Sigma A_{ik}\,x_{ik})_{u=v=0}$ è indifferente calcolare le derivate covarianti per la forma F_2 o per la $F_2^{(1)}$; 2° che è per R_1, se $u=\bar{u}=0$,

$$
\Pi^{(1)} - \mathrm{P}^{(1)} = (\gamma_u + \gamma\,\theta_u)\,dv^2\,,
$$

$$
\Sigma\, a^{(1)}_{rsti}\,du_r\,du_s\,du_t\,du_i = a_{12}\,\gamma\,dv^3\left(\frac{\partial\log(a_{12}\,\gamma)}{\partial u}\,du + \frac{\partial\log(\gamma:a_{12}^2)}{\partial v}\,dv\right),
$$

(*) Precisamente R_i contenga $(x x_i)$ come l. c.

(**) Le notazioni son quelle di l. c.

$$\Sigma a^{(1)}_{rstt} du_r du_s Du_t Du_t = a_{12}\, \gamma\, dv^3 \left(- \frac{\partial \log (a_{12}\gamma)}{\partial v} du + \frac{\partial \log (\gamma : a_{12}^2)}{\partial v} dv \right).$$

Ciò posto, si vede subito che il punto (1) appartiene a M_1 se

$$(2)_{\rm bis} \quad \begin{aligned} M_1 \equiv\ & 2\rho_0\rho_3 - 2a_{12}du\,dv\,(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{2}{3}\frac{\gamma\,dv^3}{du\,dv}\rho_1\rho_3 + \\ & + 2\omega\frac{\gamma\,dv^3}{du\,dv}\rho_2\rho_3 + \left[\frac{1}{6}\frac{\gamma}{a_{12}}\frac{\partial\log(a_{12}\gamma)}{\partial u}\frac{dv}{du} + \right. \\ & + \frac{1}{6}\frac{\gamma}{a_{12}}\frac{\partial\log(\gamma : a_{12}^2)}{\partial v}\frac{dv^2}{du^2} - \frac{1}{36}\frac{(\gamma\,dv^3)^2}{a_{12}du^3dv^3} + \\ & \left. + \frac{1}{4}\frac{(\gamma\,dv^3)^2}{a_{12}du^3dv^3} + \frac{1}{2a_{12}}(\gamma_u + \gamma\theta_u)\frac{dv}{du} + \Omega\right]\rho_3^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Similmente si trova che il punto (1) appartiene a M_2 se

$$(2)_{\rm ter} \quad \begin{aligned} M_2 \equiv\ & 2\rho_0\rho_3 - 2a_{12}du\,dv\,(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{2}{3}\frac{\beta\,du^3}{du\,dv}\rho_1\rho_3 - \\ & - 2\omega\frac{\beta\,du^3}{du\,dv}\rho_2\rho_3 + \left[\frac{1}{6}\frac{\beta}{a_{12}}\frac{\partial\log(\beta : a_{12}^2)}{\partial u}\frac{du^2}{dv^2} + \right. \\ & + \frac{1}{6}\frac{\beta}{a_{12}}\frac{\partial\log(a_{12}\beta)}{\partial v}\frac{du}{dv} - \frac{1}{36}\frac{(\beta\,du^3)^2}{a_{12}du^3dv^3} + \\ & \left. + \frac{1}{4}\frac{(\beta\,du^3)^2}{a_{12}du^3dv^3} + \frac{1}{2a_{12}}(\beta_v + \beta\theta_v)\frac{dv}{du} + \Omega\right]\rho_3^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Dal confronto delle (2), $(2)_{\rm bis}$ e $(2)_{\rm ter}$ risultano le identità

$$M_1 - M_2 = \rho_3(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_3)\,, \quad (*)$$

(*) I valori delle α non ci interessano (e neanche quelli delle α' in $(3)_{\rm bis}$).

$$(3)\qquad M_1 + M_2 = M + M_0\,,$$

dove

$$M_0 = 2\rho_0\rho_3 - 2a_{12}\,du\,dv\,(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \left(-\frac{5}{9}\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + \Omega\right)\rho_3^2 = 0$$

sicchè

$$(3)_{\text{bis}}\qquad M - M_0 = \rho_3\,(\alpha_1'\rho_1 + \alpha_2'\rho_2 + \alpha_3'\rho_3)\,.$$

Le identità (3) e $(3)_{\text{bis}}$ hanno una notevole interpretazione geometrica. Cominciamo coll'osservare che la quadrica $M_0 = 0$ (o brevemente M_0) *non dipende dalla tangente* t, ma soltanto dal punto x di S. Infatti, posto

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X = r_0 x + r_1 x_u + r_2 x_v + r_3 X\,,$$

si trova subito che

$$(4)\qquad M_0 = 2r_0r_3 - 2a_{12}r_1r_2 + \left(-\frac{5}{9}\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + \Omega\right)r_3^2 = 0\,.$$

Se ne deduce che *la quadrica* M_0 *è una delle quadriche di Darboux.* (*)

Ciò posto, si vede senza calcolo il significato geometrico delle (3) e $(3)_{\text{bis}}$:

Nel fascio determinato dalle quadriche M_1 *e* M_2 *vi è una quadrica spezzata nel piano tangente a* S *in* x *e in un altro piano; sia* M′ *la quadrica del fascio coniugata armonica di quella spezzata rispetto alle* M_1 *e* M_2. *Nel fascio determinato dalle quadriche* M′ *e* M_0 *vi è di nuovo una quadrica spezzata nel piano tangente e in un altro piano; la quadrica di questo nuovo fascio coniugata armonica della spezzata rispetto a* M′ *e* M_0 *è le quadrica* M.

Mediante questo teorema, la costruzione delle quadriche di Moutard relative ad una superficie non rigata si riduce alla costruzione delle quadriche di Moutard relative alle sue rigate asin-

(*) Cfr. Cap. III, § 21 C.

totiche. Ora la costruzione delle quadriche di Moutard si semplifica se la superficie di partenza è rigata (v. § 87), sicchè il teorema precedente dà un nuovo modo di costruire le quadriche di Moutard relative ad una superficie non rigata. Però la prima soluzione pare migliore, almeno se non si trova un significato geometrico semplice della quadrica M_0. (*)

§ 91. — **Il cono di Segre.**

A) **Formole preliminari.**

Cominciamo dimostrando le formole, analoghe alle (1) del Cap. IX § 79

$$
\begin{aligned}
dDx &= \Sigma\, \vartheta_{rs} p_k^r\, du_k\, du_s \,.\, x + \frac{\Sigma\, \vartheta_{rs} du_r\, \delta^2 u_s + F'_3}{F_2}\, dx + \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}\, dF_2 - F_3}{F_2}\, Dx\,, \\
dD\xi &= \Sigma\, \vartheta_{rs} \pi_k^r\, du_k\, du_s \,.\, \xi + \frac{\Sigma\, \vartheta_{rs} du_r\, \delta^2 u_s - F'_3}{F_2}\, d\xi + \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}\, dF_2 + F_3}{F_2}\, D\xi\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

La dimostrazione è analoga a quella delle formole citate. Limitiamoci alla seconda delle (1). Differenziando l' identità

$$D\xi = \Sigma\, \xi_i\, Du_i = \Sigma a^{ir}\, \vartheta_{rs}\, \xi_i\, du_s = \Sigma\, \vartheta_{rs}\, \xi^r\, du_s$$

(*) È chiaro che deve essere possibile costruire M_0, dato H, C_1^1, C_1^2 (cfr. § 89).

si trova facilmente (*)

$$dD\xi = \Sigma \vartheta_{rs} \xi^r \delta^2 u_s + \Sigma \vartheta_{rs} a^{ir} \xi_{ik} du_k\, du_s\ ,$$

ossia, essendo

$$\xi_{ik} = -\Sigma a_{ik}^p \xi_p + a_{ik} \Xi + \pi_{ik} \xi\ ,$$

$$d D\xi = \Sigma \vartheta_{rs} \pi_k^r du_k\, du_s \,.\, \xi - \Sigma b_{ks}^p \xi_p\, du_k\, du_s + \Sigma \vartheta_{rs} \xi^r \delta^2 u_s\ .$$

Si tratta quindi soltanto di provare che, se $F_2 \neq 0$, posto

$$(\alpha) \qquad -\Sigma b_{ks}^b \xi_p\, du_k\, du_s + \Sigma \vartheta_{rs} \xi^r \delta^2 u_s = \lambda d\xi + \lambda' D\xi\ ,$$

sarà

$$\lambda = \frac{\Sigma \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s - F_3'}{F_2}\ , \qquad \lambda' = \frac{\frac{1}{2} dF_2 + F_3}{F_2}\ .$$

A tale scopo moltiplichiamo la (α) per dx, oppure per Dx. Si trova rispettivamente (**)

$$+\Sigma b_{iks}\, du_i\, du_k\, du_s - \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s = -\lambda F_2\ ,$$

$$+\Sigma b_{iks}\, Du_i\, du_k\, du_s - \Sigma \vartheta_{rs}\, Du_r\, \delta^2 u_s = \varepsilon \lambda' F_2\ .$$

Ma

$$\Sigma \vartheta_{rs} Du_r\, \delta^2 u_s = \Sigma \vartheta_{rs} \vartheta^{rt} a_{ti}\, du_i\, \delta^2 u_s = -\varepsilon \Sigma a_{is}\, du_i\, \delta^2 u_s = -\frac{\varepsilon}{2} dF_2\ ,$$

$$\Sigma b_{iks}\, Du_i\, du_k\, du_s = \Sigma \vartheta^{ir} a_{rt} b_{iks}\, du_t\, du_k\, du_s =$$

$$= \varepsilon \Sigma a_{rt} a_{ks}^r du_k\, du_s\, du_t = \varepsilon \Sigma a_{kst}\, du_k\, du_s\, du_t = \varepsilon F_3\ , \quad \text{ecc.}$$

B) **Nuovo calcolo di un determinante.**

Adesso è facile dimostrare le identità (valide se $F_2 \neq 0$)

$$(x\, dx\, d^2x\, d^3x) = F_2 dG - \frac{3}{2} G dF_2 + F_3 (F_3' - 4G) -$$

(*) Cfr. Fubini, *I differenziali controvarianti*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 54, 1918.

(**) Cfr. Cap. IX, § 79, p. 459.

$$- F_2 \Sigma b_{rsti} du_r du_s du_t du_i - F_2^2 \Sigma \vartheta_{rs} \pi_k^r du_k du_s ,$$

(2)

$$\varepsilon (\xi d \xi d^2 \xi d^3 \xi) = F_2 dG - \frac{3}{2} G d F_2 + F_3 (F_3' + 4G) +$$

$$+ F_2 \Sigma b_{rsti} du_r du_s du_t du_i - F_2^2 \Sigma \vartheta_{rs} p_k^r du_k du_s , \quad (*)$$

dove abbiamo posto per brevità

(2)$_{\text{bis}}$
$$G = \Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s$$

sicchè

(2)$_{\text{ter}}$
$$dG = \Sigma \vartheta_{rs} (du_r \delta^3 u_s + \delta^2 u_r \delta^2 u_s) .$$

Ci limitiamo a provare la prima delle (2). Differenziando la prima delle (3) del Cap. IX § 81 C si deduce

$$(x dx d^3 x) = (dF_3' - dG) . \xi + (F_3' - G) d\xi + dF_2 . D\xi + F_2 . dD\xi ,$$

ossia per la (1)

$$(x dx d^3 x) = (dF_3' - dG + F_2 \Sigma \vartheta_{rs} \pi_k^r du_r du_s) \xi +$$
$$+ \left(\frac{3}{2} dF_2 + F_3\right) D \xi .$$

Ora dalle citate (1) del Cap. IX § 79 si deduce facilmente

$$S \xi d^2 x = F_2 , \quad SD \xi d^2 x = G - F_3' ,$$

sicchè

$$(x dx d^2 x d^3 x) = - S d^2 x (x dx d^3 x) =$$

$$= - F_2 (dF_3' - dG + F_2 \Sigma \vartheta_{rs} \pi_k^r du_r du_s) + (F_3' - G) \left(\frac{3}{2} dF_2 + F_3\right)$$

donde si passa subito all' equazione cercata, ricordando la (3)$_{\text{ter}}$ del Cap. IX, § 80.

(*) Lo studio di $(x, dx\, d^2 x, d^3 x)$ è stato il punto di partenza delle ricerche del Fubini. Cfr. le Note : Defin. proiett. differ. ecc. (Atti dell' Accad. delle Scienze in Torino vol 49, 1914 pag. 786). Fondamenti della geom. d'una superf. (Rend. dei Lincei Vol. 27_5 ; 1918).

B) Cono di Segre.

Al Cap. III § 22 e al Cap. IX § 81 C abbiamo esaminato la corrispondenza di Segre (*) fra il piano $(x\,d\,x\,d^2\,x)$ osculatore di una curva c tracciata su S ed il punto $(\xi\,d\,\xi\,d^2\,\xi)$ di regresso della sviluppabile γ che tocca S lungo c. Abbiamo visto che il Segre nella nota citata, esaminando ancora sotto quali condizioni accade simultaneamente che il piano osculatore $(x\,d\,x\,d^2\,x)$ e il punto $(\xi\,d\,\xi\,d^2\,\xi)$ sono *stazionari* rispettivamente per c e γ, ha trovato che, dato x, i piani osculatori in x alle curve c siffatte inviluppano un cono di vertice x, che abbiamo chiamato *cono di Segre,* in generale di sesta classe, con piano tangente quintuplo in ξ, le generatrici di contatto essendo le tangenti asintotiche e le tangenti di Darboux. Il Segre ne ha scritto l'equazione soltanto sotto l'ipotesi che la S sia definita con una equazione $z = f\ (x,\ y)$. Le formole (2) ci permettono in nuovo modo (cfr. § 16 E) non soltanto di scrivere l'equazione del cono di Segre in coordinate curvilinee qualunque, ma anche di costruire il piano tangente (unico) del cono che passa per una qualsiasi tangente t a S in x.

Le condizioni del problema sono evidentemente

$$(x\,d\,x\,d^2\,x\,d^3\,x) = 0\ , \quad (\xi\,d\,\xi\,d^2\,\xi\,d^3\,\xi) = 0\ .$$

Esse contengono, come è chiaro a priori, i differenziali terzi. Per arrivare alla posizione dei piani osculatori alle curve c, occorre eliminare i differenziali terzi, oppure, per le (2), scrivere l'equazione

$$-(x\,d\,x\,d^2 x\,d^3\,x) + \varepsilon\,(\xi\,d\,\xi\,d^2\,\xi\,d^3\,\xi) = 0\ ,$$

che diventa per le (2) stesse e per le $(3)_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 58

$$(3)\quad 8\,G F_3 + 2 F_2 \Sigma\, b_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + F_2^2 \Sigma\, b_{rs}{}^{\underline{i}}{}_{i}\, du_r\, du_s = 0\ .$$

(*) *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie,* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. 17, 1908.

Confrontando con la (3) del Cap. IX § 81 vediamo pertanto che il cono di Segre è inviluppato (variando $du : dv$) dal piano

$$(3)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} &(8 F_3 F_3' + 2 F_2 \Sigma b_{rsti} du_r du_s du_t du_i + \\ &+ F_2^2 \Sigma b_{rs \overset{i}{-} i} du_r du_s) \xi + 8 F_2 F_3 D \xi . \end{aligned}$$

Dalle $(3)_{\text{bis}}$ si determina immediatamente la classe del conc e la posizione delle tangenti nel punto multiplo x, d'accordo con l'enunciato precedente. Ma dalle $(1)_{\text{quater}}$ del Cap. IX § 81 vediamo di più che *al cono di Segre corrisponde in* $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$ (*) *la curva del piano* ξ *luogo del punto*

$$(4) \qquad (2 \Sigma b_{rsti} du_r du_s du_t du_i + F_2 \Sigma b_{rs \overset{i}{-} i} du_r du_s) x + 8 F_3 D x .$$

In generale, tale curva è d'ordine quattro, con un punto triplo in x, dove le tangenti ad essa sono le tangenti di Segre.

C) Alcune applicazioni.

Supponiamo in primo luogo che la superficie S sia *rigata*. Allora è ben facile vedere che la linea rappresentata dalla (4) è semplicemente *la generatrice della quadrica* W_1 (**) *situata nel piano* ξ. A tale scopo occorre provare soltanto (***) che (4) rappresenta una retta che contiene il coniugato armonico di x rispetto alla coppia dei flecnodi ed il polo della generatrice rispetto alla conica osculatrice all'asintotica curva di S passante per x. Ora supposto

$$a_{11} = a_{22} = 0 , \quad a_{12} = \omega = \pm 1 , \quad x = y + u z$$

(*) Nella Memoria citata al § 85 è scritto erroneamente $\Sigma\left(\frac{3}{2}\right)$.

(**) o del piano W_1 se le due curve flecnodali di S coincidono.

(***) Cap. IV § 35 C e 36 B.

si trova (cfr. § 87, 87 A) che (4) si riduce, scartando il fattore $2dv^3$, alla

$$[4(B+Cu)\,du + (A' + 2B'u + C'u^2)\,dv]\,(y+uz) +$$

$$+ 4(A + 2Bu + Cu^2)\,[-z\,du + (y' + uz')\,dv]\,,$$

donde risulta l'enunciato come al § 87 A.

Adesso supponiamo invece che S *non* sia rigata. Dimostriamo che *la curva del piano* ξ *trasformata del cono di Segre mediante* $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$ *si può generare come segue: Siano* τ_1 *e* τ_2 *le tangenti asintotiche ad* S *in* x*;* s_i *(*d_i*) sia l'intersezione di* τ_i *col secondo spigolo (con la seconda direttrice); e* [C] *sia il fascio di coniche del piano* ξ *determinato, 1° dalla conica spezzata in* τ_1 *e (*$d_1 s_2$*), e 2° dalla conica spezzata in* τ_2 *e (*$d_2 s_1$*). Allora l'intersezione della curva suddetta con una tangente qualsiasi* t *a* S *in* x *è situata su quella conica del fascio* [C] *che tocca in* x *la polare lineare di* t *rispetto alla terna delle tangenti di Segre.* A tale scopo osserviamo che la $(1)_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 58 permette di trasformare l'espressione (4). Per brevità supponiamo $J = -1$ (forme normali) e troviamo

$$(4)_{\text{bis}} \qquad (-2\varphi_3 \Sigma \psi_i Du_i + \varphi_2 \Sigma b_{rsk} \psi^k du_r du_s)\,x + 8\varphi_3 Dx\,.$$

Qui poniamo

$$(5) \qquad \Sigma b_{rsk} du_r du_s = g_k$$

e quindi (Cap. VI § 57 $(3)_{\text{quater}}$)

$$\Sigma \vartheta^{ik} g_k = -\varepsilon \Sigma a^i_{rs} du_r du_s$$

$$\varphi_3 = \Sigma a_{hi}\, a^i_{rs}\, du_h\, du_r du_s = -\varepsilon \Sigma \vartheta^{ik} a_{hi}\, g_k\, du_h = \varepsilon \Sigma g_k Du_k\,,$$

sicchè la $(4)_{\text{bis}}$ diventa

$$(6) \quad (-2\varepsilon \Sigma g_i Du_i \,.\, \Sigma \psi_i Du_i + \varphi_2 \,.\, \Sigma g_i \psi^i)\,x + 8\varepsilon \Sigma g_i Du_i \,.\, Dx\,.$$

Riguardando le g_i come fisse e variando soltanto le du_i, il punto rappresentato da (6) descrive una conica del piano ξ; e variando g_i, tali coniche descrivono evidentemente un fascio $[C]$ di cui x è un punto base. La (5) mostra poi che il punto della curva rappresentata da $(4)_{bis}$ che sta su una tangente t (ad S in x) appartiene a quella conica di $[C]$ che tocca in x la polare lineare di t rispetto alla terna delle tangenti di Darboux. Di più dalla (6) si vede senza difficoltà che la conica C^1 di $[C]$ che tocca in x p. es. la tangente asintotica τ_1 si spezza in τ_1 ed in un'altra retta (*), sicchè resta soltanto a provare che tale retta residua di C^1 è identica alla retta $(d_1 s_2)$. Ometto questo calcolo, perchè esso è perfettamente analogo a quello fatto nel § 88 (esso è semplicissimo in coordinate asintotiche). Si ricordi (§ 16 E e 24) che:

La (3) è l'*equazione differenziale delle estremali dell'integrale* $\int \frac{F_3}{F_2}$ *(pangeodetiche).*

§ 92. — Superficie a pangeodetiche piane.

Non esistono superficie S per cui *tutte* le pangeodetiche sono piane. (**) Infatti, se così fosse, l'equazione $(x\,dx\,d^2x\,d^3x) = 0$ sarebbe evidentemente conseguenza algebrica delle $H = 0$, $dH = 0$, essendo

$$H = (x\,dx\,d^2x\,d^3x) - \varepsilon\,(\xi\,d\xi\,d^2\xi\,d^3\xi)\,.$$

Ora lungo un'asintotica curva è (***) $H = 0$ e quindi anche $dH = 0$, mentre $(x\,dx\,d^2x\,d^3x) \neq 0$.

Ma esistono delle *superficie* S *con una famiglia di* ∞^1 *pangeodetiche piane. Esse dipendono da sette funzioni arbitrarie di un*

(*) Basta osservare che, se $\Sigma a_{ik}\, g^i\, g^k = 0$, l'espressione (6) è divisibile per $\Sigma g_i\, Du_i$ o, ciò che è lo stesso, che essa si annulla se $g_i = du_i$, $\varphi_z = 0$.

(**) Se escludiamo le quadriche. Sopra una quadrica, ogni curva può considerarsi quale pangeodetica.

(***) Cfr. l'osservazione al principio del § 18 B.

parametro e le loro equazioni in termini finiti s' ottengono senza neanche quadrature. Sia $[C]$ un sistema ∞^1 di pangeodetiche proiettive piane di S. I piani tangenti a S nei punti di una qualunque delle C passando per un punto fisso, due C successive, e quindi anche i loro piani, sono *prospettivi*. Gli ∞^1 piani τ delle curve C sono pertanto *proiettivi* fra loro, e le curve C si corrispondono in queste proiettività. Sia τ_0 un piano fisso del sistema $[\tau]$, r_0 una retta qualsiasi di τ_0, $[r]$ il sistema ∞^1 di rette dei piani τ corrispondenti a r_0 nelle proiettività sopra definite. Si vede subito che il sistema $[r]$ è *sviluppabile*. Infatti, due piani τ successivi essendo prospettivi, due rette r successive s' incontrano. Da queste osservazioni si vede che S si può generare come segue:

Si scelga ad arbitrio una sviluppabile T, *e sopra di essa, si costruiscano ad arbitrio quattro curve* k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *Sia* τ_0 *un piano tangente fisso di* T, τ *il piano tangente generico di* T. *Fra* τ_0 *e* τ *si consideri la proiettività* π *in cui alle tangenti delle* k_i *giacenti in* τ_0 *corrispondono le tangenti delle* k_i *situate in* τ. *Sia* C_0 *una curva arbitraria del piano* τ_0, *e* C *la curva del piano* τ *che vi corrisponde in* π. *Se* τ *inviluppa* T, *la curva* C *genera una superficie* S *su cui le* C *sono pangeodetiche piane.* (*)

Infatti due C successive risultano evidentemente prospettive.

Ora sorge spontaneo un problema interessante: *Determinare tutte le superficie con* più *sistemi* ∞^1 *di pangeodetiche piane.* Osserviamo soltanto che la superficie $xyz = 1$ (**) possiede sei sistemi di pangeodetiche piane, formati dalle curve di Darboux (coniche) e dalle curve di Segre (cubiche con un punto cuspidale). La più generale pangeodetica di $xyz = 1$ è

$$x : y : z = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^t : \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^t : \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^t,$$

dove t è il parametro e λ_1, λ_2, λ_3 sono costanti arbitrarie.

(*) La sviluppabile T può degenerare in un fascio di piani. Le curve k_i devono allora sostituirsi con dei coni, i cui vertici stanno sulla retta base del fascio.

(**) Questa è l' unica superficie che sia insieme di terzo grado e di terza classe.