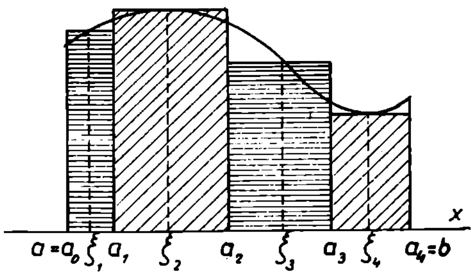
23. Pojem integrálu. Poznali jsme na řadě příkladů užitečnost pojmu derivace. Nyní se obrátíme ke studiu jiného neméně důležitého pojmu z nauky o funkcích, totiž pojmu integrálu.

Budiž dána v nějakém intervalu $[a, b]$ spojitá funkce $f(x)$; předpokládejme prozatím, že všecky hodnoty funkce $f(x)$ jsou kladné. Integrálem funkce $f(x)$ od a do b rozumíme obsah plochy, omezené grafem funkce



Obr. 20.

$f(x)$, svislými přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x; příklad takové plochy je vyznačen v obr. 20. Abychom obsah té plochy přibližně vypočetli, nahradíme si ji jinou plochou, která se od ní jen nepatrně liší, ale jejíž obsah se dá pohodlně počítati. Za tím účelem si rozdělíme interval $[a, b]$ na velký počet n malých intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n], \tag{23·1}$$

kde

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b. \tag{23·2}$$

[V obr. 20 je voleno $n = 4$, tedy poměrně malá hodnota, aby byl obrazec zřetelný.] V každém z intervalů (23·1) si zvolíme určité číslo: číslo ξ_1 v intervalu $[a_0, a_1]$, číslo ξ_2

v intervalu $[a_1, a_2], \ldots,$ číslo ξ_n v intervalu $[a_{n-1}, a_n]$. [V obr. 20 je každé z těchto čísel uvnitř příslušného intervalu, ale to není nutné.] Přímkami

$$x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_{n-1}$$

se rozdělí plocha, o jejíž obsah nám běží, na úzké pruhy, a z názoru je patrné, že můžeme přibližně nahraditi každý ten pruh obdélníkem, při čemž výška prvého obdélníka je $f(\xi_1)$, výška druhého je $f(\xi_2)$ atd. Všecky tyto obdélníky dohromady tvoří plochu (vyšrafovanou v obr. 20), jejíž obsah je přibližně takový jako obsah původní plochy. Protože obsah obdélníka je součin výšky a základny, je obsah šrafované plochy roven číslu

$$S = f(\xi_1) \cdot (a_1 - a_0) + f(\xi_2) \cdot (a_2 - a_1) + \cdots + \\ + f(\xi_n) \cdot (a_n - a_{n-1}). \tag{23·3}$$

Tedy je náš integrál přibližně rovný součtu (23·3), ovšem za předpokladu, že všecky diference

$$a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1} \tag{23·4}$$

jsou dosti malé. Integrál funkce $f(x)$ od a do b značíme symbolem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x: \tag{23·5}$$

čísla a, b se jmenují **meze integrálu**; a je **dolní mez**, b je **horní mez**.

Znak (23·5) připomíná svým tvarem součet (23·3). Značka $\int$ vznikla z písmene S, tedy ze začátečního písmene slova summa (součet). Symbol $f(x)\,\mathrm{d}x$ připomíná svým tvarem jednotlivé sčítance v součtu (23·3): d je začáteční písmeno slova diference a každý sčítanec ve (23·3) je součin, jehož prvý faktor je hodnota funkce $f(x)$ v určitém čísle x, a druhý je diference mezi dvěma hodnotami nezávisle proměnné x.

Geometrická úvaha, kterou jsme právě provedli, vede k aritmetické definici integrálu, kterou si nyní hodláme vysloviti. O funkci $f(x)$ budeme předpokládati pouze, že je spojitá; předpoklad, že všecky hodnoty funkce $f(x)$ jsou kladné, byl výše učiněn pouze proto, aby měl integrál jednoduchý geometrický význam; pro aritmetickou definici je tento předpoklad zbytečný a proto jej opustíme.

Nechtějíce vyslovovati definici integrálu jediným nepřehledně dlouhým souvětím, počneme tím, že nazveme vytvořujícím součtem každý součet tvaru (23·3). Je-li dána funkce $f(x)$ a interval $[a, b]$, je těch vytvořujících součtů ještě nekonečně mnoho. Abychom dostali určitý vytvořující součet, musíme si předně zvoliti čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (v libovolném konečném počtu) tak, aby platily nerovnosti (23·2), a za druhé si musíme zvolit ještě čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, po jednom v každém z intervalů (23·1); je-li tato dvojí volba provedena, máme určitý vytvořující součet (23·3). Vytvořující součty jsou, jak je již z výše řečeného patrné, aproximacemi integrálu; ale ovšem není každá aproximace stejně dobrá. Na čem záleží, jest, jak dlouhé jsou intervaly (23·1), t. j. jak velké jsou diference (23·4); dobrá aproximace se dá očekávat pouze, jsou-li všecky diference (23·4) malé. Proto si nazveme normou vytvořujícího součtu (23·3) největší ze všech diferencí (23·4); je-li tedy δ kladné číslo, pak výrok, že vytvořující součet (23·3) má normu menší než δ, znamená, že všecky diference (23·4) jsou menší než δ. Po této přípravě můžeme aritmetickou definici integrálu vysloviti už velmi stručně. Integrál spojité funkce $f(x)$ od a do b, značený symbolem (23·5), je číslo, které má následující vlastnost. Je-li dáno libovolné kladné číslo ε, existuje kladné číslo δ takové, že platí nerovnost

$$\left| S - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \qquad (23·6)$$

pro všecky vytvořující součty S, jejichž norma je menší než δ.

Integrál je tedy limita, rozumíme-li obecně limitou číslo, pro které není přímo dán přesný způsob jeho výpočtu, nýbrž místo toho způsob, jak je počítati přibližně, při čemž je tento způsob tak pružný, že lze podle něho provésti počet tak, aby byla chyba menší než libovolně předepsané kladné číslo. Pod tuto obecnou definici limity spadají ovšem také limity tvaru $\lim_{x \to a} F(x)$ definované v odst. 13. Mezi oněmi limitami na jedné straně a integrálem na druhé straně je velmi podstatný rozdíl; hodnota limity $\lim_{x \to a} F(x)$ závisí pouze na hodnotách, kterých funkce $F(x)$ nabývá v libovolně malé předepsané blízkosti čísla $x = a$, kdežto hodnota integrálu závisí podstatně na průběhu funkce v celém intervalu $[a, b]$.

V našem dosavadním výkladu o integrálu je velmi podstatná mezera; je totiž nutné, aby se přesně dokázalo, že při libovolně dané spojité funkci $f(x)$ v intervalu $[a, b]$ opravdu existuje číslo (23·5) vyhovující podmínce naznačené nerovností (23·6). Tento důkaz bude proveden v Dodatku.

24. Jednoduché věty o integrálu. Je-li především $f(x) = c$ konstanta, jsou zřejmě všecky vytvořující součty rovné číslu $c\,(b - a)$, takže

$$\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c\,(b - a). \tag{24·1}$$

I. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li c konstanta, jest

$$\int_a^b c\, f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neboť když při určité volbě čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \tag{24·2}$$

jsou S a S^* vytvořující součty patřící po řadě funkci $f(x)$ a funkci $c\,f(x)$, je zřejmě $S^* = cS$.

II. Jsou-li $f_1(x)$ a $f_2(x)$ spojité funkce v intervalu $[a, b]$, jest

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neboť když při určité volbě čísel (24·2) jsou S_1, S_2, S a S^* vytvořující součty patřící po řadě funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, je zřejmě $S = S_1 + S_2$, $S^* = S_1 - S_2$.

Právě vyslovené věty I a II o integrálu jsou zcela obdobné větám I a II o derivaci (viz odst. 16). T. zv. integrální počet by byl mnohem jednodušší, kdyby existovala také věta o integrálu obdobná větě III o derivaci z odst. 16; ale není žádného vzorce, podle něhož by se dal počítati integrál

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

známe-li hodnoty integrálů

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

III. Budiž $a < b < c$. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, c]$, jest

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{24·3}$$

Protože funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $[a, c]$, je zřejmě také spojitá v intervalu $[a, b]$ i v intervalu $[b, c]$. Důkaz vztahu (24·3) provedeme nepřímo, t. j. učiníme předpoklad, že tento vztah je nesprávný, a ukážeme, že tento předpoklad vede k nemožnému důsledku. Neplatí-li vztah (24·3), existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left| \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| > 3\varepsilon.$$

Podle definice integrálu existují kladná čísla δ_1, δ_2, δ_3 taková, že

$$\left| S_1 - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \quad \left| S_2 - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \quad \left| S_3 - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

jsou-li S_1, S_2, S_3 vytvořující součty patřící po řadě intervalům $[a, b]$, $[b, c]$, $[a, c]$ s normou menší než δ_1 u prvého, menší než δ_2 u druhého a menší než δ_3 u třetího. Zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo menší než každé z čísel $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Je-li S_1 vytvořující součet patřící intervalu $[a, b]$, je-li S_2 vytvořující součet patřící intervalu $[b, c]$ a jsou-li normy obou menší než δ, je zřejmě $S_1 + S_2$ vytvořující součet patřící intervalu $[a, c]$ a také jeho norma je menší než δ. Proto je

$$\left| S_1 - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \quad \left| S_2 - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - (S_1 + S_2) \right| < \varepsilon.$$

Protože pak absolutní hodnota součtu je nejvýš rovna součtu absolutních hodnot sčítanců (viz odst. 14, XVII), jest

$$\left| \left[S_1 - \int_a^b f(x)\,dx\right] + \left[S_2 - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right] + \left[\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - (S_1 + S_2)\right] \right| < 3\varepsilon,$$

neboli

$$\left| \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| < 3\varepsilon$$

a to je právě nemožné.

IV. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, jest

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

Neboť pro každý vytvořující součet S zřejmě platí nerovnost $S \geqq 0$.

V. Jsou-li $f_1(x), f_2(x)$ spojité funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li $f_1(x) \leqq f_2(x)$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, jest

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle IV je totiž

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \geqq 0$$

a podle II je

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \geqq \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

VI. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a jsou-li c_1, c_2 čísla taková, že

$$c_1 \leqq f(x) \leqq c_2$$

pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, jest

$$c_1(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq c_2(b-a).$$

Podle V je totiž

$$\int_a^b c_1\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b c_2\,dx$$

a podle (24·1) je

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \quad \int_a^b d\,.\,dx = d(b-a).$$

VII. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, není-li však identicky $f(x) = 0$ v celém intervalu $[a, b]$ pak jest

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{24·4}$$

Kdyby bylo $f(x) = 0$ všude uvnitř intervalu $[a, b]$, pak by ze spojitosti funkce $f(x)$ plynulo $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Proto si můžeme zvoliti číslo c tak, že $a < c < b$, $f(x) > 0$. Dále si zvolme číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $f(c) > 2\varepsilon$. Protože funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = c$, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon. \tag{24·5}$$

Interval $[a, b]$ si můžeme rozděliti na tři intervaly

$$[a, c_1],\ [c_1, c_2],\ [c_2, b]$$

tak, že číslo c je uvnitř intervalu $[c_1, c_2]$ a že je tento interval tak malý, že $|x - c| < \delta$ pro každé x z intervalu $[c_1, c_2]$. Podle III je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{c_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle IV je však

$$\int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0, \quad \int_{c_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_{c_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{24·6}$$

Je-li x v intervalu $[c_1, c_2]$, je $|x - c| < \delta$, takže podle (24·5) je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, tedy $f(c) - f(x) < \varepsilon$, takže $f(c) < f(x) + \varepsilon$; avšak číslo ε bylo voleno tak, že $2\varepsilon < f(c)$; proto je $2\varepsilon < f(x) + \varepsilon$, tedy $\varepsilon < f(x)$ pro každé x z intervalu $[c_1, c_2]$. Proto soudíme ze VI, že

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \varepsilon\,(c_2 - c_1) > 0. \tag{24·7}$$

Ze (24·6) a (24·7) následuje (24·4).

Věta VII je zlepšení věty IV; podobně bychom mohli nyní zlepšiti také věty V a VI.

V integrálu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{24·8}$$

jsme dosud stále předpokládali $a < b$. Je účelné dáti symbolu (24·8) také význam, když $a > b$ nebo $a = b$. To učiníme předpisem

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{24·9}$$

neboli slovy: vyměníme-li meze, změní integrál znamení. Když do (24·9) dosadíme $a = b$, vidíme, že musí býti

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{24·10}$$

neboli slovy: integrál od a do a je roven nule.

VIII. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu J. Jsou-li a, b, c tři libovolná čísla z intervalu J, jest

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{24·11}$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{24·12}$$

Podle (24·9) plyne ze vzorců (24·11) a (24·12) jeden z druhého, takže stačí, dokážeme-li jeden z nich. Podle (24·9) a (24·10) je vzorec (24·11) jistě správný, je-li $a = b$ nebo $a = c$ nebo $b = c$. Předpokládejme tedy, že a, b, c jsou tři různá čísla z intervalu J. Čísla a, b, c můžeme psáti v šesti různých pořádcích

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Snadno se přesvědčíme, že změna pořádku nemá na vzorec (24·11) jiného vlivu, než že se buďto pouze sčítanci mezi sebou zaměnní nebo že se vedle této záměny ještě u každého sčítance změní znamení. Proto stačí provésti důkaz za předpokladu $a < b < c$. Ale za tohoto předpokladu je vzorec (24·12) správný podle III.

Poznámka. Ze (24·9) a (24·10) plyne, že vzorec (24·1) zůstane v platnosti, i když $a > b$ nebo $a = b$. Totéž platí o vzorcích z vět I a II.

25. Souvislost mezi derivací a integrálem. Nyní si dokážeme, že integrování není nic jiného než obrácený výkon k derivování. Budiž $f(x)$ spojitá funkce uvnitř intervalu J. Zvolme si určité číslo a z intervalu J. Proměnná t nechť nabývá všech hodnot z vnitřku intervalu J. Pak si můžeme zavésti novou funkci $F(t)$ vzorcem

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{25·1}$$

O této funkci si nyní dokážeme, že má uvnitř intervalu J všude derivaci, která se počítá podle vzorce

$$F'(t) = f(t). \tag{25·2}$$

Za tím účelem si zvolme uvnitř intervalu J libovolné číslo b. Máme dokázati, že

$$\lim_{t \to b} \frac{F(t) - F(b)}{t - b} = f(b).$$

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(t) - F(b)}{t - b} - f(b) \right| < \varepsilon. \tag{25·3}$$

Zvolme kladné číslo $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Ježto funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = b$, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon_1. \tag{25·4}$$

Toto číslo δ má už vlastnost (25·3). Neboť nechť $0 < |t - b| < < \delta$. Ježto

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, \quad F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

podle VIII v odst. 24 je

$$F(t) - F(b) = \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle (24·1) (viz též poznámku na konci odst. 24) je však

$$f(b)\,(t - b) = \int_b^t f(b)\,\mathrm{d}x$$

Podle II v odst. 24 (viz zase touž poznámku) je tedy

$$\frac{F(t) - F(b)}{t - b} - f(b) = \frac{1}{t - b} \int_b^t [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x. \tag{25·5}$$

Je-li nyní předně $t > b$, pak je $b \leqq x \leqq t < b + \delta$ pro všecka x z intervalu $[b, t]$, takže podle (25·4) je

$$-\varepsilon_1 < f(x) - f(b) < \varepsilon_1 \tag{25·6}$$

pro všecka tato x. Tedy podle VI z odst. 24 je

$$-\varepsilon_1 \leqq \int_b^t [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x \leqq \varepsilon_1. \tag{25·7}$$

Je-li za druhé $t < b$, je $b \geqq x \geqq t > b - \delta$ pro všecka x z intervalu $[t, b]$, takže podle (25·4) platí (25·6) pro všecka tato x. Tedy podle VI z odst. 24 je

$$-\varepsilon_1 \leqq \int_t^b [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x \leqq \varepsilon_1.$$

Protože však

$$\int_t^b [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x = -\int_b^t f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x,$$

dostáváme zase (25·7). Z (25·5) a (25·7) však plyne (25·3), neboť $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Výsledek, k němuž jsme došli, si vyslovíme v takovém tvaru, v jakém se ho často užívá k výpočtu integrálů. Nechť zase $f(x)$ je spojitá funkce uvnitř intervalu J. Podaří-li se nám jakýmkoli způsobem najíti funkci $\varphi(x)$ takovou, že

$$\varphi'(x) = f(x) \tag{25·8}$$

pro všecka x z intervalu J, pak jest

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{25·9}$$

Neboť podle předcházejícího

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b).$$

Obě funkce $\varphi(x)$ a $F(x)$ mají uvnitř intervalu J všude stejnou derivaci, takže jejich diference $\varphi(x) - F(x)$ má uvnitř intervalu J derivaci identicky rovnou nule. Z odst. 21 víme, že funkce $\varphi(x) - F(x)$ musí býti uvnitř intervalu J konstantou, takže

$$\varphi(b) - F(b) = \varphi(a) - F(a).$$

Avšak

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

takže $\varphi(b) - F(b) = \varphi(a)$, tedy

$$\varphi(b) - \varphi(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

což jsme měli dokázati.

Abychom mohli počítati integrál podle pravidla (25·9), potřebovali bychom znáti cesty, jimiž se k dané funkci $f(x)$ dá najíti funkce $\varphi(x)$ vyhovující podmínce (25·8). Existují rozmanité takové cesty, ale rozsah této knížky nedovoluje, abychom se s nimi seznámili. Mimo to všecky tyto cesty v mnoha případech nevedou k cíli, protože i když funkce $f(x)$ je jedna z těch jednoduchých funkcí, které známe, může funkce $\varphi(x)$ býti složitějšího typu. Proto se omezíme na jediný příklad. Budiž s dané racionální číslo a mějme počítati integrál

$$\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x,$$

kde a, b jsou kladná čísla. Tu si vzpomeneme na vzorec (19·17)

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

platný pro kladná x (při racionálním r), který lze pro $r \neq 0$ psáti ve tvaru

$$\left(\frac{1}{r}\,x^r\right)' = x^{r-1}.$$

Je-li $s \neq -1$, můžeme položiti $r = s + 1 \neq 0$ a dostaneme

$$\left(\frac{1}{s+1}\,x^{s+1}\right)' = x^s,$$

takže

$$\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}. \tag{25·10}$$

Pro $s \neq -1$ je tím žádaný výpočet integrálu proveden. Pro $s = -1$ tato metoda selže. [Nehledě na to, že při odvození vzorce (25·10) jsme musili předpokládati $s \neq -1$, nemá pravá strana pro $s = -1$ vůbec významu.] Uvidíme v odst. 28, proč naše metoda musila selhat pro $s = -1$; neboť pro $s = -1$ máme integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

který vede na funkci, kterou jsme se v této knížce dosud nezabývali, ač je vám ze střední školy známa, totiž na funkci logaritmickou. Rovněž na funkci logaritmickou dá se převésti na př. integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}},$$

kdežto na př. integrály

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$$

(t. zv. eliptické integrály) se už nedají převésti na funkce, které jsou v souvislosti se středoškolskou matematikou. Proto je důležité, že můžeme numerickou hodnotu každého integrálu počítati přibližně. Takové přibližné vyjádření integrálu máme už ve vytvořujících součtech, pomocí kterých jsme integrál definovali. Jsou však pohodlnější přibližná vyjádření integrálu, a o jednom z nich si krátce promluvíme v následujícím odstavci.

26. Simpsonovo pravidlo. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Rozdělme si $[a, b]$ na intervaly

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]. \tag{26·1}$$

Z odst. 24 víme, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{26·2}$$

Jako v odst. 23 si zvolme čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, po jednom v každém z intervalů (26·1). Jsou-li ty intervaly dosti malé, jsou hodnoty funkce $f(x)$ v prvém z nich přibližně rovné číslu $f(\xi_1)$, ve druhém přibližně rovné číslu $f(\xi_2)$ atd. Proto je náš integrál přibližně rovný součtu

$$\int_{a_0}^{a_1} f(\xi_1)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(\xi_2)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(\xi_n)\,\mathrm{d}x.$$

Ale tento součet je podle (24·1) rovný součtu

$$f(\xi_1)(a_1 - a_0) + f(\xi_2)(a_2 - a_1) + \ldots + f(\xi_n)(a_n - a_{n-1}),$$

t. j. jednomu z našich vytvořujících součtů. Můžeme tedy říci, že vytvořující součet dostaneme z integrálu (26·2), když v každém z intervalů (26·1) aproximujeme funkci $f(x)$ konstantou. Lepšího přiblížení dosáhneme, aproximujeme-li funkci $f(x)$ jinak. Nechť $[\alpha, \beta]$ znamená jeden z intervalů (26·1) a nechť

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

leží právě uprostřed tohoto intervalu. Budeme aproximovati funkci $f(x)$ v intervalu mnohočlenem druhého stupně

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

jehož koeficienty budeme voliti tak, aby obě funkce nabývaly téže hodnoty pro $x = \alpha, \beta, \gamma$. Abychom mnohočlen $\varphi(x)$ pohodlně určili, pišme jej ve tvaru

$$\varphi(x) = A_0 + A_1(x - \alpha) + A_2(x - \alpha)(x - \gamma). \tag{26·3}$$

Máme určiti čísla A_0, A_1, A_2 podle podmínek

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha),\ \varphi(\gamma) = f(\gamma),\ \varphi(\beta) = f(\beta).$$

Dosadíme-li do (26·3) $x = \alpha, \gamma, \beta$, vyjde

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= A_0, \\ f(\gamma) &= A_0 + A_1(\gamma - \alpha) = A_0 + \tfrac{1}{2}A_1(\beta - \alpha), \\ f(\beta) &= A_0 + A_1(\beta - \alpha) + A_2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = \\ &= A_0 + A_1(\beta - \alpha) + \tfrac{1}{2}A_2(\beta - \alpha)^2, \end{aligned}$$

takže

$$A_0 = f(\alpha), \quad A_1 = 2\,\frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$
$$A_2 = 2\,\frac{f(\alpha) - 2f(\gamma) + f(\beta)}{(\beta - \alpha)^2}. \tag{26·4}$$

Protože

$$(x - \alpha)(x - \gamma) = (x - \alpha)\left(x - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{2}\right) =$$
$$= (x - \alpha)^2 - \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha),$$

jest

$$[\tfrac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \tfrac{1}{4}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2]' = (x - \alpha)(x - \gamma),$$

takže podle odst. 25 je

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \gamma)\,dx = \tfrac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \tfrac{1}{4}(\beta - \alpha)^3 = \tfrac{1}{12}(\beta - \alpha)^3. \tag{26·5}$$

Dále je

$$[\tfrac{1}{2}(x - \alpha)^2]' = (x - \alpha),$$

takže podle odst. 25 je

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)\,dx = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)^2. \tag{26·6}$$

Ze (26·3), (26·5) a (26·6) plyne podle (24·1) a I, II v odst. 24

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = A_0(\beta - \alpha) + \tfrac{1}{2}A_1(\beta - \alpha)^2 + \tfrac{1}{12}A_2(\beta - \alpha)^3,$$

takže podle (26·4)

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \frac{\beta - \alpha}{6}[f(\alpha) + 4f(\beta) + f(\gamma)]. \tag{26·7}$$

Vraťme se ke vzorci (26·2)! Hledanou přibližnou hodnotu integrálu nalevo dostaneme, když v každém integrálu napravo nahradíme $f(x)$ vhodným mnohočlenem druhého stupně, t. j. když každý integrál napravo nahradíme integrálem (26·7), v němž ovšem místo intervalu $[\alpha, \beta]$ bereme postupně intervaly (26·1). Omezme se na ten případ, kdy intervaly (26·1) mají vesměs stejnou délku $\frac{b-a}{n}$. Pak vyjde po snadné úpravě pro náš integrál přibližná hodnota

$$S_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + \dots + 4f\left(a + \frac{(2n-1)(b-a)}{2n}\right) + f(b)\right].$$

Při tom se v lomené závorce vyskytují postupně hodnoty funkce $f(x)$ v číslech

$$a, a + \frac{b-a}{2n}, \; a + \frac{b-a}{n}, \dots,$$
$$a + \frac{(2n-1)(b-a)}{2n} = b - \frac{b-a}{2n}, \; b,$$

jež tvoří aritmetickou řadu s prvním členem a, posledním členem b a konstantní diferencí $\frac{b-a}{2n}$. Koeficienty hodnot funkce $f(x)$ v lomené závorce jsou tyto: první a poslední koeficient je rovný jedné, ostatní jsou střídavě rovny číslům 4 a 2. Na př. pro $a = 0$, $b = 1$ jest

$$S_{10} = \tfrac{1}{60}\,[f(0) + 4f(\tfrac{1}{20}) + 2f(\tfrac{1}{10}) + 4f(\tfrac{3}{20}) + 2f(\tfrac{2}{10}) +$$
$$+ 4f(\tfrac{5}{20}) + 2f(\tfrac{3}{10}) + 4f(\tfrac{7}{20}) + 2f(\tfrac{4}{10}) + 4f(\tfrac{9}{20}) + 2f(\tfrac{5}{10}) +$$
$$+ 4f(\tfrac{11}{20}) + 2f(\tfrac{6}{10}) + 4f(\tfrac{13}{20}) + 2f(\tfrac{7}{10}) + 4f(\tfrac{15}{20}) + 2f(\tfrac{8}{10}) +$$
$$+ 4f(\tfrac{17}{20}) + 2f(\tfrac{9}{10}) + 4f(\tfrac{19}{20}) + f(1)].$$

Pravidlo pro přibližný výpočet integrálu, s kterým jsme se právě seznámili, jmenuje se Simpsonovo pravidlo. V této knížce se nebudeme zabývat odhadem chyby, které se dopustíme, nahradíme-li integrál jeho přibližnou hodnotou vypočtenou podle Simpsonova pravidla. Ale abychom si prokázali užitečnost Simpsonova pravidla aspoň na jednom příkladě, vypočteme si podle něho integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \tag{26·8}$$

Uvidíme později [viz (32·4)], že čtyrnásobek integrálu (26·8) je roven číslu π. Volíme-li v Simpsonovu pravidlu $n = 5$ a zaokrouhlíme-li každou hodnotu funkce na osm desetinných míst, dostaneme pro číslo π přibližnou hodnotu 3,14159260, v které teprve poslední cifra je nesprávná. Bude velmi užitečné, když si čtenář tento výpočet sám podrobně provede.

27. Integrál v geometrii. Pojem integrálu je velmi důležitý v geometrii i ve fysice. Kdykoli je dána veličina, která se dá přibližně nahradit součtem velikého počtu malých sčítanců, dá se přesná hodnota té veličiny psáti ve tvaru integrálu, ale mnohdy při tom nevystačíme s pojmem integrálu funkce jedné proměnné, na který jsme se v této knížce musili omezit. V tomto odstavci si probereme čtyři příklady na užití integrálu v geometrii. Fysikálními aplikacemi se v této knížce zabývat nebudeme.

I. Mějme v intervalu $[a, b]$ dvě spojité funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ a předpokládejme, že je v celém intervalu splněna nerovnost

$$f_1(x) < f_2(x). \tag{27·1}$$

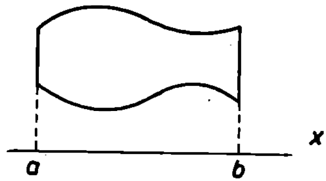
Grafy našich dvou funkcí spolu s přímkami $x = a$, $x = b$ omezí plochu P. [Viz obr. 21.] Plošný obsah plochy P je dán integrálem

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{27·2}$$

Jsou-li všecky hodnoty funkce $f_1(x)$ [a tím spíš funkce $f_2(x)$] čísla kladná, je to zřejmé. Neboť z obrazce je patrné, že plocha P je rozdíl dvou ploch, jejichž obsahy jsou podle odst. 23

$$\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \tag{27·3}$$

a z odst. 24 víme, že integrál (27·2) je roven rozdílu obou integrálů (27·3). Nejsou-li všecky hodnoty funkce $f_1(x)$ kladné, zvolíme si tak velké kladné číslo c, aby bylo $f_1(x) + c > 0$ pro všecka x z intervalu $[a, b]$. Potom pošineme počátek i osu x svisle dolů o délku rovnou c. Jsou-li x^*, y^* souřadnice v nové soustavě, je podle odst. 4



Obr. 21.

$$x^* = x, \quad y^* = y + c.$$

Užijeme-li při výpočtu obsahu plochy P nové soustavy souřadnic, což je ovšem dovoleno, musíme funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ nahraditi funkcemi $f_1(x) + c$, $f_2(x) + c$. Tyto funkce nabývají jen kladných hodnot, takže obsah plochy P se rovná integrálu (27·2), neboť

$$[f_2(x) + c] - [f_1(x) + c] = f_2(x) - f_1(x).$$

Je-li nerovnost (27·1) splněna pouze uvnitř intervalu $[a, b]$, kdežto $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(b) = f_2(b)$, pak z hranice plochy P odpadnou obě svislé úsečky, ale jinak se nic nezmění a vzorec (27·2) zůstane správný. Týž vzorec platí také, je-li nerovnost (27·1) porušena v jediném z obou čísel a, b.

II. Mějme v intervalu $[a, b]$ spojitou funkci $f(x)$, která nabývá jen kladných hodnot. Graf funkce $f(x)$, svislé přímky $x = a$, $x = b$ a osa x omezí plochu P. [Viz obr. 20 na str. 62.] Tuto plochu otáčejme kolem osy x. Souhrn všech poloh otáčené plochy je rotační těleso T. Ukážeme si, že objem tělesa T se dá vyjádřiti integrálem (27·5).

Jako v odst. 23 si rozdělme interval $[a, b]$ na velký počet malých intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$$

a zvolme si čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, po jednom v každém z těch intervalů. Této volbě odpovídá, jak víme z odst. 23, plocha P_0 složená z n obdélníků a vyčárkovaná v obr. 20. Otáčíme-li plochu P_0 kolem osy x, vznikne rotační těleso T_0 a z názoru je patrné, že tělesa T_0 a T mají přibližně stejný objem. Těleso T_0 se skládá z n rotačních válců, vzniklých otočením jednotlivých obdélníků. Jak známo, je objem rotačního válce roven číslu $\pi r^2 v$, kde r znamená poloměr podstavy a v výšku. Proto objem tělesa T_0 je roven číslu

$$\pi \,.\, \{[f(\xi_1)]^2 (a_1 - a_0) + [f(\xi_2)]^2 (a_2 - a_1) + \\ + \ldots + [f(\xi_n)]^2 (a_n - a_{n-1})\}. \tag{27·4}$$

Tedy výraz (27·4) udává přibližnou hodnotu objemu tělesa T. Z toho plyne, že přesná hodnota objemu našeho rotačního tělesa T je rovna

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x. \tag{27·5}$$

III. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Tentokrát nám na tom nezáleží, zda jsou všecky hodnoty funkce $f(x)$ čísla kladná. Zato předpokládejme, že $f(x)$ má derivaci v každém čísle z intervalu $[a, b]$ a že také $f'(x)$ je spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Označme C část grafu funkce $f(x)$ ležící mezi body

$$A = (a; f(a)), \quad B = (b; f(b)).$$

Ukážeme, že délka čáry C se dá vyjádřiti integrálem (27·10).

Jako obvykle rozdělíme si interval $[a, b]$ na velký počet malých intervalů

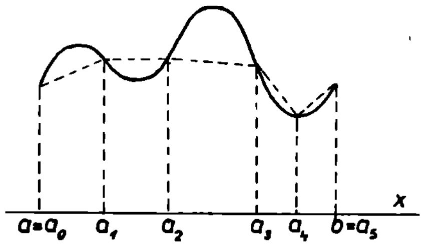
$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n], \tag{27·6}$$

vytkneme si na grafu body odpovídající hodnotám $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a spojíme tyto body úsečkami. Tak vznikne lomená čára C_0, vyčárkovaná v obr. 22. Z názoru je patrné, že délka čáry C je přibližně rovna délce lomené čáry C_0. Délka čáry C_0 je však rovna součtu délek jednotlivých úseček, z kterých se skládá, a délka úsečky je vzdálenost jejích krajních bodů, která se počítá podle vzorce (4·2). Proto je délka lomené čáry C_0 rovna výrazu

$$\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + [f(a_1) - f(a_0)]^2} + \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + [f(a_2) - f(a_1)]^2} + \\ + \dots + \sqrt{(a_n - a_{n-1})^2 + [f(a_n) - f(a_{n-1})]^2}. \qquad (27\cdot7)$$

Výraz (27·7) si musíme ještě upraviti; užijeme k tomu věty vyslovené na začátku odst. 21. Podle této věty lze udati čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, po jednom v každém z intervalů (27·6), taková, že

$$f(a_1) - f(a_0) = f'(\xi_1)(a_1 - a_0),\ f(a_2) - f(a_1) = f'(\xi_2)(a_2 - a_1) \text{ atd.} \qquad (27\cdot8)$$



Obr. 22.

Podle toho je výraz (27·7) roven výrazu

$$\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}\,(a_1 - a_0) + \sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2}\,(a_2 - a_1) + \\ + \dots + \sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}\,(a_n - a_{n-1}). \qquad (27\cdot9)$$

Tedy (27·9) je přibližná hodnota délky čáry C, z čehož plyne, že přesná hodnota délky čáry C je rovna

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (27\cdot10)$$

IV. Učiňme o funkci $f(x)$ stejné předpoklady jako ve III a mimo to předpokládejme, že $f(x)$ nabývá jen kladných hodnot. Otáčejme čáru C kolem osy x. Tím vznikne rotační plocha R. Ukážeme, že povrch plochy R je roven integrálu (27·12).

Rozdělme si zase $[a, b]$ na malé intervaly (27·6) a opět si všimněme lomené čáry C_0, vyčárkované v obr. 22. Otáčením kolem osy x vznikne z čáry C_0 rotační plocha R_0. Z názoru je patrné, že povrch plochy R je přibližně rovný povrchu plochy R_0.

Plocha R_0 se skládá z n jednoduchých ploch, z nichž každá vznikne rotací jedné úsečky; ty jednoduché plochy tedy jsou pláště komolých rotačních kuželů. Pro povrch pláště komolého rotačního kužele se však na střední škole odvozuje vzorec $\pi(r_1 + r_2)s$, kde r_1 a r_2 jsou poloměry podstav a s je společná délka úseček, které lze vésti na plášti od jedné podstavy k druhé. Proto je povrch plochy R_0 roven výrazu

$$\pi\{[f(a_0) + f(a_1)]\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + [f(a_1) - f(a_0)]^2} + \dots$$
$$\dots + [f(a_{n-1}) + f(a_n)]\sqrt{(a_n - a_{n-1})^2 + [f(a_n) - f(a_{n-1})]^2}\}.$$

Zvolíme-li si zase vhodně čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, po jednom uvnitř každého z intervalů (27·6), budou platiti vztahy (27·8), takže povrch plochy R_0 lze psáti ve tvaru

$$\pi\{[f(a_0) + f(a_1)]\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}\,(a_1 - a_0) + \dots$$
$$\dots + [f(a_{n-1}) + f(a_n)]\sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}\,(a_n - a_{n-1})\}.$$

Protože jsou intervaly (27·6) malé a protože funkce $f(x)$ je spojitá, liší se jen nepatrně

$$f(a_0) + f(a_1) \text{ od } 2f(\xi_1), \dots, f(a_{n-1}) + f(a_n) \text{ od } 2f(\xi_n),$$

takže se povrch plochy R_0 liší jen nepatrně od čísla

$$2\pi\{f(\xi_1)\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}\,(a_1 - a_0) + \dots$$
$$\dots + f(\xi_n)\sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}\,(a_n - a_{n-1})\}. \tag{27·11}$$

Tedy (27·11) je přibližná hodnota povrchu plochy R, takže přesná hodnota povrchu plochy R je rovna

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{27·12}$$

Náš postup v tomto odstavci nebyl právě přesný. Promyslíme-li si jej znovu, nahlédneme snadno, že hlavní potíž tkví v tom, že jsme počítali geometrické veličiny, pro které jsme sice měli názorné představy, nikoli však přesné aritmetické definice. Takové přesné definice lze skutečně udat, a potom je už lehké dáti hořejším důkazům přesný tvar. Tím se zde zabývati nebudeme. Budiž pouze podotčeno, že přesná definice povrchu křivé plochy je mnohem složitější než přesné definice ostatních geometrických veličin, s kterými jsme se zde setkali.

Cvičení.*) Ve cvičeních **27·1** až **27·7** máte určiti napřed obsah plochy omezené čarami, jejichž rovnice jsou udány, a potom počítati objem tělesa, které vznikne rotací té plochy kolem osy x. Tvar plochy si pokaždé napřed naznačte obrazcem.

27·1. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 3$.
27·2. $y^2 = 12x$, $x = 12$.
27·3. $4y = (x + 1)^3$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.
27·4. $4y^2 = 3x^3$, $x = 1$.
27·5. $y = 9x - x^2 - 14$, $y = 0$.
27·6. $9y = x^2 (x + 3)$, $y = 0$.
27·7. $x^2y = 36$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$.

Ve cvičeních **27·8** až **27·10** máte určiti obsah plochy omezené čarami, jejichž rovnice jsou udány.

27·8. $y = x^2$, $y = 4x$.
27·9. $y = x^2$, $x = y^2$.
27·10. $y^2 = x$, $y^2 = x^3$.

Ve cvičeních **27·11** až **27·13** máte počítati napřed délku dané čáry, potom povrch plochy, která vznikne rotací té čáry kolem osy x.

27·11. $x^4 + 3 = 6xy$ od bodu $x = 1$ do bodu $x = 4$.
27·12. $8x^2y = 2 + x^6$ od bodu $x = 1$ do bodu $x = 2$.
27·13. $9y^2 = x(x - 3)^2$, $y \geqq 0$ od bodu $x = 0$ do bodu $x = 3$.

28. Logaritmická funkce. K tomutu odstavci není třeba žádných znalostí o logaritmech ze střední školy, neboť vše, co budeme potřebovat, si odvodíme. Protože funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá pro všecka kladná x, můžeme si pro všecka kladná t definovati pomocí integrálu

$$\int_1^t \frac{dx}{x}$$

funkci, kterou nazveme funkcí logaritmickou a označíme $\log t$. Je tedy

*) Cvičení jsou volena tak, že při výpočtu integrálů se vystačí se vzorcem (25·10).

$$\log t = \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{28·1}$$

pro každé kladné t. Podle odst. 25 má tato funkce derivaci

$$(\log t)' = \frac{1}{t}. \tag{28·2}$$

pro všecka $t > 0$. Ježto tato derivace je stále kladná, je logaritmus rostoucí funkce všude, kde je definována. Podle (28·1) jest

$$\log 1 = 0, \tag{28·3}$$

takže*)

$$t > 1 \Rightarrow \log t > 0,\ 0 < t < 1 \Rightarrow \log t < 0. \tag{28·4}$$

Základní vlastnost logaritmické funkce jest

$$a > 0,\ b > 0 \Rightarrow \log (ab) = \log a + \log b \tag{28·5}$$

neboli slovy: Logaritmus součinu (dvou kladných čísel) se rovná součtu logaritmů obou činitelů. Odvodíme si ji takto. Ze (28·2) plyne podle pravidla o derivování složené funkce (viz odst. 17)

$$[\log (at)]' = \frac{1}{t},$$

takže funkce

$$\log (at) - \log t$$

má derivaci identicky rovnou nule a je to tedy konstanta (viz odst. 21). Hodnotu této konstanty dostaneme dosazením $t = 1$; podle (28·3) vyjde $\log a$, takže

$$\log (at) - \log t = \log a$$

pro všecka $t > 0$. Dosazením $t = b$ vyjde (28·5).

Když ve (28·5) volíme $b = \frac{1}{a}$, vyjde podle (28·3)

*) Význam značky $\Rightarrow$ byl vysvětlen u vzorce (13·3).

$$\log \frac{1}{a} = - \log a \tag{28·6}$$

pro všecka $a > 0$.

Podle (28·5) dostaneme postupně

$$\log (a^2) = \log (a \ . \ a) = 2 \log a,$$
$$\log (a^3) = \log (a^2 \ . \ a) = 3 \log a \ \text{atd.},$$

obecně

$$\log (a^n) = n \log a \tag{28·7}$$

pro každé celé kladné n. Protože

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

plyne ze (28·6), že (28·7) platí i pro celá záporná n. Podle (28·3) platí (28·7) také pro $n = 0$. Tedy (28·7) platí pro každé celé n, libovolného znamení.

Protože logaritmická funkce má všude derivaci, je spojitá. Proto hodnoty, kterých nabude, tvoří interval (viz odst. 19). Protože ve (28·7) můžeme dáti celému číslu n libovolně velké kladné i záporné hodnoty, nabývá logaritmická funkce libovolně velkých kladných i záporných hodnot. Jelikož pak ty hodnoty tvoří interval, může to být pouze interval $[-\infty, \infty]$, t. j. logaritmická funkce nabude každé možné hodnoty. Protože je to funkce rostoucí, nabude každé hodnoty pouze jednou. Zejména existuje jediné kladné číslo, v kterém nabude logaritmická funkce hodnoty 1. Toto číslo se značí písmenem e. Je tedy

$$\log e = 1. \tag{28·8}$$

Dá se vypočísti, že

$$e \doteq 2{,}718281828459\ldots;$$

ale tímto výpočtem se zde zabývati nebudeme.

Logaritmy zde definované se nazývají **logaritmy přirozené**. Naproti tomu logaritmy, o kterých jste se učili na střední škole, se jmenují **logaritmy dekadické**. Souvislost mezi oběma druhy logaritmů je velmi jednoduchá; označíme-li dekadické logaritmy na rozdíl od přirozených symbolem Log, platí identita

$$\mathrm{Log}\, t = \frac{\log t}{\log 10}, \qquad la = \frac{\log a}{\log e} \tag{28·9}$$

takže, jak známo,

$$\mathrm{Log}\, 10 = 1.$$

29. Geometrické řady. Jelikož logaritmy jsou integrály, můžeme je počítati numericky podle Simpsonova pravidla. Pohodlnější metodu poznáme v následujícím odstavci. Napřed si však zopakujeme něco z toho, čemu jste se na střední škole učili o t. zv. geometrických řadách.

Budiž q číslo různé od 1, ale jinak libovolné. Pro každé celé kladné n označme S_n součet

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}. \tag{29·1}$$

Pak platí známý vzorec

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{29·2}$$

Můžeme si jej ostatně zde znovu odvoditi, protože je to velmi krátké. Z (29·1) plyne

$$qS_n = q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n. \tag{29·3}$$

Odečteme-li (29·3) od (29·1), pak se na pravé straně většina členů zruší a vyjde $(1 - q)\, S_n = 1 - q^n$, z čehož plyne (29·2).

Nyní předpokládejme o čísle q, že jeho absolutní hodnota je menší než 1. Potom se s rostoucím n blíží číslo q^n nule, což píšeme

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0. \tag{29·4}$$

Vztah (29·4) lze přesně popsati takto: Je-li dáno číslo $\varepsilon > 0$, existuje celé kladné číslo p takové, že

$$n > p \Rightarrow |\, q^n \,| < \varepsilon. \tag{29·5}$$

Správnost vztahu (29·4) si dokážeme pomocí logaritmů (ač by to šlo i bez nich). Jest $0 < |q| < 1$, tedy $\log|q| < 0$ [viz (28·4)]. Čísla

$$1 . \log|q|,\ 2 . \log|q|,\ 3 . \log|q|, \ldots$$

jsou tedy záporná a jejich absolutní hodnoty zřejmě vzrůstají nade všecky meze. Proto lze k danému číslu $\varepsilon > 0$ určiti celé kladné číslo p tak, že

$$n > p \Rightarrow n . \log|q| < \log \varepsilon.$$

Avšak $n . \log|q| = \log|q|^n$ podle (28·7), takže pro všecka $n > p$ je $\log|q|^n < \log \varepsilon$. Ježto však logaritmus je rostoucí funkce, je

$$\log|q|^n < \log \varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon,$$

takže platí (29·5), neboť $|q^n| = |q|^n$. Tím je správnost vztahu (29·4) dokázána.

Podle (29·2) je

$$\left| S_n - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{1}{1-q} q^n \right| \tag{29·6}$$

a když [za předpokladu $|q| < 1$] n roste nade všecky meze vychází z (29·4), že se ve (29·6) pravá strana blíží nule tedy se blíží nule i strana levá, t. j. S_n se blíží číslu $\left|\frac{1}{1-q}\right|$.

Píšeme krátce (stále pro $|q| < 1$)

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1-q} \tag{29·7}$$

a říkáme, že nalevo ve (29·7) je **konvergentní nekonečná řada** se součtem $\frac{1}{1-q}$. Ta nekonečná řada má nekonečně mnoho členů, a proto vlastně nelze mluvit o jejím „součtu". Říkáme-li, že má součet $\frac{1}{1-q}$, míníme tím, že součet velkého počtu prvních členů řady je **přibližně** roven $\frac{1}{1-q}$, což je přesněji vyjádřeno vztahem

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

kde S_n znamená součet prvních n členů řady (29·7), t. j. S_n má týž význam jako ve (29·1). Obecně říkáme, že nekonečná řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \tag{29·8}$$

je konvergentní a že má součet s, když

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s, \tag{29·9}$$

t. j. když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze určiti celé kladné číslo p tak, že

$$n > p \Rightarrow |(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - s| < \varepsilon.$$

Když k nekonečné řadě (29·8) nelze udati číslo s s vlastností (29·9), říkáme, že řada je divergentní; divergentní řada nemá žádný součet. Řada (29·7) je divergentní na př. pro $q = 1$ nebo pro $q = -1$; ostatně je divergentní pro všecka q, pro něž není $|q| < 1$.

Pojem součtu konvergentní nekonečné řady je tedy (po derivaci a po integrálu) třetím důležitým příkladem obecného pojmu limity. Geometrická řada [t. j. řada tvaru (29·7)] se dobře hodí jako první příklad na pojem součtu nekonečné řady, protože se součet prvních n členů dá velmi pohodlně vyjádřit [viz (29·2)], takže diskuse je v tomto příkladě velmi jednoduchá. Na druhé straně součet konvergentní geometrické řady [tedy pravá strana ve (29·7)] je příliš jednoduchý, takže na tomto příkladě není ještě patrný pravý účel zavedení pojmu konvergentní řady; ten je v tom, že řada je pohodlným prostředkem k přibližnému výpočtu součtu. Tento účel bude tím lépe patrný u nekonečných řad, které poznáme v odst. 30 a 32.

30. Výpočet logaritmů. V tomto odstavci poznáme konvergentní nekonečnou řadu, pomocí které lze velmi pohodlně počítati logaritmy. Napřed si dokážeme, že pro $|q| < 1$ je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^q \frac{x^n}{1-x}\, dx = 0. \tag{30·1}$$

Pro $q = 0$ je vztah (30·1) zřejmý [viz 24·10]. Budiž nyní $0 < q < 1$. Když x probíhá interval $[0, q]$, pak funkce $1 - x$ klesá od hodnoty 1 do hodnoty $1 - q > 0$, a proto funkce $\frac{1}{1-x}$ roste od hodnoty 1 do hodnoty $\frac{1}{1-q}$. Je tedy v celém intervalu $[0, q]$

$$0 \leqq \frac{x^n}{1-x} \leqq \frac{1}{1-q} \cdot x^n,$$

takže podle IV a V v odst. 24 je

$$0 \leqq \int_0^q \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \int_0^q \frac{1}{1-q} \cdot x^n\,dx.$$

Podle I v odst. 24 a podle (25·10) je však

$$\int_0^q \frac{1}{1-q} \cdot x^n\,dx = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{q^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{n+1}$$

neboť $0 < q < 1 \Rightarrow q^{n+1} < 1$. Tedy

$$0 \leqq \int_0^q \frac{x^n}{1-x}\,dx < \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{n+1}$$

a z toho ihned plyne (30·1). Tím je (30·1) dokázáno pro $0 \leqq q < 1$. Budiž konečně $0 > q > -1$. Když x probíhá interval $[q, 0]$, pak funkce $1 - x$ klesá od hodnoty $1 - q > 1$ do hodnoty 1, a proto funkce $\frac{1}{1-x}$ roste od hodnoty $\frac{1}{1-q} > 0$ do hodnoty 1. Je tedy v celém intervalu $[q, 0]$

$$0 \leqq \frac{(-x)^n}{1-x} \leqq (-x)^n,$$

takže podle IV a V v odst. 24 je

$$0 \leqq \int_q^0 \frac{(-x)^n}{1-x}\,dx \leqq \int_q^0 (-x)^n\,dx.$$

Podle I v odst. 24 a podle (25·10) je však

$$\int_q^0 (-x)^n \mathrm{d}x = (-1)^n \int_q^0 x^n \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{q^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{|q|^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1},$$

neboť $|q| < 1 \Rightarrow |q|^{n+1} < 1$. Tedy

$$0 \leqq \int_q^0 \frac{(-x)^n}{1-x} \mathrm{d}x < \frac{1}{n+1}. \tag{30·2}$$

Avšak podle I v odst. 24 a podle (24·9) je

$$\int_0^q \frac{x^n}{1-x} \mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^q \frac{(-x)^n}{1-x} \mathrm{d}x = (-1)^{n+1} \int_q^0 \frac{(-x)^n}{1-x} \mathrm{d}x,$$

takže podle (30·2)

$$\left| \int_0^q \frac{x^n}{1-x} \mathrm{d}x \right| < \frac{1}{n+1},$$

z čehož zase plyne (30·1).

Nyní si dokážeme, že pro $|q| < 1$ nekonečná řada

$$q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4} + \dots \tag{30·3}$$

je konvergentní a má součet $-\log(1-q)$. Za tím účelem zaveďme funkci

$$f_n(x) = -\log(1-x) - \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right],$$

kde proměnná x probíhá vnitřek intervalu $[-1, 1]$. (Číslo $1-x$ je tedy stále kladné, takže symbol $\log(1-x)$ má všude význam.) Derivováním najdeme

$$f'_n(x) = \frac{1}{1-x} - [1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}].$$

Avšak podle (29·1) a (29·2) je

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

takže

$$f'_n(x) = \frac{x^n}{1 - x}.$$

Jsou-li tedy a, b dvě libovolná čísla z vnitřku intervalu $[-1, 1]$, je podle odst. 25

$$\int_a^b \frac{x^n}{1 - x}\,\mathrm{d}x = f_n(b) - f_n(a).$$

Protože $f_n(0) = 0$, je tedy pro $|q| < 1$

$$\int_0^q \frac{x^n}{1 - x}\,\mathrm{d}x = f_n(q),$$

takže $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(q) = 0$ podle (30·1). Avšak $f_n(q)$ je rozdíl mezi číslem $-\log(1 - q)$ a součtem prvních n členů řady (30·3). Tím je dokázáno, že pro $|q| < 1$ je řada (30·3) konvergentní a že

$$q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4} + \ldots = -\log(1 - q). \qquad (30·4)$$

Protože $|-q| = |q|$, můžeme pro $|q| < 1$ ve (30·4) místo q psáti $-q$, čímž dostaneme (změníme-li všude znamení)

$$q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \ldots = \log(1 + q).$$

Protože

$$\log\frac{1 + q}{1 - q} = \log(1 + q) - \log(1 - q),$$

je pro $|q| < 1$

$$\log \frac{1+q}{1-q} = 2 \cdot \left[q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \ldots \right].$$

Volíme-li

$$q = \frac{1}{2n+1},$$

dostaneme vzorec

$$\log (n+1) - \log n = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3\,(2n+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5\,(2n+1)^5} + \ldots \right].$$

Volíme-li po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$ můžeme postupně počítati přirozené logaritmy všech celých čísel, při čemž i při velké přesnosti je třeba jen několika málo prvých členů řady. Proveďte si tento výpočet pro několik prvých n. Pro kontrolu buďtež zde uvedeny na šest desetinných míst přirozené logaritmy

$$\begin{aligned}
\log 2 &\doteq 0{,}693147, & \log 3 &\doteq 1{,}098612,\\
\log 4 &\doteq 1{,}386294, & \log 5 &\doteq 1{,}609438,\\
\log 6 &\doteq 1{,}791759, & \log 7 &\doteq 1{,}945910,\\
\log 8 &\doteq 2{,}079442, & \log 9 &\doteq 2{,}197225,\\
\log 10 &\doteq 2{,}302585, & \log 11 &\doteq 2{,}397895.
\end{aligned}$$

Z přirozených logaritmů dostaneme dekadické logaritmy podle (28·9), násobíce číslem

$$\frac{1}{\log 10} \doteq 0{,}434294481903252.$$ = log e dekad.

31. Funkce arcus tangens. V obr. 23 je naznačena kružnice K se středem v počátku O a s poloměrem rovným jednotce délky. Kružnice K obsahuje právě ty body $(x; y)$, jejichž vzdálenost od počátku je rovna 1, takže podle (3·1) rovnice kružnice K je

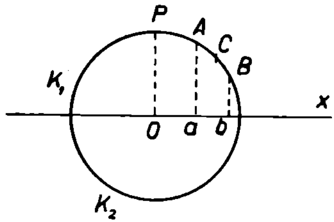
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{31·1}$$

Osa x rozdělí K na dvě polokružnice K_1, K_2. My si budeme všímat pouze polokružnice K_1, která leží nad osou x. Ke každému x z intervalu $[-1, 1]$ existuje na K_1 právě jeden bod $(x; y)$ a pro tento bod podle (31·1) platí vzorec

$$y = \sqrt{1 - x^2}. \qquad (31\cdot2)$$

Tedy (31·2) představuje funkci, jejíž graf je polokružnice K_1. Uvnitř intervalu $[-1, 1]$ má funkce (31·2) derivaci

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (31\cdot3)$$



Obr. 23.

Tato derivace je zřejmě spojitá funkce uvnitř intervalu $[-1, 1]$. Zvolíme-li si čísla a, b tak, že

$$-1 < a < b < 1,$$

pak je interval $[a, b]$ částí intervalu $[-1, 1]$. Číslům a, b odpovídají body A, B na polokružnici K_1; tyto body jsou krajními body oblouku C kružnice K (viz obr. 23). Délka oblouku C je podle III v odst. 27 rovna integrálu

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x,$$

do kterého musíme za y' dosaditi hodnotu (31·3). Provedeme-li dosazení, dostaneme po úpravě integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (31\cdot4)$$

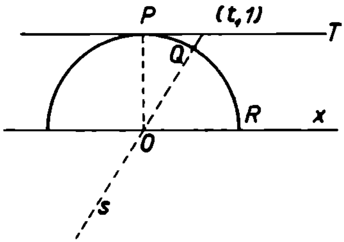
Po této přípravě hodláme nyní definovati určitou funkci $F(t)$ proměnné t. Za tím účelem položme $P = (0;1)$, takže P je nejvyšší bod kružnice K. Tečna T kružnice K v bodě P je patrně vodorovná (viz obr. 24), tedy má rovnici $y = 1$.

Pro každou volbu čísla t je $(t; 1)$ určitý bod na přímce T. Spojnice s bodu $(t; 1)$ s počátkem má patrně rovnici $x = ty$. Přímka s protne polokružnici K_1 v bodě Q. Abychom si vypočetli souřadnice x, y bodu Q, dosadíme $x = ty$ do rovnice (31·1), což dá $(1 + t^2)\, y^2 = 1$; protože $y > 0$, je tedy

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}},$$

takže

$$Q = \left(\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}};\quad \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\right).$$



Obr. 24.

Definice funkce $F(t)$ zní takto: Je-li předně $t > 0$, takže bod Q leží napravo od bodu P, je $F(t)$ délka oblouku $\widehat{PQ}$ kružnice K, tedy

$$F(t) = \int_0^{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

podle (31·4). Je-li za druhé $t < 0$, takže bod Q leží nalevo od bodu P, je číslo $F(t)$ záporné a jeho absolutní hodnota je rovna délce oblouku $\widehat{PQ}$, tedy

$$F(t) = -\int_{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Je-li konečně $t = 0$, takže body P a Q splynou, položíme $F(t) = 0$. Z definice je patrné, že

$$F(-t) = -F(t) \tag{31·5}$$

pro každé t, že tedy naše funkce je funkce lichá. Když t

roste nade všecky meze, blíží se zřejmě bod Q poloze $R = (1;0)$ [viz obr. 24], takže se číslo $F(t)$ blíží délce oblouku $\widehat{PR}$, t. j. čtvrtině délky celé kružnice K. Protože poloměr kružnice K je roven 1, je její délka 2π, takže

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \frac{\pi}{2}. \tag{31·6}$$

Ze (31·5) a (31·6) plyne

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2}. \tag{31·7}$$

Funkce $F(t)$ má jméno arcus tangens. Důvod tohoto jména je jasný z definice funkce $F(t)$ pro $t > 0$. Pak je patrně t tangens úhlu $\sphericalangle\, POQ$ a číslo $F(t)$ je délka oblouku (latinsky arcus), který tento úhel vytíná z kružnice K.

Podle (24·9) a (24·10) jest

$$F(t) = \int_0^{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

pro všecka t. Definujeme-li funkci $f(u)$ proměnné u rovnicí

$$f(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

kde proměnná u probíhá vnitřek intervalu $[-1, 1]$, je tedy

$$F(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \tag{31·8}$$

pro všecka t. Podle odst. 25 jest

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}; \tag{31·9}$$

mimo to se najde po úpravě

$$\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)' = \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}. \tag{31·10}$$

Podle odst. 17 však plyne ze (31·8)

$$F'(t) = f'\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)',$$

takže podle (31·9) a (31·10) je

$$F'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3},$$

z čehož plyne po úpravě

$$F'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \tag{31·11}$$

Ze (31·11) plyne podle odst. 25

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = F(b) - F(a);$$

protože $F(0) = 0$, je tedy

$$F(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{31·12}$$

32. Výpočet čísla π. Nechť stále $F(t)$ znamená funkci arcus tangens. V tomto odstavci si dokážeme, že pro $|t| \leqq 1$ je číslo $F(t)$ rovné součtu konvergentní řady

$$F(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \tag{32·1}$$

To je zřejmé pro $t = 0$; případ $t < 0$ se pomocí (31·5) převede na případ $t > 0$. Nechť tedy $0 < t \leqq 1$. Napřed si dokážeme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = 0. \tag{32·2}$$

V celém intervalu $[0, t]$ je

$$0 \leqq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqq x^{2n},$$

takže podle IV a V v odst. 24 je

$$0 \leqq \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^t x^{2n}\,dx.$$

Podle (25·10) je však

$$\int_0^t x^{2n}\,dx = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1},$$

takže

$$0 \leqq \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n+1},$$

z čehož plyne (32·2).

Nyní si zaveďme funkci

$$\varphi_n(x) = F(x) - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right].$$

[Horní znamení platí při lichém n, dolní při sudém.] Derivováním dostaneme pro všecka t [viz (31·1)]

$$\varphi'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - [1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n-2}].$$

Avšak podle (29·1) a (29·2) je

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n-2} = \frac{1 \pm x^{2n}}{1+x^2},$$

takže

$$\pm\, \varphi'_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Podle odst. 25 je tedy

$$\pm \int_a^b \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \varphi_n(b) - \varphi_n(a)$$

pro každou volbu čísel a, b. Protože $\varphi_n(0) = 0$, je tedy

$$\pm \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \varphi_n(t)$$

pro každé t. Pro $0 < t \leqq 1$ je tedy podle (32·2)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$$

a z toho plyne (32·1), neboť $\varphi_n(t)$ je právě rozdíl mezi $F(t)$ a součtem prvních n členů nekonečné řady napsané ve (32·1).

Pro $t = 1$ je oblouk $\widehat{PQ}$ (viz obr. 24) osminou kružnice K, takže

$$F(1) = \frac{\pi}{4} \tag{32·3}$$

neboli

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{32·4}$$

Podle (32·1) a (32·3) je

$$\pi = 4\,[1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots]. \tag{32·5}$$

Řada (5) se nehodí pro praktický výpočet čísla π. [Aproximujíce řadu (32·5) stem prvých členů, dostali bychom pro π hodnotu asi 3,1316, při aproximaci pomocí tisíce členů hodnotu asi 3,1406.] Pro praktický výpočet se hodí řada (32·1) pouze při m a l é m t. Můžeme si však při větším t pomoci následujícím obratem: Nechť α, β jsou dva úhly menší než 45°, takže úhel $\alpha + \beta$ je ostrý. Budiž zase $P = (0, 1)$

a buďtež Q_1, Q_2, Q_3 body na polokružnici K_1 napravo od osy y takové, že

$$\sphericalangle POQ_1 = \alpha, \ \sphericalangle POQ_2 = \beta, \ \sphericalangle POQ_3 = \alpha + \beta. \qquad (32{\cdot}6)$$

Je-li

$$\operatorname{tg} \alpha = t_1, \ \operatorname{tg} \beta = t_2, \ \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = t_3,$$

jsou čísla $F(t_1), F(t_2), F(t_3)$ rovna délkám oblouků $\widehat{PQ_1}, \widehat{PQ_2}, \widehat{PQ_3}$. Jsou-li úhly α a β dosti malé, jsou také čísla t_1 a t_2 malá, takže hodnoty $F(t_1)$ a $F(t_2)$ můžeme pohodlně počítati pomocí řady (32·1). Avšak ze (32·6) plyne, že délka oblouku $\widehat{PQ_3}$ je rovna součtu délek oblouků $\widehat{PQ_1}, \widehat{PQ_2}$, takže

$$F(t_3) = F(t_1) + F(t_2).$$

Můžeme tedy také $F(t_3)$ počítati pomocí řady (32·1), umíme-li vypočísti číslo t_3 z čísel t_1, t_2. To lze pomocí vzorce

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \qquad (32{\cdot}7)$$

na který se někteří z vás budou pamatovati ze střední školy. Podle (32·7)

$$t_3 = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2},$$

tedy

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}\right) = F(t_1) + F(t_2). \qquad (32{\cdot}8)$$

My si zde odvodíme vzorec (32·8) pomocí vyšší matematiky, neužívajíce ani geometrického významu funkce $F(t)$ ani trigonometrického vzorce (32·7). Zvolme si kladné číslo t_1 a dokažme, že (32·8) platí pro všecka t_2 taková, že $t_1 t_2 < 1$. Uvnitř intervalu $\left[-\infty, \frac{1}{t_1}\right]$ je definována funkce

$$\varphi(t) = \frac{t_1 + t}{1 - t_1 t}$$

a dá se zde derivovat; vyjde

$$\varphi'(t) = \frac{1 + t_1^2}{(1 - t_1 t)^2}.$$

Podle (31·11) a podle odst. 17 má funkce

$$F\left(\frac{t_1 + t}{1 - t_1 t}\right) - F(t) \tag{32·9}$$

uvnitř intervalu $\left[-\infty, \frac{1}{t_1}\right]$ derivaci

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{t_1 + t}{1 - t_1 t}\right)^2} \cdot \frac{1 + t_1^2}{(1 - t_1 t)^2} - \frac{1}{1 + t^2}. \tag{32·10}$$

Avšak úpravou snadno se dokáže, že výraz (32·10) je identicky roven nule. Tedy funkce (32·9) má uvnitř intervalu $\left[-\infty, \frac{1}{t_1}\right]$ všude derivaci rovnou nule a tedy (viz odst. 21) má uvnitř celého intervalu konstantní hodnotu. Tuto hodnotu určíme, dosadíme-li $t = 0$. (To jde, neboť číslo 0 leží uvnitř našeho intervalu.) Dostaneme, že ta konstantní hodnota je $F(t_1) - F(0) = F(t_1)$. Je tedy

$$F\left(\frac{t_1 + t}{1 - t_1 t}\right) - F(t) = F(t_1)$$

pro všecka $t < \frac{1}{t_1}$. Dosadíme-li $t = t_2$, dostaneme (32·8).

Pomocí vzorce (32·8) lze najít rozmanité cesty k pohodlnému numerickému výpočtu čísla π. Vyložíme si jednu z nich. Dosadíme do (32·8) nejprve $t_1 = t_2 = \frac{1}{5}$. Vyjde

$$F(\tfrac{5}{12}) = 2 \,.\, F(\tfrac{1}{5}). \tag{32·11}$$

Dále dosadíme $t_1 = t_2 = \frac{5}{12}$. Vyjde

$$F(\tfrac{120}{119}) = 2F(\tfrac{5}{12}). \tag{32·12}$$

Konečně dosadíme $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{239}$. Vyjde

$$F(\tfrac{120}{119}) = F(1) + F(\tfrac{1}{239}). \tag{32·13}$$

Ze (32·3), (32·11), (32·12) a (32·13) plyne snadným počtem

$$\pi = 16 \,.\, F(\tfrac{1}{5}) - 4 \,.\, F(\tfrac{1}{239}). \tag{32·14}$$

Čísla $F(\frac{1}{5})$ a $F(\frac{1}{239})$ můžeme počítati pomocí řady (32·1) velmi pohodlně na velký počet desetinných míst, takže (32·14) je rychlá cesta k výpočtu čísla π. Vypočtěte si sami tímto způsobem π aspoň na deset desetinných míst. Pro kontrolu budiž zde udáno prvých 20 desetinných míst čísla π:

$$\pi \doteq 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Skončíme poznámkou o vzorci (32·8). Omezme se jako dosud na případ $t_1 > 0$. Vzorec (32·8) byl odvozen za předpokladu $t_2 < \frac{1}{t_1}$. Zejména platí vzorec (32·8) pro všecka záporná t_2. Je-li však t_2 záporné a roste-li $|t_2|$ nade všecky meze, pak se zřejmě zlomek

$$\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2} = \frac{\frac{t_1}{t_2} + 1}{\frac{1}{t_2} - t_1} \tag{32·15}$$

blíží číslu $-\frac{1}{t_1}$, takže se levá a tudíž i pravá strana vzorce (32·8) blíží číslu $F\left(-\frac{1}{t_1}\right)$. Porovnáme-li tento výsledek se (31·7), dostaneme

$$F\left(-\frac{1}{t_1}\right) = F(t_1) - \frac{\pi}{2}. \tag{32·16}$$

Pro $t_2 = \frac{1}{t_1}$ je zlomek (15) bezvýznamný, tudíž i vzorec (32·8). Ale pro $t_2 > \frac{1}{t_1}$ mají obě strany vzorce (32·8) význam, ale vzorec (32·8) je v tomto případě nesprávný. Správný vzorec pro případ $t_2 > \frac{1}{t_1}$ je

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}\right) = F(t_1) + F(t_2) - \pi.$$

Neboť nechť proměnná t probíhá vnitřek intervalu $\left[\frac{1}{t_1}, \infty\right]$. Jako výše najdeme, že funkce (32·9) má derivaci identicky rovnou nule, takže je to konstanta. Označíme-li si tuto konstantu c, je pro $t > \frac{1}{t_1}$

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}\right) = F(t) + c, \tag{32·17}$$

takže potřebujeme pouze dokázati, že

$$c = F(t_1) - \pi. \tag{32·18}$$

Za tím účelem si všimněme, co se děje, roste-li t nade všecky meze. Zlomek, který se vyskytne nalevo ve (32·17), se pak blíží číslu $-\dfrac{1}{t_1}$ [to vidíme, upravíme-li jej jako ve (32·15)], takže se levá a tudíž i pravá strana vzorce (32·17) blíží číslu $F\left(-\dfrac{1}{t_1}\right)$. Porovnáme-li tento výsledek se (31·6), dostaneme

$$F\left(-\frac{1}{t_1}\right) = \frac{\pi}{2} + c. \tag{32·19}$$

Ze (32·16) a (32·19) plyne (32·18).