VII

LINEÁRNÍ ROVNICE

46. LINEÁRNÍ FUNKCE VEKTORU. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$. Zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$ je vektorový prostor dimense m. Je-li zvolena base

$$(46.1) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m,$$

lze každý vektor $\mathbf{v}$ právě jedním způsobem psáti ve tvaru

$$(46.2) \qquad \mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m.$$

Zvolme libovolně reálná čísla $a_1, \ldots, a_m$ a přiřaďme každému vektoru (46.2) reálné číslo

$$(46.3) \qquad f(\mathbf{v}) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m.$$

Pravíme, že f je *lineární funkce vektoru* v prostoru $\mathbf{E}_m$. Z definice plyne předně, že jsou-li $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ libovolné dva vektory, jest

$$(46.4) \qquad f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}')$$

a za druhé, že je-li c libovolné reálné číslo a je-li $\mathbf{v}$ libovolný vektor, jest

$$(46.5) \qquad f(c\mathbf{v}) = c \,.\, f(\mathbf{v}).$$

Pojem lineární funkce vektoru jsme zavedli na základě zvolené base (46.1) vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$. Je třeba ukázati, že tato závislost na basi (46.1) je pouze zdánlivá. K tomu cíli nejprve poznamenejme, že vlastnosti (46.4) a (46.5) lineární funkce vektoru jsou nezávislé na volbě base (46.1). Stačí tedy dokázati, že jestliže každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřadíme číslo $f(\mathbf{v})$ tak, že jsou splněny vlastnosti (46.4) a (46.5), existují čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, že pro každý vektor (46.2) platí (46.3). Avšak k tomu cíli stačí položit

$$(46.6) \qquad f(\mathbf{u}_r) = a_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$

neboť za (46.4) a (46.5) plyne, že

$$f(x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m) = x_1 \,.\, f(\mathbf{u}_1) + \ldots + x_m \,.\, f(\mathbf{u}_m),$$

takže pro vektor (46.2) máme (46.3).

Mezi lineárními funkcemi vektoru je jedna, jejíž hodnota v každém vektoru je rovna nule; označíme ji $\bar{o}$ a nazveme ji *nulovou funkcí vektoru.* Pro nulovou funkci vektoru máme ve (46.3)

$$a_1 = 0, \ldots, a_m = 0.$$

Označme $\mathbf{F}$ množinu všech lineárních funkcí vektoru. Jestliže f i g náležejí do $\mathbf{F}$, označme $f + g$ funkci, která každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřazuje číslo $f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$. Jestliže je zvolena určitá base (46.1) pro $\mathbf{V}_m$ a jestliže platí (46.3) a

$$g(\mathbf{v}) = b_1x_1 + \ldots + b_mx_m,$$

potom funkce $f + g$ přiřazuje každému vektoru (46.2) číslo

$$(a_1 + b_1)\, x_1 + \ldots + (a_m + b_m)\, x_m,$$

z čehož je patrné, že $f + g$ je lineární funkce vektoru. Jestliže f náleží do $\mathbf{F}$ a jestliže c je reálné číslo, označme cf funkci, která každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřazuje číslo $c \,.\, f(\mathbf{v})$. Jestliže při zvolené basi (46.1) pro $\mathbf{V}_m$ platí (46.3), potom funkce cf přiřazuje každému vektoru (46.2) číslo

$$ca_1x_1 + \ldots + ca_mx_m,$$

z čehož je patrné, že cf je lineární funkcí vektoru.

Právě jsme definovali součet $f + g$ dvou lineárních funkcí vektoru a součin cf reálného čísla c s lineární funkcí vektoru. Na základě těchto definic zřejmě *množina* $\mathbf{F}$ *všech lineárních funkcí vektoru je vektorový prostor ve smyslu obecné definice článku* 10, při čemž nulovým vektorem v $\mathbf{F}$ je nulová funkce vektoru $\bar{o}$. Ježto $\mathbf{F}$ je vektorový prostor, můžeme mluvit o lineárních kombinacích lineárních funkcí vektoru, o jejich lineární nezávislosti a pod.

Mluvili jsme dosud o lineárních funkcích vektoru se stanoviska afinní geometrie. Theorie lineárních funkcí vektoru je však jednodušší se stanoviska metrické geometrie, které nyní zaujmeme. Je-li $\mathbf{a}$ daný vektor a přiřadíme-li každému vektoru $\mathbf{v}$ skalární součin

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{av}, \tag{46.7}$$

potom podle (7.4) a (8.9) je f lineární funkce vektoru. *Každá lineární funkce vektoru je tvaru* (46.7). Neboť je-li (46.1) orthonormální base pro $\boldsymbol{V}_m$ a je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_m)$, potom zřejmě (46.3) splyne se (46.7). Platí-li (46.6), pravíme, že lineární funkce vektoru f je *metricky vytvořena vektorem* $\boldsymbol{a}$.

Jestliže každému vektoru $\boldsymbol{a}$ přiřadíme lineární funkci vektoru f podle pravidla (46.7), dostaneme vzájemně jednoznačný vztah mezi množinou $\boldsymbol{V}_m$ všech vektorů $\boldsymbol{a}$ a množinou $\boldsymbol{F}$ všech lineárních funkcí vektoru f. Speciálně nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$ je přiřazena nulová funkce vektoru $\bar{o}$. Tento vztah je *isomorfismus mezi* $\boldsymbol{V}_m$ a $\boldsymbol{F}$, neboť jestliže vektorům $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ odpovídají lineární funkce vektoru f a g, zřejmě vektoru $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ odpovídá $f + g$, a je-li c reálné číslo, potom vektoru $c\boldsymbol{a}$ odpovídá cf.

VĚTA 46.1. *Budiž f nenulová lineární funkce vektoru $\boldsymbol{v}$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Potom existuje $(m - 1)$-směr $\boldsymbol{W}_{m-1}$ tak, že $f(\boldsymbol{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\boldsymbol{v}$ náleží do $\boldsymbol{W}_{m-1}$.* Pravíme, že $\boldsymbol{W}_{m-1}$ je *nulový* $(m - 1)$-*směr funkce* f. Obráceně, *je-li $\boldsymbol{W}_{m-1}$ libovolný $(m - 1)$-směr, existuje nenulová lineární funkce vektoru f, jejíž nulový $(m - 1)$-směr je právě $\boldsymbol{W}_{m-1}$ a všecky takové funkce f jsou mezi sebou lineárně závislé.*

Věta 46.1 je zřejmě větou z afinní geometrie a lze ji dokázati methodami afinní geometrie, t. j. bez užití skalárního součinu. Dokážeme ji však velmi jednoduše methodou metrické geometrie. Jestliže f je metricky vytvořena vektorem $\boldsymbol{a}$, platí (46.7), takže $f(\boldsymbol{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}$ orthogonální, t. j. jestliže $\boldsymbol{v}$ náleží do $(m - 1)$-směru $\boldsymbol{W}_{m-1}$ totálně kolmého na směr $\{\boldsymbol{a}\}$. Obráceně k danému $(m - 1)$-směru $\boldsymbol{W}_{m-1}$ existuje totálně kolmý směr $\{\boldsymbol{u}\}$ a platí-li (46.7), jest $f(\boldsymbol{v}) = 0$ pro každý vektor náležející do $\boldsymbol{W}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže směry $\{\boldsymbol{a}\}$, $\{\boldsymbol{u}\}$ splynou, t. j. jestliže vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}$ jsou mezi sebou lineárně závislé.

VĚTA 46.2. *Buďtež $f, f_1, \dots, f_k$ nenulové lineární funkce vektoru. Jestliže f je lineární kombinací funkcí $f_1, \dots, f_k$, potom každý směr náležející do nulových $(m - 1)$-směrů funkcí $f_1, \dots, f_k$ náleží také do nulového $(m - 1)$-směru funkce f.*

DŮKAZ. Buďtež $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ vektory, které metricky vytvořují funkce $f, f_1, \dots, f_k$. Potom vektor $\boldsymbol{a}$ je lineární kombinací vektorů

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Jestliže vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ náleží do nulových $(m-1)$-směrů všech funkcí $f_1, \ldots, f_k$, potom směr $\{\boldsymbol{v}\}$ je kolmý na všecky směry $\{\boldsymbol{a}_1\}, \ldots, \{\boldsymbol{a}_k\}$. Podle věty 31.2 směr $\{\boldsymbol{v}\}$ je také kolmý na $\{\boldsymbol{a}\}$, takže vektor $\boldsymbol{v}$ náleží do nulového $(m-1)$-směru funkce f.

VĚTA 46.3. *Jsou-li lineární funkce vektoru $f_1, \ldots, f_k$ $(1 \leq k \leq m-1)$ mezi sebou lináerně nezávislé, potom množina všech těch vektorů, které náležejí do nulových $(m-1)$-směrů všech funkcí $f_1, \ldots, f_k$, tvoří $(m-k)$-směr.* Obráceně, *je-li dán libovolný $(m-k)$-směr $\boldsymbol{W}_{m-k}$, potom všecky ty lineární funkce vektoru, jejichž nulové $(m-1)$-směry obsahují $\boldsymbol{W}_{m-k}$ jako část, vyplní lineární soustavu $\{f_1, \ldots, f_k\}$ dimense k obsaženou ve vektorovém prostoru $\boldsymbol{F}$.*

DŮKAZ. Buďtež $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ vektory, které metricky vytvořují funkce $f_1, \ldots, f_k$. Tyto vektory jsou mezi sebou lineárně nezávislé a definují tudíž lineární soustavu $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ dimense k, k níž je totálně kolmá lineární soustava $\boldsymbol{W}_{m-k}$ dimense $m-k$ obsahující právě ty vektory, které jsou orthogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Obráceně, je-li dána lineární soustava $\boldsymbol{W}_{m-k}$, budiž $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ k ní totálně kolmá; vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ potom metricky vytvořují lineární funkce vektoru $f_1, \ldots, f_k$ mající žádanou vlastnost.

47. LINEÁRNÍ FUNKCE BODU. Budiž opět $\boldsymbol{E}_m$ eukleidovský prostor, $\boldsymbol{V}_m$ jeho zaměření. Zvolme v $\boldsymbol{E}_m$ lineární soustavu souřadnic

$$\langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle, \tag{47.1}$$

takže každý bod X lze psáti právě jedním způsobem ve tvaru

$$X = P + x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m. \tag{47.2}$$

Zvolíme-li reálná čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ a přiřadíme-li každému bodu (47.2) reálné číslo

$$\varphi(X) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0, \tag{47.3}$$

řekneme, že φ je *lineární funkce bodu* v prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Zvláštním případem lineární funkce bodu je libovolná *konstanta* a_0; dostaneme ji, jestliže $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0$. Konstantu 0 nazveme *nulovou funkcí bodu.* Pro konstanty zavedeme druhý název *nevlastní lineární funkce bodu*; ostatní lineární funkce bodu nazveme *vlastní.*

Ke každé lineární funkci bodu (47.3) patří určitá lineární funkce vektoru f, kterou nazveme *odvozenou* z funkce φ a která má tu vlastnost, že

$$(47.4) \qquad f(Y - X) = \varphi(Y) - \varphi(X)$$

pro každou dvojici bodů X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$. Funkce f přiřazuje vektoru (46.2) číslo (46.3). Zřejmě $f = \bar{\mathbf{o}}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže φ je konstanta; jinak řečeno:

$$(47.5) \qquad \begin{aligned} f &\neq \bar{\mathbf{o}}, \text{ je-li } \varphi \text{ vlastní,} \\ f &= \bar{\mathbf{o}}, \text{ je-li } \varphi \text{ nevlastní.} \end{aligned}$$

Pojem lineární funkce bodu jsme zavedli na základě zvolené lineární soustavy souřadnic (47.1) a je třeba ukázati, že tato závislost na soustavě souřadnic je pouze zdánlivá. K tomu cíli uvažme, že vztah (47.4) je nezávislý na volbě soustavy souřadnic a že totéž platí o pojmu lineární funkce vektoru. Stačí tedy ukázati, že jestliže každému bodu X přiřadíme číslo $\varphi(X)$ tak, že existuje taková lineární funkce vektoru f, pro kterou je splněno (47.4) při libovolné volbě bodů X a Y, potom lze určit čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ tak, že pro každý bod (47.2) platí (47.3). Za tím účelem položme $\varphi(P) = a_0$ a určeme čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, aby pro každý vektor (46.2) platilo (46.3). Ježto podle (47.4) je $\varphi(X) = f(X - P) + \varphi(P)$, dostaneme vskutku, že pro bod (47.2) platí (47.3).

Označme Φ množinu všech lineárních funkcí bodu. Jestliže φ i ψ náležejí do Φ, označme $\varphi + \psi$ funkci, která každému bodu X přiřazuje číslo $\varphi(X) + \psi(X)$. Jestliže je zvolena určitá lineární soustava souřadnic (47.1) a jestliže pro libovolný bod (47.2) platí (47.3) a

$$\psi(X) = b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m + b_0,$$

potom $\varphi + \psi$ přiřazuje bodu (47.2) číslo

$$(a_1 + b_1)\, x_1 + \ldots + (a_m + b_m)\, x_m + (a_0 + b_0),$$

z čehož plyne, že $\varphi + \psi$ je lineární funkce bodu. Jestliže φ náleží do Φ a jestliže c je reálné číslo, označme $c\varphi$ funkci, která každému bodu X přiřazuje číslo $c \,.\, \varphi(X)$. Jestliže při určité volbě lineární soustavy souřadnic (47.1) pro libovolný bod (47.2) platí (47.3), potom $c\varphi$ přiřazuje bodu (47.2) číslo

$$ca_1 \,.\, x_1 + \ldots + ca_m \,.\, x_m + ca_0,$$

z čehož plyne, že $c\varphi$ je lineární funkce bodu.

Právě jsme definovali součet $\varphi + \psi$ dvou lineárních funkcí bodu a součin $c\varphi$ reálného čísla s lineární funkcí bodu. Na základě těchto definic *množina Φ všech lineárních funkcí bodu tvoří vektorový prostor ve smyslu obecné definice článku* 10, při čemž nulovým vektorem ve Φ je nulová funkce bodu. Je-li dána určitá lineární soustava souřadnic (47.1), potom existují lineární funkce bodu

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_0 \tag{47.6}$$

tak, že pro libovolný bod (47.2) platí

$$\varphi_r(X) = x_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m; \ \varphi_0(X) = 1.$$

Je-li φ lineární funkce bodu, která bodu (47.2) přiřazuje číslo (47.3), jest

$$\varphi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_m\varphi_m + a_0\varphi_0;$$

z toho je patrné, že (47.6) je base pro Φ, takže *vektorový prostor Φ má dimensi $m + 1$*. Zřejmě *konstanty tvoří lineární soustavu dimense* 1 *obsaženou ve Φ.*

VĚTA 47.1. *Budiž φ vlastní lineární funkce bodu v prostoru $\mathbf{E}_m$. Potom existuje nadrovina ϱ tak, že $\varphi(X) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod X náleží do ϱ. Zaměření $\mathbf{W}_{m-1}$ nadroviny ϱ je nulový $(m - 1)$-směr lineární funkce vektoru f odvozené z φ.* Pravíme, že ϱ je *nulová nadrovina funkce φ.*

DŮKAZ. Nechť φ přiřazuje bodu (47.2) číslo (47.3). Ježto φ je vlastní, lze zvolit index r $(1 \leqq r \leqq m)$ tak, že $a_r \neq 0$. Budiž A bod, jehož r-tá souřadnice je rovna číslu $-a_0 : a_r$ a jehož ostatní souřadnice jsou rovny nule; podle (47.3) je $\varphi(A) = 0$. Je-li $\mathbf{W}_{m-1}$ nulový $(m - 1)$-směr lineární funkce vektoru f odvozené z φ, je $f(\mathbf{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$. Ježto $\varphi(A) = 0$, podle (47.4) je $\varphi(A + \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$, takže $\varphi(A + \mathbf{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$, t. j. $\varphi(X) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod X náleží do nadroviny $\{A; \mathbf{W}_{m-1}\}$.

VĚTA 47.2. *Budiž ϱ libovolně daná nadrovina. Potom existuje vlastní lineární funkce bodu φ tak, že ϱ je její nulová nadrovina. Množina všech takových φ spolu s nulovou funkcí bodu tvoří lineární soustavu dimense* 1 *obsaženou ve Φ.*

DŮKAZ. Lineární soustavu souřadnic (47.1) můžeme zvolit tak, že ϱ je nadrovina $\{P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\}$. Potom pro lineární funkci bodu φ platí

$\varphi(X) = 0$ pro všechny body X nadroviny ϱ tehdy a jenom tehdy, jestliže φ přiřazuje každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ číslo $\varphi(X) = a \,.\, x_m$, kde a je libovolně zvolené reálné číslo. Z toho plyne snadno správnost věty.

Smysl věty 47.2 jest, že je-li zvolena lineární soustava souřadnic (47.1), *dá se každá nadrovina ϱ početně definovat lineární rovnicí tvaru*

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 = 0, \tag{47.7}$$

při čemž aritmetický vektor

$$(a_1, \ldots, a_m) \tag{47.8}$$

je nenulový. Je-li dána nadrovina ϱ, je rovnice (47.7) určena jednoznačně až na to, že můžeme všecka čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ znásobit týmž číslem $c \neq 0$. Podle věty 47.1 obráceně každá rovnice tvaru (47.7), kde aritmetický vektor (47.8) je $\neq \mathbf{o}$, je rovnicí určité nadroviny ϱ.

Ve zbytku tohoto článku předpokládáme, že $m \geqq 2$. Budiž opět φ vlastní lineární funkce bodu, f z ní odvozená lineární funkce vektoru, ϱ nulová nadrovina funkce φ. Nadrovina ϱ je početně vyjádřena rovnicí $\varphi(X) = 0$ neboli rovnicí (47.7). Její zaměření $\mathbf{W}_{m-1}$ se skládá ze všech vektorů (46.2), pro něž platí rovnice $f(\mathbf{v}) = 0$ neboli rovnice

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = 0, \tag{47,7'}$$

která se liší od rovnice (47.7) pouze tím, že „prostý člen" a_0 je nahrazen číslem 0. Jestliže nyní od funkce φ přejdeme k funkci $\varphi + c$, kde c je libovolná konstanta, zůstane odvozená funkce f beze změny, takže zaměření $\mathbf{W}_{m-1}$ se nezmění, t. j. *nulová nadrovina σ funkce $\varphi + c$ je rovnoběžná s nulovou nadrovinou ϱ funkce φ.* Obráceně, je-li dána nadrovina σ rovnoběžná s ϱ, zvolme v σ libovolný bod B a určeme c tak, aby bylo $\varphi(B) + c = 0$. Potom je σ nulovou nadrovinou funkce $\varphi + c$. *Při přechodu od nadroviny ϱ k rovnoběžným nadrovinám se v rovnici* (47.7) *změní pouze prostý člen a_0.*

VĚTA 47.3. *Budiž ϱ nulová nadrovina vlastní lineární funkce bodu φ. Nadrovina ϱ vytíná v prostoru $\mathbf{E}_m$ dva poloprostory; jeden z nich se skládá z těch bodů X, pro něž je $\varphi(X) \geqq 0$, druhý z těch bodů X, pro něž je $\varphi(X) \leqq 0$.*

DŮKAZ. Víme, že nadrovina ϱ se skládá z těch bodů X, pro něž je $\varphi(X) = 0$. Podle článku 28 potřebujeme pouze dokázati, že jsou-li

X_1, X_2 dva různé body a je-li $\varphi(X_1) \neq 0$, $\varphi(X_2) \neq 0$, potom úsečka X_1X_2 protne nadrovinu ϱ tehdy a jenom tehdy, jestliže čísla $\varphi(X_1)$, $\varphi(X_2)$ mají opačná znamení. Ježto $\varphi(X_1) \neq 0$, $\varphi(X_2) \neq 0$, máme jednoznačně určené reálné číslo k, pro něž

$$\varphi(X_2) = k \cdot \varphi(X_1). \tag{47.9}$$

Zřejmě $k \neq 0$; máme dokázati, že $k < 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže úsečka X_1X_2 protne nadrovinu ϱ. Úsečka X_1X_2 podle článku 28 se skládá z těch bodů X, pro něž

$$X = X_1 + t(X_2 - X_1),\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

Je-li f lineární funkce vektoru odvozená z funkce φ, jest $f(X - X_1) = t \cdot f(X_2 - X_1)$ a podle (47.4) jest

$$\varphi(X) = \varphi(X_1) + f(X - X_1),$$

tedy

$$\varphi(X) = \varphi(X_1) + t \cdot f(X_2 - X_1),$$

při čemž

$$f(X_2 - X_1) = \varphi(X_2) - \varphi(X_1),$$

takže podle (47.9)

$$\varphi(X) = [1 + t(k - 1)]\, \varphi(X_1).$$

Máme tudíž dokázati, že rovnice

$$1 + t(k - 1) = 0$$

má řešení t podrobené podmínce $0 \leqq t \leqq 1$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $k < 0$. To jsme však dokázali již v článku 28 [viz (28.6')].

Věta 47.4. *Budiž* (47.1) *kartézská soustava souřadnic. Budiž* (47.7) *rovnice libovolné nadroviny* ϱ. *Potom vzdálenost* d *bodu* (47.2) *od nadroviny* ϱ *je dána vzorcem*

$$d = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0|}{|\mathbf{a}|}, \tag{47.10}$$

kde $\mathbf{a}$ *znamená vektor* (47.8).

Důkaz. Budiž $Q = [q_1, \bullet]$ pata kolmice vedené bodem X na nadrovinu ϱ, takže

(47.11) $$d = \overline{QX}.$$

Ježto bod Q leží v nadrovině ϱ, jest $a_1q_1 + \bullet + a_0 = 0$, z čehož plyne snadno

(47.12) $$a_1x_1 + \bullet + a_0 = \mathbf{a}(X - Q).$$

Mimo to směr $\{X - Q\}$ je kolmý na ϱ, takže existuje reálné číslo r tak, že

(47.13) $$X - Q = r\mathbf{a}.$$

Podle (47.11) a (47.13) je

(47.14) $$d = |r| \,.\, |\mathbf{a}|.$$

Podle (47.12) je $\mathbf{a}(X - Q) = r \,.\, \mathbf{aa}$, tedy

(47.15) $$|\mathbf{a}(X - Q)| = |r| \,.\, |\mathbf{a}|^2.$$

Podle (47.14) a (47.15) jest

$$d = \frac{|\mathbf{a}(X - Q)|}{|\mathbf{a}|},$$

z čehož podle (47.12) plyne (47.10).

Předpokládejme i nadále, že (47.1) je kartézská soustava souřadnic. Mimo to předpokládejme, že byla zvolena určitá orientace jak pro prostor $\mathbf{E}_m$ tak i pro nadrovinu $\varrho \equiv [Q; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}]$. Označme $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$ orthogonální doplněk vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$. Rovnici (47.7) naší nadroviny dostaneme, určíme-li a_0 tak, aby bylo této rovnici vyhověno souřadnicemi bodu Q. Na základě věty 35.10 se snadno odvodí, že jest

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 \geqq 0$$

v *kladném poloprostoru* vyťatém orientovanou nadrovinou ϱ.

48. LINEÁRNÍ SOUSTAVY NADROVIN. Budiž opět Φ množina všech lineárních funkcí bodu v prostoru $\mathbf{E}_m$. Víme, že Φ je vektorový prostor dimense $m + 1$, ve kterém je obsažena lineární soustava dimense 1 složená ze všech konstant. Tuto lineární soustavu konstant označme $\mathbf{K}$. O lineární soustavě Ψ obsažené ve Φ řekneme, že je *prvního druhu*, jestliže v ní není obsažena soustava $\mathbf{K}$, že je *druhého druhu*, jestliže je v ní obsažena soustava $\mathbf{K}$. Dále označme $\mathbf{N}(\Psi)$ množinu všech nulových nadrovin jednotlivých vlastních lineárních funkcí bodu φ náležejících do Ψ. Je-li dimense lineární soustavy Ψ rovna jedné, víme z článku 47, že pro $\Psi \neq \mathbf{K}$ obsahuje $\mathbf{N}(\Psi)$ jedinou nadrovinu, pro $\Psi = \mathbf{K}$ ovšem vůbec žádnou.

Budiž nyní Ψ_k $(2 \leqq k \leqq m)$ lineární soustava dimense k obsažená ve Φ. Potom pravíme, že $\mathbf{N}(\Psi_k)$ je *lineární soustava dimense* $k - 1$, a to *prvního* nebo *druhého druhu* podle toho, kterého druhu je Ψ_k. Lineární soustavu nadrovin dimense 1 nazýváme krátce *svazek nadrovin*.

Pro každou lineární funkci bodu φ označme nyní φ^* z ní odvozenou lineární funkci vektoru. Zřejmě

$$(48.1) \qquad (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*; \ (a\varphi)^* = a \, . \, \varphi^*;$$

mimo to $\varphi^* = \bar{\mathbf{o}}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže φ je konstanta.

V následujícím $\mathbf{E}_0$ znamená bod.

VĚTA 48.1. *Budiž* $\mathbf{N}(\Psi_k)$ $(2 \leqq k \leqq m)$ *lineární soustava nadrovin dimense* $k - 1$ *prvního druhu. Potom existuje lineární podprostor* $\mathbf{E}_{m-k}$ (*pro* $m = k$ *tedy bod*) *tak, že nadrovina* ϱ *náleží do* $\mathbf{N}(\Psi_k)$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\mathbf{E}_{m-k}$ *je částí* ϱ.

DŮKAZ. Věta je zřejmě správná i pro $k = 1$. Můžeme ji tedy dokázati indukcí, t. j. dokazujíce ji pro $2 \leqq k \leqq m$, můžeme předpokládat správnost obdobné věty, ve které místo k je $k - 1$. Budiž Ψ_{k-1} lineární soustava dimense $k - 1$ obsažená ve Ψ_k. Ježto Ψ_k je prvního druhu, zřejmě také Ψ_{k-1} je prvního druhu. Tedy podle indukčního předpokladu existuje lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-k+1}$ tak, že nadrovina ϱ náleží do $\mathbf{N}(\Psi_{k-1})$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\mathbf{E}_{m-k+1}$ je částí ϱ. Zvolme lineární funkci bodu ψ tak, aby náležela do Ψ_k, nikoli však do Ψ_{k-1}. Zvolme lineární soustavu souřadnic

$$(48.2) \qquad \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

tak, aby bylo

$$(48.3) \qquad \mathbf{E}_{m-k+1} = \{P; \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_m\}.$$

Pro $1 \leqq r \leqq m$ budiž φ_r ta lineární funkce bodu, která bodu

$$X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$$

přiřazuje číslo $\varphi_r(X) \doteq x_r$; mimo budiž φ_0 konstanta 1, takže $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. Ježto $\mathbf{N}(\Psi_{k-1})$ obsahuje právě ty nadroviny, které procházejí prostorem (48.3), zřejmě $\Psi_{k-1} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$, tedy $\Psi_k = \{\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$. Budiž

$$\psi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_m\varphi_m.$$

Ježto ψ nenáleží do Ψ_{k-1}, nejsou všecka čísla $a_0, a_k, \ldots, a_m$ rovná nule; kdyby byla všecka čísla $a_k, \ldots, a_m$ rovná nule, byla by $\psi - (a_1\varphi_1 + \ldots + a_{k-1}\varphi_{k-1})$ konstanta různá od nuly, což je také nemožné. Z toho plyne snadno, že nulová nadrovina σ funkce ψ není rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_{m-k+1}$, takže σ protne tento prostor v určitém $\mathbf{E}_{m-k}$. Soustava souřadnic (48.2) byla však v předcházejícím podrobena pouze podmínce (48.3). Zřejmě můžeme připojit podmínku, aby bylo

$$\sigma = \{P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\},$$

načež bude zřejmě $\psi = a_m\varphi_m$ $(a_m \neq 0)$, tedy $\Psi_k = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_m\}$, z čehož plyne snadno, že $\mathbf{N}(\Psi_k)$ obsahuje právě ty nadroviny, které obsahují prostor

$$\mathbf{E}_{m-k} = \{P; \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\}; \tag{48.4}$$

pro $m = k$ znamená tu $\mathbf{E}_0$ bod P.

VĚTA 48.2. *Budiž $2 \leqq k \leqq m$. Budiž dán lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-k}$ (pro $k = m$ tedy bod). Potom množina všech nadrovin procházejících prostorem $\mathbf{E}_{m-k}$ je lineární soustava nadrovin dimense $k - 1$ prvního druhu.*

DŮKAZ. Zvolme lineární soustavu souřadnic (48.2) tak, aby platilo (48.4); pro $m = k$ to znamená, aby $\mathbf{E}_0$ byl bod P. Potom zřejmě uvažovaná množina nadrovin je $\mathbf{N}(\Psi_k)$, $\Psi_k = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_m\}$, kde φ_r $(1 \leqq r \leqq m)$ mají týž význam jako v předcházejícím důkaze.

VĚTA 48.3. *Budiž $\mathbf{N}(\Psi_k)$ $(2 \leqq k \leqq m)$ lineární soustava nadrovin dimense $k - 1$ druhého druhu. Potom existuje $(m - k + 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-k+1}$ tak, že nadrovina ϱ náleží do $\mathbf{N}(\Psi_k)$ tehdy a jenom tehdy, jestliže její zaměření obsahuje $\mathbf{W}_{m-k+1}$.*

DŮKAZ. Budiž φ_0 konstanta rovná 1. Zřejmě ve Ψ_k jest obsažena $\Psi_{k-1} = \{\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}$ tak, že $\Psi_k = \{\varphi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}$. Zřejmě $\mathbf{N}(\Psi_k)$

obsahuje právě ty nadroviny, které jsou rovnoběžné s některou nadrovinou náležející do $\boldsymbol{N}(\Psi_{k-1})$. Avšak podle věty 48.1 (o které jsme si všimli, že je správná i pro $k = 1$), existuje lineární podprostor $\boldsymbol{E}_{m-k+1} = \{P; \boldsymbol{W}_{m-k+1}\}$ tak, že $\boldsymbol{N}(\Psi_{k-1})$ obsahuje právě ty nadroviny, jejichž částí je $\boldsymbol{E}_{m-k+1}$. Potom však $(m - k + 1)$-směr $\boldsymbol{W}_{m-k+1}$ má vlastnost ve větě vyslovenou.

VĚTA 48.4. *Buďiž* $2 \leqq k \leqq m$ *a buďiž dán* $(m - k + 1)$-*směr* $\boldsymbol{W}_{m-k+1}$. *Potom množina všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje* $\boldsymbol{W}_{m-k+1}$, *je lineární soustava nadrovin dimense* $k - 1$ *druhého druhu.*

DŮKAZ. Nechť lineární funkce bodu φ_r $(0 \leqq r \leqq m)$ mají týž význam jako při důkaze věty 48.1. Zvolíme-li lineární soustavu souřadnic (48.2) tak, aby bylo $\boldsymbol{W}_{m-k+1} = \{\boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$, zřejmě uvažovaná množina nadrovin je $\boldsymbol{N}(\Psi_k)$, kde $\Psi_k = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$.

49. DUÁLNÍ VEKTOROVÉ PROSTORY. V článku 46 jsme vedle vektorového prostoru $\boldsymbol{V}_m$ vektorů eukleidovského prostoru uvažovali ještě vektorový prostor $\boldsymbol{F}$ složený ze všech lineárních funkcí vektoru. Vzájemný vztah mezi těmito dvěma vektorovými prostory je užitečné formulovat v abstraktnějším tvaru; to je právě úkolem tohoto článku.

Buďtež dány dva vektorové prostory $\boldsymbol{V}, \bar{\boldsymbol{V}}$. Budeme značit vektory náležející do $\boldsymbol{V}$ jako obvykle tučnými písmeny, rovněž tak vektory náležející do $\bar{\boldsymbol{V}}$, ale na rozlišení budeme psát vodorovný pruh nad značkou každého vektoru prostoru $\bar{\boldsymbol{V}}$, takže na př. $\boldsymbol{u}$ znamená libovolný vektor prostoru $\boldsymbol{V}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ znamená libovolný vektor prostoru $\bar{\boldsymbol{V}}$. Nulový vektor prostoru $\boldsymbol{V}$ jako obvykle označíme $\boldsymbol{o}$; pro nulový vektor prostoru $\bar{\boldsymbol{V}}$ důsledně zavedeme označení $\bar{\boldsymbol{o}}$.

Pravíme, že prostory $\boldsymbol{V}, \bar{\boldsymbol{V}}$ jsou *duálně sdružené*, je-li dáno pravidlo d, které každé dvojici $\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}$ přiřazuje určité reálné číslo $d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})$, při čemž se předpokládá, že toto pravidlo má následující vlastnosti (49.1) až (49.6) [písmeno a ve (49.3) a (49.4) znamená libovolné reálné číslo]:

(49.1) $$d(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{u}}) = d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) + d(\boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{u}});$$

(49.2) $$d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{v}}) = d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) + d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}});$$

(49.3) $$d(a\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) = ad(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}});$$

(49.4) $$d(\boldsymbol{u}, a\bar{\boldsymbol{u}}) = ad(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}});$$

(49.5) je-li ve $\boldsymbol{V}$ dán vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, existuje ve $\overline{\boldsymbol{V}}$ vektor $\bar{\boldsymbol{u}}$ tak, že $d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) \neq 0$;

(49.6) je-li ve $\overline{\boldsymbol{V}}$ dán vektor $\bar{\boldsymbol{u}} \neq \bar{\boldsymbol{o}}$, existuje ve $\boldsymbol{V}$ vektor $\boldsymbol{u}$ tak, že $d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) \neq 0$.

Jak bylo již na počátku tohoto článku vzpomenuto, prostor $\boldsymbol{V}_m$ všech vektorů eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$ a prostor $\boldsymbol{F}$ všech lineárních funkcí vektoru dávají důležitý příklad dvojice duálně sdružených vektorových prostorů. Neboť jestliže pro libovolný vektor $\boldsymbol{v}$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$ a pro libovolnou lineární funkci vektoru f položíme $d(\boldsymbol{v}, f) = f(\boldsymbol{v})$, přesvědčíme se snadno, že vlastnosti (49.1) až (49.6) jsou splněny.

Přejděme nyní ke studiu důsledků vlastností (49.1) až (49.6). Nejprve poznamenejme, že v podmínkách (49.1) až (49.6) oba vektorové prostory $\boldsymbol{V}, \overline{\boldsymbol{V}}$ vystupují symetricky, takže je-li $\overline{\boldsymbol{V}}$ duálně sdružený k $\boldsymbol{V}$, je zároveň $\boldsymbol{V}$ duálně sdružený k $\overline{\boldsymbol{V}}$. Dále poznamenejme, že v podmínce (49.5) byl nutný předpoklad $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, ježto

$$d(\boldsymbol{o}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0 \tag{49.7}$$

pro každý $\boldsymbol{u}$. Neboť zvolíme-li v (49.1) $\boldsymbol{u}$ libovolně, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, dostaneme $d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) = d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) + d(\boldsymbol{o}, \bar{\boldsymbol{u}})$, z čehož plyne (49.7). Podobně ze (49.2) dostaneme, že

$$d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{o}}) = 0 \tag{49.8}$$

pro každý $\boldsymbol{u}$.

Je-li na př. $\boldsymbol{V}$ triviální, musí také $\overline{\boldsymbol{V}}$ býti triviální. Neboť kdyby $\overline{\boldsymbol{V}}$ nebyl triviální, existoval by $\bar{\boldsymbol{u}} \neq \bar{\boldsymbol{o}}$, takže podle (49.6) by existoval $\boldsymbol{u}$ tak, že $d(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) \neq 0$. To je však podle (49.7) nemožné, neboť ježto $\boldsymbol{V}$ je triviální, musí býti $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$.

VĚTA 49.1. *Jsou-li*

$$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \tag{49.9}$$

mezi sebou lineárně nezávislé vektory prostoru $\boldsymbol{V}$, *lze udat ve* $\overline{\boldsymbol{V}}$ *vektory*

$$\bar{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_k \tag{49.10}$$

tak, že pro $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k$ jest

$$d(\boldsymbol{u}_r, \bar{\boldsymbol{u}}_s) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } r = s, \\ 0, & \text{je-li } r \neq s. \end{cases} \tag{49.11}$$

DŮKAZ. Budiž napřed $k = 1$, t. j. ve $\mathbf{V}$ je dán jediný vektor $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$. Podle (49.5) existuje $\bar{\mathbf{u}}$ tak, že $d(\mathbf{u}_1, \bar{\mathbf{u}}) = c \neq 0$. Položíme-li $\bar{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{c} \cdot \bar{\mathbf{u}}$, potom podle (49.4) bude $d(\mathbf{u}_1, \bar{\mathbf{u}}_1) = 1$, čímž je pro $k = 1$ vše dokázáno. Důkaz nyní dokončíme indukcí. Za předpokladu, že při určitém k je věta dokázána, buďtež ve $\mathbf{V}$ dány mezi sebou lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}. \tag{49.12}$$

Potom jsou také vektory (49.9) mezi sebou lineárně nezávislé, takže existují ve $\bar{\mathbf{V}}$ vektory $\bar{\mathbf{v}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{v}}_k$ tak, že pro $1 \leq r \leq k$, $1 \leq s \leq k$

$$d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{v}}_s) = \begin{cases} 1 & \text{pro } r = s, \\ 0 & \text{pro } r \neq s. \end{cases} \tag{49.13}$$

Budiž

$$d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_s) = a_s \text{ pro } 1 \leq s \leq k \tag{49.14}$$

a položme

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_r \mathbf{u}_r. \tag{49.15}$$

Podle (49.1), (49.3), (49.13) a (49.14) bude

$$d(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{v}}_s) = 0 \text{ pro } 1 \leq s \leq k. \tag{49.16}$$

Ježto vektory (49.12) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, jest $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$, takže (podle již vyšetřovaného případu $k = 1$) existuje $\bar{\mathbf{w}}$ tak, že

$$d(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}) = 1. \tag{49.17}$$

Budiž

$$d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{w}}) = b_r \text{ pro } 1 \leq r \leq k \tag{49.18}$$

a položme

$$\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = \bar{\mathbf{w}} - \sum_{s=1}^{k} b_s \bar{\mathbf{v}}_s. \tag{49.19}$$

Podle (49.2), (49.4), (49.13), (49.18) a (49.19) jest

$$d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{u}}_{k+1}) = 0 \text{ pro } 1 \leq r \leq k; \tag{49.20}$$

podle (49.2), (49.4), (49.16), (49.17) a (49.19) jest

$$(49.21) \qquad d(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{u}}_{k+1}) = 1.$$

Podle (49.1), (49.3), (49.13), (49.15) a (49.16) jest

$$(49.22) \qquad d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_s) = a_s \text{ pro } 1 \leqq s = k;$$

podle (49.1), (49.3), (49.15), (49.20) a (49.21) jest

$$(49.23) \qquad d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_{k+1}) = 1.$$

Položme nyní

$$(49.24) \qquad \bar{\mathbf{u}}_s = \bar{\mathbf{v}}_s - a_s \bar{\mathbf{u}}_{k+1} \text{ pro } 1 \leqq s \leqq k.$$

Podle (49.2), (49.4), (49.13), (49.20) a (49.24) jest

$$(49.25) \qquad d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{u}}_s) = \begin{cases} 1 \text{ pro } r = s, \\ 0 \text{ pro } r \neq s. \end{cases}$$

Podle (49.2), (49.4), (49.22), (49.23) a (49.24) jest

$$(49.26) \qquad d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_s) = 0 \text{ pro } 1 \leqq s \leqq k.$$

Podle (49.20), (49.23), (49.25) a (49.26) platí (49.11) pro $1 \leqq r \leqq k + 1$, $1 \leqq s \leqq k + 1$, čímž je důkaz dokončen.

Poznamenejme ještě, že jestliže o vektorech (49.9) prostoru $\mathbf{V}$ a o vektorech (49.10) prostoru $\bar{\mathbf{V}}$ pro $1 \leqq r = k$, $1 \leqq s \leqq k$ platí (49.11), potom jak vektory (49.9) tak i vektory (49.10) musí býti mezi sebou lineárně nezávislé. Neboť je-li na př.

$$\bar{\mathbf{v}} = a_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \ldots + a_k \bar{\mathbf{u}}_k,$$

potom podle (49.11) je $d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{v}}) = a_r$ pro $1 \leqq r \leqq k$, takže podle (49.8) je $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{o}}$ pouze tehdy, je-li $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Podle této poznámky soudíme z dokázané věty, že lze-li ve $\mathbf{V}$ udat $k = 1, 2, 3, \ldots$ mezi sebou lineárně nezávislých vektorů, potom totéž musí platit i o $\bar{\mathbf{V}}$ a ovšem také obráceně. Z toho soudíme, že platí:

VĚTA 49.2. *Jakmile jeden z obou duálně sdružených prostorů $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$ má konečnou dimensi, platí totéž i o druhém z nich a obě dimense jsou si rovny.*

V dalším předpokládejme, že oba vektorové prostory $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$ mají konečnou dimensi $m > 0$ a označme je $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$. Jsou-li $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ duálně sdružené, lze ke každé basi

$$(49.27) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$$

prostoru $\mathbf{V}_m$ udati basi

$$(49.28) \qquad \bar{\mathbf{u}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{u}}_m$$

prostoru $\bar{\mathbf{V}}_m$ tak, že pro $1 \leqq r \leqq m$, $1 \leqq s \leqq m$ platí (49.11). Je-li potom

$$(49.29) \qquad \mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$$

libovolný vektor prostoru $\mathbf{V}$,

$$(49.30) \qquad \bar{\mathbf{v}} = y_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \ldots + y_m\bar{\mathbf{u}}_m$$

libovolný vektor prostoru $\bar{\mathbf{V}}$, jest

$$(49.31) \qquad d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = x_1y_1 + \ldots + x_my_m.$$

Ze (49.31) plyne snadno:

VĚTA 49.3. *K dané basi* (49.27) *prostoru* $\mathbf{E}_m$ *lze právě jedním způsobem udat basi* (49.28) *prostoru* $\bar{\mathbf{V}}_m$ *tak, aby platilo* (49.11). Nazveme *navzájem duální* takové dvě base (49.27), (49.28).

Zřejmě platí obráceně:

VĚTA 49.4. *Jsou-li dány dva vektorové prostory* $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ *téže konečné dimense* $m > 0$, *zvolíme-li libovolně basi* (49.27) *pro* $\mathbf{V}_m$ *a basi* (49.28) *pro* $\bar{\mathbf{V}}_m$ *a definujeme-li pro každou dvojici* (49.29), (49.30) *číslo* $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ *pomocí* (49.31), *potom platí* (49.1) *až* (49.6), *t. j.* $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ *jsou duálně sdružené.*

Jsou-li $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ duálně sdružené a je-li $\mathbf{W}$ lineární soustava obsažená ve $\mathbf{V}_m$, označme $\bar{\mathbf{W}}$ množinu všech těch vektorů $\bar{\mathbf{v}}$ prostoru $\bar{\mathbf{V}}$, pro něž je $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ pro každý vektor $\mathbf{v}$ náležející do $\mathbf{W}$. Dokážeme, že platí:

VĚTA 49.5. *Je-li* $\mathbf{W}$ *lineární soustava dimense* k, *potom* $\bar{\mathbf{W}}$ *je lineární soustava dimense* $m - k$, *kterou nazveme duálním obrazem lineární soustavy* $\mathbf{W}$. Je-li $k = 0$, je $\mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$ a podle (49.7) je $\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{V}}$; je-li $k = m$, je $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ a podle (49.6) je $\bar{\mathbf{W}} = \{\bar{\mathbf{o}}\}$. V obou případech učiněné tvrzení je správné. Je-li $0 < k < m$, zvolme libovolně basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ pro $\mathbf{W}$ a připojme další vektory $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ tak, aby vznikla base (49.27) pro $\mathbf{V}_m$; k této basi utvořme duální basi (49.28) pro $\bar{\mathbf{V}}_m$. Je-li nyní (49.30) vektor prostoru $\bar{\mathbf{V}}_m$, potom podle (49.31) jest $d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{v}}) = y_r$ pro $1 \leqq r \leqq k$, takže jestliže $\bar{\mathbf{v}}$ náleží do $\bar{\mathbf{W}}$, jest $y_1 = 0, \ldots, y_k = 0$. Obráceně, je-li tomu tak, je $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = x_{k+1}\, y_{k+1} + \ldots + x_my_m$ pro každý vektor (49.29), takže $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{v}$ náležející do $\mathbf{W}$. Tím je dokázáno, že $\overline{\boldsymbol{W}} = \{\bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_m\}$, což je skutečně lineární soustava dimense $m-k$.

Je-li opět $\boldsymbol{W}$ lineární soustava dimense k obsažená ve $\boldsymbol{V}_m$, je její duální obraz $\overline{\boldsymbol{W}}$ lineární soustavou dimense $m - k$ obsaženou ve $\overline{\boldsymbol{V}}_m$, ke které můžeme opět utvořit duální obraz $\boldsymbol{W}^*$; $\boldsymbol{W}^*$ je lineární soustava dimense k obsažená ve $\boldsymbol{V}_m$. Snadno se však zjistí, že $\boldsymbol{W}$ je částí $\boldsymbol{W}^*$ a jelikož $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}^*$ mají touž dimensi, musí býti $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}$. Z toho plyne:

VĚTA 49.6. *Duální obraz duálního obrazu lineární soustavy* $\boldsymbol{W}$ (obsažené ve $\boldsymbol{V}_m$ nebo ve $\overline{\boldsymbol{V}}_m$) *splyne s* $\boldsymbol{W}$.