Co je a nač je vyšší matematika?

Řešení cvičení

In: Eduard Čech (author): Co je a nač je vyšší matematika?. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 117–124.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402514

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

20·1. $3x^2 - 7$. **20·2.** $8x^3 - 18x$. **20·3.** $30x^9 - 30x^4 + 3x^2$.

20·4. $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. **20·5.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **20·6.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

20·7. $30x^{29}$. **20·8.** $60x^{59}$. **20·9.** $100x^{99}$.

20·10. $-\dfrac{30}{x^{31}}$. **20·11.** $-\dfrac{60}{x^{61}}$. **20·12.** $-\dfrac{100}{x^{101}}$.

20·13. $2(x - 1)$. **20·14.** $3(1 + x)^2$. **20·15.** $-3(1 - x)^2$.

20·16. $-6(1 - 2x)^2$. **20·17.** $12(3x+2)^3$. **20·18.** $20(5x - 2)^3$.

20·19. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. **20·20.** $\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$. **20·21.** $-\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$.

20·22. $8\dfrac{4 - x^2}{(4 + x^2)^2}$. **20·23.** $-\dfrac{36x}{(x^2 - 9)^2}$. **20·24.** $-\dfrac{3}{(2 - x)^2}$.

20·25. $-\dfrac{11}{(3x - 4)^2}$. **20·26.** $\dfrac{11}{(5x - 3)^2}$. **20·27.** $-\dfrac{x + 2}{(x - 2)^3}$.

20·28. $-\dfrac{(2-x)^2(10+x)}{(2+x)^3}$. **20·29.** $\dfrac{4(x^2-4)}{(x^2+2x+4)^2}$. **20·30.** $-\dfrac{12(x+1)}{(x^2+2x-5)^2}$.

20·31. $6x^2(x^3 - 1)$. **20·32.** $-6x(1-x^2)^2$. **20·33.** $-9x^2(1-x^3)^2$.

20·34. $\frac{1}{2}\sqrt{x}(7x^2 + 15x)$. **20·35.** $3(x^2 - 1)$. **20·36.** $3x(x + 2)$.

20·37. $\dfrac{2}{\sqrt{4x + 5}}$. **20·38.** $\dfrac{5}{2\sqrt{5x - 4}}$. **20·39.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 1)^2}}$.

20·40. $-\dfrac{2}{\sqrt{(4x + 5)^3}}$. **20·41.** $-\dfrac{5}{2\sqrt{(5x-4)^3}}$. **20·42.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}$.

20·43. $\dfrac{5x^4}{(1 - x)^6}$. **20·44.** $\dfrac{1 + x^2}{2\sqrt{x(1-x^2)^3}}$. **20·45.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

21·1. Jest $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. V intervalu $[-\infty, -1]$ funkce roste od $-\infty$ do hodnoty $f(-1) = 4$; v intervalu $[-1, 1]$ funkce klesá od hodnoty $f(-1) = 4$ do hodnoty $f(1) = 0$; v intervalu $[1, \infty]$ funkce roste od hodnoty $f(1) = 0$ do ∞.

21·2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ má derivaci $f'(x) = 6(x + 2)(x - 3)$, tedy roste v intervalu $[-\infty, -2]$ od $-\infty$ do $f(-2) = 54$, klesá v intervalu $[-2, 3]$ od 54 do $f(3) = -71$ a roste v intervalu $[3, \infty]$ od -71 do ∞. Tedy rovnice $f(x) = 0$ má tři kořeny, po jednom v každém z intervalů $[-\infty, -2]$, $[-2, 3]$, $[3, \infty]$. Jest $f(-4) = -22 < 0$, $f(-3) = 37 > 0$; $f(0) = 10 > 0$, $f(1) = -27 < 0$; $f(4) = -54 < 0$, $f(5) = 5 > 0$; proto kořeny leží v intervalech $[-4, -3]$, $[0, 1]$, $[4, 5]$.

21·3. Jest $f'(x) = 12x^2(x - 1)$. Funkce klesá v intervalu $[-\infty, 1]$ od ∞ do $f(1) = 0$ a roste v intervalu $[1, \infty]$ od 0 do ∞.

21·4. Jest $x^2 + 3x + 3 > 0$ pro všecka x, takže $f(x)$ je všude definována. Jest

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 6x - 3}{(x^2 + 3x + 3)^2} = \frac{4(x - \alpha)(x - \beta)}{(x^2 + 3x + 3)^2},$$

kde

$$\alpha = -\frac{3 + \sqrt{21}}{4} \doteq -1{,}896, \qquad \beta = \frac{-3 + \sqrt{21}}{4} \doteq 0{,}396.$$

Funkce $f(x)$ roste v intervalu $[-\infty, \alpha]$ od $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ do

$$f(\alpha) = \frac{9 + 2\sqrt{21}}{3} \doteq 6{,}055,$$

klesá v intervalu $[\alpha, \beta]$ od $f(\alpha)$ do

$$f(\beta) = -\frac{2\sqrt{21} - 9}{3} \doteq 0{,}055$$

a roste v intervalu $[\beta, \infty]$ od $f(\beta)$ do $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

21·5. Funkce $f(x)$ není definována pro $x = 1$ a pro $x = 3$. Jest

$$f'(x) = \frac{2x^3(6 - 5x)}{(x - 1)^2(x - 3)^4}.$$

V intervalu $[-\infty, 0]$ funkce klesá od hodnoty $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ do hodnoty $f(0) = 0$, v intervalu $[0, 1]$ roste od 0 do ∞, v intervalu $[1, \frac{6}{5}]$ roste od $-\infty$ do $f(\frac{6}{5}) = -\frac{16}{9}$, v intervalu $[\frac{6}{5}, 3]$ klesá od $-\frac{16}{9}$ do $-\infty$, v intervalu $[3, \infty]$ klesá od ∞ do $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

21·6. Jest
$$f'(x) = \frac{1 + 3x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$
V intervalu $[-\infty, -\frac{1}{3}]$ funkce klesá od hodnoty $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ $= -1$ do hodnoty $f(-\frac{1}{3}) = -\sqrt{10}$, v intervalu $[-\frac{1}{3}, \infty]$ roste od hodnoty $-\sqrt{10}$ do hodnoty $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

21·7. Jest $f'(x) = 2n\,(x - \alpha)$, kde
$$\alpha = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
takže $f(x)$ klesá v intervalu $[-\infty, \alpha]$ a roste v intervalu $[\alpha, \infty]$.

21·8. $f(x)$ není definována pro $x = c$. Je-li $0 < c < 1$, je stále $f'(x) > 0$ a funkce $f(x)$ v intervalu $[-\infty, c]$ roste od $-\infty$ do ∞ a rovněž tak v intervalu $[c, \infty]$. Je-li $c < 0$ nebo $c > 1$, je $c\,(c - 1) > 0$ a
$$(x - c)^2 f'(x) = (x - \alpha)\,(x - \beta),$$
kde
$$\alpha = c - \sqrt{c\,(c - 1)}, \quad \beta = c + \sqrt{c\,(c - 1)},$$
takže $\alpha < c < \beta$. V intervalu $[-\infty, \alpha]$ funkce roste od $-\infty$ do hodnoty
$$f(\alpha) = 2c - 1 - 2\sqrt{c\,(c - 1)},$$
v intervalu $[\alpha, c]$ klesá od $f(\alpha)$ do $-\infty$, v intervalu $[c, \beta]$ klesá od ∞ do
$$f(\beta) = 2c - 1 + 2\sqrt{c\,(c - 1)},$$
v intervalu $[\beta, \infty]$ roste od $f(\beta)$ do ∞. Tedy $f(x)$ nabude všech hodnot, které neleží uvnitř intervalu $[f(\alpha), f(\beta)]$, jehož délka je $4\sqrt{c\,(c - 1)}$.

22·1. Jsou-li x, y rozměry obdélníka, c daný obsah, je $xy = c$ a délka úhlopříčky je
$$f(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{x^2}}.$$
Proměnná x nabývá všech kladných hodnot. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \sqrt{c}$; v tomto případě je $y = x$, t. j. obdélník s nejkratší úhlopříčkou je čtverec.

22·2. Je-li y základna a x výška obdélníka, c daný obvod, je
$$c = 2y + (2 + \tfrac{1}{2}\pi)\,x$$

a obsah je
$$f(x) = xy + \tfrac{1}{4}\pi x^2 = \tfrac{1}{2}x\,(c - 2x).$$
Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu
$$\left[0, \frac{2c}{\pi + 4}\right].$$
Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \tfrac{1}{4}c$, čemuž odpovídá $y = \dfrac{4 - \pi}{16} \cdot c$.

22·3. Znázorněme si prvou cestu osou x, druhou osou y, tedy křižovatku počátkem. Pohyb prvého auta nechť se při tomto znázornění jeví jako pohyb zleva doprava, pohyb druhého jako pohyb shora dolů. Nechť t znamená dobu v hodinách, při čemž $t = 0$ znamená dobu, kdy prvé auto projíždí křižovatkou, $t < 0$ dobu předtím, $t > 0$ dobu potom. Volíme-li 1 km za jednotku délky, je prvé auto znázorněno bodem $(x, 0)$ a druhé bodem $(0, y)$, kde
$$x = 60t, \quad y = 30 - 45t.$$
Vzdálenost aut je
$$f(t) = 15\sqrt{25t^2 - 12t + 4}.$$
Funkce $f(t)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $t = \tfrac{6}{25}$, čemuž odpovídá
$$x = 14{,}4, \quad y = 19{,}2.$$

22·4. Jest $x + y = 40$, $f(x) = x^2 + y^2 = 2\,(x^2 - 40x + 800)$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, 40]$. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = 20$, čemuž odpovídá $y = 20$.

22·5. Jest $x - y = 100$, $f(x) = x^2 - 5y^2 = -4x^2 + 1000x - 50\,000$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[100, \infty]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = 125$, čemuž odpovídá $y = 25$.

22·6. Je-li x základna, y rameno, c daný obvod, je $x + 2y = c$ a obsah je $f(x) = \tfrac{1}{2}x\sqrt{c^2 - 2cx}$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, \tfrac{1}{2}c]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \tfrac{1}{3} \cdot c$, čemuž odpovídá $y = x$.

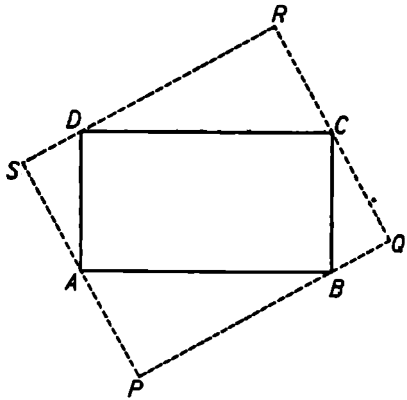
22·7. Je-li x základna, y výška obdélníka, je $x^2 + y^2 = 4r^2$ a obvod je $f(x) = 2\,(x + y) = 2\,[x + \sqrt{4r^2 - x^2}]$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, 2r]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = r.\sqrt{2}$, čemuž odpovídá $y = r\,.\,\sqrt{2}$; to je případ čtverce. Příslušná hodnota obvodu je $r\,.\,4\sqrt{2}$. Ostatní hodnoty obvodu vyplní vnitřek intervalu $[4r, r\,.\,4\sqrt{2}]$.

22·8. V obr. 26 je *ABCD* obdélník *M*, *PQRS* proměnný obdélník. Budiž

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a, \ \overline{AD} = \overline{BC} = b.$$

Z obrazce je patrno, že pravoúhlé trojúhelníky

$$APB, CRD \qquad (\alpha)$$



Obr. 26.

jsou shodné a rovněž pravoúhlé trojúhelníky

$$BQC, DSA; \qquad (\beta)$$

mimo to jsou trojúhelníky (α) podobné trojúhelníkům (β). Proto můžeme položiti

$$\overline{AP} = \overline{CR} = ax, \ \overline{BP} = \overline{DR} = ay,$$
$$\overline{BQ} = \overline{DS} = bx, \ \overline{CQ} = \overline{AS} = by.$$

Z Pythagorovy věty následuje $x^2 + y^2 = 1$. Obsah proměnného obdélníka je

$$f(x) = (ax + by)(bx + ay) = ab + (a^2 + b^2)\, x\sqrt{1 - x^2}.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu [0, 1]. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = 1 : \sqrt{2}$. Tomu odpovídá $y = x$, takže *PQRS* je čtverec.

22·9. Budiž r poloměr koule, x poloměr podstavy válce, $2y$ výška válce, takže $x^2 + y^2 = r^2$. Objem válce je $f(x) = 2\pi x^2 y = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, r]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro

$$x = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \, . \, r,$$

čemuž odpovídá

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \doteq 0{,}5773 \, . \, \frac{4}{3} \pi r^3.$$

22·10. Budiž x poloměr podstavy, y výška, c daný povrch, takže $c = 2\pi x (x + y)$. Objem je

$$f(x) = \pi x^2 y = \tfrac{1}{2} c x - \pi x^3.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $\left[0, \sqrt{\frac{c}{2\pi}}\right]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \sqrt{\frac{c}{6\pi}}$, čemuž odpovídá $y = 2x$.

22·11. Při stejném označení jako ve **22·9** je plášť $f(x) = 4\pi x \sqrt{r^2 - x^2}$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, čemuž odpovídá $y = x$.

22·12. Budiž a, b základna a výška daného trojúhelníka, dále u, v základna a výška obdélníka. Volíme-li odvěsny trojúhelníka za osy souřadné soustavy, má přímka, na které leží přepona, rovnici tvaru $y = kx + l$, kde konstanty k, l určíme odtud, že body $(a, 0)$, $(0, b)$ leží na přímce, takže rovnice přímky je $bx + ay = ab$. Této rovnici musí vyhovovati bod (u, v), takže $bu + av = ab$. Obsah obdélníka je $f(u) = uv = ba^{-1} . u (a - u)$, obvod je $\varphi(u) = 2 (u + v) = 2a^{-1} . [(a - b) u + ab]$. Proměnná u nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, a]$. Funkce $f(u)$ nabude své největší hodnoty pro $u = \frac{1}{2} a$; jest

$$f(\tfrac{1}{2} a) = \tfrac{1}{4} ab.$$

Naproti tomu $\varphi(u)$ stále roste (je-li $a > b$) nebo stále klesá (je-li $a < b$) a nemá tedy ani největší ani nejmenší hodnoty; je-li $a = b$, je $\varphi(u)$ konstanta.

22·13. Podle (22·4) a (22·5) je

$$f(t) = \overline{PQ} = \frac{b + at}{t} \sqrt{1 + t^2}.$$

Proměnná t nabývá všech kladných hodnot. Funkce $f(t)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $t = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; jest

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

22·14. Jsou-li x, y délky odvěsen, c daný obsah, tedy $xy = 2c$, je obvod

$$f(x) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 4c^2} + x^2 + 2c}{x}.$$

Proměnná x nabývá všech kladných hodnot. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \sqrt{2c}$, čemuž odpovídá $y = x$.

22·15. Je-li x strana čtverců, je objem

$$f(x) = (60 - 2x)(28 - 2x)\, x.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, 14]$ Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = 6$, čemuž odpovídá objem 4,608 dm³.

22·16. Je-li a vzdálenost světelných zdrojů, x vzdálenost osvětlovaného bodu od silnějšího zdroje, pak běží o funkci

$$f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(a - x)^2}.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, a]$. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \frac{2}{3} \, . \, a$.

22·17. Je-li x délka kusu, který se má ohnouti do čtverce, je součet obsahů čtverce a kruhu

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(a - x)^2}{4\pi}.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, a]$. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \frac{4a}{\pi + 4}$.

Jest

$$\frac{4a}{\pi + 4} \doteq 0{,}56 \, . \, a, \qquad a - \frac{4a}{\pi + 4} \doteq 0{,}44 \, . \, a.$$

27·1. Obsah $20\frac{1}{4}$; objem $312\frac{4}{7} \, . \, \pi$.

27·2. Obsah 192; objem 864π.

27·3. Obsah 34; objem $678\frac{1}{56} . \pi$.
27·4. Obsah $\frac{3}{8}\sqrt{3}$; objem $\frac{3}{16}\pi$.
27·5. Obsah $20\frac{5}{6}$; objem $104\frac{1}{6} . \pi$.
27·6. Obsah $\frac{3}{4}$; objem $\frac{9}{16}\pi$.
27·7. Obsah 12; objem 52π.
27·8. $10\frac{2}{3}$. **27·9.** $\frac{1}{6}$. **27·10.** $\frac{4}{15}$.
27·11. Délka $10\frac{7}{8}$; povrch $118\frac{33}{64} . \pi$.
27·12. Délka $2\frac{1}{16}$; povrch $4\frac{155}{256} . \pi$.
27·13. Délka $2 . \sqrt{3}$; povrch 3π.