DODATEK

33. Metoda postupného půlení. V textu této knížky jsme několikrát vynechali důkaz některých tvrzení a tyto vynechané důkazy mají býti v tomto Dodatku provedeny. Mnohá z těch tvrzení mají tento tvar: Je dán interval $[a, b]$ a tvrdí se, že v tomto intervalu existuje aspoň jedno číslo ξ, které má určitou vlastnost. Naše důkazy existence takových čísel ξ budou míti jednotný tvar, a úkolem tohoto odstavce je popis tohoto jednotného tvaru.

Budeme při tom užívati, jak jsme to vlastně v této knížce stále dělali, geometrického znázornění čísel body na přímce, kterou si myslíme vodorovnou a můžeme považovati za osu x. Určitý bod O na ose x je zvolen za počátek a geometrickým obrazem čísla x je bod $(x; 0)$, který budeme teď krátce nazývati bodem x. Geometrickým obrazem intervalu $[a, b]$ je úsečka na ose x, pro kterou jsou bod a a bod b krajními body; geometrickým obrazem určitého čísla z intervalu $[a, b]$ je určitý bod té úsečky.

Je-li $J = [\alpha, \beta]$ interval obsažený v intervalu $[a, b]$, pak bod $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ leží právě uprostřed intervalu J (t. j. uprostřed úsečky, která je geometrickým obrazem intervalu J). Bodem $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ se interval J rozdělí na dvě poloviny

$$J^* = \left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right], \qquad J^{**} = \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]. \tag{33·1}$$

Mysleme si nyní dán určitý předpis, který každému intervalu $J = [\alpha, \beta]$ obsaženému v základním intervalu $[a, b]$ přiřazuje j e d n u z obou polovin (33·1) intervalu J, kterou nazveme v y v o l e n o u p o l o v i n o u intervalu J. Pak si můžeme postupně utvořit intervaly

$$J_0, J_1, J_2, J_3, \ldots, \tag{33·2}$$

při čemž první interval J_0 je roven základnímu intervalu

$[a, b]$ a každý následující interval je vyvolenou polovinou intervalu bezprostředně předcházejícího. Z názoru je jasné, že existuje zcela určitý bod ξ, který leží současně ve všech intervalech (33·2). Tento bod ξ je geometrickým obrazem určitého čísla ξ. Toto číslo ξ nazveme kořenem výše uvedeného předpisu pro půlení intervalů J. Poloha bodu ξ v intervalu $[a, b]$ závisí na volbě toho předpisu a obratnou volbou předpisu dosáhneme v řadě případů, že číslo ξ bude míti právě tu vlastnost, jejíž existence se má prokázati.

Délky intervalů (33·2) jsou

$$b - a, \quad \frac{b-a}{2}, \quad \frac{b-a}{2^2}, \quad \frac{b-a}{2^3}, \ldots$$

Protože bod ξ leží ve všech intervalech (33·2), platí nerovnost

$$| x - \xi | \leqq \frac{b-a}{2^n}$$

pro každý bod x intervalu J_n. Avšak zřejmě je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Z toho následuje snadno, že každému číslu $\delta > 0$ lze přiřaditi index p tak, že, kdykoli $n \geqq p$, platí nerovnost

$$| x - \xi | < \delta$$

pro všecky body x intervalu J_n. Tento fakt nám bude užitečný.

Že kořen ξ předpisu pro půlení existuje, usoudili jsme z geometrického názoru. Je možné a účelné, dokázati existenci čísla ξ ryze aritmeticky a lze to provésti několika způsoby. Ale tím se v této knížce nehodláme zabývati.

34. Obecné vlastnosti spojitých funkcí. V celém odstavci předpokládáme, že je dána v intervalu $[a,b]$ spojitá funkce $f(x)$.

I. Je-li $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že $f(\xi) = 0$.

Budeme naopak předpokládati, že je $f(x) \neq 0$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$. Zavedeme si určitý předpis pro půlení intervalů a dokážeme, že musí býti přece jenom $f(\xi) = 0$, je-li ξ kořen předpisu.

Interval $J = [\alpha, \beta]$ nazveme významným, jsou-li splněny obě nerovnosti

$$f(\alpha) < 0, \; f(\beta) > 0 \tag{34·1}$$

a lhostejným v případě opačném. Jsou-li (33·1) obě poloviny intervalu J a je-li J lhostejný interval, prohlásíme J^* za vyvolenou polovinu. Je-li J významný interval, prohlásíme za vyvolenou polovinu: [1] J^*, když číslo

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{34·2}$$

je kladné, [2] J^{**}, když číslo (34·2) je záporné. Je zřejmé, že vyvolená polovina významného intervalu je zase významný interval. Protože interval $J_0 = [a, b]$ je významný, jsou všecky intervaly (33·2) významné. Budiž ξ kořen našeho předpisu pro půlení. Podle předpokladu je $f(\xi) \neq 0$. Dokážeme, že to není možné.

Je-li $f(\xi) \neq 0$, můžeme zvoliti číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $\varepsilon < |f(\xi)|$. Protože funkce $f(x)$ je pro $x = \xi$ spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že (pro čísla x z intervalu $[a, b]$)

$$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon. \tag{34·3}$$

Zvolíme-li index n dosti veliký, platí (viz odst. 33) nerovnost $|x - \xi| < \delta$ pro všecka x z intervalu J_n. Je-li $J_n = [\alpha, \beta]$, je tedy zejména

$$|f(\alpha) - f(\xi)| < \varepsilon, \quad |f(\beta) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Z toho plyne

$$f(\alpha) > f(\xi) - \varepsilon, \quad f(\beta) < f(\xi) + \varepsilon. \tag{34·4}$$

Avšak interval J_n je významný, takže platí (34·1). Ze (34·1) a (34·4) plyne

$$f(\xi) - \varepsilon < 0, \quad f(\xi) + \varepsilon > 0.$$

Protože $\varepsilon < |f(\xi)|$, je to nemožné, ať již $f(\xi) > 0$, či $f(\xi) < 0$.

II. Nabude-li funkce $f(x)$ hodnoty b_1 i hodnoty b_2 a je-li $b_1 < d < b_2$, nabude $f(x)$ také hodnoty d.

To plyne již zcela snadno z I. Podle předpokladu existuje interval $[a_1, a_2]$ obsažený v intervalu $[a, b]$ takový, že je buďto

$$f(a_1) = b_1, \; f(a_2) = b_2 \tag{34·5}$$

nebo

$$f(a_1) = b_2, \; f(a_2) = b_1. \tag{34·6}$$

Platí-li (34·5), soudíme takto: Funkce $\varphi(x) = f(x) - d$ je spojitá v intervalu $[a_1, a_2]$ a jest $\varphi(a_1) = b_1 - d < 0$, $\varphi(a_2) = b_2 - d > 0$, takže podle I existuje v intervalu $[a_1, a_2]$ (tím spíš v intervalu $[a, b]$) aspoň jedno číslo ξ, v němž $\varphi(\xi) = 0$, takže $f(\xi) = d$. Platí-li (34·6), soudíme stejně s tím rozdílem, že položíme $\varphi(x) = d - f(x)$.

III. V intervalu $[a, b]$ existuje aspoň jedno číslo ξ takové, že $f(x) \leqq f(\xi)$ pro každé x z intervalu $[a, b]$.

Je-li J interval obsažený v intervalu $[a, b]$ a je-li K interval obsažený v intervalu J, řekneme, že K je podstatná část intervalu J, existuje-li ke každému číslu u z intervalu J aspoň jedno číslo v intervalu K tak, že $f(v) \geqq f(u)$.

Buďte (33·1) obě poloviny intervalu J. Není-li J^* podstatná část intervalu J, pak musí v intervalu J existovat číslo r takové, že

$$f(x) < f(r) \tag{34·7}$$

pro každé x z intervalu J^*; číslo r nenáleží do intervalu J^* [neboť (34·7) neplatí pro $x = r$], takže r musí náležet do J^{**}. Není-li J^{**} podstatná část intervalu J, soudíme podobně, že v intervalu J^* existuje číslo s takové, že

$$f(x) < f(s) \tag{34·8}$$

pro každé x z intervalu J^{**}.

Z toho následuje, že aspoň jedna z obou polovin (33·1) je podstatnou částí intervalu J. Neboť jinak by existovalo i číslo r v intervalu J^{**} i číslo s v intervalu J^* a dostali bychom jednak $f(s) < f(r)$ ze (34·7), jednak $f(r) < f(s)$ ze (34·8), což si navzájem odporuje.

Z toho je patrné, že můžeme zvoliti takový předpis pro půlení, že vyvolená polovina každého intervalu J je podstatnou částí intervalu J. Budiž ξ kořen toho předpisu. Dokážeme, že pro každé x z intervalu J platí nerovnost $f(x) \leqq f(\xi)$, čímž budeme s důkazem hotovi.

Nechť naopak existuje v intervalu $J_0 = [a, b]$ číslo x_0 takové, že $f(x_0) > f(\xi)$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby bylo

$$f(x_0) > f(\xi) + \varepsilon. \tag{34·9}$$

Protože ve (33·2) následuje za každým intervalem jeho podstatná část, můžeme postupně stanoviti čísla

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

po jednom v každém z intervalů (33·2), tak že

$$f(x_0) \leqq f(x_1) \leqq f(x_2) \leqq f(x_3) \leqq \ldots$$

Podle (34·9) platí

$$f(x_n) > f(\xi) + \varepsilon \tag{34·10}$$

pro všecka n. Protože funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = \xi$, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že platí (34·3). Je-li index n dosti veliký, je patrně $| x_n - \xi | < \delta$ (neboť x_n a ξ leží v intervalu J_n), takže podle (34·3) je

$$| f(x_n) - f(\xi) | < \varepsilon,$$

což je ve sporu s nerovností (34·10).

IV. V intervalu $[a, b]$ existuje aspoň jedno číslo ξ takové, že $f(x) \geqq f(\xi)$ pro každé x z intervalu $[a, b]$.

To plyne ihned z III. Neboť $g(x) = - f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $[a, b]$, takže podle III existuje v $[a, b]$ číslo ξ takové, že pro každé x z intervalu $[a, b]$ platí $g(x) \leqq g(\xi)$ neboli $- f(x) \leqq - f(\xi)$ neboli $f(x) \geqq f(\xi)$.

V. Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Pak existují čísla $a_0, a_1, \ldots, a_m$ taková, že

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$$

a že platí nerovnost $| f(y_1) - f(y_2) | < \varepsilon$, kdykoli obě čísla y_1, y_2 náležejí do stejného z intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{m-1}, a_m].$$

Interval $J = [\alpha, \beta]$ obsažený v intervalu $[a, b]$ nazveme povolným, lze-li udati čísla $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ tak, že

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\mu-1} < \alpha_\mu = \beta \tag{34·11}$$

a že platí nerovnost $| f(y_1) - f(y_2) | < \varepsilon$, kdykoli obě čísla y_1, y_2 náležejí do stejného z intervalů

$$[\alpha_0, \ {}_1], [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, [\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu]. \tag{34·12}$$

Interval J nazveme vzpurným, není-li povolný, lze-li tedy při každé volbě čísel $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ vyhovujících nerovnostem (34·11) udati dvě čísla c_1, c_2 tak, že platí $| f(c_1) - f(c_2) | \geqq \varepsilon$, ač obě čísla c_1, c_2 náležejí do stejného z intervalů (34·12). Máme dokázati, že interval $[a, b]$ je povolný. Budeme naopak předpokládati, že interval $[a, b]$ je vzpurný, a ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Jsou-li obě poloviny (33·1) intervalu J povolné, je lehko dokázati, že také interval J je povolný. Z toho následuje, že lze udati takový předpis pro půlení, že vyvolená polovina každého vzpurného intervalu je zase vzpurný interval. Budiž ξ kořen toho předpisu. Protože interval $J_0 = [a, b]$ je vzpurný, musí všecky intervaly (33·2) býti vzpurné. Zvolme číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, že $2\varepsilon_1 < \varepsilon$. Protože funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = \xi$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že pro x z intervalu $[a, b]$ platí

$$| x - \xi | < \delta_1 \Rightarrow | f(x) - f(\xi) | < \varepsilon_1. \qquad (34\cdot13)$$

Volíme-li n dosti veliké, bude délka intervalu J_n menší než δ_1. Interval J_n je vzpurný, takže v něm jistě existují čísla c_1, c_2 taková, že $| f(c_1) - f(c_2) | \geqq \varepsilon$. Protože také ξ náleží do J_n a protože J_n má délku menší než δ_1, jest $| c_1 - \xi | < \varepsilon_1$, $| c_2 - \xi | < \varepsilon_1$, takže podle (34·13) je

$$| f(c_1) - f(\xi) | < \varepsilon_1, \quad | f(\xi) - f(c_2) | = | f(c_2) - f(\xi) | < \varepsilon_1.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} | f(c_1) - f(c_2) | &= | [f(c_1) - f(\xi)] + [f(\xi) - f(c_2)] | \leqq \\ &\leqq | f(c_1) - f(\xi) | + | f(\xi) - f(c_2) | < 2\varepsilon_1 < \varepsilon \end{aligned}$$

a to je nemožné.

VI. **Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Pak existuje číslo $\delta > 0$ takové, že $| f(z_1) - f(z_2) | < \varepsilon$, kdykoli z_1, z_2 jsou dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $| z_1 - z_2 | < \delta$.**

Zvolme číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, že $2\varepsilon_1 < \varepsilon$. Podle V existují čísla $a_0, a_1, \ldots, a_m$ taková, že

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$$

a že $| f(y_1) - f(y_2) | < \varepsilon_1$, kdykoli y_1, y_2 jsou dvě čísla ze stejného z intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{m-1}, a_m]. \qquad (34\cdot14)$$

Zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby délka každého z intervalů (34·14) byla větší než δ. Buďtež z_1, z_2 dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $| z_1 - z_2 | < \delta$. Jsou-li obě čísla z_1, z_2 ve stejném z intervalů (34·14), je $| f(z_1) - f(z_2) | < \varepsilon_1$, tedy tím spíš $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Nejsou-li obě čísla z_1, z_2 ve stejném z intervalů (34·14), pak následuje z volby čísla δ, že interval, v kterém je z_1, a interval, v kterém je z_2, musí míti společný bod z_0. Pak je však $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon_1$, $|f(z_0) - f(z_2)| < \varepsilon_1$, tedy

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |[f(z_1) - f(z_0)] + [f(z_0) - f(z_2)]| \leqq$$
$$\leqq |f(z_1) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(z_2)| < 2\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

35. Obecné vlastnosti derivace. I. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Budiž $f(a) = f(b)$. V každém čísle x uvnitř intervalu $[a, b]$ nechť má funkce $f(x)$ derivaci. Pak existuje uvnitř $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Podle III v odst. 34 existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ_1 takové, že

$$f(x) \leqq f(\xi_1) \tag{35·1}$$

pro každé x z intervalu $[a, b]$. Předpokládejme nejprve, že ξ_1 leží uvnitř $[a, b]$! Pak je

$$\lim_{x \to \xi_1} \frac{f(x) - f(\xi_1)}{x - \xi_1} = f'(\xi_1). \tag{35·2}$$

Pro každé x z intervalu $[a, b]$ čitatel zlomku

$$\frac{f(x) - f(\xi_1)}{x - \xi_1} \tag{35·3}$$

je buďto záporný nebo rovný nule. Pro x menší než ξ_1 je jmenovatel zlomku (35·3) záporný, tedy je ten zlomek kladný nebo 0. Proto ze (35·2) plyne, že $f'(\xi_1) \geqq 0$. Pro x větší než ξ_1 je jmenovatel zlomku (35·3) kladný, tedy je ten zlomek záporný. Proto ze (35·2) plyne, že $f'(\xi_1) \leqq 0$. Jelikož už víme, že $f'(\xi_1) \geqq 0$, musí býti $f'(\xi_1) = 0$. Tedy pro případ, že ξ_1 leží uvnitř $[a, b]$, je důkaz hotov.

Podle IV v odst. 34 existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ_2 takové, že

$$f(x) \geqq f(\xi_2) \tag{35·4}$$

pro každé x z intervalu $[a, b]$. Předpokládáme-li, že ξ_2 leží uvnitř $[a, b]$, dokážeme cestou zcela stejnou, jakou jsme šli u čísla ξ_1, že je $f'(\xi_2) = 0$.

Zbývá tedy pouze případ, že žádné z obou čísel ξ_1, ξ_2 neleží uvnitř $[a, b]$. Protože $f(a) = f(b)$, je $f(\xi_1) = f(\xi_2)$. Protože pro každé x z intervalu $[a, b]$ platí obě nerovnosti (35·1) a (35·4), je $f(x)$ konstanta. Pak je však $f'(\xi) = 0$ pro **každé** ξ uvnitř $[a, b]$.

II. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. V každém čísle x uvnitř intervalu $[a, b]$ nechť má funkce $f(x)$ derivaci. Pak existuje uvnitř $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \, . \, (b - a). \tag{35·5}$$

Zvolíme-li si nějakou konstantu c, můžeme utvořiti novou funkci

$$F(x) = f(x) - c \, . \, x. \tag{35·6}$$

Zároveň s funkcí $f(x)$ je také $F(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. V každém čísle x uvnitř intervalu $[a, b]$ má také funkce $F(x)$ derivaci, a to

$$F'(x) = f'(x) - c. \tag{35·7}$$

Volíme-li konstantu c tak, aby bylo

$$F(a) = F(b), \tag{35·8}$$

můžeme na funkci $F(x)$ užíti věty I, podle které existuje uvnitř intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že

$$F'(\xi) = 0. \tag{35·9}$$

Dosadíme-li do (35·8) ze (35·6), dostaneme rovnici pro c, z které snadno vypočteme

$$c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{35·10}$$

Ze (35·7), (35·9) a (35·10) plyne (35·5).

III. Pro $x = a$, pro $x = b$ a pro každé x uvnitř intervalu $[a, b]$ nechť má funkce $f(x)$ derivaci. Nechť je $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Pak existuje uvnitř intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz je velmi podobný důkazu věty I. Podle věty IX z odst. 15 je $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$, takže podle věty III z odst. 34 existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že

$$f(x) \leq f(\xi) \tag{35·11}$$

pro každé x z intervalu $[a, b]$. Leží-li ξ uvnitř $[a, b]$, dokáže se docela stejně jako v důkaze věty I, že $f'(\xi) = 0$. Tedy stačí dokázat, že nemůže býti ani $\xi = a$ ani $\xi = b$.

Kdyby bylo $\xi = a$, pak by podle (35·11) bylo

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqq 0$$

pro všecka $x \neq a$ z intervalu $[a, b]$. Protože $f'(a) > 0$, je to zřejmě nemožné. Kdyby bylo $\xi = b$, pak by podle (35·11) bylo

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geqq 0$$

pro všecka $x \neq b$ z intervalu $[a, b]$. Protože $f'(b) < 0$, je to zřejmě nemožné.

IV. Nechť funkce $f(x)$ má uvnitř intervalu J všude derivaci. Nabude-li derivace $f'(x)$ uvnitř J hodnot b_1, b_2 a je-li $b_1 < d < b_2$, nabude $f'(x)$ uvnitř J také hodnoty d.

Podle předpokladu existuje uvnitř intervalu J interval $[a_1, a_2]$ takový, že je buďto

$$f'(a_1) = b_2,\ f'(a_2) = b_1 \tag{35·12}$$

nebo

$$f'(a_1) = b_1,\ f'(a_2) = b_2. \tag{35·13}$$

Platí-li (35·12), soudíme takto: Funkce $\varphi(x) = f(x) - d \,.\, x$ má derivaci pro $x = a_1$, pro $x = a_2$ i pro každé x uvnitř intervalu $[a_1, a_2]$; mimo to je

$$\varphi'(a_1) = f'(a_1) - d = b_2 - d > 0,$$
$$\varphi'(a_2) = f'(a_2) - d = b_1 - d < 0.$$

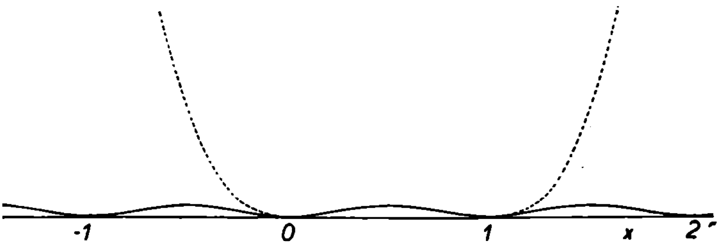
Tedy podle III existuje uvnitř $[a_1, a_2]$, tedy uvnitř J, aspoň jedno číslo ξ takové, že $0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - d$, tedy $f'(\xi) = d$. Platí-li (35·13), soudíme stejně s tím rozdílem, že položíme $\varphi(x) = d \,.\, x - f(x)$.

Poznámka. Je-li derivace $f'(x)$ spojitou funkcí, je věta IV důsledkem věty II z odst. 35. Ale věta IV se nedá úplně převésti na onu větu, protože existují funkce $f(x)$, které mají všude derivaci, při čemž však tato derivace není všude spojitá.

Příklad takové funkce $f(x)$ si nyní udáme. Vyjdeme od funkce $\varphi(x) = x^2 (1 - x)^2$. Tato funkce je spojitá a má derivaci $\varphi'(x) = 2x (1 - x) (1 - 2x)$. Jest

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$$
$$0 \leqq x \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq \varphi(x) < 1.$$

Nyní definujeme novou funkci $F(x)$ takto. V intervalu $[0, 1]$ budiž $F(x) = \varphi(x)$. Pro ostatní x budiž $F(x)$ definována tak, aby byla periodická s periodou 1, t. j. aby platila identita $F(x + 1) = F(x)$. Viz obr. 25, v kterém je graf funkce $F(x)$ vytažen plně a graf funkce $\varphi(x)$ vně intervalu $[0, 1]$ čárkovaně.



Obr. 25.

Funkce $F(x)$ má všude derivaci. Nyní definujeme funkci $f(x)$ takto: Jest $f(0) = 0$ a pro $x \neq 0$ je

$$f(x) = x^2 F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pak funkce $f(x)$ má všude derivaci; jest $f'(0) = 0$ a pro $x \neq 0$ je

$$f'(x) = 2x F\left(\frac{1}{x}\right) - F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pro $x = 0$ není derivace $f'(x)$ spojitá. Podrobné důkazy učiněných tvrzení si čtenář snadno sestaví sám.

36. Důkaz existence integrálu. Než přistoupíme k vlastnímu předmětu tohoto odstavce, dokážeme si větu I, která nemá s pojmem integrálu nic společného, ale které potom užijeme na integrál. Věta I je přes svou jednoduchost ve vyšší matematice velmi užitečná, takže stojí za to, abychom si ji zde výslovně formulovali a podrobně dokázali, ač jí v této knížce užijeme pouze jednou.

I. Jsou-li dána čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taková, že

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \tag{36·1}$$

a existuje-li číslo b, které je větší než všecka čísla a_n, pak existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c. \tag{36·2}$$

Všecka čísla a_n jsou v intervalu $[a_1, b]$. Na tento základní interval užijeme metody postupného půlení. Interval $J = [\alpha, \beta]$ obsažený v základním intervalu nazveme významným, lze-li mu přiřaditi index k tak, že a_n leží v J pro všecka $n > k$. Jsou-li (33·1) obě poloviny významného intervalu J, je buďto J^* nebo J^{**} významný interval. Ježto totiž J je významný, existuje index k takový, že a_n leží v J pro všecka $n > k$; když z těchto a_n žádné neleží v J^{**}, leží všecka v J^*, takže J^* je významný interval; když však existuje index $l > k$ takový, že a_l leží v J^{**}, následuje ze (36·1), že a_n leží v J^{**} pro všecka $n > l$, takže J^{**} je významný interval.

Tedy můžeme určit takový předpis pro půlení, že vyvolená polovina významného intervalu je zase významný interval. Budiž c kořen toho předpisu. Dokážeme, že platí (36·2). Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje index k takový, že

$$n > k \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon. \tag{36·3}$$

Protože interval $J_0 = [a_1, b]$ je zřejmě významný, jsou všecky intervaly (33·2) významné. Zvolíme-li dosti veliký index m, bude délka intervalu J_m menší než ε. Protože J_m je významný interval, existuje index k takový, že a_n leží v J_m, pro všecka $n > k$. Protože také c leží v J_m a protože J_m má délku menší než ε, platí (36·3).

II. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Pak existuje integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Máme dokázati, že existuje číslo c s touto vlastností: Každému

$\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ tak, že $|S - c| < \varepsilon$ pro všecky vytvořující součty S s normou menší než δ.

Vyjdeme od vytvořujících součtů

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, \tag{36·4}$$

které jsou takto definovány. Vytvořující součet S_n vznikne tak, že rozdělíme interval $[a, b]$ na 2^n stejných intervalů

$$\left[a, a + \frac{b-a}{2^n}\right], \left[a + \frac{b-a}{2^n}, \quad a + 2 \, . \, \frac{b-a}{2^n}\right], \ldots, \left[a + (2^n - 1)\frac{b-a}{2^n}, b\right] \tag{36·5}$$

a potom si v každém intervalu zvolíme číslo tak, aby hodnota funkce $f(x)$ v žádnem jiném čísle toho intervalu nebyla menší než hodnota ve zvoleném čísle; taková volba je možná podle věty IV z odst. 34. Tedy S_n je součet 2^n sčítanců, z nichž každý odpovídá jednomu z intervalů (36·5) a má tvar

$$f(\xi) \, . \, \frac{b-a}{2^n}, \tag{36·6}$$

kde ξ je číslo zvolené v příslušném intervalu (36·5) tak, že

$$f(x) \geqq f(\xi) \tag{36·7}$$

pro každé x z toho intervalu. Když od indexu n přejdeme k indexu $n + 1$, musíme nahraditi každý interval (36·5) dvěma intervaly, tedy každého sčítance (36·6) součtem dvou sčítanců

$$f(\xi') \, . \, \frac{b-a}{2^{n+1}} + f(\xi'') \, . \, \frac{b-a}{2^{n+1}}. \tag{36·8}$$

Podle (36·7) je

$$f(\xi') \geqq f(\xi), \; f(\xi'') \geqq f(\xi),$$

takže číslo (36·8) je větší než číslo (36·6) nebo je mu rovné. Protože nerovnosti je dovoleno sčítati, je $S_{n+1} \geqq S_n$ pro každé n.

Z věty III v odst. 34 následuje, že existuje číslo v takové, že $f(x) < v$ pro všecka x z intervalu $[a, b]$. Zřejmě je $S < v \, . \, (b - a)$ pro každý vytvořující součet S. Zejména je $S_n < v \, (b - a)$ pro všecka n. Protože je $S_n \leqq S_{n+1}$ pro všecka n, plyne z I, že existuje číslo c takové, že

$$\lim_{n \to \infty} S_n = c. \tag{36·9}$$

Zbývá dokázati, že takto definované číslo c je integrálem funkce $f(x)$ od a do b, že tedy lze každému číslu $\varepsilon > 0$ přiřaditi číslo $\delta > 0$ tak, že

$$| S - c | < \varepsilon \tag{36·10}$$

pro všecky vytvořující součty S s normou menší než δ. Budiž tedy dáno číslo $\varepsilon > 0$. Zvolme číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, aby bylo

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 (b - a) < \varepsilon. \tag{36·11}$$

Podle věty VI z odst. 34 existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že $| f(z_1) - f(z_2) | < \varepsilon_1$, kdykoli z_1, z_2 jsou dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $| z_1 - z_2 | < \delta_1$. Podle (36·9) existuje index k takový, že

$$n > k \Rightarrow | S_n - c | < \varepsilon_1.$$

Zvolme index n tak, aby předně bylo $n > k$, tedy

$$| S_n - c | < \varepsilon_1 \tag{36·12}$$

a aby za druhé bylo

$$\frac{b - a}{2^n} < \delta_1. \tag{36·13}$$

Zvolme kladné číslo δ menší než δ_1 a tak malé, že jsou-li y_1, y_2 dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $| y_1 - y_2 | < \delta$, je mezi nimi nejvýš jedno z čísel

$$a + \frac{b - a}{2^n}, a + 2\frac{b - a}{2^n}, \ldots, a + (2^n - 1)\frac{b - a}{2^n}. \tag{36·14}$$

Budiž nyní S vytvořující součet s normou menší než δ. Tento součet přísluší jakýmsi intervalům

$$[\alpha_0, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, [\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu], \tag{36·15}$$

které dohromady tvoří interval $[a, b]$. Délky intervalů (36·15) jsou vesměs menší než δ, a proto uvnitř každého z nich je nejvýš jedno z čísel (36·14). Vytvořující součet S vznikne, když si v každém z intervalů (36·15) zvolíme po jednom čísle. Označme S^* vytvořující součet, který přísluší týmž intervalům (36·15), ale je tvořen tak, že když uvnitř některého intervalu (36·15) je některé z čísel (36·14), užijeme právě tohoto čísla při tvoření součtu S^*. Je tedy

$$S = f(\xi_1) \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + f(\xi_2) \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + f(\xi_\mu) \cdot (\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}),$$
$$S^* = f(\xi^*_1) \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + f(\xi^*_2) \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + f(\xi^*_\mu) \cdot (\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}),$$

kde ξ_1 a ξ^*_1 jsou v intervalu $[\alpha_0, \alpha_1]$, ξ_2 a ξ^*_2 v intervalu $[\alpha_1, \alpha_2]$ atd. Protože délky intervalů (36·15) jsou menší než δ, tedy menší než δ_1, jsou čísla $|\xi_1 - \xi^*_1|$, $|\xi_2 - \xi^*_2|$ atd. menší než δ_1, takže čísla $|f(\xi_1) - f(\xi^*_1)|$, $|f(\xi_2) - f(\xi^*_2)|$ atd. jsou menší než ε_1. Proto je

$$|S - S^*| < \varepsilon_1 (b - a). \tag{36·16}$$

Nyní každý z těch intervalů (36·15), uvnitř něhož je jedno z čísel (36·14), rozdělme tímto číslem na dva menší intervaly. Tím vzniknou z intervalů (36·15) nové intervaly

$$[\beta_0, \beta_1], [\beta_1, \beta_2], \ldots, [\beta_{\nu-1}, \beta_\nu] \tag{36·17}$$

a je patrné, že vytvořující součet S^* se dá psáti ve tvaru

$$S^* = f(\eta_1)(\beta_1 - \beta_0) + f(\eta_2)(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + f(\eta_\nu)(\beta_\nu - \beta_{\nu-1}),$$

kde η_1 je číslo z intervalu $[\beta_0, \beta_1]$, η_2 je číslo z intervalu $[\beta_1, \beta_2]$ atd. Na druhé straně je S_n vytvořující součet patřící intervalům

$$\left[a, a + \frac{b-a}{2^n}\right], \left[a + \frac{b-a}{2^n}, a + 2\frac{b-a}{2^n}\right], \ldots,$$
$$\left[a + (2^n - 1)\frac{b-a}{2^n}, b\right] \tag{36·18}$$

a každý interval (36·18) je patrně součet několika intervalů (36·17). Proto lze psáti S_n ve tvaru

$$S_n = f(\eta'_1)(\beta_1 - \beta_0) + f(\eta'_2)(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + f(\eta'_\nu)(\beta_\nu - \beta_{\nu-1}),$$

při čemž η'_1 je číslo z toho intervalu (36·18), v kterém je obsažen interval $[\beta_0, \beta_1]$, η'_2 je číslo z toho intervalu (36·18), v kterém je obsažen interval $[\beta_1, \beta_2]$ atd. Čísla $|\eta_1 - \eta'_1|$, $|\eta_2 - \eta'_2|$ atd. jsou zřejmě nejvýš tak veliká, jaká je společná délka intervalů (36·18), takže podle (36·13) jsou všecka ta čísla menší než δ_1. Proto jsou čísla $|f(\eta_1) - f(\eta'_1)|$, $|f(\eta_2) - f(\eta'_2)|$ atd. menší než ε_1, takže

$$|S^* - S_n| < \varepsilon_1 (b - a). \tag{36·19}$$

Ze (36·11), (36·12), (36·16) a (36·19) plyne (36·10).