VI

SHODNÉ, PODOBNÉ A AFINNÍ TRANSFORMACE

36. ZOBRAZENÍ A TRANSFORMACE. Buďtež dány množiny $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^*$ složené z libovolných prvků. *Zobrazením množiny* $\mathbf{M}$ *do množiny* $\mathbf{M}^*$ nazýváme jakékoliv pravidlo f, které každému prvku x množiny $\mathbf{M}$ přiřazuje určitý prvek množiny $\mathbf{M}^*$, který označíme $f(x)$ a nazveme *obrazem* prvku x. Je-li $\mathbf{C}$ jakákoliv část množiny $\mathbf{M}$, nazveme jejím *obrazem* a označíme $f(\mathbf{C})$ množinu obrazů všech prvků množiny $\mathbf{C}$. Zejména tedy $f(\mathbf{M})$ znamená množinu obrazů všech prvků celé množiny $\mathbf{M}$. Jestliže $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^*$, t. j. jestliže každý prvek množiny $\mathbf{M}^*$ je obrazem aspoň jednoho prvku množiny $\mathbf{M}$, pravíme, že f je zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{M}^*$.

Jsou-li $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}^{**}$ tři množiny, je-li f zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{M}^*$ a je-li g zobrazení množiny $\mathbf{M}^*$ do množiny $\mathbf{M}^{**}$, označíme $f \circ g$ a nazveme *zobrazením složeným* ze zobrazení f a g (v tomto pořadí!) to zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{M}^{**}$, při kterém

$$h(x) = g[f(x)]$$

pro každý prvek x množiny $\mathbf{M}$. Podrobněji řečeno, je-li x libovolný prvek množiny $\mathbf{M}$, je-li $y = f(x)$ obraz prvku x při zobrazení f, je-li $z = g(y)$ obraz prvku y při zobrazení g, potom z je obraz prvku x při zobrazení $f \circ g$.

Je-li f zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{M}^*$ a je-li $\mathbf{C}$ libovolná část množiny $\mathbf{M}$, nazveme *parciálním zobrazením* omezeným na $\mathbf{C}$ a označíme $f \mid \mathbf{C}$ to zobrazení množiny $\mathbf{C}$ do množiny $\mathbf{M}^*$, pro které každý prvek množiny $\mathbf{C}$ má týž obraz jako při zobrazení f. Tedy původní zobrazení f a parciální zobrazení $\varphi = f \mid \mathbf{C}$ se liší pouze tím, že obraz $f(x)$ je definován pro všecky prvky x množiny $\mathbf{M}$, kdežto obraz $\varphi(x)$ je definován pouze pro ty prvky množiny $\mathbf{M}$, které náležejí do její dané části $\mathbf{C}$; pro ta x, pro něž je definován $\varphi(x)$, je definován také $f(x)$ a jest $\varphi(x) = f(x)$.

Budiž f zobrazení množiny M *na množinu* M^*. Jestliže dva různé prvky x_1, x_2 množiny M mají vždy také různé obrazy, pravíme, že f je *prosté zobrazení* množiny M na množinu M^*. Libovolný prvek y množiny M^* je tedy obrazem právě jednoho prvku x množiny M; přiřadíme-li prvku y prvek x, obdržíme zobrazení g množiny M^* na množinu M. Je tudíž $f(x) = y$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $g(y) = x$; při tom je x prvek množiny M, y prvek množiny M^*. Zobrazení g nazveme *inversním* k zobrazení f; zřejmě g je prosté zobrazení množiny M^* na množinu M a zobrazení k němu inversní splyne s původním zobrazením f.

Jestliže každému prvku x dané množiny M přiřadíme týž prvek x, dostaneme prosté zobrazení množiny M na množinu M, které nazveme *identickým zobrazením* množiny M. Je-li f prosté zobrazení množiny M na množinu M^* a je-li g inversní zobrazení množiny M^* na množinu M, potom složené zobrazení $f \circ g$ je identické zobrazení množiny M, zobrazení $g \circ f$ pak jest identické zobrazení množiny M^*.

Budiž f libovolné zobrazení množiny M na množinu M^*. Je-li y libovolný bod množiny M^*, nazveme jeho *vzorem* při zobrazení f a označíme $f^{-1}(y)$ množinu všech těch prvků x množiny M, jejichž obrazem je prvek y, t. j. pro které platí $f(x) = y$. Je-li C^* libovolná část množiny M^*, nazveme jejím *vzorem* a označíme $f^{-1}(C^*)$ množinu všech těch prvků množiny M, jejichž obrazy náležejí do C^*. Jestliže f je *prosté zobrazení* množiny M na množinu M^*, potom pro každý prvek y množiny M^* znamená $f^{-1}(y)$ jediný prvek množiny M, který je obrazem prvku y při zobrazení inversním k zobrazení f.

Zobrazení množiny M do téže množiny M se jmenuje *transformace množiny* M. Prosté zobrazení množiny M na celou množinu M se jmenuje *regulární transformace* množiny M. Jednoduchým příkladem regulární transformace množiny M jest identické zobrazení množiny M, kterému říkáme také *identická transformace množiny* M. Je-li f regulární transformace množiny M, potom také zobrazení inversní k f je regulární transformace množiny M.

Soustava Φ transformací množiny M se nazývá *transformační grupa* množiny M, má-li tyto tři vlastnosti:

(a) každá transformace soustavy Φ je regulární;

(b) jestliže obě transformace f, g náležejí do soustavy Φ, potom také složená transformace $f \circ g$ náleží do Φ;

(c) jestliže transformace f náleží do soustavy Φ, potom také transformace inversní ke transformaci f náleží do soustavy Φ.

Je-li f libovolná regulární transformace množiny $\boldsymbol{M}$ a je-li g transformace k ní inversní, potom $f \circ g$ jest identická transformace množiny $\boldsymbol{M}$. Z toho plyne, že *každá transformační grupa* množiny $\boldsymbol{M}$ *obsahuje identickou transformaci množiny* $\boldsymbol{M}$. Jednoduchý příklad transformační grupy množiny $\boldsymbol{M}$ tvoří její *triviální transformační grupa*, která obsahuje *pouze* identickou transformaci množiny $\boldsymbol{M}$. Jiný jednoduchý příklad transformační grupy množiny $\boldsymbol{M}$ dává soustava *všech možných* transformací množiny $\boldsymbol{M}$.

Jsou-li Φ, Ψ dvě transformační grupy množiny $\boldsymbol{M}$ a jestliže každá transformace náležející do Ψ zároveň náleží do Φ, pravíme, že transformační grupa Ψ je *podgrupou* transformační grupy Φ.

37. AFINNÍ ZOBRAZENÍ EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Buďtež dány dva eukleidovské prostory $\boldsymbol{E}_m$, $\boldsymbol{E}'_n$ a zobrazení f prostoru $\boldsymbol{E}_m$ do prostoru $\boldsymbol{E}'_n$. Pravíme, že f je *afinní zobrazení*, má-li tuto vlastnost:

(37.1) Jsou-li A, B, C tři různé body prostoru $\boldsymbol{E}_m$, které leží na přímce, potom buďto splynou všecky tři body $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ nebo jsou tyto tři body navzájem různé, leží také na přímce a dělící poměry [viz článek 27, (27.6) a (27.7)]

$$(A; C, B); \quad (f(A); f(C), f(B))$$

jsou si rovny.

Afinní zobrazení f se jmenuje *regulární*, jestliže obrazy $f(X)$, $f(Y)$ dvou různých bodů X, Y prostoru $\boldsymbol{E}_m$ jsou vždy navzájem různé; f se jmenuje *singulární*, jestliže existují dva různé body A, B prostoru $\boldsymbol{E}_m$, jejichž obrazy $f(A)$, $f(B)$ splynou. Speciální případ singulárního afinního zobrazení prostoru $\boldsymbol{E}_m$ do prostoru $\boldsymbol{E}'_n$ obdržíme, jestliže obrazy *všech bodů* prostoru $\boldsymbol{E}_m$ splynou; potom mluvíme o *totálně singulárním* afinním zobrazení prostoru $\boldsymbol{E}_m$ do prostoru $\boldsymbol{E}'_n$.

Každé afinní zobrazení f (regulární nebo singulární) prostoru $\boldsymbol{E}_m$ do prostoru $\boldsymbol{E}'_n$ má především tuto vlastnost:

VĚTA 37.1. *Je-li v prostoru* E_m *bod* Z *středem dvojice bodů* X, Y, *potom je v prostoru* E'_n *bod* $f(Z)$ *středem dvojice bodů* $f(X), f(Y)$.

DŮKAZ. To je zřejmé, je-li $X = Y$; je-li však $X \neq Y$, potom X, Y, Z jsou tři různé body ležící na přímce a podle (37.1) buďto splynou všecky tři body $f(X), f(Y), f(Z)$, načež opět tvrzení je zřejmé, nebo jsou body $f(X), f(Y), f(Z)$ navzájem různé a leží na přímce. Potom je však podle (27.9)

$$(X; Z, Y) = \tfrac{1}{2}, \quad (f(X); f(Z), f(Y)) = \tfrac{1}{2}$$

a bod $f(Z)$ je středem dvojice $f(X), f(Y)$.

Stejně jako z věty 18.1 plyne věta 18.2, plyne z věty 37.1:

VĚTA 37.2. *Jestliže v prostoru* E_m *obě dvojice* $X, Y; X', Y'$ *určují týž vektor, potom také v prostoru* E'_n obě dvojice $f(X), f(Y); f(X'), f(Y')$ *určují týž vektor.*

V důsledku věty 37.2 můžeme každému vektoru $\boldsymbol{u}$ prostoru E_m jednoznačně přiřadit vektor $f(\boldsymbol{u})$ prostoru E'_n tak, že obrazem kteréhokoliv umístění vektoru $\boldsymbol{u}$ je vždy určité umístění vektoru $f(\boldsymbol{u})$.

Následující tři věty jsou zřejmé:

VĚTA 37.3. $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$.

VĚTA 37.4. *Při regulárním afinním zobrazení prostoru* E_m *do prostoru* E'_n *pro každý vektor* $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ *prostoru* E_m je také $f(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{o}$.

VĚTA 37.5. *Při regulárním afinním zobrazení prostoru* E_m *do prostoru* E'_n *pro každé dva vektory* $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ prostoru E_m je také $f(\boldsymbol{u}) \neq f(\boldsymbol{v})$.

VĚTA 37.4 a 37.5 neplatí pro singulární afinní zobrazení. Ať již f je regulární či singulární, platí zřejmě:

VĚTA 37.6. $f(-\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$.

VĚTA 37.7. $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$.

Mimo to platí pro libovolné reálné číslo a a pro libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ prostoru E_m:

VĚTA 37.8. $f(a\boldsymbol{u}) = a \,.\, f(\boldsymbol{u})$.

DŮKAZ. To je zřejmé pro $a = 1$ a plyne z věty 37.3, jestliže $a = 0$ nebo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. Budiž tedy $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $0 \neq a \neq 1$. Zvolme v prostoru E_m body

A, B tak, že $B - A = \mathbf{u}$ a položme $C = A + a\mathbf{u}$, takže $C - A = a\mathbf{u}$; tedy $f(B) - f(A) = f(\mathbf{u})$, $f(C) - f(A) = f(a\mathbf{u})$. Ježto $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, jest $A \neq B$, ježto $C = A + a\mathbf{u}$, $0 \neq a \neq 1$, jest $A \neq C \neq B$. Tedy A, B, C jsou tři různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, které leží na přímce. Potom buďto splynou všecky tři body $f(A), f(B), f(C)$, načež je $f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, $f(a\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, tudíž skutečně $f(a\mathbf{u}) = a \,.\, f(\mathbf{u})$, nebo jsou $f(A), f(B), f(C)$ tři různé body, které leží na přímce, načež

$$(f(A); f(C), f(B)) = (A; C, B). \tag{37.2}$$

Ježto $C = A + a(B - A)$, soudíme ze (37.2) podle (27.8), že $f(C) = f(A) + a(f(B) - f(A))$, t. j., že $f(C) - f(A) = a(f(B) - f(A))$ neboli $f(a\mathbf{u}) = a \,.\, f(\mathbf{u})$.

Z vět 37.7 a 37.8 plyne:

VĚTA 37.9. *Jestliže v prostoru $\mathbf{E}_m$ vektor $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, potom v prostoru $\mathbf{E}_m$ vektor $f(\mathbf{v})$ je lineární kombinací vektorů $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)$, a to s týmiž koeficienty.*

Z vět 37.3, 37.4 a 37.9 plyne dále:

VĚTA 37.10. *Je-li f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ a jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathbf{E}_m$ mezi sebou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé, potom platí totéž o vektorech $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)$ prostoru $\mathbf{E}'_n$.*

VĚTA 37.11. *Budiž $\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\rangle$ daná lineární soustava souřadnic v eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$. V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}'_n$ zvolme libovolně bod P' a vektory $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$. Je-li*

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m \tag{37.3}$$

libovolný bod prostoru $\mathbf{E}_m$, položme

$$f(X) = P' + x_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}'_m.$$

Potom je f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Zobrazení f je regulární tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

DŮKAZ. Buďtež A, B, C tři různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, které leží na přímce, takže $C = A + t(B - A)$, kde $t = (A; C, B)$ podle (27.8). Je-li $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, verifikuje se snadno, že je $C' =$

$= A' + t(B' - A')$; mimo to je zřejmě $0 \neq t \neq 1$. Je-li $A' = B'$, je také $C' = A'$; je-li však $A' \neq B'$, jsou A', B', C' tři různé body, které leží na přímce a jest $(A'; C', B') = t$ podle (27.8). Tudíž f je afinní zobrazení. Jsou-li (37.3) a

$$Y = P + y_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + y_m \mathbf{e}_m$$

dva různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, jest

$$f(Y) - f(X) = (y_1 - x_1)\, \mathbf{e}_1' + \ldots + (y_m - x_m)\, \mathbf{e}_m'.$$

Jsou-li vektory $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$ mezi sebou lineárně nezávislé, je nutně $f(X) \neq f(Y)$, t. j. zobrazení f je regulární. Jsou-li však vektory $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$ mezi sebou lineárně závislé, lze udat čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, že aspoň jedno z nich je různé od nuly a že $a_1\mathbf{e}_1' + \ldots + a_m\mathbf{e}_m' = \mathbf{o}$. Je-li potom

$$Q = P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m,$$

jest $Q \neq P$, $f(Q) = P' = f(P)$, takže zobrazení f je singulární.

VĚTA 37.12. *Každé afinní zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}_n'$ se dá vytvořit způsobem popsaným ve větě* 37.11, *při čemž lineární soustavu souřadnic*

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle \tag{37.4}$$

v prostoru $\mathbf{E}_m$ můžeme libovolně zvolit.

DŮKAZ. Podle věty 37.2 můžeme položit $\mathbf{e}_1' = f(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathbf{e}_m' = f(\mathbf{e}_m)$, načež se důkaz dokončí podle věty 37.9.

Z vět 37.11 a 37.12 plyne

VĚTA 37.13. *Je-li f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}_n'$, jest $f(\mathbf{E}_m)$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{E}_n'$, jehož dimense k je $\leq m$. Při tom je $k = m$ tehdy a jenom tehdy, jestliže zobrazení f je regulární.* Dále platí:

VĚTA 37.14. *Afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}_n'$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $n \leq m$. Regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}_n'$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $n = m$.* Mimo to je patrné, že počet afinních, resp. regulárních afinních zobrazení je nekonečně velký, neboť při dané lineární soustavě souřadnic (37.4) je jistě možné ve větě 37.11 zvolit bod P' nekonečně mnoha způsoby, nehledě na libovůli ve volbě vektorů $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$.

Následující tři věty jsou zřejmé z definice:

Věta 37.15. *Je-li f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ a je-li g afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_n$ do prostoru $\mathbf{E}''_k$, potom $f \circ g$ je afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}''_k$.*

Věta 37.16. *Je-li f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$, potom $f \circ g$ je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$.*

Věta 37.17. *Je-li f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g zobrazení k němu inversní, potom g je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$.*

Buďtež

(37.5) $\qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m;$

(37.6) $\qquad \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$

dvě base prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li nyní f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$, potom podle věty 37.9 jsou

(37.5′) $\qquad f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_m);$

(37.6′) $\qquad f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m)$

dvě base prostoru $\mathbf{E}'_m$. Z věty 37.9 plyne pro determinant přechodu definovaný na str. 79:

Věta 37.18. *Je-li f regulární afinní ~~transformace~~ zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a jsou-li* (37.5), (37.6) *dvě base prostoru $\mathbf{E}_n$ a tudíž* (37.5′), (37.6′) *dvě base prostoru $\mathbf{E}'_m$, je determinant přechodu od* (37.5) *ke* (37.6) *roven determinantu přechodu od* (37.5′) *ke* (37.6′).

Z toho plyne, že base (37.5′), (37.6′) prostoru $\mathbf{E}'_m$ jsou souhlasné nebo nesouhlasné podle toho, co platí o basích (37.5), (37.6) prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li nyní zvolena určitá orientace prostoru $\mathbf{E}_m$, je patrné, že existuje právě jedna orientace prostoru $\mathbf{E}'_m$ tak, že pro každou kladnou basi (37.5) prostoru $\mathbf{E}_m$ je také (37.5′) kladná base prostoru $\mathbf{E}'_m$. Pravíme stručně, že *při regulární afinní transformaci prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ přísluší dané orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ určitá orientace prostoru $\mathbf{E}'_m$.*

38. SHODNÁ A PODOBNÁ ZOBRAZENÍ EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Buďtež dány dva eukleidovské prostory $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}'_n$ a zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Pravíme, že f je *shodné zobrazení* prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$, jestliže vzdálenost $\overline{XY}$ dvou libovolných bodů X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$ je rovna vzdálenosti $\overline{f(X)\,f(Y)}$ jejich obrazů.

VĚTA 38.1. *Budiž f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Zobrazení f je shodné tehdy a jenom tehdy, jestliže skalární součin $\mathbf{uv}$ libovolných dvou vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$ je roven skalárnímu součinu $f(\mathbf{u})\,.\,f(\mathbf{v})$ jejich obrazů.*

DŮKAZ. Jestliže předně zobrazení f je shodné, je zřejmě $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$; z toho však plyne podle (7.7′), že $\mathbf{uv} = f(\mathbf{u})\,.\,f(\mathbf{v})$. Obráceně předpokládejme, že tato podmínka je splněna; pro $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ z ní plyne, že $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ neboli $|f(B) - f(A)| = |B - A|$, t. j. $\overline{f(A)\,f(B)} = \overline{AB}$, takže zobrazení f je shodné.

VĚTA 38.2. *Shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $f(\mathbf{E}_m)$.*

DŮKAZ. V článcích 4 až 8 jsme podali geometrické definice, založené výhradně na pojmu vzdálenosti, pro pojem vektoru, pojem součtu vektorů a pojem součinu čísla s vektorem. Z toho plyne snadno, že pro f jsou splněna tvrzení vět 37.2 a 37.9, z čehož plyne, že f se dá vytvořit způsobem popsaným ve větě 37.11, takže f je afinní podle věty 37.12. Že f je regulární, plyne ze (3.4) a (3.5).

Následující dvě věty jsou zřejmé z definice:

VĚTA 38.3. *Je-li f shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$, potom $f \circ g$ je shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$.*

VĚTA 38.4. *Je-li f shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g zobrazení k němu inversní, potom g je shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$.*

Z věty 38.1 plyne:

VĚTA 38.5. *Budiž f shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Jsou-li v prostoru $\mathbf{E}_m$ vektory*

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$$

orthonormální, potom v prostoru $\mathbf{E}'_n$ vektory

$$f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)$$

jsou také orthonormální.

Obecně platí:

Věta 38.6. *Budiž f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ a budiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ daná orthonormální base prostoru $\mathbf{E}_m$. Jestliže také vektory*

$$\mathbf{u}'_1 = f(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{u}'_m = f(\mathbf{u}_m)$$

jsou orthonormální, potom f je shodné zobrazení.

Důkaz. Je-li

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m, \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_m\mathbf{u}_m,$$

jest

$$f(\mathbf{u}) = x_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}'_m, \quad f(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_m\mathbf{u}'_m$$

a z orthonormality plyne

$$\mathbf{uv} = x_1y_1 + \ldots + x_my_m = f(\mathbf{u}) \,.\, f(\mathbf{v}),$$

takže věta následuje z věty 38.1.

Zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ nazveme *podobné*, existuje-li kladné číslo k tak, že

$$(38.1) \qquad \overline{f(X)\,f(Y)} = k \,.\, \overline{XY}$$

pro libovolné dva body X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$. Číslo k nazveme *faktorem podobnosti* zobrazení f. Zřejmě platí:

Věta 38.7. *Podobné zobrazení s faktorem podobnosti rovným jedné je shodné zobrazení a obráceně.*

Věta 38.8. *Budiž f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Zobrazení f je podobné tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje kladné číslo k tak, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ platí*

$$(38.2) \qquad f(\mathbf{u}) \,.\, f(\mathbf{v}) = k \,.\, \mathbf{uv}.$$

Číslo k je potom faktorem podobnosti zobrazení f.

Důkaz. Jestliže předně zobrazení f je podobné s faktorem podobnosti k, je zřejmé $|f(\mathbf{u})| = k|\mathbf{u}|$ pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$; z toho plyne podle (7.7′), že platí (38.2). Obráceně, platí-li (38.2), při čemž $k > 0$, plyne ze (38.2) pro $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, že $|f(\mathbf{u})| = k\mathbf{u}$ neboli $|f(Y) - f(X)| = k \,.\, |Y - X|$, t. j. platí (38.1).

VĚTA 38.9. *Podobné zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $f(\mathbf{E}_m)$.*

DŮKAZ. Budiž k faktor podobnosti zobrazení f. Zvolme libovolně bod P v prostoru $\mathbf{E}_m$ a definujme zobrazení g, h prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$ tím, že

$$g(P + \mathbf{u}) = P + k\mathbf{u},\ h(P + \mathbf{u}) = P + \frac{1}{k} \cdot \mathbf{u}$$

pro každý vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Podle věty 38.8 jsou g, h podobná zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $\mathbf{E}_m$, jejichž faktory podobnosti jsou: k pro g, $\frac{1}{k}$ pro h. Zřejmě složené zobrazení $\varphi = h \circ f$ je shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$, takže podle věty 38.2 φ je regulární afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $f(\mathbf{E}_m)$. Na druhé straně je zřejmě $f = g \circ \varphi$, takže podle věty 37.16 také f je regulární afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $f(\mathbf{E}_m)$.

Následující dvě věty jsou zřejmé:

VĚTA 38.10. *Je-li f podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ s faktorem podobnosti k_1 a je-li g podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$ s faktorem podobnosti k_2, je $f \circ g$ podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$ s faktorem podobnosti k_1k_2.*

VĚTA 38.11. *Je-li f podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ s faktorem podobnosti k a je-li g zobrazení k němu inversní, potom g je podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$ s faktorem podobnosti $1/k$.*

39. AFINNÍ TRANSFORMACE. Afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ je afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_m$; *regulární afinní transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $\mathbf{E}_m$.

Z vět 37.16 a 37.17 plyne:

VĚTA 39.1. *Množina všech regulárních afinních transformací prostoru $\mathbf{E}_m$ je transformační grupa.*

Budiž f afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li

(39.1) $$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$$

libovolná base prostoru $\mathbf{E}_m$, existují čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ tak, že

(39.2) $$f(\mathbf{u}_r) = a_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{rm}\mathbf{u}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m.$$

Položme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & \ldots, & a_{mm} \end{vmatrix}. \tag{39.3}$$

Z věty 29.4 plyne (viz též větu 37.11), že $\Delta = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže zobrazení f je singulární, takže platnost rovnice $\Delta = 0$ je nezávislá na volbě base (39.1). Snadno však zjistíme, že obecně hodnota determinantu Δ je nezávislá na volbě base (39.1), což stačí dokázati pro regulární f.

Budiž tedy

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \tag{39.4}$$

jiná base prostoru $\mathbf{E}_m$. Číslo Δ je determinant přechodu od base (39.1) k basi

$$f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_m); \tag{39.1'}$$

máme dokázati, že $\Delta = \Delta'$, kde Δ' je determinant přechodu od base (39.4) k basi

$$f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m). \tag{39.4'}$$

Označme D determinant přechodu od base (39.1) k basi (39.4); na konci článku 37 jsme viděli, že D je také determinant přechodu od base (39.1') k basi (39.4'). Avšak od base (39.1) můžeme přejít k basi (39.4') buďto tak, že přejdeme napřed od (39.1) ke (39.4) a potom od (39.4) ke (39.4'), nebo tak, že přejdeme napřed od (39.1) ke (39.1') a potom od (39.1') ke (39.4'). Tudíž determinant přechodu od (39.1) ke (39.4') je podle věty 29.8 roven jednak $D\Delta'$, jednak ΔD. Je tudíž $D\Delta' = \Delta D$ a ježto $D \neq 0$ podle věty 29.6, je $\Delta = \Delta'$. Tím je dokázáno, že číslo (39.3) nezávisí na volbě base (39.1), nýbrž pouze na afinní transformaci f; pravíme, že (39.3) je *determinant afinní transformace* f. Víme již, že platí:

VĚTA 39.2. *Determinant afinní transformace f je různý od nuly tehdy a jenom tehdy, je-li f regulární.*

Zřejmá je:

VĚTA 39.3. *Determinant identické transformace je roven jedné.*

Z věty 29.8 plyne:

VĚTA 39.4. *Buďtež* Δ_1, Δ_2 *determinanty afinních transformací* f, g *prostoru* $\mathbf{E}_m$. *Potom je* $\Delta_1\Delta_2$ *determinant afinní transformace* $f \circ g$.

VĚTA 39.5. *Budiž* f *regulární afinní transformace prostoru* $\mathbf{E}_m$ *s determinantem* Δ *a budiž* g *transformace inversní k* f. *Potom determinant transformace* g *je roven* Δ^{-1}. To plyne z vět 39.3 a 39.4, neboť zřejmě $f \circ g$ je identická transformace prostoru $\mathbf{E}_m$.

Je-li f regulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, potom podle konce článku 37 zvolené orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ přísluší určitá orientace téhož prostoru, která buďto splyne s orientací původní nebo je k ní opačná. V prvém případě pravíme, že f je *přímá afinní transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$, ve druhém, že f je *nepřímá afinní transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$. Zřejmě je tato definice nezávislá na volbě původní orientace prostoru $\mathbf{E}_m$, což plyne také snadno z toho, že jak je snadno patrné, platí:

VĚTA 39.6. *Determinant regulární afinní transformace* f *je kladný nebo záporný podle toho, zda je* f *přímá či nepřímá.*

Afinní transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$ nazveme *unimodulární*, jestliže její determinant Δ je roven ± 1; je tedy $\Delta = 1$ pro přímé unimodulární afinní transformace, $\Delta = -1$ pro nepřímé unimodulární afinní transformace.

Velmi jednoduchým zvláštním případem afinní transformace je *translace*. To je taková afinní transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$, při které obraz $f(\mathbf{u})$ libovolného vektoru $\mathbf{u}$ je totožný s původním vektorem $\mathbf{u}$. *Jsou-li* P, Q *dva dané body prostoru* $\mathbf{E}_m$, *existuje právě jedna translace* f, *při které* $f(P) = Q$. Neboť ke každému bodu X existuje právě jeden vektor $\mathbf{v}$ tak, že

$$X = P + \mathbf{v} \tag{39.5}$$

a při uvažované translaci musí býti

$$f(X) = Q + \mathbf{v}; \tag{39.5'}$$

obráceně je patrné, že rovnice (39.5), (39.5′) definují translaci f prostoru $\mathbf{E}_m$. Z definice je zřejmé, že platí:

VĚTA 39.7. *Každá translace prostoru* $\mathbf{E}_m$ *je přímá unimodulární afinní transformace prostoru* $\mathbf{E}_m$.

Následující věta jednak plyne z vět 39.4 a 39.5, jednak je zřejmá:

VĚTA 39.8. *Následující druhy afinních transformací prostoru* $\mathbf{E}_m$ *tvoří podgrupy transformační grupy všech regulárních afinních transformací prostoru* $\mathbf{E}_m$:

(a) *množina všech přímých afinních transformací;*
(b) *množina všech unimodulárních afinních transformací;*
(c) *množina všech přímých unimodulárních afinních transformací;*
(d) *množina všech translací.*

Při tom množina (d) *je podgrupou grupy* (c), *která je opět podgrupou jak grupy* (b) *tak i grupy* (a).

Všimněme si, že zvláštním případem translace je *identická transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$. Translaci různou od identické transformace nazveme *vlastní translací.* Definujeme-li *samodružný bod* S transformace f rovnicí

$$f(S) = S, \tag{39.6}$$

je patrné, že platí:

VĚTA 39.9. *Vlastní translace nemá žádný samodružný bod.*

Zobecnění pojmu samodružného bodu je pojem *samodružné množiny.* Je-li f libovolná transformace libovolné množiny $\mathbf{M}$ a je-li $\mathbf{C}$ část množiny $\mathbf{M}$, pravíme, že $\mathbf{C}$ je samodružná množina, jestliže

$$f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}. \tag{39.6'}$$

Zřejmě množina, jejíž každý bod je samodružný, je samodružná množina, ale opak neplatí už proto, že při transformaci $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}$ celá množina $\mathbf{M}$ je samodružná, ale nemusí existovat žádný samodružný bod; příklad podává věta 39.9.

40. INVOLUTORNÍ AFINNÍ TRANSFORMACE. Zvolme v prostoru $\mathbf{E}_m$ bod S. Pro každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v}$ tak, že

$$X = S + \mathbf{v}. \tag{40.1}$$

Položme

$$f(X) = S - \mathbf{v} \tag{40.1'}$$

a máme definovánu transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$ s jediným samodružným bodem S; nazveme f *středovou souměrností* a bod S *středem souměrnosti*. Zřejmě f je afinní transformace, která libovolnou basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ převádí v basi $-\mathbf{u}_1, \ldots, -\mathbf{u}_m$, takže determinant transformace f je roven $(-1)^m$. Tedy platí:

VĚTA 40.1. *Středová souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$ je unimodulární afinní transformace, která je přímá pro sudé m, nepřímá pro liché m.*

Ze (40.1) a (40.1') platí:

VĚTA 40.2. *Je-li f středová souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$ se středem souměrnosti S, potom pro každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ je bod S středem souměrnosti dvojice X, $f(X)$.*

Z definice (40.1), (40.1') je patrné, že jestliže při středové souměrnosti f je $B = f(A)$, je také $A = f(B)$. Nazveme obecně *involutorní afinní transformací* prostoru $\mathbf{E}_m$ takovou afinní transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$, která má tu vlastnost, že kdykoli $B = f(A)$, vždy je také $A = f(B)$. Identická transformace, jakož i každá středová souměrnost jsou tudíž zvláštní případy involutorních afinních transformací. Hlavním úkolem tohoto článku je určení všech involutorních afinních transformací. Napřed si dokažme jednoduchou pomocnou větu:

VĚTA 40.3. *Budiž f involutorní afinní transformace a budiž X libovolný bod. Je-li $Y = f(X)$, potom střed S dvojice X, Y je samodružný bod při transformaci f.* Neboť obraz $f(S)$ středu dvojice X, Y je podle věty 37.1 středem dvojice $f(X)$, $f(Y)$, t. j. dvojice Y, X, která má týž střed jako dvojice X, Y.

Budiž nyní f afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Označme $\mathbf{W}_h^+$ množinu všech vektorů $\mathbf{u}$, pro něž $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$; zřejmě $\mathbf{W}_h^+$ je lineární soustava, jejíž dimense budiž h. Označme dále $\mathbf{W}_k^-$ množinu všech vektorů $\mathbf{v}$, pro něž $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$; také $\mathbf{W}_k^-$ je lineární soustava, jejíž dimense budiž k. Zřejmě průnik lineárních soustav $\mathbf{W}_h^+, \mathbf{W}_k^-$ obsahuje pouze $\mathbf{o}$, takže podle článku 24 spojení obou lineárních soustav má dimensi $h + k$. Dokážeme však, že toto spojení pro involutorní f je rovné soustavě $\mathbf{V}_m$ všech vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$, takže bude

$$h + k = m. \tag{40.2}$$

Neboť budiž $\mathbf{w} = B - A$ libovolný vektor a budiž $\mathbf{w}' = f(B) - f(A)$. Ježto f je involutorní, je nejen $\mathbf{w}' = f(\mathbf{w})$, nýbrž také $\mathbf{w} = f(\mathbf{w}')$. Položíme-li

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{w} + \mathbf{w}'),\ \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{w}'),$$

jest $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, z čehož plyne správnost učiněného tvrzení a tedy i správnost vzorce (40.2).

Jestliže $k = 0$, jest $h = m$ a máme $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, t. j. f je translace a je zřejmé, že f je involutorní tehdy a jenom tehdy, je-li f identická transformace. Jestliže $h = 0$, jest $k = m$ a máme $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ pro každý vektor $\mathbf{v}$; podle věty 40.3 existuje aspoň jeden samodružný bod; je-li však S samodružný bod, platí (40.1), (40.1′), t. j. f je středová souměrnost, která, jak víme, je vždy involutorní.

Zbývá případ, že je $h > 0$, $k > 0$ a ovšem platí (40.2). Je-li

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h \tag{40.3}$$

base pro $\mathbf{W}_h^+$,

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{40.4}$$

base pro $\mathbf{W}_k^-$, potom vektory (40.3) a (40.4) dohromady tvoří basi pro $\mathbf{V}_m$. Podle věty 40.3 má f aspoň jeden samodružný bod. Zvolíme-li samodružný bod P, dostáváme lineární soustavu souřadnic

$$\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle. \tag{40.5}$$

Každý bod X má tvar

$$X = P + (x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_h\mathbf{u}_h) + (y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_k\mathbf{v}_k), \tag{40.6}$$

$$f(X) = P + (x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_h\mathbf{u}_h) - (y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_k\mathbf{v}_k). \tag{40.6′}$$

Obráceně, je-li (40.5) lineární soustava souřadnic a je-li transformace f definována pomocí (40.6), (40.6′), zřejmě f je involutorní afinní transformace, jejíž samodružné body vyplní lineární podprostor

$$\{P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\} \tag{40.7}$$

dimense h.

41. SHODNÉ A PODOBNÉ TRANSFORMACE PROSTORU $\mathbf{E}_m$.

Shodná nebo podobná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ je shodné nebo podobné zobrazení $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_m$. Podle 38.2 a 38.9 jsou tyto transformace zvláštnimi případy regulárních afinních zobrazení. Obráceně je ve větách 38.1 a 38.8 obsaženo kriterium, kdy regulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ je shodnou nebo podobnou transformací. Podle věty 38.1 (viz též věty 39.7 a 40.1) platí:

VĚTA 41.1. *Každá translace prostoru $\mathbf{E}_m$ je přímá shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$.*

VĚTA 41.2. *Každá středová souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$ je shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, a to přímá pro sudé m, nepřímá pro liché m.*

Dále platí:

VĚTA 41.3. *Shodná transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$ je unimodulární.*

DŮKAZ. Budiž $\mathbf{B}$ orthonormální base prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ její obraz při f. Determinant transformace f je (34.3) a jeho druhá mocnina je rovna determinantu (34.7), je tedy rovna jedné, neboť vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ jsou orthonormální podle věty 38.5.

Budiž nyní dáno reálné číslo $c \neq 0$, $c \neq 1$. Nazveme *homothetickou transformací* prostoru $\mathbf{E}_m$ s *koeficientem homothetie* rovným c takovou afinní transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$, při které

$$f(\mathbf{u}) = c \cdot \mathbf{u} \tag{41.1}$$

pro každý vektor $\mathbf{u}$. Zřejmě platí:

VĚTA 41.4. *Středová souměrnost je homothetická transformace s koeficientem homothetie rovným -1 a obráceně.*

Je-li f homothetická transformace s koeficientem homothetie c a jsou-li X, Y libovolné dva body, potom podle (41.1) je $f(Y) - f(X) = c(Y - X)$ a tudíž

$$\overline{f(X)\, f(Y)} = |c| \,.\, \overline{XY}.$$

Z toho plyne

VĚTA 41.5. *Homothetická transformace s koeficientem homothetie c je podobná transformace s faktorem podobnosti $|c|$.*

Ze (41.1) plyne snadno:

VĚTA 41.6. *Je-li f homothetická transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ s koeficientem homothetie c, potom determinant transformace f je roven c^m. Při sudém* *m každá homothetie je přímá podobná transformace, při lichém m je f přímá nebo nepřímá podle toho, zda $c > 0$ či $c < 0$.*

VĚTA 41.7. *Homothetická transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ má právě jeden samodružný bod.* Nazýváme jej *středem homothetie.*

DŮKAZ. Budiž φ homothetická transformace s koeficientem homothetie c. Zvolme libovolný bod P a položme $Q = \varphi(P)$. Pro každý bod X existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{u}$ tak, že

$$X = P + \boldsymbol{u} \tag{41.2}$$

a podle (41.1) je

$$\varphi(X) = Q + c\boldsymbol{u}. \tag{41.2'}$$

Bod X je samodružný tehdy a jenom tehdy, jestliže $X = \varphi(X)$, t. j. jestliže $P + \boldsymbol{u} = Q + c\boldsymbol{u}$ neboli (ježto $c \neq 1$) jestliže

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{1 - c}(Q - P).$$

VĚTA 41.8. *Budiž f podobná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ s faktorem podobnosti k. Determinant transformace f je roven $\pm k^m$.* Při tom ovšem platí znamení plus nebo minus podle toho, zda f je přímá či nepřímá.

DŮKAZ. Pro $k = 1$ je nám to známo podle věty 41.3 (viz též větu 38.7); budiž tedy $k \neq 1$. Zvolme c tak, že $|c| = k$; ježto $k \neq 1$, je zřejmě $c \neq 1$. Zvolme libovolně body P, Q a definujme transformaci φ pomocí (41.2) a (41.2'). Zřejmě φ je homothetická transformace s koeficientem homothetie c; podle věty 41.4 je φ podobná transformace s faktorem podobnosti k. Je-li ψ transformace inversní k φ a je-li $g = \psi \circ f$, je zřejmě ψ podobná transformace s faktorem podobnosti $1 : k$, takže podle vět 38.7 a 38.10 je g shodná transformace, takže determinant transformace g podle věty 41.3 je roven ± 1. Na druhé straně je zřejmě $f = \varphi \circ g$ a determinant transformace φ je podle věty 41.6 roven c^m. Podle věty 39.4 je tudíž determinant transformace f roven $\pm c^m$, t. j. roven $\pm k^m$.

V definici (41.1) homothetické transformace máme vedle podmínky $c \neq 0$ podmínku $c \neq 1$, víme však, že pro $c = 1$ podmínka (41.1) charakterisuje translaci. Jestliže nyní máme dvě transformace f_1, f_2 prostoru $\mathbf{E}_m$, při čemž pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ jest

$$f_1(\mathbf{u}) = c_1 . \mathbf{u},\ f_2(\mathbf{u}) = c_2 . \mathbf{u},$$

kde $c_1 \neq 0 \neq c_2$, a položíme-li $g = f_1 \circ f_2$, je zřejmě

$$g(\mathbf{u}) = c_1 c_2 . \mathbf{u}.$$

Mimo to, jestliže afinní transformace f splňuje podmínku (41.1), kde $c \neq 0$, potom transformace h inversní k f splňuje podmínku

$$h(\mathbf{u}) = \frac{1}{c} . \mathbf{u}.$$

Z toho plyne:

VĚTA 41.9. *Všecky translace a homothetické transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ dohromady tvoří transformační grupu, která je podgrupou transformační grupy všech podobných transformací prostoru $\mathbf{E}_m$.*

Souměrnou transformací prostoru $\mathbf{E}_m$ nazveme každou involutorní afinní transformaci, která je zároveň shodnou transformací. Snadno určíme všecky takové souměrné transformace. Z věty 38.2 plyne, že *identická transformace a všecky středové souměrnosti patří mezi souměrné transformace prostoru $\mathbf{E}_m$.* Zbývají transformace f definované rovnicemi (40.6), (40.6'), kde $h > 0$, $k > 0$, $h + k = m$. Tu platí:

VĚTA 41.10. *Mají-li $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ týž význam jako v článku* 40, *potom transformace f definovaná rovnicemi* (40.6), (40.6') *je shodná* (je to tedy souměrná transformace) *tehdy a jenom tehdy, jestliže lineární soustavy $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou navzájem totálně kolmé.*

DŮKAZ. Je-li f shodná transformace, jest $f(\mathbf{u}) . f(\mathbf{v}) = \mathbf{uv}$. Patří-li však $\mathbf{u}$ do $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{v}$ do $\mathbf{W}_k^-$, je $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$, takže $\mathbf{uv} = -\mathbf{uv}$, tedy $\mathbf{uv} = 0$, t. j. lineární soustavy $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou navzájem totálně kolmé. Obráceně předpokládejme, že lineární soustavy $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou totálně kolmé. Můžeme vektory (40.3) volit orthonormální a rovněž i vektory (40.4). Ježto $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou totálně kolmé, jsou také vektory

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$$

orthonormální a totéž platí o vektorech

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, -\mathbf{v}_1 \ldots, -\mathbf{v}_k,$$

takže transformace f je shodná podle věty 38.6.

Budiž f souměrná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ definovaná rovnicemi (40.6), (40.6') a označme ϱ prostor (40.7) jejích samodružných bodů. V krajním případě $h = m - 1$ je ϱ nadrovinou, f se nazývá *nadrovinová souměrnost*, ϱ její *nadrovina souměrnosti*. Ve druhém krajním případě $h = 1$ je ϱ přímkou, f se nazývá *osová souměrnost*, ϱ její *osa souměrnosti*. Pro $m = 2$ oba typy splynou. Pro $m = 3$, $h = 2$ mluvíme o *rovinové souměrnosti* a o její *rovině souměrnosti*.

Jsou-li A, B dva různé body, nazýváme *nadrovinou souměrnosti úsečky* AB (pro $m = 2$ *osou souměrnosti úsečky* AB, pro $m = 3$ *rovinou souměrnosti úsečky* AB) nadrovinu procházející středem dvojice A, B kolmo na přímku AB. Následující dvě užitečné věty se dají snadno dokázat:

VĚTA 41.11. *Jsou-li A, B dva různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, potom nadrovina souměrnosti úsečky AB je množina právě těch bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, jejichž vzdálenost od bodu A je rovna vzdálenosti od bodu B.*

VĚTA 41.12. *Jsou-li A, B dva různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, potom existuje právě jedna nadrovinová souměrnost f prostoru $\mathbf{E}_m$, pro kterou je $f(A) = B$; nadrovinou souměrnosti transformace f je nadrovina souměrnosti úsečky AB.*

Vraťme se k případu obecné souměrné transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$ definované rovnicemi (40.6) a (40.6') a označme opět ϱ prostor (40.7). Jestliže bod A nenáleží do ϱ, t. j. není samodružným při f, existuje právě jeden $\mathbf{E}_{h+1}$ obsahující jak A tak i ϱ. V tomto $\mathbf{E}_{h+1}$ leží také $B = f(A)$ a snadno se dokáže, že v prostoru $\mathbf{E}_{h+1}$ je ϱ nadrovinou souměrnosti úsečky AB.

Poznamenejme ještě, že involutorní afinní transformace definovaná rovnicemi (40.6), (40.6') má determinant rovný $(-1)^k$, je tedy přímá pro sudé k, nepřímá pro liché k; to platí i v krajních případech $k = 0$ (identická transformace) a $h = 0$ (středová souměrnost). Zejména nadrovinová souměrnost ($k = 1$) je vždy nepřímá shodnost; osová souměrnost ($h = 1$, tedy $k = m - 1$) je přímá shodnost pro liché m (zejména tedy v obyčejném prostoru $\mathbf{E}_3$), nepřímá pro sudé m (zejména tedy v rovině).

42. SHODNÉ TRANSFORMACE ROVINY. Budiž dána *orientovaná* rovina $\mathbf{E}_2$ a v $\mathbf{E}_2$ budiž zvolena kladná *kartézská* soustava souřadnic

$$\langle P;\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle. \tag{42.1}$$

VĚTA 42.1. *Dvojice vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jest orthonormální tehdy a jenom tehdy, jestliže existují reálná čísla* u_1, u_2 *a číslo* $\varepsilon = \pm 1$ *tak, že*

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2),\ \mathbf{v} = (-\varepsilon u_2, \varepsilon u_1), \tag{42.2}$$

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \tag{42.3}$$

Při tom dvojice (42.2) *tvoří kladnou basi pro* $\mathbf{E}_2$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\varepsilon = +1$.

DŮKAZ. Podmínky orthonormálnosti jsou

$$|\mathbf{u}| = 1,\ \mathbf{uv} = 0,\ |\mathbf{v}| = 1. \tag{42.4}$$

Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, potom prvá podmínka (42.4) je vyjádřena rovnicí (42.3). Je-li $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, potom druhá podmínka (42.4) je vyjádřena rovnicí $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$, která (ježto $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$) znamená, že existuje reálné číslo ε tak, že platí druhá rovnice (42.2). Posléze třetí podmínka (42.4) znamená, že $\varepsilon = \pm 1$. Podle (42.2) jest

$$[\mathbf{uv}] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ -\varepsilon u_2, & \varepsilon u_1 \end{vmatrix} = \varepsilon(u_1^2 + u_2^2) = \varepsilon,$$

takže $[\mathbf{uv}] > 0$ pro $\varepsilon = 1$, $[\mathbf{uv}] < 0$ pro $\varepsilon = -1$. Připomeňme si, že vektor $(-u_2, u_1)$ je orthogonální doplněk vektoru (u_1, u_2) ve smyslu článku 35 (viz větu 35.2).

VĚTA 42.2. *Je-li* f *shodná transformace roviny, existují reálná čísla* $a_1, a_2, c_1, c_2, \varepsilon$ *tak, že*

$$c_1^2 + c_2^2 = 1,\ \varepsilon = \pm 1 \tag{42.5}$$

a že obrazem libovolného bodu

$$X = [x_1, x_2] \tag{42.6}$$

je bod

$$f(X) = [x_1', x_2'], \tag{42.6'}$$

kde

$$x_1' = c_1x_1 - c_2x_2 + a_1,\ x_2' = \varepsilon(c_2x_1 + c_1x_2) + a_2. \tag{42.7}$$

Obráceně, jestliže reálná čísla a_1, a_2, c_1, c_2 *splňují podmínky* (42.5), *potom rovnice* (42.6), (42.6′) a (42.7) *definují shodnou transformaci roviny, která je přímá pro* $\varepsilon = 1$, *nepřímá pro* $\varepsilon = -1$.

Důkaz. Při dané kladné kartézské soustavě souřadnic (42.1) lze (42.6) psáti ve tvaru

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

Je-li $f(P) = P + \boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, potom podle vět 38.5 a 38.6 shodná transformace roviny převádí bod X v bod

$$f(X) = P + x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}, \tag{42.8}$$

kde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je libovolná pevně daná orthonormální dvojice vektorů, takže lze předpokládati, že platí (42.2), při čemž je splněno (42.3) a pro přímou f je $\varepsilon = 1$, pro nepřímou f je $\varepsilon = -1$. Podle (42.2) a (42.6′) lze však psáti (42.8) ve tvaru

$$x_1' = u_1x_1 - \varepsilon u_2x_2 + a_1,\ x_2' = u_2x_1 + \varepsilon u_1x_2 + a_2$$

a stačí položit $c_1 = u_1$, $c_2 = \varepsilon u_2$, abychom přešli ke tvaru (42.7).

Věta 42.3. *Je-li f přímá shodná transformace roviny, takže ve větě 42.2 je $\varepsilon = 1$, potom dvojice reálných čísel (c_1, c_2) z věty 42.2 je nezávislá na volbě kladné kartézské soustavy souřadnic* (42.1). *Při změně orientace roviny dvojice (c_1, c_2) přejde ve dvojici $(c_1, -c_2)$.*

Důkaz. Rovnice (42.7) definují obraz (42.6′) bodu (42.6) při shodné transformaci f. Je-li

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \tag{42.9}$$

libovolný vektor; je tudíž

$$f(\boldsymbol{u}) = (u_1', u_2'), \tag{42.9′}$$

kde

$$u_1' = c_1u_1 - c_2u_2,\ u_2' = \varepsilon(c_2u_1 + c_1u_2). \tag{42.10}$$

Je-li shodná transformace f přímá, jest $\varepsilon = 1$, takže rovnice (42.10) mají tvar

$$u_1' = c_1u_1 - c_2u_2,\ u_2' = c_2u_1 + c_1u_2. \tag{42.11}$$

Při tom podle (42.5) je

(42.5′) $$c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Ze (42.9), (42.9′), (42.11) a (42.5′) plyne jednak

(42.12) $$\boldsymbol{u} \,.\, f(\boldsymbol{u}) = u_1 u_1' + u_2 u_2' = c_1,$$

jednak

(42.13) $$[\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{u})] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ u_1', & u_2' \end{vmatrix} = c_2.$$

Avšak skalární součin (42.12) je nezávislý na volbě kartézské soustavy souřadnic (42.1), a pokud tato soustava je kladná, platí totéž o vnějším součinu (42.13), který podle věty 34.7 se znásobí číslem -1 při změně orientace roviny. Tím je vše dokázáno.

Místo dvojice reálných čísel (c_1, c_2), o které je řeč ve větě (42.3), je výhodné zavésti *komplexní číslo*

(42.14) $$c = c_1 + \mathrm{i}c_2,$$

které se jmenuje *komplexní míra* přímé shodné transformace f. *Při dané orientaci roviny* má tedy komplexní míra (42.14) jednoznačně určenou hodnotu. Naproti tomu *při změně orientace roviny komplexní míra c přímé shodné transformace f se podle věty* 42.3 *nahradí komplexním číslem*

(42.14′) $$c^* = c_1 - \mathrm{i}c_2$$

komplexně sdruženým s číslem (42.14).

Absolutní hodnotou komplexního čísla $c_1 + \mathrm{i}c_2$ rozumíme, jak známo, číslo

$$|c_1 + \mathrm{i}c_2| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Komplexní jednotkou nazveme komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné. Z věty 42.2 snadno plyne:

VĚTA 42.4. *Komplexní míra přímé shodné transformace roviny je komplexní jednotka. Obráceně zvolíme-li libovolně komplexní jednotku j a dva body P, Q v rovině, existuje právě jedna přímá shodná transformace f roviny, při které $f(P) = Q$ a jejíž komplexní míra je rovna j.*

VĚTA 42.5. *Jsou-li f', f'' dvě přímé shodné transformace roviny, je také $f' \circ f''$ přímá shodná transformace roviny, jejíž komplexní míra je rovna součinu komplexních měr transformací f', f''.*

DŮKAZ. Buďtež

$$c' = c_1' + ic_2', \ c'' = c_1'' + ic_2''$$

komplexní míry transformací f', f''. Z vět 39.4 a 39.6 následuje, že také $g = f' \circ f''$ je přímá shodná transformace roviny $\mathbf{E}_2$. Podle věty 42.2 a podle (42.9′) a (42.11) máme

$$f'(\mathbf{e}_1) = (c_1', c_2'), \ f'(\mathbf{e}_2) = (-c_2', c_1'),$$
$$f''(c_1', c_2') = (c_1''c_1' - c_2''c_2', c_2''c_1' + c_1''c_2'),$$

tedy

$$(42.15) \qquad g(\mathbf{e}_1) = (c_1''c_1' - c_2''c_2', c_2''c_1' + c_1''c_2').$$

Na druhé straně, je-li $c_1 + ic_2$ komplexní míra transformace g, je podle (42.9′) a (42.11)

$$(42.15') \qquad g(\mathbf{e}_1) = (c_1, c_2).$$

Podle (42.15) a (42.15′) je

$$c_1 = c_1''c_1' - c_2''c_2', \ c_2 = c_2''c_1' + c_1''c_2'$$

neboli

$$c_1 + ic_2 = (c_1' + ic_2')(c_1'' + ic_2'').$$

VĚTA 42.6. *Přímá shodná transformace roviny s komplexní měrou rovnou jedné je translace a obráceně.*

DŮKAZ. f je translace tehdy a jenom tehdy, jestliže $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, tedy podle (42.9), (42.9′) a (42.10) tehdy a jenom tehdy, jestliže $\varepsilon = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ neboli jestliže $\varepsilon = 1$, $c_1 + ic_2 = 1$.

Přímá shodná transformace roviny, jejíž komplexní míra je různá od jedné, se jmenuje *rotace*. Podle věty 42.6 *jsou právě dva druhy přímých shodných transformací roviny: translace a rotace.*

VĚTA 42.7. *Každá rotace roviny má právě jeden samodružný bod.* Tento bod se jmenuje *střed rotace.*

DŮKAZ. Podle (42.7), kde nyní $\varepsilon = 1$, je bod (42.6) samodružný tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$(42.16) \qquad x_1 = c_1x_1 - c_2x_2 + a_1, \ x_2 = c_2x_1 + c_1x_2 + a_2.$$

Rovnice (42.16) lze shrnout v jedinou komplexní rovnici

$$(42.16') \qquad x_1 + ix_2 = (c_1 + ic_2)(x_1 + ix_2) + (a_1 + ia_2).$$

Ježto $c_1 + ic_2 \neq 1$, má (42.16′) právě jedno řešení

$$x_1 + ix_2 = \frac{a_1 + ia_2}{1 - (c_1 + ic_2)}.$$

VĚTA 42.8. *Přímá shodná transformace roviny s komplexní měrou rovnou minus jedné je středová souměrnost a obráceně.* Jsou tedy středové souměrnosti v rovině zvláštním případem rotace roviny.

DŮKAZ. f je středová souměrnost tehdy a jenom tehdy, jestliže $f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, tedy podle (42.9), (42.9′) a (42.10) tehdy a jenom tehdy, jestliže $\varepsilon = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ neboli $\varepsilon = 1$, $c_1 + ic_2 = -1$.

VĚTA 42.9. *Je-li f nepřímá shodná transformace roviny, existují dva orthonormální vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.*

DŮKAZ. Rovnice (42.10), ve kterých nyní $\varepsilon = -1$, definují obraz (42.9′) vektoru (42.9) při f. V poněkud jiném označení máme, že pro

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2),\ f(\mathbf{w}) = (w_1', w_2')$$

jest

$$w_1' = c_1 w_1 - c_2 w_2,\quad -w_2' = c_2 w_1 + c_1 w_2$$

neboli

$$w_1' - iw_2' = (c_1 + ic_2)(w_1 + iw_2). \tag{42.17}$$

Určeme nyní komplexní číslo $u_1 + iu_2$ tak, aby byla splněna komplexní rovnice

$$(u_1 + iu_2)^2 = c_1 - ic_2. \tag{42.18}$$

Ježto $|c_1 - ic_2| = 1$, jest $|u_1 + iu_2| = 1$ neboli

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \tag{42.19}$$

což lze též psáti

$$(u_1 + iu_2)(u_1 - iu_2) = 1.$$

Tudíž

$$u_1 - iu_2 = \frac{u_1 + iu_2}{(u_1 + iu_2)^2} = \frac{u_1 + iu_2}{c_1 - ic_2}.$$

Ježto však $|c_1 + ic_2| = 1$, je $(c_1 - ic_2)(c_1 + ic_2) = 1$, takže

$$u_1 - iu_2 = (c_1 + ic_2)(u_1 + iu_2). \tag{42.20}$$

Znásobíme-li obě strany číslem i, dostaneme ještě

$$(42.20') \qquad u_2 + iu_1 = (c_1 + ic_2)(-u_2 + iu_1).$$

Položíme-li

$$(42.21) \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \ \mathbf{v} = (-u_2, u_1)$$

a porovnáme-li (42.20), (42.20') se (42.17), dostaneme, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Mimo to podle (42.19) a (42.21) je $|\mathbf{u}| = 1$, $|\mathbf{v}| = 1$, $\mathbf{uv} = 0$.

Ke konci článku 41 jsme si povšimli m. j. toho, že *mezi nepřímé shodné transformace roviny patří zejména všecky osové souměrnosti v rovině.* Je-li f taková osová souměrnost a p její osa souměrnosti, je zřejmě každý bod přímky p samodružný při f a obráceně každý při f samodružný bod leží na p. Obráceně platí:

Věta 42.10. *Jestliže nepřímá shodná transformace f roviny má aspoň jeden samodružný bod P, potom f je osová souměrnost.*

Důkaz. Podle věty 42.9 lze určit orthonormální vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Ježto $f(P) = P$, vidíme, že pro libovolný bod

$$X = P + x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$$

jest

$$f(X) = P + x_1\mathbf{u} - x_2\mathbf{v}.$$

Tedy f je osová souměrnost s osou v přímce $\{P; \mathbf{u}\}$.

43. PŘÍMÉ PODOBNÉ TRANSFORMACE ROVINY. Jako v článku 42 budiž dána orientovaná rovina $\mathbf{E}_2$ a v ní kladná kartézská soustava souřadnic (42.1).

Věta 43.1. *Je-li f podobná transformace roviny, existují reálná čísla $a_1, a_2, c_1, c_2, \varepsilon$ tak, že*

$$(43.1) \qquad \varepsilon = \pm 1, \ |c_1| + |c_2| > 0$$

a že obrazem libovolného bodu

$$(43.2) \qquad X = [x_1, x_2]$$

je bod

$$(43.2') \qquad f(X) = [x'_1, x'_2],$$

kde

$$(43.3) \qquad x'_1 = c_1x_1 - c_2x_2 + a_1, \ x'_2 = \varepsilon(c_2x_1 + c_1x_2) + a_2.$$

Obráceně, jestliže reálná čísla $a_1, a_2, c_1, c_2, \varepsilon$ *splňují podmínky* (43.1), *potom rovnice* (43.2), (43.2′) *a* (43.3) *definují podobnou transformaci roviny, jejímž faktorem podobnosti je číslo*

$$(43.4) \qquad k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

a která je přímá pro $\varepsilon = 1$, *nepřímá pro* $\varepsilon = -1$.

DŮKAZ. Budiž g homothetie roviny se středem P a s koeficientem homothetie rovným faktoru podobnosti k dané podobné transformace f; budiž h homothetie roviny s týmž středem P a s koeficientem homothetie rovným $1 : k$. Budiž $\varphi = h \circ f$; ježto zřejmě g, h jsou navzájem inversní, je $f = g \circ \varphi$. Podle vět 38.7, 38.10 a 41.5 je φ shodná transformace roviny, podle vět 39.4 a 41.6 je φ přímá nebo nepřímá stejně jako f. Obrazem bodu (43.2) při g je bod

$$(43.5) \qquad [kx_1, kx_2].$$

Ježto $f = g \circ \varphi$, je obraz (43.2′) bodu (43.2) při f totožný s obrazem bodu (43.5) při φ; tudíž podle věty 42.2 existují reálná čísla $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ tak, že

$$(43.6) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$$

a že

$$x_1' = \gamma_1 . kx_1 - \gamma_2 . kx_2 + a_1, \quad x_2' = \varepsilon(\gamma_2 . kx_1 + \gamma_1 . kx_2) + a_2,$$

při čemž $\varepsilon = 1$, je-li f přímá, $\varepsilon = -1$, je-li f nepřímá. Položíme-li $c_1 = \gamma_1 k$, $c_2 = \gamma_2 k$, dostaneme (43.3) a (43.4).

Obráceně, jestliže obrazem bodu (43.2) při f je bod (43.2′), pro který platí (43.3), při čemž je splněno (43.1), definujme k pomocí (43.4) a určeme γ_1, γ_2 tak, že $c_1 = k\gamma_1$, $c_2 = k\gamma_2$, takže podle (43.4) platí (43.6). Označme φ transformaci, která bod (43.2) převádí v bod $[x_1'', x_2'']$, kde

$$x_1'' = \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 + a_1, \quad x_2'' = \varepsilon(\gamma_2 x_1 + \gamma_1 x_2) + a_2.$$

Podle věty 42.2 je φ shodná transformace roviny, přímá pro $\varepsilon = 1$, nepřímá pro $\varepsilon = -1$. Zřejmě však $f = g \circ \varphi$, jestliže opět g je homothetie roviny se středem P a s koeficientem homothetie rovným k, takže podle vět 38.7, 38.10 a 41.5 f je podobná transformace s faktorem podobnosti k, která podle vět 39.4 a 41.6 je přímá nebo nepřímá stejně jako φ, t. j. je přímá pro $\varepsilon = 1$, nepřímá pro $\varepsilon = -1$.

VĚTA 43.2. *Je-li f přímá podobná transformace roviny, takže ve větě* 43.1 je $\varepsilon = 1$, *potom dvojice reálných čísel* (c_1, c_2) *z věty* 43.1 *je nezávislá na volbě kladné kartézské soustavy souřadnic* (42.1). *Při změně orientace roviny dvojice* (c_1, c_2) *přejde ve dvojici* $(c_1, -c_2)$. Tato věta se odvodí z věty 43.1 stejně jako jsme odvodili větu 42.3 z věty 42.2. Místo dvojice reálných čísel (c_1, c_2) zavedeme opět komplexní číslo

$$c = c_1 + ic_2, \tag{43.7}$$

které zase nazveme *komplexní měrou* přímé podobné transformace f. Zřejmě platí:

VĚTA 43.3. *Je-li c komplexní míra přímé podobné transformace roviny, potom* $|c|$ *je její faktor podobnosti.*

Z věty 43.1 snadno plyne:

VĚTA 43.4. *Zvolíme-li libovolně komplexní číslo* $c \neq 0$ *a dva body* P, Q *v rovině, existuje právě jedna přímá podobná transformace f roviny, při které* $f(P) = Q$ *a jejíž komplexní míra je rovna c.*

VĚTA 43.5. *Jsou-li* f', f'' *dvě přímé podobné transformace roviny, je také* $f' \circ f''$ *přímá podobná transformace roviny, jejíž komplexní míra je rovna součinu komplexních měr transformací* f', f''. Tato věta se odvodí z věty 43.1 stejně jako jsme odvodili větu 42.5 z věty 42.2.

VĚTA 43.6. *Každá přímá podobná transformace roviny, která není translací, má právě jeden samodružný bod,* který se jmenuje *střed podobnosti*. Důkaz je stejný jako u věty 42.7.

VĚTA 43.7. *Je-li f přímá podobná transformace roviny s faktorem podobnosti* $k \neq 1$ *a středem podobnosti* P, *jest* $f = g \circ \varphi$, *při čemž g je homothetie se středem P a s koeficientem k,* φ *je rotace se středem P.* Důkaz je obsažen v začátku důkazu věty 43.1. Ježto P je nyní samodružný bod, je φ rotace se středem P.

44. SHODNÉ TRANSFORMACE PROSTORU $\mathbf{E}_m$ PŘI LIBOVOLNÉM m. V článku 36 jsme definovali transformaci $f \circ g$ množiny $\mathbf{M}$ složenou ze dvou transformací f, g téže množiny. Obecněji můžeme definovat *transformaci*

$$f_1 \circ \ldots \circ f_k \tag{44.1}$$

složenou z libovolného počtu k transformací $f_1, \ldots, f_k$ pomocí rekurentního vzorce

$$f_1 \circ \ldots \circ f_{k+1} = (f_1 \circ \ldots \circ f_k) \circ f_{k+1}.$$

Pro $k = 1$ (44.1) znamená prostě f. Pro skládání transformací zřejmě platí asociativní zákon. V tomto článku dokážeme mimo jiné, že každá shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ se dá vytvořit skládáním nadrovinových souměrností. Je-li ϱ libovolná nadrovina, označíme v tomto článku symbolem

$$s(\varrho) \tag{44.2}$$

tu nadrovinovou souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$, jejíž nadrovinou souměrnosti je nadrovina ϱ.

VĚTA 44.1. *Budiž f taková shodná transformace, že existuje nadrovina ϱ, jejíž každý bod je samodružný při f. Potom buďto f je identická transformace nebo f je nadrovinová souměrnost* (44.2).

DŮKAZ. Předpokládejme, že existuje bod, který není samodružný při f. Je-li A kterýkoli takový bod, máme dokázati, že jeho obraz B je zároveň jeho obrazem při (44.2), t. j. [viz též větu 41.12], že ϱ je nadrovina souměrnosti úsečky AB. Označme P patu kolmice na nadrovinu ϱ vedenou bodem A. Podle článku 33 P je ten bod nadroviny ϱ, jehož vzdálenost od bodu A je nejmenší; ježto všechny body nadroviny ϱ jsou samodružné, ježto $B = f(A)$ a ježto vzdálenosti se nemění při transformaci f, je P také ten bod nadroviny ϱ, jehož vzdálenost od bodu B je nejmenší, t. j. P je pata kolmice na nadrovinu ϱ vedené bodem B. Jsou tedy obě přímky PA, PB kolmé na ϱ a musí tudíž splynout, t. j. přímka AB je kolmá na nadrovinu ϱ. Mimo to je $\overline{AP} = \overline{BP}$, takže P je střed dvojice A, B. Tudíž ϱ je nadrovina souměrnosti úsečky AB, což jsme měli dokázat.

VĚTA 44.2. *Jestliže shodná transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$ má více než jeden samodružný bod, potom množina všech samodružných bodů je lineární podprostor.*

DŮKAZ. Zvolme samodružný bod P. Je-li X samodružný bod a je-li

$$X = P + \boldsymbol{u}, \tag{44.3}$$

je zřejmě $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$. Obráceně, je-li $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, je (44.3) samodružný bod. Označme $\boldsymbol{W}$ množinu těch vektorů $\boldsymbol{u}$, pro něž $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$. Z vět 37.7 a 37.8 plyne snadno, že $\boldsymbol{W}$ je (zřejmě netriviální) lineární soustava; množinou všech samodružných bodů je zřejmě lineární podprostor $\{P; \boldsymbol{W}\}$.

VĚTA 44.3. *Budiž f shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Potom existuje nadrovina ϱ tak, že*

$$f = s(\varrho) \circ \varphi, \tag{44.4}$$

při čemž φ je shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, která má aspoň jeden samodružný bod. Má-li f sama samodružný bod P, lze volit φ tak, aby existovala přímka samodružných bodů pro φ obsahující bod P. Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_h$ $(1 \leqq h \leqq m - 2)$, jehož všecky body jsou samodružné pro f, lze volit φ tak, aby existoval $\mathbf{E}_{h+1}$ složený z bodů samodružných pro φ a obsahující daný $\mathbf{E}_h$ jako část.

DůKAZ. Věta je sice správná i pro případ, že f je identická transformace, ale důkaz provedeme pouze pro ten případ, že existuje bod A, jehož obraz $B = f(A)$ je různý od A. Budiž ϱ nadrovina souměrnosti úsečky AB. Je-li X samodružný bod pro f, je zřejmě $\overline{AX} = \overline{BX}$, takže X leží v ϱ podle věty 41.11. Položme

$$\varphi = f \circ s(\varrho). \tag{44.5}$$

Ježto $s(\varrho)$ je involutorní transformace, odvodí se snadno ze (44.5), že platí (44.4). Je-li bod X samodružný pro f, leží X v ϱ a je tudíž samodružný i pro $s(\varrho)$ a tedy podle (44.5) také pro φ. Mimo to je však podle věty 41.12 také bod A samodružný pro φ, čímž je vše dokázáno, všimneme-li si věty 44.2.

VĚTA 44.4. *Každou shodnou transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$ lze napsati ve tvaru*

$$f = s(\varrho_1) \circ \ldots \circ s(\varrho_k),$$

při čemž je $k \leqq m + 1$. Má-li f samodružný bod, lze předpokládati $k \leqq m$. Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_h$ $(1 \leqq h \leqq m - 1)$, jehož všechny body jsou samodružné, lze předpokládati $k \leqq m - h$.

DůKAZ. Identickou transformaci lze napsat ve tvaru $s(\varrho) \circ s(\varrho)$ při libovolné volbě nadroviny ϱ. Tento případ je v dalším vyloučen. Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-1}$ složený ze samodružných bodů, je naše věta správná podle věty 44.1. Předpokládáme-li však, že naše věta je správná za předpokladu, že existuje $\mathbf{E}_{h+1}$ $(1 \leqq h \leqq m - 2)$ složený ze samodružných bodů, plyne z věty 44.3, že zůstane správná i za předpokladu, že existuje $\mathbf{E}_h$ složený ze samodružných bodů. Z toho plyne indukcí, že věta je správná za předpokladu, že existuje více než jeden samodružný bod (viz větu 44.2). Novým užitím věty 44.3 plyne potom, že naše věta je správná i v případě jediného samodružného bodu a další užití věty 44.3 vede posléze ke správnosti naší věty i pro případ, že neexistuje samodružný bod. Z provedeného důkazu je patrné, že je správný ještě tento dodatek:

VĚTA 44.5. *Jestliže f není identická transformace, ale má aspoň jeden samodružný bod, zůstane věta 44.4 v platnosti, připojíme-li požadavek, aby nadroviny $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ procházely všemi samodružnými body.*

Všimneme si případu $m = 3$ obyčejného prostoru. Každá shodná transformace f prostoru $\mathbf{E}_3$ se dá podle věty 44.4 složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností a má-li f aspoň jeden samodružný bod, dá se f složit z nejvýše tří rovinových souměrností, při čemž podle věty 44.5 lze dociliti toho, aby příslušné roviny souměrnosti obsahovaly každý samodružný bod. Nyní rovinová souměrnost je nepřímá shodná transformace a z věty 39.4 (viz též větu 39.6) soudíme snadno, že totéž platí i o transformaci složené ze tří rovinových souměrností. Tudíž *každá shodná přímá transformace f obyčejného prostoru $\mathbf{E}_3$, která má samodružný bod P, se dá psát ve tvaru*

$$f = s(\varrho_1) \circ s(\varrho_2),$$

při čemž roviny ϱ_1, ϱ_2 obě procházejí bodem P. To platí i v případě identické transformace, ve kterém je $\varrho_1 = \varrho_2$. Jinak je však $\varrho_1 \neq \varrho_2$ a obě roviny ϱ_1, ϱ_2, majíce společný bod P, se protnou v přímce p. Každý bod přímky p je samodružný jak při $s(\varrho_1)$ tak i při $s(\varrho_2)$ a tudíž také při f. Na druhé straně plyne z vět 44.1 a 44.2, že přímka p vyčerpává celou množinu samodružných bodů. Nazveme-li *rotací v prostoru* $\mathbf{E}_3$ přímou shodnou transformaci f prostoru $\mathbf{E}_3$, která není identickou a má aspoň jeden samodružný bod, vidíme, že množina samodružných bodů rotace v prostoru $\mathbf{E}_3$ je přímka, která se nazývá *osa rotace.*

45. AFINNÍ A METRICKÁ GEOMETRIE EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. V kapitole I jsme provedli studium prostoru E_m vycházejíce od pojmu vzdálenosti dvou bodů. Na tento pojem vzdálenosti jsme převedli řadu dalších základních pojmů, zejména pojem vektoru, pojem sčítání vektorů, pojem součinu čísla s vektorem a pojem skalárního součinu dvou vektorů. Jelikož tyto pojmy jsou definovatelné pomocí pouhého pojmu vzdálenosti, je patrné, že to jsou pojmy *invariantní při shodných transformacích*, neboť shodné transformace byly právě definovány tou vlastností, že vzdálenost dvou bodů se při nich nemění. Shodné transformace jsou však zvláštními případy regulárních afinních transformací a ukazuje se, že velká řada námi studovaných pojmů jsou pojmy *invariantní při všech regulárních afinních transformacích*, netoliko při transformacích shodných.

Studium takových pojmů v prostoru E_m, které jsou invariantní při regulárních afinních transformacích tvoří t. zv. *afinní geometrii* prostoru E_m. Skoro celý obsah naší kapitoly III náleží do afinní geometrie prostoru E_m. Naproti tomu studium takových pojmů v prostoru E_m, které nejsou invariantní při všech regulárních afinních transformacích, nýbrž pouze při shodných transformacích, tvoří t. zv. *metrickou geometrii* prostoru E_m. Celý obsah naší kapitoly V náleží do metrické geometrie prostoru E_m.

Základními pojmy afinní geometrie prostoru E_m jsou pojem vektoru, pojem sčítání vektorů a pojem součinu čísla s vektorem. Na tyto základní pojmy jsme převáděli všecky ostatní pojmy z afinní geometrie prostoru E_m. Při studiu afinní geometrie jsme užívali obecných lineárních soustav souřadnic, protože pojem takových soustav souřadnic je invariantní při všech regulárních afinních transformacích. V metrické geometrii přistupuje k uvedeným základním pojmům jako další ještě pojem skalárního součinu dvou vektorů a při studiu metrické geometrie je výhodné užívat kartézských soustav souřadnic, ve kterých má skalární součin zvláště jednoduchý tvar.

Do afinní geometrie řadíme také studium těch pojmů, které jsou invariantní pouze při *přímých* afinních transformacích. Nejdůležitější z takových pojmů je pojem orientace eukleidovského prostoru. Podobně řadíme do metrické geometrie také studium těch pojmů, které jsou invariantní pouze při přímých shodných transformacích. Sem patří zejména v obyčejném prostoru pojem vnějšího součinu tří vektorů a pojem vektorového součinu dvou vektorů. Ve skutečnosti je ovšem pojem vnějšího součinu tří vektorů v $\mathbf{E}_3$ a obecněji pojem vnějšího součinu m vektorů v $\mathbf{E}_m$ invariantní nejen při přímých shodných transformacích, nýbrž při všech přímých unimodulárních afinních transformacích a dá se tudíž jeho studium řadit do afinní geometrie.