IV

ÚSEČKY, POLOPROSTORY, ORIENTACE

26. USPOŘÁDANÉ MNOŽINY. Budiž **M** libovolná množina, o které budeme předpokládat, že obsahuje aspoň dva různé prvky. *Uspořádat množinu* **M** znamená udat pravidlo, podle kterého se rozhodne, zda prvek A je či není *před* prvkem B. Toto pravidlo je libovolné až na to, že musí splňovat tři podmínky:

(a) je-li prvek A před prvkem B, potom není prvek B před prvkem A;

(b) není-li ani prvek A před prvkem B ani prvek B před prvkem A, jest $A = B$, t. j. oba symboly A, B znamenají týž prvek množiny **M**;

(c) je-li prvek A před prvkem B a zároveň prvek B před prvkem C, je také prvek A před prvkem C.

Z vlastnosti (a) plyne, že je-li prvek A před prvkem B, je nutně $A \neq B$. Je-li však $A \neq B$, potom podle vlastností (b) nastane právě jedna ze dvou možností: „A je před B", „B je před A".

Jestliže prvek A je před prvkem B, pravíme, že prvek B je *za* prvkem A.

Pravíme, že A je *první* prvek množiny **M**, jestliže pro každý prvek $X \neq A$ množiny **M** platí, že A je před X. Pravíme, že A je *poslední* prvek množiny **M**, jestliže pro každý prvek $X \neq A$ množiny **M** platí, že X je před A. Je zřejmé, že uspořádaná množina **M** má buďto jediný nebo nemá vůbec žádný první prvek, a že rovněž **M** má buďto jediný nebo nemá vůbec žádný poslední prvek.

Množina **M** může býti uspořádána různými způsoby. Je-li uspořádána podle jednoho pravidla, obdržíme — jak se snadno dokáže — nové uspořádání, řekneme-li, že v novém smyslu je A před B tehdy a jenom tehdy, jestliže v původním smyslu je A za B. Nové uspořádání se nazývá *inversní* k původnímu; obě uspořádání jsou *navzájem* inversní.

Budiž $\boldsymbol{M}$ libovolná množina a $\boldsymbol{N}$ libovolná její část, při čemž $\boldsymbol{N}$ (a tím spíše $\boldsymbol{M}$) má aspoň dva prvky. Každé pravidlo, které uspořádává množinu $\boldsymbol{M}$, uspořádává zároveň i množinu $\boldsymbol{N}$; mluvíme-li v následujícím o uspořádání části $\boldsymbol{N}$ uspořádané množiny $\boldsymbol{M}$, máme vždy na mysli právě ono uspořádání množiny $\boldsymbol{N}$, které je určeno daným uspořádáním množiny $\boldsymbol{M}$.

Je-li $\boldsymbol{M}$ uspořádaná množina, je účelné přiřadit každé dvojici A, B prvků množiny $\boldsymbol{M}$ určité číslo rovné 0 nebo 1 nebo -1, které nazveme *znamením* dvojice A, B a označíme $\operatorname{sgn}(A, B)$:*)

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(A, B) &= 0, && \text{je-li } A = B; \\ \operatorname{sgn}(A, B) &= 1, && \text{je-li } A \text{ před } B; \\ \operatorname{sgn}(A, B) &= -1, && \text{je-li } A \text{ za } B. \end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že číslo $\operatorname{sgn}(A, B)$ má následující tři vlastnosti:

(α) $\operatorname{sgn}(A, B) = 0$ pro $A = B$,
$\operatorname{sgn}(A, B) = \pm 1$ pro $A \neq B$;

(β) $\operatorname{sgn}(B, A) = -\operatorname{sgn}(A, B)$;

(γ) je-li $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$ a zároveň $\operatorname{sgn}(B, C) = 1$, je také $\operatorname{sgn}(A, C) = 1$.

Obráceně se snadno přesvědčíme, že je-li každé dvojici A, B prvků množiny $\boldsymbol{M}$ přiřazeno číslo $\operatorname{sgn}(A, B)$ tak, že platí (α), (β), (γ), obdržíme uspořádání množiny $\boldsymbol{M}$, definujeme-li, že „A před B“ znamená $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$.

Velmi důležitým příkladem uspořádané množiny je množina $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel. Jsou-li a, b reálná čísla, definujeme, že „a před b“ znamená $a < b$ neboli $b > a$. Dospíváme takto k určitému uspořádání množiny $\boldsymbol{R}$, které můžeme nazvat jejím *vzestupným uspořádáním.* Při inversním uspořádání množiny $\boldsymbol{R}$, které můžeme nazvat jejím *sestupným uspořádáním*, „a před b“ znamená naopak $a > b$ neboli $b < a$. Při vzestupném uspořádání je zřejmě

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(a, b) &= 0 && \text{tehdy a jenom tehdy, je-li } b - a = 0; \\ \operatorname{sgn}(a, b) &= 1 && \text{tehdy a jenom tehdy, je-li } b - a > 0; \\ \operatorname{sgn}(a, b) &= -1 && \text{tehdy a jenom tehdy, je-li } b - a < 0. \end{aligned}$$

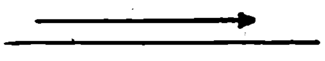
*) Latinské slovo signum značí česky znamení.

Vše, co bylo právě řečeno, vztahuje se ovšem nejen na množinu $\mathbf{R}$ *všech* reálných čísel, nýbrž i na libovolnou část $\mathbf{M}$ množiny $\mathbf{R}$ (obsahující aspoň dva různé prvky), t. j. na množinu $\mathbf{M}$ složenou z reálných čísel (ale ne nutně ze všech reálných čísel) obsahující aspoň dvě reálná čísla, na př. na množinu všech racionálních čísel.

Budiž $\mathbf{M}$ libovolná uspořádaná množina a buďtež A, B dva různé dané její prvky. O prvku X množiny $\mathbf{M}$ pravíme, že leží *mezi* A a B, jestliže buďto je A před X a zároveň X před B (tedy A před B) nebo je B před X a zároveň X před A (tedy B před A). Je zřejmé, že leží-li X mezi A a B vzhledem k danému uspořádání množiny $\mathbf{M}$, leží X mezi A a B také vzhledem k inversnímu uspořádání množiny $\mathbf{M}$. Jestliže mezi dvěma různými prvky A, B množiny $\mathbf{M}$ neleží žádný prvek množiny $\mathbf{M}$, pravíme, že dvojice A, B tvoří *skok* uspořádané množiny $\mathbf{M}$. Pravíme, že množina $\mathbf{M}$ je *hustě uspořádaná*, nejsou-li v ní žádné skoky. Vzestupně (nebo sestupně) uspořádaná množina všech reálných čísel nemá žádné skoky; rovněž vzestupně (nebo sestupně) uspořádaná množina všech racionálních čísel nemá žádné skoky.

Budiž opět $\mathbf{M}$ libovolná uspořádaná množina. Budiž dáno rozdělení množiny $\mathbf{M}$ na dvě neprázdné části $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, tak, že každý prvek množiny $\mathbf{M}_1$ leží před každým prvkem množiny $\mathbf{M}_2$, při čemž množina $\mathbf{M}_1$ nemá žádný poslední prvek a množina $\mathbf{M}_2$ nemá žádný první prvek. Takové rozdělení množiny $\mathbf{M}$ se nazývá *mezera* v uspořádané množině $\mathbf{M}$. Budiž na př. $\mathbf{M}$ vzestupně uspořádaná množina všech racionálních čísel a budiž α určité iracionální číslo, na př. $\alpha = \sqrt{2}$. Budiž $\mathbf{M}_1$ množina všech racionálních čísel menších než α, $\mathbf{M}_2$ množina všech racionálních čísel větších než α. Vznikne mezera v množině $\mathbf{M}$ všech racionálních čísel a dá se ukázati, že takovým způsobem vznikne *každá* mezera ve vzestupně uspořádané množině všech racionálních čísel. Je-li však $\mathbf{M}$ vzestupně uspořádaná množina všech reálných čísel, dá se ukázati, že v $\mathbf{M}$ neexistuje vůbec žádná mezera.

27. ORIENTACE PŘÍMKY. Z nejelementárnější geometrie je známo, že bod může přímku probíhat ve dvou navzájem opačných smyslech (viz obr. 3, ve kterém jeden z obou smyslů je naznačen šipkou). Tento názorný fakt budeme nyní formulovat algebraicky.



Obr. 3.

Budiž dána přímka $\mathbf{E}_1$. Zvolme v $\mathbf{E}_1$ libovolnou lineární soustavu souřadnic. Jsou-li $\mathbf{u} = (u)$, $\mathbf{v} = (v)$ dva nenulové vektory na naší přímce, jsou obě čísla u, v různá od nuly a jsou možné dva případy. Jestliže čísla u, v mají totéž znamení (obě jsou kladná nebo obě jsou záporná), řekneme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou *souhlasné*. Jestliže však čísla u, v mají opačná znamení (jedno z nich je kladné a druhé záporné), řekneme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou *nesouhlasné*. Zřejmě existuje reálné číslo $c \neq 0$ tak, že $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$; je patrné, že $c > 0$, jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ souhlasné, $c < 0$, jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nesouhlasné. Z toho plyne, že pojem souhlasnosti a nesouhlasnosti vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je nezávislý na volbě soustavy souřadnic.

Zřejmě můžeme všechny nenulové vektory na přímce $\mathbf{E}_1$ rozdělit na dvě třídy tak, že dva vektory téže třídy jsou vždy navzájem souhlasné, dva vektory různých tříd jsou vždy navzájem nesouhlasné. *Orientovat přímku* $\mathbf{E}_1$ znamená vybrat vektory jedné z obou tříd a nazvat je *kladné vektory*; vektory druhé z obou tříd jsou potom *záporné vektory*. Zřejmě jsou možné právě dvě různé orientace přímky $\mathbf{E}_1$; pravíme, že jsou navzájem *opačné*. Orientace přímky $\mathbf{E}_1$ je jednoznačně určena, jestliže zvolíme libovolně vektor $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$ a rozhodneme, zdali $\mathbf{e}$ je kladný či záporný vektor. Rozhodneme-li, že $\mathbf{e}$ je kladný vektor, mluvíme o *orientaci určené vektorem* $\mathbf{e}$; opačná orientace je určena vektorem $-\mathbf{e}$. Je-li $\langle P; \mathbf{e} \rangle$ lineární soustava souřadnic na přímce $\mathbf{E}_1$, potom při orientaci určené vektorem $\mathbf{e}$ kladné vektory mají kladné souřadnice (a záporné vektory záporné souřadnice); pravíme, že tato orientace je *příslušná* dané lineární soustavě souřadnic.

Budiž dána *orientovaná přímka* $\mathbf{E}_1$, t. j. budiž dána přímka $\mathbf{E}_1$ a určitá její orientace. Jsou-li A, B dva různé body přímky $\mathbf{E}_1$, budiž $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$, je-li vektor $B - A$ kladný, $\operatorname{sgn}(A, B) = -1$, je-li vektor $B - A$ záporný; splynou-li oba body A, B, je $B - A = \mathbf{o}$ a položíme $\operatorname{sgn}(A, B) = 0$. Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny vlastnosti (α), (β), (γ) vyslovené v článku 26 na str. 69, takže máme definováno určité uspořádání, které nazveme *příslušným* dané orientaci přímky $\mathbf{E}_1$. Ježto přímku $\mathbf{E}_1$ lze orientovat dvěma navzájem opačnými způsoby, jsou dvě uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$ jim příslušná; nazýváme je *přirozená uspořádání přímky* $\mathbf{E}_1$; obě přirozená uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$ zřejmě jsou navzájem *opačná*.

Orientovaná přímka $\mathbf{E}_1$ má jediné přirozené uspořádání, totiž to, které je příslušné dané orientaci. Je-li $\langle P; \mathbf{e}\rangle$ lineární soustava souřadnic na přímce $\mathbf{E}_1$, potom přirozené uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$ příslušné té její orientaci, která je příslušná soustavě $\langle P; \mathbf{e}\rangle$, nazveme krátce přirozeným uspořádáním příslušným soustavě $\langle P; \mathbf{e}\rangle$. Snadno se dokáže, že při tomto uspořádání *bod* $[x]$ *leží před bodem* $[y]$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže souřadnice* x *je menší než souřadnice* y.

Je-li přímka $\mathbf{E}_1$ jedním z obou možných způsobů orientována, můžeme zavésti pojem *orientované vzdálenosti* dvou bodů A, B, kterou označíme $\overrightarrow{AB}$. Orientovaná vzdálenost je definována vzorcem

$$\overrightarrow{AB} = \pm \overline{AB}, \tag{27.1}$$

kde pro $A \neq B$ platí znamení plus nebo minus podle toho, zda vektor $B - A$ je kladný či záporný; je-li $A = B$, je $\overline{AB} = 0$ a na znamení ve (27.1) nezáleží.

Je-li na přímce $\mathbf{E}_1$ zavedena lineární soustava souřadnic $\langle P; \mathbf{e}\rangle$, potom při orientaci příslušné soustavě $\langle P; \mathbf{e}\rangle$ je zřejmě pro $A = [a]$, $B = [b]$:

$$\overrightarrow{AB} = (b - a) \,.\, |\mathbf{e}|, \tag{27.2}$$

speciálně pro *kartézskou* soustavu souřadnic:

$$\overrightarrow{AB} = b - a. \tag{27.2'}$$

Ze vzorce (27.2) snadno odvodíme, že pro libovolné tři body A, B, C na přímce $\mathbf{E}_1$ platí:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{27.3}$$

Obecněji platí pro libovolně velký počet bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na orientované přímce p:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}. \tag{27.4}$$

Poznamenejme ještě, že vždy jest

$$\overrightarrow{BA} = - \overrightarrow{AB}. \tag{27.5}$$

Je třeba míti dobře na paměti, že pojem orientované vzdálenosti dvou bodů na přímce je definován pouze pro *orientovanou* přímku.

Přejdeme-li k opačné orientaci přímky, potom orientovaná vzdálenost změní znamení.

Jsou-li A, B, C tři různé body na přímce $\mathbf{E}_1$, potom číslo

$$(27.6) \qquad \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$$

je zřejmě nezávislé na volbě orientace přímky $\mathbf{E}_1$; číslo (27.6) nazveme *dělicím poměrem* bodů A, C, B (v tomto pořadí) a označíme je

$$(27.7) \qquad (A; C, B).$$

Tedy dělicí poměr (27.7) je definován tehdy a jenom tehdy, jsou-li A, B, C tři různé body ležící na téže přímce a je dán vzorcem (27.6), ve kterém nezáleží na volbě orientace přímky.

Poznámka 1. Je-li $A \neq B$, $C = A + t(B - A)$, $0 \neq t \neq 1$, jsou A, B, C tři různé body, které leží na přímce. V lineární soustavě souřadnic $\langle A; B - A\rangle$ je $A = [0]$, $B = [1]$, $C = [t]$, takže podle (27.2) jest

$$(27.8) \qquad (A; C, B) = t.$$

Poznámka 2. Je-li $A \neq B$, je zřejmě C střed dvojice A, B tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$(27.9) \qquad (A; C, B) = \tfrac{1}{2}.$$

28. ÚSEČKY, POLOPŘÍMKY, POLOPROSTORY. Jsou-li dány v eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ dva různé body A, B, nazveme *úsečkou* AB neboli *úsečkou* BA tu část přímky AB, která se skládá z bodu A, z bodu B a z těch dalších bodů X přímky AB, které při jejím přirozeném uspořádání leží mezi body A a B. Jsou sice dvě přirozená uspořádání přímky AB, ale jsou navzájem opačná, takže definice úsečky AB je nezávislá na tom, kterého z obou užijeme. Pravíme, že A, B jsou *krajní body* úsečky AB; každý jiný bod úsečky AB je *vnitřní* bod úsečky AB. Je-li na přímce AB zavedena lineární soustava souřadnic, ve které $A = [a]$, $B = [b]$, potom úsečka AB v případě $a < b$ je množina těch bodů $[x]$ přímky AB, pro něž $a \leqq x \leqq b$; v případě $a > b$ je úsečka AB množina těch $[x]$, pro něž $b \leqq x \leqq a$. Z toho je patrné, že jestliže dvě úsečky splynou, musí krajní body jedné splynout s krajními body druhé. Dále je patrné, že je-li C vnitřní bod úsečky AB, potom úsečka AB se skládá z obou úseček AC, BC, které mimo společný krajní bod C nemají jiného společného bodu.

Snadno najdeme početní vyjádření úsečky AB, jsou-li A, B dva různé body eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Částí prostoru $\mathbf{E}_m$ je přímka AB, na které je $\langle A; B - A \rangle$ lineární soustava souřadnic. V této soustavě je $X = [t]$, je-li

(28.1) $X = A + t(B - A)$. Speciálně je $A = [0]$, $B = [1]$ a tudíž

úsečka AB je množina těch bodů (28.1), pro něž ve (28.1) jest

$$0 \leqq t \leqq 1. \tag{28.2}$$

Tedy *střed dvojice A, B leží na úsečce AB*; obdržíme jej ve tvaru (28.1) pro $t = \frac{1}{2}$.

Jsou-li A, B, C tři body prostoru $\mathbf{E}_m$, víme z článku 3, že platí trojúhelníková nerovnost

$$\overline{AC} + \overline{BC} \geqq \overline{AB}; \tag{28.3}$$

porovnáme-li (3.24) a (3.23) se (28.1) a (28.2), vidíme, že *pro $A \neq B$ platí v trojúhelníkové nerovnosti* (28.3) *znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, je-li C bod úsečky AB.*

Zvolme nyní na dané přímce $\mathbf{E}_1$ libovolně bod C. Jsou-li $A \neq C$, $B \neq C$ dva další body přímky $\mathbf{E}_1$, řekneme, že *body A, B jsou na přímce* $\mathbf{E}_1$ od sebe *odděleny bodem C*, jestliže je $A \neq B$ a mimo to bod C náleží do úsečky AB. (Ježto $A \neq C$, $B \neq C$, je potom C vnitřním bodem úsečky AB.) Z definice úsečky AB je patrné, že body A, B jsou na přímce $\mathbf{E}_1$ od sebe odděleny bodem C tehdy a jenom tehdy, jestliže bod C leží mezi body A, B, což opět znamená, že oba vektory

$$C - A, \; C - B$$

jsou nenulové a navzájem nesouhlasné. Z toho plyne, že všecky body $X \neq C$ naší přímky $\mathbf{E}_1$ můžeme rozdělit na dvě třídy tak, že dva body téže třídy nejsou a dva body různých tříd jsou na přímce $\mathbf{E}_1$ od sebe odděleny bodem C. *Polopřímkou s počátkem C* nazveme tu část přímky $\mathbf{E}_1$, která se skládá z bodu C a ze všech bodů jedné z obou právě popsaných tříd; každý bod $X \neq C$ polopřímky s počátkem C nazveme *vnitřním bodem* této polopřímky. Máme tedy na přímce $\mathbf{E}_1$ právě dvě polopřímky s počátkem C, které dohromady vyplní celou přímku $\mathbf{E}_1$, a které mimo bod C nemají jiného společného bodu. Takové dvě polopřímky se společným počátkem se jmenují navzájem *opačné*. Jsou-li C, A dva různé body přímky $\mathbf{E}_1$, potom *polopřímka* CA je ta polopřímka, která má počátek C a která mimo to obsahuje bod A. Je-li B kterýkoli jiný bod polopřímky CA, potom polopřímka CA splyne s polopřímkou CB.

Jsou-li C, A dva různé body eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$, potom přímka CA se skládá ze všech bodů X prostoru $\mathbf{E}_m$, které jsou tvaru

$$X = C + t(A - C). \tag{28.4}$$

Je tedy $X - C = t(A - C)$ a vektory $X - C$, $A - C$ jsou souhlasné tehdy a jenom tehdy, jestliže číslo t je kladné. Tedy polopřímka CA je množina všech těch bodů tvaru (28.4), pro něž je $t \geqq 0$; opačná polopřímka je množina všech těch bodů tvaru (28.4), pro něž je $t \leqq 0$.

Je-li CA libovolná polopřímka s počátkem C, potom zřejmě máme právě jedno přirozené uspořádání přímky CA, při kterém je C *prvním* bodem polopřímky CA; polopřímka CA se skládá z bodu C a ze všech těch dalších bodů přímky CA, které jsou za bodem C. O tomto přirozeném uspořádání přímky CA pravíme, že je *určeno* polopřímkou CA. Také o orientaci přímky CA, ke které je příslušné toto přirozené uspořádání, pravíme, že je *určena* polopřímkou CA. Zřejmě orientace přímky CA určená polopřímkou CA jest orientace určená vektorem $A - C$.

Budiž nyní v eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ dána nadrovina $\mathbf{E}_{m-1}$. Jsou-li A, B dva body prostoru $\mathbf{E}_m$, z nichž žádný neleží v nadrovině $\mathbf{E}_{m-1}$, pravíme, že *body* A, B *jsou od sebe odděleny nadrovinou* $\mathbf{E}_{m-1}$, jestliže je $A \neq B$ a mimo to úsečka AB protne nadrovinu $\mathbf{E}_{m-1}$, t. j. má s ní společný bod, který je nutně vnitřním bodem úsečky AB, protože ani A ani B nenáleží do $\mathbf{E}_{m-1}$. Dokážeme, že množinu všech bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, které nenáležejí do nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$, můžeme rozdělit na dvě třídy tak, že dva body téže třídy nejsou a dva body různých tříd jsou od sebe odděleny nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$. Je-li $m = 1$, potom nadrovina $\mathbf{E}_{m-1}$ je bod a správnost učiněného tvrzení je nám již známa. Budiž tedy $m \geqq 2$. Označme $\mathbf{V}_m$ zaměření prostoru $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{V}_{m-1}$ zaměření prostoru $\mathbf{E}_{m-1}$. Podle věty 13.1 můžeme udat vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$, $\mathbf{u}$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$ tvoří basi pro $\mathbf{V}_{m-1}$, vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}$ basi pro $\mathbf{V}_m$. Zvolme ještě libovolně bod C v nadrovině $\mathbf{E}_{m-1}$. Potom každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ lze právě jedním způsobem napsat ve tvaru

$$X = C + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_{m-1}\mathbf{u}_{m-1} + x\mathbf{u}, \tag{28.5}$$

při čemž bod X náleží do $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $x = 0$. Ty body (28.5), které nenáležejí do $\mathbf{E}_{m-1}$, t. j. ty, pro něž je $x \neq 0$, rozdělme do dvou tříd tak, že v prvé třídě je $x > 0$, ve druhé $x < 0$. Dokážeme, že takto definované třídy mají žádanou vlastnost. Budiž tedy

$$A = C + a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{m-1}\mathbf{u}_{m-1} + a\mathbf{u},$$
$$B = C + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_{m-1}\mathbf{u}_{m-1} + b\mathbf{u},$$

kde $A \neq B$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Máme dokázati, že úsečka AB protne nadrovinu $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $ab < 0$. Avšak úsečka AB je množina všech bodů tvaru

$$X = A + t(B - A), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

a bod tohoto tvaru náleží do $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$a + t(b - a) = 0, \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{28.6}$$

Ježto $a \neq 0$, $b \neq 0$, lze položit $b = ka$, kde $k \neq 0$ a napsat (28.6) ve tvaru

$$1 + t(k - 1) = 0, \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{28.6'}$$

Máme dokázat, že tehdy a jenom tehdy, je-li $k < 0$, lze určit t tak, aby platilo (28.6′). Je-li $k < 0$, je $1 - k > 1$ a (28.6′) platí pro $t = 1 : (1 - k)$. Není-li $k < 0$, je buďto $k = 1$ nebo $k > 1$ nebo $0 < k < 1$. Je-li $k = 1$, je zřejmě (28.6′) nemožné. Je-li $k > 1$, potom pro $t \geqq 0$ je $1 + t(k - 1) \geqq 1$ a (28.6′) je opět nemožné. Je-li $0 < k < 1$, potom $1 + t(k - 1) = 0$ platí pouze pro $t = 1 : (1 - k) > 1$ a (28.6′) je zase nemožné.

Dokázali jsme, že množinu všech bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, které nenáležejí do nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$, lze rozdělit na dvě třídy tak, že dva body A, B, z nichž žádný nenáleží do $\mathbf{E}_{m-1}$, jsou od sebe odděleny nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, je-li každý z nich v jiné z obou tříd. Nazveme *poloprostorem vyťatým nadrovinou* $\mathbf{E}_{m-1}$ množinu složenou ze všech bodů nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$ a ze všech bodů jedné z obou našich tříd. Jsou tedy právě dva poloprostory vyťaté nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$, které dohromady vyplní celý prostor $\mathbf{E}_m$. Body společné oběma poloprostorům vyplní nadrovinu $\mathbf{E}_{m-1}$, kterou nazveme *hranicí* obou poloprostorů. Bod, který neleží v $\mathbf{E}_{m-1}$, náleží do právě jednoho z obou poloprostorů; pravíme, že je jeho *vnitřním bodem.*

Z předcházejícího je patrné, že jestliže vektor $\mathbf{u}$ neleží v $\mathbf{E}_{m-1}$, potom každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru

$$X = X_0 + x\mathbf{u}, \tag{28.7}$$

kde X_0 je bod nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$. Jeden z obou poloprostorů vyťatých nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ je množina všech těch bodů tvaru (28.7), pro něž je $x \geqq 0$, druhý množina těch, pro něž $x \leqq 0$.

Pro $m = 1$ pojem poloprostoru vyťatého nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ splývá s pojmem polopřímky s počátkem v bodě $\mathbf{E}_{m-1}$. Pro $m = 2$ nadrovina $\mathbf{E}_{m-1}$ je přímkou a místo slova poloprostor užíváme slova *polorovina.* Pro $m = 3$ nadrovina $\mathbf{E}_{m-1}$ je rovinou.

29. DETERMINANT PŘECHODU. Pojem orientace přímky jsme zavedli v článku 27; nyní provedeme přípravu, na jejímž základě zavedeme v článku 30 pojem orientace prostoru $\mathbf{E}_m$ pro $m \geqq 2$. Při tom budeme předpokládati, že čtenář zná z algebry definici a nejjednodušší vlastnosti determinantů, ačkoli pojem orientace by se dal zavésti také nezávisle na pojmu determinantu, který je však i jinak v analytické geometrii důležitý.

Předpokládejme nejprve, že v prostoru $\mathbf{E}_m$ je dána určitá base

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \tag{29.1}$$

kterou stručně označme $\mathbf{B}$. Je-li dáno libovolných m vektorů

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \tag{29.2}$$

potom existují a jsou jednoznačně určena reálná čísla $a_{11}, \ldots, a_{1m}, \ldots, a_{mm}$ tak, že

$$\mathbf{v}_r = a_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{rm}\mathbf{u}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m. \tag{29.3}$$

Sestavíme determinant

$$(29.4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mm} \end{vmatrix}$$

a označíme jej

$$(29.5)\qquad [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}}.$$

Pro $m = 1$ je (29.3) jediná rovnice $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u}_1$ a symbol (29.5) pro $m = 1$ znamená číslo a. V dalším textu článku předpokládáme $m \geqq 2$.

Předpokládajíce, že base $\mathbf{B}$ je pevně zvolena, vyslovíme čtyři jednoduché věty o závislosti čísla (29.5) na vektorech (29.2), které jsou bezprostředním důsledkem nejjednodušších vlastností determinantů:

VĚTA 29.1. *Při permutaci vektorů* (29.2) *číslo* (29.5) *zůstane nezměněno nebo se znásobí číslem* -1 *podle toho, zda provedená permutace je sudá či lichá.*

VĚTA 29.2. *Jestliže jeden z vektorů* (29.2) *znásobíme číslem a, také číslo* (29.5) *se znásobí číslem a.*

VĚTA 29.3. *Budiž* $\mathbf{v}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ jeden z vektorů (29.2). *Je-li*

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r' + \mathbf{v}_r'' + \ldots,$$

potom číslo (29.5) *je rovné součtu těch čísel, která vzniknou, nahradíme-li vektor* $\mathbf{v}_r$ *postupně jednotlivými vektory* $\mathbf{v}_r', \mathbf{v}_r'', \ldots$

VĚTA 29.4. *Číslo* (29.5) *je rovné nule tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory* (29.2) *jsou mezi sebou lineárně závislé.*

Dosud jsme předpokládali, že base (29.1) byla pevně zvolena. Přistoupíme ke studiu otázky, jak se změní výraz (29.5) při změně base $\mathbf{B}$.

VĚTA 29.5. *Jsou-li* $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ *dvě base prostoru* $\mathbf{E}_m$, *existuje reálné číslo c* [závislé na basích $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$, ale ne na vektorech (29.2)] *tak, že pro každou volbu vektorů* (29.2) *jest*

$$(29.6)\qquad [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}} = c \,.\, [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}'}.$$

DŮKAZ. Přechod od jedné base ke druhé se dá podle věty 12.7 vždy rozložit na několik elementárních změn. Tyto elementární změny base jsou tří typů (a), (b), (c) vyjmenovaných na str. 35. Stačí tedy dokázat, že (29.6) platí pro každou elementární změnu base. Že tomu tak je, plyne opět z nejjednodušších vlastností determinantů. Elementární změna typu (a) je permutace vektorů (29.1), která se projeví v permutaci sloupců determinantů (29.4), takže platí (29.6), při čemž $c = 1$ pro sudou permutaci, $c = -1$ pro lichou permutaci. Při elementární změně typu (b) je mezi vektory (29.1) jeden $\boldsymbol{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, který se nahradí vektorem $\boldsymbol{u}'_r = a\boldsymbol{u}_r$, kde $a \neq 0$. V determinantu (29.4) je potom třeba r-tý sloupec znásobit číslem $1 : a$, takže platí (29.6), při čemž $c = a$. Při elementární změně typu (c) je mezi vektory (29.1) jeden $\boldsymbol{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, který se nahradí vektorem $\boldsymbol{u}'_r = \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{w}$, kde $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinace vektorů (29.1); v determinantu (29.4) zůstane r-tý sloupec beze změny a ke každému jinému sloupci se přičte určitý násobek r-ho sloupce, takže platí (29.6), při čemž $c = 1$.

V definici výrazu (29.5) se předpokládá, že vektory (29.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, kdežto o vektorech (29.2) jsme takový předpoklad neučinili. Jsou-li však vektory (29.2) mezi sebou lineárně závislé, je výraz (29.5) podle věty 29.4 vždy roven nule. Proto se omezíme na ten případ, že nejen vektory (29.1), nýbrž i vektory (29.2) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Výraz (29.5) nazveme potom *determinantem přechodu od base* (29.1) *k basi* (29.2). Z věty 29.4 plyne:

VĚTA 29.6. *Determinant přechodu je vždy různý od nuly.*

Z definice je zřejmé:

VĚTA 29.7. *Determinant přechodu od base k téže basi je vždy roven jedné.*

VĚTA 29.8. *Jsou-li* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ *tři base prostoru* $\mathbf{E}_m$, *je determinant přechodu od base* $\mathbf{B}$ *k basi* $\mathbf{B}''$ *roven součinu determinantu přechodu od base* $\mathbf{B}$ *k basi* $\mathbf{B}'$ *s determinantem přechodu od base* $\mathbf{B}'$ *k basi* $\mathbf{B}''$.

DŮKAZ. Budiž (29.1) base $\mathbf{B}$, (29.2) base $\mathbf{B}'$,

$$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \tag{29.7}$$

base $\mathbf{B}''$. Podle věty 29.5 existuje takové c, že

$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}} = c \,.\, [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}'},$$
$$[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m]^{\mathbf{B}} = c \,.\, [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m]^{\mathbf{B}'}.$$

Avšak podle věty 29.7 je $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}'} = 1$, takže $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}} = c$, tedy

$$[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]^{B} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{B} \cdot [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]^{B'},$$

což jsme měli dokázat.

30. ORIENTACE EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Budiž zvolena pomocná base $\mathbf{B}$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Zaveďme tuto definici: Dvě base (29.2), (29.7) nazveme *souhlasné*, jestliže determinanty přechodu

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{B}, \; [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]^{B}, \tag{30.1}$$

které jsou podle věty 29.6 různé od nuly, jsou buďto oba kladné nebo oba záporné; base (29.2), (29.7) nazveme *nesouhlasné*, jestliže z obou determinantů přechodu (30.1) je jeden kladný a druhý záporný. Při tom nezáleží na volbě pomocné base $\mathbf{B}$, neboť z věty 29.8 plyne:

VĚTA 30.1. *Base $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ jsou souhlasné, jestliže determinant přechodu od base $\mathbf{B}'$ k basi $\mathbf{B}''$ je kladný, nesouhlasné, je-li tento determinant záporný.*

Z definice je patrné, že všecky base prostoru $\mathbf{E}_m$ můžeme rozdělit na dvě třídy tak, že dvě base téže třídy jsou vždy navzájem souhlasné, dvě base různých tříd navzájem nesouhlasné. Pro $m = 1$ base se skládá z jediného nenulového vektoru, takže pro $m = 1$ se vracíme k definici souhlasnosti a nesouhlasnosti dvou nenulových vektorů na přímce vyslovené již v článku 27. Pro $m \geqq 2$ je třeba míti na paměti, že podle věty 29.1 třída base závisí na pořadí vektorů, z nichž je base složena. Nyní definujeme dále (pro $m = 1$ v souhlase s definicí článku 27): *Orientovat prostor* $\mathbf{E}_m$ znamená vybrat jednu z obou tříd a base této třídy nazvat *kladné base* prostoru $\mathbf{E}_m$; base druhé třídy jsou potom *záporné base*. Existují tedy právě dvě orientace prostoru $\mathbf{E}_m$; pravíme, že jsou navzájem *opačné*. Orientace prostoru $\mathbf{E}_m$ je jednoznačně určena, jestliže zvolíme libovolně jednu basi

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \tag{30.2}$$

a rozhodneme, zda je kladná či záporná. Rozhodneme-li, že base (30.2) je kladná, mluvíme o *orientaci určené basí* (30.2). Je-li

$$\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle \tag{30.3}$$

lineární soustava souřadnic, potom při dané orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ ji nazveme *kladnou* nebo *zápornou* podle toho, zda base (30.2) je kladná či záporná. Orientace *příslušná* soustavě (30.3) je ta orientace, při které base (30.2) je kladná, t. j. je to orientace určená basí (30.2)

Poznámka 1. Pojem orientace a všecky úvahy článku 29 je zřejmě možné přenésti na libovolný vektorový prostor $\mathbf{V}_m$ konečné dimense $m > 0$.

Poznámka 2. Buďtež dány tři base: base (30.2), kterou označíme $\mathbf{B}$, base (29.2), kterou označíme $\mathbf{B}'$, base (29.7), kterou označíme $\mathbf{B}''$. Určeme čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ tak, že platí (29.3); potom (29.4) je determinant přechodu od base $\mathbf{B}$ k basi $\mathbf{B}'$. Dále určeme čísla $b_{11}, \ldots, b_{mm}$ tak, že platí

(30.4) $$\mathbf{w}_r = b_{r1}\mathbf{v}_1 + \ldots + b_{rm}\mathbf{v}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m;$$

potom

(30.5) $$\begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1}, & \ldots, & b_{mm} \end{vmatrix}$$

je determinant přechodu od base $\mathbf{B}'$ k basi $\mathbf{B}''$. Nyní zaveďme čísla c_{rs} tak, že

(30.6) $$c_{rs} = b_{r1}a_{1s} + \ldots + b_{rm}a_{ms} \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m, \ 1 \leqq s \leqq m.$$

Podle (29.3), (30.4) a (30.6) je

(30.7) $$\mathbf{w}_r = c_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + c_{rm}\mathbf{u}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$

takže

(30.8) $$\begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1}, & \ldots, & c_{mm} \end{vmatrix}$$

je determinant přechodu od base $\mathbf{B}$ k basi $\mathbf{B}''$. Podle věty 29.8 je tedy determinant (30.8) součinem determinantů (29.4) a (30.5). V algebře se dokazuje věta o násobení determinantů, podle které, zvolíme-li libovolně čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{mm}$ a definujeme-li čísla $c_{11}, \ldots, c_{mm}$ pomocí (30.6), je determinant (30.8) roven součinu determinantů (29.4) a (30.5). Náš důkaz věty o násobení determinantů není úplný, protože jsme při důkazu učinili předpoklad, že determinanty (29.4) a (30.5) jsou různé od nuly; bylo by snadné tuto neúplnost odstranit.

Buďtež nyní v prostoru $\mathbf{E}_m$ dány dva různé navzájem rovnoběžné lineární podprostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ téže dimense k. Oba podprostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ mají totéž zaměření $\mathbf{V}_k$. Jelikož orientace eukleidovského prostoru závisí pouze na jeho zaměření, odpovídá každé orientaci prostoru $\mathbf{E}_k$ určitá orientace prostoru $\mathbf{E}'_k$, kterou nazveme *souhlasnou* s danou orientací prostoru $\mathbf{E}_k$.

V případě $k = 1$ platí:

VĚTA 30.2. *Buďtež AB, $A'B'$ dvě různé rovnoběžky. Orientace přímky AB určená vektorem $B - A$ a orientace přímky $A'B'$ určená vektorem $B' - A'$ jsou souhlasné tehdy a jenom tehdy, jestliže úsečky AB', BA' se protnou.*

DŮKAZ. Budiž

$$B' - A' = c(B - A), \tag{30.9}$$

takže $c \neq 0$ a obě orientace jsou souhlasné pro $c > 0$, nesouhlasné pro $c < 0$. Máme dokázati, že $c > 0$ je nutná a postačující podmínka, aby úsečky AB', BA' měly společný bod, t. j. aby existovala taková čísla x, y, že

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \tag{30.10}$$

$$A + x(B' - A) = B + y(A' - B). \tag{30.11}$$

Podmínku (30.11) můžeme upravit na tvar

$$B - A - x(B' - A) + y(A' - B) = \mathbf{o}.$$

Sem můžeme dosadit jednak

$$A' - B = (A' - A) - (B - A),$$

jednak podle (30.9)

$$B' - A = (A' - A) + c(B - A)$$

a dostaneme

$$(1 - cx - y)(B - A) + (y - x)(A' - A) = \mathbf{o}. \tag{30.11'}$$

Ježto rovnoběžky AB, $A'B'$ jsou různé, jsou vektory $B - A$, $A' - A$ mezi sebou lineárně nezávislé, takže (30.11'), tedy (30.11), platí tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$x = y, \ (1 + c)\,x = 1. \tag{30.12}$$

Ježto $c \neq 0$, lze splnit (30.10) a (30.12) tehdy a jenom tehdy, jestliže $c > 0$.

Budiž nyní v prostoru $\mathbf{E}_m$ ($m \geqq 2$) dána nadrovina ϱ. Zvolme bod P v nadrovině ϱ a basi

$$(30.13) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$$

nadroviny ϱ. Připojením dalšího vektoru $\mathbf{u}_m$ dostaneme basi

$$(30.14) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$$

prostoru $\mathbf{E}_m$. Libovolný bod má tvar

$$(30.15) \qquad X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m,$$

při čemž $x_m \geqq 0$ v jednom a $x_m \leqq 0$ ve druhém z obou poloprostorů vyťatých nadrovinou ϱ.

Předpokládejme nyní, že *jak nadrovina ϱ tak i celý prostor $\mathbf{E}_m$ jsou určitým způsobem orientovány*. Potom můžeme předpokládat, že (30.13) je kladná base nadroviny ϱ, (30.14) kladná base prostoru $\mathbf{E}_m$. [Kdyby (30.14) byla záporná base pro $\mathbf{E}_m$, stačilo by zaměnit $\mathbf{u}_m$ za $-\mathbf{u}_m$.] Za těchto předpokladů nazveme *kladným poloprostorem vyťatým nadrovinou ϱ* ten, ve kterém je $x_m \geqq 0$, *záporným* ten, ve kterém je $x_m \leqq 0$. Je třeba se přesvědčit, že při daných orientacích nadroviny ϱ a prostoru $\mathbf{E}_m$ je pojem kladného poloprostoru vyťatého nadrovinou ϱ určen jednoznačně, t. j., že nezávisí na bližší volbě basí (30.13) pro ϱ, (30.14) pro $\mathbf{E}_m$. Za tím účelem zvolme pomocnou kladnou basi $\mathbf{B}$ pro $\mathbf{E}_m$. Ježto base (30.14) je kladná, jest

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]^{\mathbf{B}} > 0.$$

Podle vět 29.2 až 29.4 plyne ze (30.15), že

$$(30.16) \qquad [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}} = x_m \,.\, [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]^{\mathbf{B}},$$

tedy

$$(30.17) \qquad [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}} \geqq 0$$

tehdy a jenom tehdy, leží-li bod X v kladném poloprostoru vyťatém nadrovinou ϱ. V podmínce (30.17) se už nevyskytuje base (30.14) prostoru $\mathbf{E}_m$, nýbrž pouze base (30.13) nadroviny ϱ. Budiž

$$(30.18) \qquad \mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_{m-1}$$

jiná kladná base nadroviny ϱ a budiž D determinant přechodu od base (30.18) k basi (30.13), takže $D > 0$.

Zřejmě

$$u'_1, \ldots, u'_{m-1}, u_m \tag{30.19}$$

je base prostoru $\mathbf{E}_m$ a z definice determinantu přechodu a z nejjednodušších vlastností determinantů plyne, že D je zároveň determinant přechodu od base (30.19) k basi (30.14). Ježto $D > 0$, je také (30.19) kladná base pro $\mathbf{E}_m$. Z věty 29.8 [ve které místo basí $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ vezmeme base $\mathbf{B}$, (30.19), (30.14)] plyne, že

$$[u_1, \ldots, u_m]^{\mathbf{B}} = D[u'_1, \ldots, u'_{m-1}, u_m]^{\mathbf{B}}. \tag{30.20}$$

Vedle (30.16) platí ovšem také obdobný vztah

$$[u'_1, \ldots, u'_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}} = x_m \,.\, [u'_1, \ldots, u'_{m-1}, u_m]^{\mathbf{B}}; \tag{30.16'}$$

zde je třeba si uvědomit, že při přechodu od base (30.19) k basi (30.14) koeficient x_m zůstane beze změny. Ze (30.16), (30.16') a (30.20) plyne, že

$$[u_1, \ldots, u_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}} = D[u'_1, \ldots, u'_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}};$$

ježto $D > 0$, smysl nerovností (30.17) se nezmění při přechodu od base (30.18) k basi (30.13).

Pojem kladného poloprostoru vyťatého nadrovinou ϱ závisí jednak na orientaci nadroviny ϱ, jednak na orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$.

Ponecháme-li orientaci nadroviny ϱ beze změny, ale změníme-li orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$, přejde kladný poloprostor v záporný. Neboť potom zůstane (30.13) kladnou basí pro ϱ, ale ve (30.14) zaměníme u_m za $-u_m$, abychom dostali basi pro $\mathbf{E}_m$ kladnou při nové orientaci, a záměně u_m za $-u_m$ podle (30.15) odpovídá záměna x_m za $-x_m$.

Ponecháme-li orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ beze změny, ale změníme-li orientaci nadroviny ϱ, přejde kladný poloprostor v záporný. Neboť nyní můžeme u_1, u_m zaměnit za $-u_1$, $-u_m$, čemuž opět (vedle záměny x_1 za $-x_1$, na které nezáleží) odpovídá záměna x_m za $-x_m$.

Změníme-li jak orientaci nadroviny ϱ tak i orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$, zůstane kladný poloprostor beze změny; to je už nyní zřejmé.

V elementárních případech roviny ($m = 2$) a obyčejného prostoru ($m = 3$) pojem orientace těsně souvisí s názorným pojmem *levé* *a pravé strany*. Jestliže v rovině (v názorném slova smyslu rovina) zavedeme způsobem popsaným v článku 1 kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pozorovatel jdoucí po prvé ose souřadnic ve smyslu rostoucí prvé souřadnice měl po levé ruce body s kladnou druhou souřadnicí, a jestliže zavedeme orientaci roviny příslušnou této soustavě souřadnic, dá se dokázati, že pozorovatel, jdoucí po kterékoli orientované přímce p ve smyslu daném příslušným přirozeným uspořádáním přímky p, má po levé ruce kladnou polorovinu vyťatou přímkou p. V obyčejném prostoru zaveďme kartézskou soustavu souřadnic způsobem popsaným v článku 1, při čemž půdorysna nechť je vodorovná. V půdorysně zvolíme opět kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pozorovatel kráčející nad půdorysnou po prvé ose souřadnic ve smyslu rostoucí prvé souřadnice měl po levé ruce body půdorysny s kladnou druhou souřadnicí; třetí souřadnice budiž kladná pro body nad půdorysnou. Zavedeme-li orientaci prostoru příslušnou zvolené kartézské soustavě souřadnic a pozorujeme-li orientovanou rovinu ϱ z kladného jí vyťatého poloprostoru, potom jsou-li A, B, C tři body roviny ϱ takové, že $B - A$, $C - A$ je kladná base pro ϱ, vidíme bod C nalevo od cesty vedoucí v rovině ϱ od bodu A k bodu B. Odůvodnění těchto fakt zde nebudeme probírat.