Základy analytické geometrie. I

Vektorové prostory

In: Eduard Čech (author): Základy analytické geometrie. I. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1951. pp. 28–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402522

II

VEKTOROVÉ PROSTORY

10. VEKTOROVÝ PROSTOR. Pro další bude účelné shrnouti vlastnosti součtu vektorů a součinu reálného čísla s vektorem. (Skalární součin ponecháváme prozatím stranou.) Stále značíme vektory tučnými písmeny, reálná čísla písmeny obyčejného typu. Základními vlastnostmi zkoumaných početních výkonů jsou následující vlastnosti (10.1) až (10.7):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}. \tag{10.1}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}). \tag{10.2}$$

(10.3) Existuje *nulový vektor*, který značíme $\mathbf{o}$ a pro který platí $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$ pro libovolný vektor $\mathbf{u}$.

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}. \tag{10.4}$$

$$(a + b)\,\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}. \tag{10.5}$$

$$a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}. \tag{10.6}$$

$$1\,.\,\mathbf{u} = \mathbf{u}. \tag{10.7}$$

Zaujmeme nyní abstraktní stanovisko, které se později ukáže velmi užitečným. Budiž dána množina jakýchkoli matematických objektů, které nazveme *vektory*; celou množinu nazveme *vektorový prostor*. Těchto názvů budeme užívati, budou-li definovány dva početní výkony:

(a) sčítání vektorů (součet je opět vektor),

(b) násobení reálného čísla s vektorem (součin je vektor); mimo to předpokládáme, že jsou splněny právě vyjmenované vlastnosti (10.1) až (10.7), ze kterých nyní odvodíme několik jednoduchých důsledků, které pro vektory prostoru $\mathbf{E}_m$ jsou nám z předcházejícího známy.

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}. \tag{10.8}$$

DŮKAZ. Podle (10.7), (10.3), (10.5), (10.7) jest

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = 1 . \mathbf{u} + 0 . \mathbf{u} = (1 + 0)\, \mathbf{u} = 1 . \mathbf{u} = \mathbf{u};$$

podle (10.1) je také $\mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(10.9) Ke každému vektoru $\mathbf{u}$ definujeme *opačný vektor* $-\mathbf{u} = (-1) . \mathbf{u}$. Potom jest $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

DŮKAZ. Podle definice opačného vektoru a podle (10.7), (10.5) a (10.3) jest

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 1 . \mathbf{u} + (-1) . \mathbf{u} = (1 - 1) . \mathbf{u} = 0 . \mathbf{u} = \mathbf{o};$$

podle (10.1) je také $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(10.10) $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. To plyne z definice opačného vektoru, z (10.6) a (10.7).

(10.11) Rovnice

$$(*) \qquad \mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ nebo } \mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$$

($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dané vektory, $\mathbf{x}$ hledaný vektor) má právě jedno řešení

$$(**) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \text{ t. j. } \mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}).$$

DŮKAZ. Platí-li (*), potom podle (10.2), (10.9) a (10.8) jest

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (\mathbf{x} + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = \mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = \mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}.$$

Platí-li (**), potom podle (10.2), (10.9) a (10.8) jest

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}.$$

(10.12) Je-li $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{o}$, jest $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

DŮKAZ. Podle (10.8), (10.2), (10.9) a (10.8) jest

$$\mathbf{v} = \mathbf{o} + \mathbf{v} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}.$$

(10.13) $a . \mathbf{o} = \mathbf{o}$ pro každé reálné číslo a.

DŮKAZ. Zvolme libovolně vektor $\mathbf{u}$. Potom podle (10.3), (10.6) a (10.3) jest

$$a . \mathbf{o} = a . (0 . \mathbf{u}) = (a . 0) . \mathbf{u} = 0 . \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

(10.14). Je-li $a\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je buďto $a = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

DŮKAZ. Je-li $a \neq 0$, je podle (10.7), (10.6) a (10.13)

$$u = 1 \,.\, u = \left(\frac{1}{a} \,.\, a\right) u = \frac{1}{a}(au) = \frac{1}{a} \,.\, o = o.$$

(10.15) Je-li $au = av$, je buďto $a = 0$ nebo $u = v$.

Důkaz. Podle (10.9) a (10.4) jest

$$o = au - av = a(u - v),$$

takže podle (10.14) je buďto $a = 0$ nebo $u - v = o$. Ve druhém případě $u = v$ podle (10.12).

(10.16). Je-li $au = bu$, je buďto $a = b$ nebo $u = o$.

Důkaz. Podle (10.9) a (10.5) je

$$o = au - bu = (a - b)\, u,$$

takže podle (10.14) je buďto $a - b = 0$, t. j. $a = b$, nebo $u = o$.

(10.17). Součet libovolného počtu vektorů můžeme definovat rekurentně:

$$u_1 + \ldots + u_{n+1} = (u_1 + \ldots + u) + u_{n+1}.$$

Potom z (10.1) a (10.2) se odvodí jednak obecný zákon komutativní (součet libovolného počtu vektorů je nezávislý na pořádku sčítanců), jednak obecný zákon asociativní (součet libovolného počtu vektorů můžeme počítati tak, že rozdělíme sčítance na skupiny, utvoříme částečné součty jednotlivých skupin a tyto částečné součty sečteme; je-li v některé skupině jen jeden sčítanec, je příslušný částečný součet roven tomuto sčítanci).

•(10.18). Z (10.4) a (10.5) se odvodí indukcí:

$$a(u_1 + \ldots + u_k) = au_1 + \ldots + au_k,$$
$$(a_1 + \ldots + a_k)\, u = a_1u + \ldots + a_ku.$$

Kombinováním těchto dvou pravidel dospějeme k obecnému distributivnímu zákonu: Součet libovolného počtu čísel znásobíme součtem libovolného počtu vektorů, jestliže každé dané číslo znásobíme každým daným vektorem a všecky tyto součiny sečteme.

11. LINEÁRNÍ ZÁVISLOST VEKTORŮ. Budiž nyní dán libovolný vektorový prostor **V**. Může se stát, že celý prostor **V** se skládá z jediného vektoru **o**; potom pravíme, že **V** je *triviální*. V následujícím však předpokládáme, že $\boldsymbol{V}$ je netriviální. Potom $\boldsymbol{V}$ obsahuje nekonečně mnoho vektorů, neboť je-li $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ a probíhá-li x všecka reálná čísla, jsou všecky vektory $x\boldsymbol{u}$ navzájem různé podle (10.16).

Je-li $\boldsymbol{W}$ část vektorového prostoru $\boldsymbol{V}$, pravíme, že $\boldsymbol{W}$ je *lineární soustava*, jestliže jsou splněny dvě vlastnosti:

(a) jsou-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dva vektory náležející do $\boldsymbol{W}$, potom také vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ náleží do $\boldsymbol{W}$;

(b) jestliže vektor $\boldsymbol{u}$ náleží do $\boldsymbol{W}$, potom pro každé reálné číslo x platí, že také vektor $x\boldsymbol{u}$ náleží do $\boldsymbol{W}$; z toho plyne podle (10.3), že *vektor* $\boldsymbol{o}$ *náleží do každé lineární soustavy* $\boldsymbol{W}$.

Zřejmě *vektor* $\boldsymbol{o}$ *sám o sobě tvoří lineární soustavu, kterou nazveme triviální; každá netriviální lineární soustava obsahuje nekonečně mnoho vektorů.*

Je-li $\boldsymbol{W}$ libovolná lineární soustava, je zřejmé, že vlastnosti (10.1) až (10.7) zůstanou zachovány, jestliže se omezíme na vektory náležející do $\boldsymbol{W}$. To znamená, že *lineární soustava* $\boldsymbol{W}$ *vektorového prostoru* $\boldsymbol{V}$ *sama o sobě tvoří vektorový prostor.* Z tohoto důvodu nazýváme lineární soustavu také *vektorovým podprostorem vektorového prostoru* $\boldsymbol{V}$.

Budiž nyní dán konečný počet vektorů

(11.1) $$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k.$$

Nazveme *lineární kombinací vektorů* (11.1) každý vektor tvaru

(11.2) $$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{u}_k;$$

reálná čísla $a_1, \ldots, a_k$ jsou *koeficienty lineární kombinace* (11.2). Jsou-li všecky koeficienty v (11.2) rovny nule, máme *triviální lineární kombinaci*, která je rovna $\boldsymbol{o}$. Výrok, že *vektor* $\boldsymbol{v}$ *je lineárně závislý na vektorech* (11.1), znamená totéž jako výrok, že $\boldsymbol{v}$ je lineární kombinací vektorů (11.1).

Podle (10.17) a (10.5) jest

$$(a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{u}_k) + (b_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + b_k\boldsymbol{u}_k) =$$
$$= (a_1 + b_1)\,\boldsymbol{u}_1 + \ldots + (a_k + b_k)\,\boldsymbol{u}_k;$$

podle (10.18) a (10.6) jest

$$x(a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{u}_k) = xa_1\,.\,\boldsymbol{u}_1 + \ldots + xa_k\,.\,\boldsymbol{u}_k.$$

Z toho plyne, že *množina všech lineárních kombinací vektorů* (11.1) *je lineární soustava,* kterou označíme

(11.3) $$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}.$$

Jestliže při určitém $r(1 \leqq r \leqq k)$ v (11.2) volíme $a_r = 1$ a všecky ostatní koeficienty rovny nule, potom lineární kombinace (11.2) bude rovná vektoru $\mathbf{u}_r$. Tudíž *lineární soustava* (11.3) *obsahuje* mimo jiné *všecky vektory* (11.1). Je patrné, že *lineární soustava* (11.3) *je triviální tehdy a jenom tehdy, jestliže všecky vektory* (11.1) *jsou rovny* $\mathbf{o}$.

O lineární soustavě (11.3) pravíme, že je *vytvořena konečným počtem vektorů* (11.1). V následujícím má základní důležitost ten případ, že celý vektorový prostor $\mathbf{V}$ je vytvořen konečným počtem vektorů; je-li tomu tak, potom uvidíme, že platí totéž o každé lineární soustavě vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Zatím však ještě nečiníme tento předpoklad.

Pravíme, že vektory (11.1) jsou *mezi sebou lineárně závislé,* jestliže některá jejich netriviální lineární kombinace je rovna $\mathbf{o}$, t. j. existují-li reálná čísla $c_1, \ldots, c_k$ tak, že nejsou vesměs rovna nule a že

(11.4) $$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o};$$

v opačném případě pravíme, že vektory (10.1) jsou *mezi sebou lineárně nezávislé.* Tedy vektory (11.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, jestliže z platnosti vztahu (11.4) plyne, že všecky koeficienty $c_1, \ldots, c_k$ jsou rovny nule.

Všimněme si toho případu, že v (11.1) je $k = 1$, t. j. že je dán jediný vektor $\mathbf{u}_1$. Podle (10.13) a (10.14) máme:

(11.5) „vektor $\mathbf{u}_1$ je mezi sebou lineárně závislý" znamená $\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$; „vektor $\mathbf{u}_1$ je mezi sebou lineárně nezávislý" znamená $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$.

Vraťme se k případu libovolného k v (11.1); možnost $k = 1$ není však nikterak vyloučena.

Věta 11.1. *Jsou-li vektory* (11.1) *mezi sebou lineárně nezávislé a náleží-li vektor* $\mathbf{v}$ *do* (11.3), *potom koeficienty v* (11.2) *jsou jednoznačně stanoveny.*

Důkaz. Je-li

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k, \quad \mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k,$$

jest

$$\mathbf{o} = (b_1 - a_1)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (b_k - a_k)\,\mathbf{u}_k.$$

Ježto vektory (11.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, jest $b_1 - a_1 = 0, \ldots, b_k - a_k = 0$ neboli $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.

VĚTA 11.2. *Jestliže mezi vektory* (11.1) *je aspoň jeden rovný* $\mathbf{o}$, *jsou tyto vektory mezi sebou lineárně závislé.*

DůKAZ. Je-li $\mathbf{u}_r = \mathbf{o}$ $(1 \leqq r \leqq k)$, platí (11.4), volíme-li $c_r = 1$ a ostatní koeficienty rovny nule.

VĚTA 11.3. *Jestliže mezi vektory* (11.1) *se některý opakuje, jsou tyto vektory mezi sebou lineárně závislé.*

DůKAZ. Je-li $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_s$ $(1 \leqq r < s \leqq k)$, platí (11.4), volíme-li $c_r = 1$, $c_s = -1$ a ostatní koeficienty rovny nule.

VĚTA 11.4. *Jsou-li vektory* (11.1) *mezi sebou lineárně nezávislé, jsou navzájem různé a všecky jsou různé od* $\mathbf{o}$.

To plyne z vět 11.2 a 11.3.

VĚTA 11.5. *Platí-li vztah* (11.4) *a je-li* $c_r \neq 0$ *pro určité* r $(1 \leqq r \leqq k)$, *potom pro* $k = 1$ *je* $\mathbf{u}_r = \mathbf{o}$, *pro* $k > 1$ *je vektor* $\mathbf{u}_r$ *lineárně závislý na ostatních vektorech* (11.1).

DůKAZ pro $k = 1$ je obsažen v (11.5). Je-li $k > 1$, stačí provésti důkaz za předpokladu, že $r = k$. Potom v (11.4) je $c_k \neq 0$, a položíme-li

$$a_r = \frac{c_r}{c_k} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq k - 1,$$

jest

$$a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k = \mathbf{o},$$

tedy

$$\mathbf{u}_k = -a_1\mathbf{u}_1 - \ldots - a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}.$$

12. BASE LINEÁRNÍCH SOUSTAV. Budiž dán netriviální vektorový prostor $\mathbf{V}$ a v něm netriviální lineární soustava $\mathbf{W}$ vytvořená konečně mnoha vektory

(12.1) $$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k,$$

takže

(12.2) $$\mathbf{W} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}.$$

V případě, že vektory (12.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, pravíme, že (12.1) je *base lineární soustavy* **W**. Pojem base je tedy definován pouze pro lineární netriviální soustavy vytvořitelné konečným počtem vektorů.

Ať již vektory (12.1) jsou či nejsou lineárně nezávislé, budiž

(12.3) $$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$$

konečný počet vektorů náležejících do lineární soustavy **W**. Protože **W** je lineární soustava, náleží do **W** také každá lineární kombinace vektorů (12.3), t. j. platí:

VĚTA 12.1. *Jsou-li vektory* (12.3) *lineárně závislé na vektorech* (12.1), *potom lineární soustava*

(12.4) $$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\}$$

je částí lineární soustavy (12.2).

Z toho plyne dále:

VĚTA 12.2. *Jestliže nejen vektory* (12.3) *jsou lineárně závislé na vektorech* (12.1), *nýbrž také obráceně vektory* (12.1) *jsou lineárně závislé na vektorech* (12.3), *potom splynou obě lineární soustavy* (12.2), (12.4).

Předpokládejme, že vektory (12.1), které vytvořují netriviální lineární soustavu (12.2), jsou mezi sebou lineárně závislé. Potom existuje vztah (11.4), ve kterém aspoň jeden koeficient c_r $(1 \leqq r \leqq k)$ je různý od nuly. Ježto (12.2) je netriviální, plyne z věty 11.5, že je $k > 1$ a že vektor $\mathbf{u}_r$ je lineární kombinací vektorů

(12.5) $$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \text{ s vynecháním vektoru } \mathbf{u}_r.$$

Zřejmě potom každý z vektorů (12.1) je lineární kombinací vektorů (12.5) a obráceně, takže podle věty 12.2 lineární soustava (12.2) se dá vytvořit vektory (12.5). Tedy jestliže netriviální lineární soustava (12.2) je vytvořena mezi sebou lineárně závislými vektory (12.1), musí býti $k > 1$ a aspoň jeden z vektorů (12.1) musí býti lineární kombinací ostatních; škrtnutí takového vektoru nemá vlivu na lineární soustavu (12.2). Z toho plyne, že jsou-li vektory (12.1) mezi sebou lineárně závislé, je možné škrtnutím několika z nich dospěti k vektorům mezi sebou lineárně nezávislým vytvořujícím touž lineární soustavu (12.2). Z toho plyne dále:

VĚTA 12.3. *Každá netriviální lineární soustava* $\mathbf{W}$ *vytvořená konečně mnoha vektory má aspoň jednu basi.*

DŮKAZ. Jsou-li vektory (12.1) mezi sebou lineárně nezávislé, tvoří samy basi pro (12.2); v opačném případě podle předchozího vznikne škrtnutím některých z nich base pro (12.2).

Z (11.5) plyne:

VĚTA 12.4. *Libovolný vektor* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *vytvořuje netriviální lineární soustavu* $\{\mathbf{u}\}$ *a je basí této lineární soustavy.*

Dále platí:

VĚTA 12.5. *Je-li* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, *potom každý vektor* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ *náležející do* $\{\mathbf{u}\}$ *je basí pro* $\{\mathbf{u}\}$.

Neboť $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$, $a \neq 0$, tedy $\mathbf{u} = \frac{1}{a}\mathbf{v}$, takže věta plyne z věty 12.2.

Lineární soustava $\{\mathbf{u}\}$ vytvořená jediným vektorem nemůže míti žádnou basi složenou z více než jednoho vektoru. K tomu cíli stačí dokázati, že je-li $k > 1$ a jestliže vektory (12.1) náležejí do $\{\mathbf{u}\}$, potom jsou (12.1) mezi sebou lineárně závislé. To plyne z věty 11.2, je-li $\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$. Je-li však $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, budiž $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{u}$, tedy $a_1 \neq 0$. Potom jest

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o},$$

volíme-li $c_1 = a_2$, $c_2 = -a_1$ a všecky ostatní koeficienty rovny nule; při tom je $c_2 \neq 0$.

Jedním z hlavních úkolů tohoto článku je dokázat, že platí:

VĚTA 12.6. *Jestliže* (12.1) *je base lineární soustavy* $\mathbf{W}$, *potom každá base pro* $\mathbf{W}$ *se skládá z téhož počtu* k *vektorů.* V případě $k = 1$ jsme již důkaz právě provedli. Budiž tedy $k \geq 2$.

Důsledkem věty 12.2 jest, že každá z následujících změn vektorů (12.1) vede k nové basi lineární soustavy (12.2):

(a) změníme pořádek vektorů (12.1);

(b) jeden vektor $\mathbf{u}_r$ $(1 \leq r \leq k)$ nahradíme vektorem $a\mathbf{u}_r$, kde $a \neq 0$;

(c) jeden vektor $\mathbf{u}_r$ $(1 \leq r \leq k)$ nahradíme vektorem $\mathbf{u}_r + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w}$ je lineární kombinace ostatních vektorů (12.1).

Změny base tvaru (a), (b), (c) nazveme *elementární změny base.* V následujícím dokážeme m. j., že platí:

VĚTA 12.7. *Každá změna base netriviální lineární soustavy se dá rozložit na konečný počet elementárních změn.* Ve větě 12.7 je ovšem obsažena věta 12.6.

Abychom mohli dokázat větu 12.7, proveďme nejprve *přípravnou úvahu.* Budiž dán vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ náležející do lineární soustavy (12.2). Je tedy

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k,$$

při čemž aspoň jeden koeficient je různý od nuly; budiž $a_r \neq 0$ $(1 \leqq r \leqq k)$. Potom jest

$$\mathbf{v} = a_r\mathbf{u}_r + \mathbf{w},$$

kde $\mathbf{w}$ je lineární kombinace vektorů (12.5). Vyjděme od base (12.1) lineární soustavy (12.2) a proveďme nejprve elementární změnu typu (b), při které se vektor $\mathbf{u}_r$ nahradí vektorem $a_r\mathbf{u}_r$, potom elementární změnu typu (c), při které se vektor $a_r\mathbf{u}_r$ nahradí vektorem $\mathbf{v}$. Provedeme-li ještě vhodnou elementární změnu typu (a), dospějeme k basi tvaru

$$\mathbf{v}, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_k,$$

kde vektory $\mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_k$ se liší pouze pořádkem od vektorů (12.5).

Nyní dokážeme, že platí:

VĚTA 12.8. *Budiž* (12.1) *base lineární soustavy* $\mathbf{W}$. *Buďtež*

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \tag{12.6}$$

mezi sebou lineárně nezávislé vektory náležející do $\mathbf{W}$ *v počtu* $s < k$. *Potom je možné pomocí konečného počtu elementárních změn přejít od base* (12.1) *k nové basi pro* $\mathbf{W}$ *tvaru:*

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{u}'_{s+1}, \ldots, \mathbf{u}'_k, \tag{12.7}$$

kde vektory $\mathbf{u}'_{s+1}, \ldots, \mathbf{u}'_k$ *jsou totožné s některými z vektorů* (12.1).

DŮKAZ. Pro $s = 1$ platí věta 12.8 podle přípravné úvahy. Obecný důkaz dokončíme indukcí, t. j. provedeme důkaz za předpokladu, že $s > 1$ a že je nám již známo, že lze pomocí konečného počtu elementárních změn přejít od base (12.1) k nové basi pro $\mathbf{W}$ tvaru

(12.8) $$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{u}'_s, \dots, \mathbf{u}'_k,$$

kde vektory $\mathbf{u}'_s, \dots, \mathbf{u}'_k$ jsou totožné s některými z vektorů (12.1). Protože (12.8) je base lineární soustavy $\mathbf{W}$, do které náleží vektor $\mathbf{v}_s$, je tento vektor lineární kombinací vektorů (12.7):

$$\mathbf{v}_s = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{s-1}\mathbf{v}_{s-1} + b_s\mathbf{u}'_s + \dots + b_k\mathbf{u}'_k.$$

Ježto vektory (12.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, není možné, aby všecky koeficienty $b_s, \dots, b_k$ byly rovny nule a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že $b_s \neq 0$. Potom je však možné podle přípravné úvahy několika elementárními změnami dospět od base (12.8) k nové basi, která se od (12.8) liší pouze tím, že vektor $\mathbf{u}'_s$ je nahrazen vektorem $\mathbf{v}_s$, t. j. k basi žádaného tvaru (12.7).

VĚTA 12.9. *Budiž $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ base lineární soustavy $\mathbf{W}$. Jestliže vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ v témž počtu k jsou mezi sebou lineárně nezávislé a náležejí do $\mathbf{W}$, potom $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ je base pro $\mathbf{W}$ a od base* (12.1) *lze přejít k této nové basi konečným počtem elementárních změn.*

DŮKAZ je velmi podobný důkazu věty 12.8. Podle této věty je možné konečným počtem elementárních změn dospět od base (12.1) k basi tvaru

(12.9) $$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}',$$

kde $\mathbf{u}'$ je jeden z vektorů (12.1). Protože vektor $\mathbf{v}_s$ náleží do $\mathbf{W}$ a protože (12.9) je base pro $\mathbf{W}$, máme relaci tvaru

$$\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + b\mathbf{u}'.$$

Ježto vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé, je nutně $b \neq 0$ a tudíž podle přípravné úvahy lze několika elementárními změnami dospět od base (12.9) k nové basi, která se liší od (12.9) pouze záměnou vektoru $\mathbf{u}'$ za vektor $\mathbf{v}_k$, t. j. k basi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.

DŮKAZ věty 12.6. Máme dokázat, že není možné, aby jedna a táž lineární soustava $\mathbf{W}$ měla dvě base o nestejném počtu vektorů. Předpokládejme naopak, že $\mathbf{W}$ má jednak basi (12.1) složenou z k vektorů, jednak basi (12.6) složenou z $s < k$ vektorů. Potom jsou vektory (12.6) v počtu $s < k$ mezi sebou lineárně nezávislé a náležejí do lineární soustavy $\mathbf{W}$ s basí (12.1), takže podle věty 12.8 má $\mathbf{W}$ také basi tvaru

(12.7). Vektor $\boldsymbol{u}'_k$ náleží do $\boldsymbol{W}$ a $\boldsymbol{W}$ má basi (12.6); proto je $\boldsymbol{u}'_k$ lineární kombinací vektorů (12.6), což je nemožné, neboť vektory (12.7) musí býti mezi sebou lineárně nezávislé.

Věta 12.7 zřejmě plyne z vět 12.6 a 12.9. Dokážeme ještě, že platí:

VĚTA 12.10. *Budiž $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ base lineární soustavy $\boldsymbol{W}$. Jestliže vektory* (12.6) *v počtu $s > k$ náležejí do $\boldsymbol{W}$, potom vektory* (12.6) *jsou mezi sebou lineárně závislé.*

DŮKAZ. Předpokládejme naopak, že vektory (12.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Potom totéž platí i o vektorech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, které tudíž podle věty 12.9 tvoří basi pro $\boldsymbol{W}$. Ježto vektor $\boldsymbol{v}_s$ náleží do $\boldsymbol{W}$, jest

$$\boldsymbol{v}_s = a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{v}_k,$$

což je spor proti předpokládané lineární nezávislosti vektorů (12.6).

13. POJEM DIMENSE. Budiž opět dán netriviální vektorový prostor $\boldsymbol{V}$ a v něm netriviální lineární soustava $\boldsymbol{W}$ vytvořená konečným počtem vektorů. V článku 12 jsme poznali, že $\boldsymbol{W}$ má basi a že všecky base soustavy $\boldsymbol{W}$ jsou složeny z téhož konečného počtu k vektorů; číslo k nazveme *dimensí lineární soustavy* $\boldsymbol{W}$. Doplníme tuto definici jednak tím, že dimensí triviální lineární soustavy $\{\boldsymbol{o}\}$ rozumíme číslo 0 a že o lineární soustavě, která se nedá vytvořiti konečně mnoha vektory, pravíme, že má nekonečně velkou dimensi.

VĚTA 13.1. *Budiž $\boldsymbol{W}$ netriviální lineární soustava konečné dimense k a buďtež*

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s \tag{13.1}$$

mezi sebou lineárně nezávislé vektory náležející do $\boldsymbol{W}$. Potom jest $s \leqq k$. Je-li $s = k$, tvoří vektory (13.1) *basi pro $\boldsymbol{W}$. Je-li $s < k$, je možné připojit k vektorům* (13.1) *dalších $k - s$ vektorů tak, že vznikne base pro $\boldsymbol{W}$.*

DŮKAZ. První tvrzení plyne z věty 12.10, druhé z věty 12.9, třetí z věty 12.8.

VĚTA 13.2. *Jestliže lineární soustava $\boldsymbol{W}^*$ je částí lineární soustavy $\boldsymbol{W}$ která má konečnou dimensi k, potom také $\boldsymbol{W}^*$ má konečnou dimensi s. Při tom je $s \leqq k$ a rovnost nastane pouze, jestliže $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}$.*

Důkaz. Věta je zřejmá, je-li W^* triviální. Není-li W^* triviální, potom ani W není triviální. Ve W^* existuje vektor $v \neq o$, který podle (11.5) je mezi sebou lineárně nezávislý. Ježto však W^* je částí W, nelze ve W^* udat více než k mezi sebou lineárně nezávislých vektorů. Tedy existuje takové číslo $s \geqq 1$, $s \leqq k$, že ve W^* lze udat s mezi sebou lineárně nezávislých vektorů (13.1), že však ve W^* nelze udat více než s mezi sebou lineárně nezávislých vektorů. Ukážeme, že vektory (13.1) tvoří basi pro W^*. Ježto vektory (13.1) náležejí do W^* a jsou mezi sebou lineárně nezávislé, stačí ukázati, že každý vektor náležející do W^* je lineární kombinací vektorů (13.1). Budiž tedy w libovolný vektor ze W^*. Ježto vektory $v_1, \ldots, v_s, w$ v počtu větším než s náležejí do W^*, jsou mezi sebou lineárně závislé a máme netriviální relaci tvaru

$$(13.2) \qquad a_1 v_1 + \ldots + a_s v_s + b w = o.$$

Kdyby bylo $b = 0$, byla by (13.2) netriviální relace mezi vektory (13.1), což je nemožné. Tedy $b \neq 0$ a podle věty 11.5 je vektor w lineární kombinací vektorů (13.1). Tím je ukázáno, že vektory (13.1) tvoří basi pro W^*. Je-li $s = k$, potom podle věty 13.1 tvoří tytéž vektory basi pro W, takže v tomto případě je $W^* = W$.

Zvláštním případem lineární soustavy je celý daný vektorový prostor V. Proto je v předcházejícím obsažena definice dimense vektorového prostoru. Označíme V_k vektorový prostor s konečnou dimensí k; V_0 bude tedy triviální vektorový prostor. Podle věty 13.2 mají lineární soustavy obsažené ve V_k vesměs konečnou dimensi, která pro celý prostor V_k je rovna k, ale pro každou jinou lineární soustavu je menší než k.

Důležitým příkladem vektorového prostoru V_k je *aritmetický* V_k; tento název dáme množině všech uspořádaných skupin k reálných čísel

$$(13.1) \qquad (u_1, \ldots, u_k);$$

takové skupiny jsou vektory aritmetického V_k (*aritmetické vektory*). Sčítání aritmetických vektorů a součin reálného čísla s aritmetickým vektorem jsou definovány takto:

$$(u_1, \ldots, u_k) + (v_1, \ldots, v_k) = (u_1 + v_1, \ldots, u_k + v_k),$$
$$a(u_1, \ldots, u_k) = (au_1, \ldots, au_k).$$

Čísla $u_1, \ldots, u_k$ nazveme *souřadnicemi* aritmetického vektoru (13.3). Pro aritmetické vektory jsou zřejmě splněna základní pravidla (10.1) až (10.7), při čemž nulový vektor $\mathbf{o}$ má všecky souřadnice rovny nule.

Pro $1 \leqq r \leqq k$ označme $\mathbf{e}_r$ aritmetický vektor, jehož r-tá souřadnice je rovna 1 a všecky ostatní souřadnice jsou rovny nule. Zřejmě

$$(u_1, \ldots, u_k) = u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_k\mathbf{e}_k$$

a zejména

$$u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_k\mathbf{e}_k = \mathbf{o}$$

pouze tehdy, jestliže $u_1 = \ldots = u_k = 0$. Z toho plyne, že vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ tvoří basi aritmetického $\mathbf{V}_k$, který tedy je vskutku vektorovým prostorem dimense k.

14. ISOMORFISMUS VEKTOROVÝCH PROSTORŮ. V článku 5 jsme definovali pojem vektoru eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ jako pojem vzniklý abstrakcí z pojmu dvojice bodů. Později zavedeme jiné geometrické objekty, kterým rovněž dáme jméno vektory. Abychom různé druhy vektorů mohli studovat současně, zavedli jsme v článku 10 obecný pojem vektorového prostoru; tento název jsme se rozhodli dát množině jakýchkoli matematických objektů, zvaných vektory, jestliže je v této množině definováno sčítání vektorů a násobení vektoru číslem tak, aby platila početní pravidla (10.1) až (10.7) a tedy také jejich důsledky, z nichž mnohé jsme již odvodili a kterých užijeme ke studiu eukleidovských prostorů.

Mnohdy je důležité zdůraznit, že při studiu vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nezáleží na tom, jakými matematickými objekty jsou vektory náležející do $\mathbf{V}$. To se děje pomocí pojmu *isomorfismu*, který si nyní vysvětlíme. Buďtež dány dva vektorové prostory $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ a předpokládejme, že je dán vztah, který každému vektoru $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{V}$ přiřazuje zcela určitý vektor prostoru $\mathbf{V}'$, který nazveme *obrazem* vektoru $\mathbf{u}$ a označíme čárkou, tedy $\mathbf{u}'$. Při tom předpokládejme, že běží o vztah *vzájemně jednoznačný*, t. j. že každý vektor prostoru $\mathbf{V}'$ jest obrazem právě jednoho vektoru prostoru $\mathbf{V}$. Mimo to předpokládejme ještě dvě věci:

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$, t. j. obraz součtu $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dvou libovolných vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{V}$ je součtem obrazů vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$;

(b) $(a\mathbf{u})' = a\mathbf{u}'$, t. j. je-li a libovolné reálné číslo a je-li $\mathbf{u}$ libovolný vektor prostoru $\mathbf{V}$, potom obraz součinu $a\mathbf{u}$ je roven součinu čísla a s obrazem vektoru $\mathbf{u}$.

Vzájemně jednoznačný vztah mezi vektorovými prostory $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$, který má vlastnosti (a), (b), jmenuje se *isomorfismus*; existuje-li takový isomorfismus, pravíme, že vektorové prostory $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ jsou navzájem *isomorfní*. Je patrné, že dva isomorfní vektorové prostory $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$ mají společné všecky ty vlastnosti, které se dají odvodit ze základních vlastností (10.1) až (10.7), t. j. všecky takové vlastnosti, které jsou nezávislé na povaze jednotlivých objektů zvaných vektory a jsou závislé pouze na vlastnostech součtu vektorů a součinu čísla s vektorem. Poznamenejme, že *obraz* $\mathbf{o}'$ *nulového vektoru* $\mathbf{o}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *je nulovým vektorem prostoru* $\mathbf{V}'$. Neboť zvolíme-li libovolně vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{V}$, jest $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$ podle (10.8), takže $\mathbf{u}' + \mathbf{o}' = \mathbf{u}'$ podle vlastnosti (a) isomorfismu, t. j. v prostoru $\mathbf{V}'$ má rovnice $\mathbf{u}' + \mathbf{x} = \mathbf{u}'$ řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}'$ a toto řešení je podle (10.11) jediné, takže $\mathbf{o}'$ je nulový vektor prostoru $\mathbf{V}'$ podle (10.8).

Mezi vlastnostmi společnými všem navzájem isomorfním vektorovým prostorům si všimněme zejména pojmu dimense definovaného v článku 13. *Jestliže vektorový prostor* $\mathbf{V}_k$ *má konečnou dimensi* k, *potom také každý s* $\mathbf{V}_k$ *isomorfní prostor* $\mathbf{V}'$ *má touž dimensi* k. To je zřejmé, je-li $\mathbf{V}_k$ triviální, neboť potom také $\mathbf{V}'$ je triviální. Jestliže $\mathbf{V}_k$ není triviální, potom existuje pro $\mathbf{V}_k$ base $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ složená z k vektorů. Libovolný vektor $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{V}_k$ má tvar $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k$ a jeho obraz má tedy tvar $\mathbf{v}' = a_1\mathbf{u}_1' + \ldots + a_k\mathbf{u}_k'$, takže $\mathbf{V}' = \{\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_k'\}$. Jestliže $c_1\mathbf{u}_1' + \ldots + c_k\mathbf{u}_k' = \mathbf{o}'$, tu ježto

$$c_1\mathbf{u}_1' + \ldots + c_k\mathbf{u}_k' = (c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k)'$$

a ježto $\mathbf{o}'$ jest obrazem $\mathbf{o}$ a žádného jiného vektoru z $\mathbf{V}_k$, jest $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, tedy $c_1 = \ldots = c_k = 0$, takže vektory $\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_k'$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Ježto $\mathbf{V}' = \{\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_k'\}$, je tím dokázáno, že $\mathbf{V}'$ má dimensi k.

Obráceně budiž $\mathbf{V}_k$ netriviální vektorový prostor dimense $\mathbf{k}$ a budiž $\mathbf{W}_k$ aritmetický vektorový prostor téže dimense. Zvolme basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathbf{V}_k$. Podle věty (11.1) lze každý vektor $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{V}_k$ právě jedním způsobem napsati ve tvaru

$$(14.1) \qquad v = a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k.$$

Jestliže vektoru (14.1) přiřadíme aritmetický vektor $(a_1, \ldots, a_k)$, dospějeme zřejmě k isomorfismu mezi V_k a W_k. Obecněji *jsou dva vektorové prostory V_k, V'_k téže konečné dimense k mezi sebou isomorfní.* Je-li opět $u_1, \ldots, u_k$ libovolně zvolená base prostoru V_k a je-li $u'_1, \ldots, u'_k$ libovolně zvolená base prostoru V'_k, dostaneme isomorfismus mezi V_k a V'_k, jestliže vektoru (14.1) přiřadíme vektor

$$v' = a_1 u'_1 + \ldots + a_k u'_k.$$

Ježto basí je nekonečně mnoho, je také isomorfismů mezi V_k a V'_k nekonečně mnoho.

15. ORTHONORMÁLNÍ VEKTORY. V článcích 10—14 jsme se zabývali vektory libovolného vektorového prostoru V, pro které je sice definován součet $u + v$ a součin au, nemusí však býti definován skalární součin uv. V tomto článku předpokládáme, že běží o vektory eukleidovského prostoru E_m definované v článku 5. Pro takové vektory má velký význam pojem skalárního součinu zavedený v článku 7.

Dva vektory u, v nazveme *orthogonální*, jestliže $uv = 0$. Slovo orthogonální je řeckého původu a znamená kolmý; o souvislosti zde zavedeného pojmu orthogonality s geometrickým pojmem kolmosti přímek bude řeč později v článku 31. Podle (7.5) dva vektory u, v jsou jistě orthogonální, je-li aspoň jeden z nich roven o. V případě $m = 1$ dva vektory $u \neq o$, $v \neq o$ nemohou býti orthogonální; to však není pravda pro $m \geqq 2$.

Na pojem skalárního součinu byl převeden pojem velikosti vektoru vzorcem (7.6), který znovu přepišme ve tvaru

$$(15.1) \qquad |u| = \sqrt{uu}.$$

Nulový vektor o je podle (7.5) orthogonální ke *každému* vektoru u. Tuto vlastnost má *pouze* nulový vektor, neboť pro $u \neq o$ je $|u| > 0$, tedy $uu > 0$, t. j. vektor $u \neq o$ nemůže býti sám k sobě orthogonální.

Pravíme, že vektory

$$(15.2) \qquad u_1, \ldots, u_k$$

jsou *orthonormální*, jestliže předně $|\mathbf{u}_r| = 1$ pro $1 \leqq r \leqq k$ a za druhé $\mathbf{u}_r\mathbf{u}_s = 0$ pro $1 \leqq r < s \leqq k$. Je-li $k = 1$, potom orthonormalita znamená pouze, že $|\mathbf{u}_1| = 1$.

VĚTA 15.1. *Jsou-li vektory* (15.2) *orthonormální, jsou mezi sebou lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} \tag{15.3}$$

a zvolme index r $(1 \leqq r \leqq k)$; máme dokázati, že $c_r = 0$. Uvážíme-li, že vektor $\mathbf{u}_r$ je orthogonální ke všem vektorům (15.2) mimo sebe sama, dostaneme ze (7.4) a (8.9)

$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_r = c_r\mathbf{u}_r\mathbf{u}_r,$$

takže podle (7.5), (15.1) a (15.3) $c_r|\mathbf{u}_r|^2 = 0$. Ježto $|\mathbf{u}_r| = 1$, je $c_r = 0$.

VĚTA 15.2. *Každá netriviální lineární soustava* $\mathbf{W}$ *vytvořená konečně mnoha vektory má orthonormální basi.*

DŮKAZ. Podle věty 12.3 má $\mathbf{W}$ aspoň jednu basi

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k. \tag{15.4}$$

Stačí dokázati, že lze udat orthonormální vektory

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{15.5}$$

v počtu k náležející do $\mathbf{W}$, neboť potom vektory (15.5) jsou mezi sebou lineárně nezávislé podle věty 15.1, takže tvoří basi pro $\mathbf{W}$ podle věty 12.9.

Pro $k = 1$ je věc zřejmá, neboť jediný daný vektor $\mathbf{u}_1$ je $\neq \mathbf{o}$ podle (11.5), takže $|\mathbf{u}_1| > 0$ a stačí položit.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{|\mathbf{u}_1|}\cdot\mathbf{u}_1.$$

Obecný důkaz dokončíme indukcí, t. j. předpokládáme, že při určitém k je věc dokázána a rozšíříme platnost důkazu na $k + 1$. Buďtež tedy dány mezi sebou lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}, \tag{15.6}$$

takže také vektory (15.4) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Dále již buďtež nalezeny orthonormální vektory (15.5), které jsou lineárními kombinacemi vektorů (15.4). Máme určit vektor $\mathbf{v}_{k+1}$ lineárně závislý na vektorech (15.6) tak, aby vektory

$$(15.7) \qquad \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$$

byly orthonormální. Ježto vektory (15.5) jsou podle věty 15.1 mezi sebou lineárně nezávislé a jsou lineárními kombinacemi vektorů (15.4), podle věty 12.9 jest

$$(15.8) \qquad \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Položme nyní

$$(15.9) \qquad \mathbf{v}_1\mathbf{u}_{k+1} = a_1, \ldots, \mathbf{v}_k\mathbf{u}_{k+1} = a_k,$$

$$(15.10) \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u}_{k+1} - (a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k).$$

Podle (15.8) je vektor $\mathbf{w}$ lineárně závislý na vektorech (15.6); mimo to je $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$, neboť jinak by $\mathbf{u}_{k+1}$ náležel do (15.8), což je nemožné, ježto vektory (15.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Ježto vektory (15.5) jsou orthonormální, spočteme snadno z (15.9) a (15.10), že

$$\mathbf{v}_1\mathbf{w} = 0, \ldots, \mathbf{v}_k\mathbf{w} = 0.$$

Ježto $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$, můžeme položit

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \mathbf{w},$$

při čemž také $\mathbf{v}_{k+1}$ je lineární kombinací vektorů (15.6) a jest

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_{k+1} = 0, \ldots, \mathbf{v}_k\mathbf{v}_{k+1} = 0, \; |\mathbf{v}_{k+1}| = 1.$$

Ježto vektory (15.5) jsou orthonormální, platí totéž o vektorech (15.7).

Z právě provedeného důkazu je patrné, že jestliže orthonormální vektory (15.5) náležejí do lineární soustavy $\mathbf{W}$, potom buďto vektory (15.5) tvoří basi pro $\mathbf{W}$ nebo lze ve $\mathbf{W}$ nalézti další vektor $\mathbf{v}_{k+1}$ tak, že také vektory (15.7) jsou orthonormální. Z toho plyne dále:

VĚTA 15.3. *Jestliže lineární soustava* $\mathbf{W}$ *se dá vytvořit konečně mnoha vektory a jestliže jsou dány orthonormální vektory* (15.5) *náležející do* $\mathbf{W}$, *potom buďto vektory* (15.5) *samy tvoří basi pro* $\mathbf{W}$, *nebo k nim lze připojiti další vektory v konečném počtu tak, aby vznikla orthonormální base pro* $\mathbf{W}$.

16. KARTÉZSKÉ A LINEÁRNÍ SOUŘADNICE v $\mathbf{E}_m$. Vektory eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$, definované v článku 5, tvoří vektorový prostor $\mathbf{V}$, který budeme nazývat *zaměřením* prostoru $\mathbf{E}_m$. Zaveďme v $\mathbf{E}_m$ určitou kartézskou soustavu souřadnic s počátkem P. Pro $1 \leq r \leq m$ označme $\mathbf{e}_r$ vektor, jehož r-tá souřadnice je rovna 1, kdežto všecky ostatní souřadnice vektoru $\mathbf{e}_r$ jsou rovny nule. Vektory

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \tag{16.1}$$

nazveme *základními vektory* zvolené kartézské soustavy souřadnic.

Je-li

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$$

libovolný vektor, je zřejmě

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_m\mathbf{e}_m. \tag{16.2}$$

Z toho plyne snadno, že vektory (16.1) tvoří *basi prostoru* $\mathbf{E}_m$, což znamená ovšem, že tvoří basi pro zaměření $\mathbf{V}$. Tudíž $\mathbf{V}$ má dimensi m a proto zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ budeme zpravidla značit určitěji $\mathbf{V}_m$; dimensi m zaměření $\mathbf{V}_m$ nazýváme také *dimensí prostoru* $\mathbf{E}_m$.

Pro každý bod

$$X = [x_1, \ldots, x_m]$$

prostoru $\mathbf{E}_m$ platí zřejmě

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m; \tag{16.3}$$

z toho plyne, že zvolená kartézská soustava souřadnic je jednoznačně určena, známe-li její počátek P a její základní vektory (16.1). O těchto vektorech je patrné z definice, že jsou *orthonormální*; mimo to jsme si už všimli, že tvoří basi pro $\mathbf{E}_m$.

Obráceně zvolme v prostoru $\mathbf{E}_m$ libovolně bod P a orthonormální vektory (16.1) v počtu m, které podle věty 15.1 jsou mezi sebou lineárně nezávislé a tudíž podle věty 13.1 tvoří basi pro $\mathbf{E}_m$, t. j. tvoří basi vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$. Každý vektor našeho prostoru je lineární kombinací vektorů (16.1) a koeficienty této lineární kombinace jsou podle věty 11.1 jednoznačně určeny. Jelikož ke každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{u}$ tak, že platí $X = P + \mathbf{u}$, je možné každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ jednoznačně přiřadit reálná čísla

$$x_1, \ldots, x_m \tag{16.4}$$

tak, že platí (16.3). Obráceně libovolně zvolená reálná čísla (16.4) určují podle (16.3) jednoznačně bod X prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li

$$Y = P + y_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + y_m \mathbf{e}_m$$

druhý bod prostoru $\mathbf{E}_m$, jest

$$Y - X = (y_1 - x_1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (y_m - x_m)\,\mathbf{e}_m.$$

a z orthonormality vektorů (16.1) plyne, že

$$(Y - X)(Y - X) = (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2,$$

takže podle (15.1)

$$\overline{XY} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}.$$

Dospěli jsme tudíž ke *kartézské soustavě souřadnic* v $\mathbf{E}_m$ a je snadno patrné, že P je její počátek a že (16.1) jsou její základní vektory. Tuto kartézskou soustavu souřadnic označme

$$\langle P;\, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle. \tag{16.5}$$

Obecněji zvolme v prostoru $\mathbf{E}_m$ mezi sebou lineárně nezávislé vektory (16.1), u kterých však nyní nepředpokládáme orthonormalitu. Opět vektory (16.1) tvoří basi pro $\mathbf{E}_m$, t. j. basi pro $\mathbf{V}_m$, a proto zvolíme-li ještě libovolně určitý bod P, je možné každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ jednoznačně přiřadit čísla (16.4) tak, že platí (16.3), a obráceně libovolně zvolená čísla (16.4) určují podle (16.3) jednoznačně bod X prostoru $\mathbf{E}_m$. Čísla (16.4) nazveme *souřadnicemi* bodu (16.3) a píšeme

$$X = [x_1, \ldots, x_m].$$

Takto zavedené souřadnice nemusí býti kartézské; pravíme, že jsme v $\mathbf{E}_m$ zavedli *lineární soustavu souřadnic*. Bod P je *počátek* soustavy; jeho souřadnice jsou vesměs rovny nule. Zároveň se souřadnicemi bodu zavádíme také souřadnice vektoru pomocí (16.2) a píšeme

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m).$$

Vektory (16.1) opět nazveme *základními vektory* zavedené lineární soustavy souřadnic, pro kterou zavedeme značku (16.5).

V takto definované lineární soustavě souřadnic platí známý vzorec

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, \bullet)$$

pro součet dvou vektorů i vzorec

$$au = (au_1, \bullet)$$

pro součin reálného čísla a s vektorem $\mathbf{u}$. Naproti tomu vzorec (7.2) pro skalární součin, vzorec (6.0) pro velikost vektoru a vzorec (3.2) pro vzdálenost dvou bodů platí pouze pro *kartézské* soustavy souřadnic.

17. TRANSFORMACE SOUŘADNIC. V prostoru $\mathbf{E}_m$ mějme dvě lineární soustavy souřadnic:

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle, \tag{17.1}$$

$$\langle P'; \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m \rangle. \tag{17.2}$$

Souřadnice libovolného bodu X v soustavě (17.1) buďtež $x_1, \ldots, x_m$, souřadnice téhož bodu v soustavě (17.2) buďtež $x'_1, \ldots, x'_m$. Je tedy

$$P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m = P' + x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_m\mathbf{e}'_m. \tag{17.3}$$

Položme

$$P' = P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m, \tag{17.4}$$

$$\mathbf{e}'_r = \alpha_{r1}\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_{rm}\,\mathbf{e}_m \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m, \tag{17.5}$$

t. j. označme $a_1, \ldots, a_m$ souřadnice bodu P' v soustavě (17.1), $\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rm}$ souřadnice vektoru $\mathbf{e}'_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ v téže soustavě.

Podle (17.4) a (17.5) je při libovolné volbě čísel $x'_1, \ldots, x'_m$:

$$P' + x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_m\mathbf{e}'_m =$$

$$= P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m + \sum_{r=1}^{m} x'_r\,(\alpha_{r1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_{rm}\mathbf{e}_m) =$$

$$= P + \sum_{s=1}^{m} (\alpha_{1s}x'_1 + \ldots + \alpha_{ms}x'_m + a_s)\,\mathbf{e}_s.$$

Porovnáme-li se (17.3), dostaneme vzorce

$$x_s = \alpha_{1s}x'_1 + \ldots + \alpha_{ms}x'_m + a_s \quad \text{pro} \quad 1 \leqq s \leqq m, \tag{17.6}$$

které vyjadřují souřadnice $x_1, \ldots, x_m$ bodu X v soustavě (17.1) pomocí souřadnic $x'_1, \ldots, x'_m$ téhož bodu v soustavě (17.2). Poněkud jednodušší, ale zcela obdobný tvar mají vzorce, které vyjadřují souřadnice $u_1, \ldots, u_m$ vektoru $\mathbf{u}$ v soustavě (17.1) pomocí souřadnic $u'_1, \ldots, u'_m$ téhož vektoru v soustavě (17.2). Nyní jest

$$u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_m\mathbf{e}_m = u_1'\mathbf{e}_1' + \ldots + u_m'\mathbf{e}_m'$$

a pomocí (17.5) dostaneme

(17.7) $$u_s = \alpha_{1s}u_1' + \ldots + \alpha_{ms}u_m' \text{ pro } 1 \leqq s \leqq m.$$

V (17.6) jsou prosté členy $a_1, \ldots, a_m$ souřadnicemi bodu P' v soustavě (17.1), jsou to tedy zcela libovolná reálná čísla. Naproti tomu jsou koeficienty

(17.8) $$\alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{ms} \ (1 \leqq s \leqq m)$$

podrobeny té podmínce, že vektory $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé, platí-li totéž o vektorech $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. Tato podmínka znamená, že vztah

$$c_1\mathbf{e}_1' + \ldots + c_m\mathbf{e}_m' = \mathbf{o}$$

je možný pouze pro $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Dosadíme-li ze (17.5), dostaneme podmínku, že rovnice

$$\alpha_{1s}c_1 + \ldots + \alpha_{ms}c_m = 0 \ (1 \leqq s \leqq m)$$

s neznámými $c_1, \ldots, c_m$ mají pouze triviální řešení $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Tuto podmínku lze, jak známo, napsat ve tvaru

(17.9) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1}, & \ldots, & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dosud jsme mluvili o transformaci lineárních souřadnic. Ve zvláštním případě transformace *kartézských* souřadnic musí vektory

(17.10) $$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m,$$

jakož i vektory

(17.11) $$\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$$

býti orthonormální. Jsou-li však vektory (17.10) orthonormální, potom podle (17.5) je

$$|\mathbf{e}_r'|^2 = \alpha_{r1}^2 + \ldots + \alpha_{rm}^2 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$
$$\mathbf{e}_r'\mathbf{e}_s' = \alpha_{r1}\alpha_{s1} + \ldots + \alpha_{rm}\alpha_{sm} \text{ pro } 1 \leqq r < s \leqq m.$$

Tedy v případě transformace kartézských souřadnic jsou koeficienty (17.8) podrobeny podmínkám

$$
(17.12) \qquad \begin{aligned} &\alpha_{r1}^2 + \ldots + \alpha_{rm}^2 = 1 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m, \\ &\alpha_{r1}\alpha_{s1} + \ldots + \alpha_{rm}\alpha_{sm} = 0 \text{ pro } 1 \leqq r < s \leqq m. \end{aligned}
$$

Podmínka (17.9) je důsledkem podmínek (17.12), jak je patrné z věty 15.1.

Transformace souřadnic se užívá jednak k důkazům invariance, jednak ke zjednodušení rovnic. V této knize však provádíme zápisy výpočtů většinou ve tvaru nezávislém na volbě soustavy souřadnic a proto transformace souřadnic je pro nás v celku bezvýznamná.

Transformační vzorce jsou velmi jednoduché v prostoru $\boldsymbol{E}_1$ (na přímce). Pro transformaci lineárních souřadnic bodu na přímce máme vzorec

$$
(17.13) \qquad x = \alpha x' + a,
$$

kde α, a jsou reálná čísla podrobená pouze podmínce $\alpha \neq 0$. Pro transformaci kartézských souřadnic bodu na přímce máme vzorec

$$
(17.14) \qquad x = \pm x' + a,
$$

kde a je libovolné reálné číslo. Pro transformaci souřadnic vektorů na přímce máme vzorec

$$
(17.15) \qquad u = \alpha u' \quad (\alpha \neq 0)
$$

v případě lineárních souřadnic,

$$
(17.16) \qquad u = \pm u'
$$

v případě kartézských souřadnic.