Co je a nač je vyšší matematika?

Úvod

In: Eduard Čech (author): Co je a nač je vyšší matematika?. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 3–15.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402510

ÚVOD

1. Pojem funkce. Jeden z nejdůležitějších pojmů v matematice vůbec je pojem funkce. Říkáme, že jedna veličina je funkcí veličiny druhé, když je první veličina určitým způsobem závislá na veličině druhé; to znamená, že když známe hodnotu veličiny druhé, můžeme si vypočítat hodnotu veličiny prvé. Na př. obvod čtverce můžeme vypočítat, známe-li délku strany, tedy obvod čtverce je funkcí délky strany. Počet je velmi jednoduchý; znamená-li a délku strany a o obvod, jest

$$o = 4 \,.\, a;$$

při tom musíme ovšem délku strany i obvod vyjádřit ve stejné jednotce, na př. 1 cm. Také obsah čtverce je funkcí délky strany; znamená-li p obsah a a zase délku strany, jest $p = a \,.\, a$ neboli

$$p = a^2;$$

musíme ovšem jednotku délky a jednotku plošnou volit souhlasně, na př. 1 cm a 1 cm² To jsou příklady na funkce jedné proměnné, t. j. v každém příkladě se vyskytují jen dvě veličiny, z nichž jedna je funkcí druhé. Jsou také funkce dvou proměnných; příklad takové funkce nám poskytuje známá Pythagorova věta, podle níž lze počítati délku přepony pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky obou odvěsen. Délka přepony je funkcí délek obou odvěsen, tedy funkcí dvou proměnných, a Pythagorova věta říká, jak se tato funkce počítá. Znamenají-li písmena a, b délky obou odvěsen a c délku přepony, jest

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

V této knížce budeme studovati pouze funkce jedné proměnné. Ostatně se všech výsledků o funkcích jedné proměnné dá užít na funkce dvou proměnných. Všímáme-li si totiž na př. jen těch pravoúhlých trojúhelníků, u kterých má odvěsna b určitou numerickou hodnotu, třeba $b = 2$, je přepona c funkcí jedné proměnné, totiž odvěsny a; jest $c = \sqrt{a^2 + 4}$.

2. Přímá úměrnost. Jest mnoho typů funkcí a v této knížce budeme studovat ovšem jen ty nejjednodušší. Začneme jedním velmi elementárním, ale důležitým typem závislosti; je to známá přímá úměrnost. Abychom měli zcela určitý příklad na mysli, dejme tomu, že auto jede po rovné silnici rychlostí 45 km za hodinu. Dráha, kterou auto ujede za určitou dobu, závisí na této době neboli je funkcí této doby. Volíce minutu za jednotku času a 1 km za jednotku délky, můžeme si sestavit tabulku:

doba	10	20	30	40	50	60	70
dráha	$7\frac{1}{2}$	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$

Tabulku tuto mohli bychom libovolně rozšířit. Zákonitost takové závislosti se dá vyslovit různými způsoby. Zvolíme si ten, který je vhodný pro další naše úvahy; poměr obou veličin, tedy zlomek

$$\frac{\text{dráha}}{\text{doba}},$$

je ve všech případech stejný:

$$\frac{7\frac{1}{2}}{10} = \frac{15}{20} = \frac{22\frac{1}{2}}{30} = \frac{30}{40} = \frac{37\frac{1}{2}}{50} = \ldots = \frac{3}{4}.$$

Říkáme, že ten poměr je stálý neboli že je to konstanta. Při přímé úměrnosti poměr obou veličin je konstanta. Označíme-li si dobu písmenem t a dráhu písmenem s, je

$$\frac{s}{t} = \frac{3}{4}$$

neboli

$$s = \frac{3}{4} \cdot t.$$

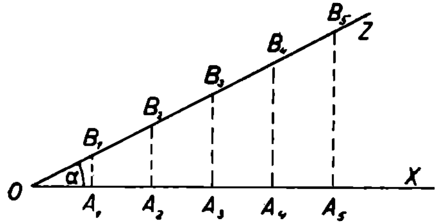
Jiný příklad přímé úměrnosti máme v závislosti obvodu kružnice na jejím poloměru. Kolikrát je větší poloměr, tolikrát je větší obvod. Proto poměr obvodu k poloměru je u všech kružnic stálý, je to konstanta. Polovina této konstanty je známé Ludolfovo číslo $\pi = 3{,}14159\ldots$; v této knížce se dovíte, jak snadno se může pomocí vyšší matematiky počítati číslo π na velký počet míst. Znamená-li r poloměr a o obvod kružnice, je

$$\frac{o}{r} = 2\pi$$

neboli

$$o = 2\pi r.$$

Uvedeme si ještě jeden velmi důležitý příklad přímé úměrnosti. Zvolme si nějaký ostrý úhel $\sphericalangle XOZ = \alpha$.



Obr. 1.

Zvolíme-li si na rameni OX úhlu α bod A a vztyčíme-li v něm kolmici k OX, protne tato kolmice druhé rameno OZ úhlu α v bodě B. Tím vznikne pravoúhlý trojúhelník OAB s pravým úhlem při vrcholu A. Jelikož poloha bodu A na rameni OX úhlu α je libovolná, můžeme si takových pravoúhlých trojúhelníků OAB myslit nekonečně mnoho. V obr. 1 je vyznačeno pět možných poloh, které jsou rozlišeny indexy. Všecky ty pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobné; proto poměr

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

je konstanta, jejíž velikost je určena úhlem α. Jak většina z vás ví, říkáme této konstantě tangens úhlu α a značíme ji tg α. Je tedy

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

neboli

$$\overline{AB} = \overline{OA} \,.\, \operatorname{tg} \alpha.$$

Délka úsečky AB je přímo úměrná délce úsečky OA.

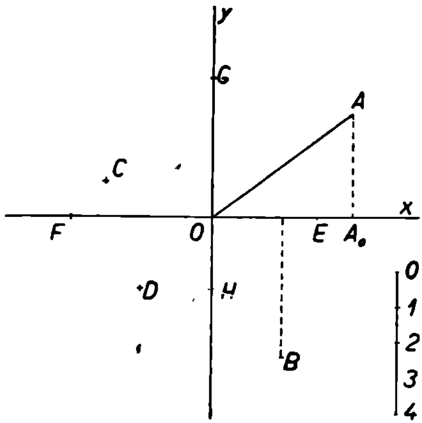
3. Pravoúhlé souřadnice. Ke kônci minulého odstavce jsme si připomněli z trigonometrie pojem tangenty. Mimo tento pojem nebudeme v této knížce potřebovat z trigonometrie už nic. Zato se častěji zde setkáme se základy analytické geometrie; ale také tu si zopakujeme všecko znovu, tím spíše, že nebudeme potřebovat nic složitého, nýbrž pouze ty nejjednodušší věci. Je to především pojem pravoúhlých souřadnic bodu v rovině, který si zopakujeme v tomto odstavci. Musíme si zvolit určitý bod O, který se jmenuje počátek. Počátkem si vedeme „vodorovnou“ přímku, které se říká osa x. Je zvykem narýsovat si také „svislou“*). přímku procházející počátkem, které se říká osa y. [Ale osa y už není tak důležitá jako osa x a mohli bychom se bez ní obejít.] Kromě toho si potřebujeme ještě zvolit určitou jednotku délky, abychom mohli vyjadřovat délky nepojmenovanými čísly.

Všimněme si nyní v obr. 2 třeba bodu A. Abychom dostali jeho souřadnice, spustíme s něho kolmici na osu x; pata této kolmice je v obr. 2 označena A_0. Bod A má dvě souřadnice x a y, při čemž jest

*) V následujícím slovy vodorovná přímka rozumíme přímku, která má směr řádku; přímku k ní kolmou jmenujeme svislá přímka.

$$x = \overline{OA_0},\ y = \overline{A_0A},$$

tedy podle měřítka k obrazci připojeného $x = 4$, $y = 3$. Píšeme stručně $A = (4; 3)$; to tedy znamená, že první souřadnice bodu A má hodnotu 4 a druhá hodnotu 3. Je však velmi důležité, že se při určování souřadnic bodu užívá určitých znaménkových pravidel, která zní takto: Sou-



Obr. 2.

řadnice x se bere kladně jen tehdy, když bod A_0 padne napravo od počátku neboli když bod A leží napravo od osy y; když bod A_0 padne nalevo od počátku neboli když bod A leží nalevo od osy y, bereme souřadnici x záporně; zbývá případ, kdy bod A_0 je v počátku, t. j. kdy bod A leží na ose y; tu je ovšem $x = 0$. Souřadnice y se bere kladně jen tehdy, když bod A je nahoře nad osou x; je-li bod A dole pod osou x, bereme souřadnici y záporně; leží-li konečně bod A na ose x, je ovšem $y = 0$.

Všecky možné znaménkové případy jsou zachyceny v obr. 2, každý jedním příkladem; jest

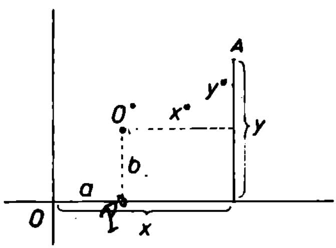
$A = (4; 3)$, $B = (2; —4)$, $C = (—3; 1)$, $D = (—2; —2)$,
$E = (3; 0)$, $F = (—4; 0)$, $G = (0; 4)$, $H = (0; —2)$,
$O = (0; 0)$.

Vraťme se k bodu $A = (4; 3)$. V obr. 2 je narýsován pravoúhlý trojúhelník OA_0A; délky odvěsen tohoto trojúhelníka jsou souřadnice bodu A a délka přepony je vzdálenost bodu A od počátku. Tedy je podle Pythagorovy věty

$$\overline{OA} = + \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3·1}$$

(3·1) je vzorec pro vzdálenost bodu od počátku. Měli jsme sice při jeho odvození na mysli bod, jehož obě souřadnice x a y jsou čísla kladná; ale vzorec ovšem platí, i když některá souřadnice je záporná nebo když jsou obě záporné, neboť druhá mocnina x^2 je nezávislá na znamení čísla x [na př. $(—4)^2 = 4^2 = 16$] a stejně y^2. Vzorec (3·1) platí také, když x nebo y je rovné nule. Na př. u bodů E a F je $y = 0$, a vzdálenost od počátku je zřejmě rovna absolutní hodnotě čísla x.*)

4. Změna počátku. V obr. 3 máme vyznačeny tři body O, O^*, A. Považujeme-li O za počátek souřadnic, má bod O^* dvě souřadnice, které si označíme a, b; při stejném počátku má také bod A dvě souřadnice, které si označíme x, y. Můžeme si však zavésti ještě druhou soustavu souřadnou, v které je počátkem bod O^*; ve druhé soustavě bude míti bod A zase dvě souřadnice, ale jiné než dříve;



Obr. 3.

*) Když x není záporné, pak absolutní hodnota čísla x je číslo x samo; když x je záporné, pak absolutní hodnota čísla x se liší od čísla x pouze znamením. Absolutní hodnotu čísla x značíme $|x|$; na př. $|3| = 3$, $|—4| = 4$, $|0| = 0$.

označíme si je x^*, y^*. V obr. 3 jsou vyznačeny všecky souřadnice a, b, x, y, x^*, y^*. Z obrazce je patrné, že

$$\begin{aligned} x^* &= x - a, \\ y^* &= y - b. \end{aligned} \tag{4·1}$$

Obr. 3 představuje ovšem pouze jednu znaménkovou možnost, ale vzorce (4·1) jsou ve všech případech správné. Nejnázorněji se o tom přesvědčíme, když si představíme proměnnou soustavu souřadnic, jejíž počátek putuje z polohy O do polohy O^* po lomené čáře OPO^* (viz obr. 3). Tato změna souřadnicové soustavy se děje ve dvou krocích; při prvém kroku putuje počátek vodorovně z polohy O do polohy P, při druhém kroku putuje počátek svisle z polohy P do polohy O^*. Při prvém kroku zůstává druhá souřadnice libovolného bodu nezměněna a mění se pouze první souřadnice; při kladném a tato souřadnice zřejmě stále klesá, a to od hodnoty x do hodnoty $x^* = x - a$; při záporném a naopak tato souřadnice stále stoupá, a to zase od hodnoty x do hodnoty $x^* = x - a$ (která právě při záporném a je větší než x). Při druhém kroku zůstává naopak první souřadnice nezměněna a mění se pouze druhá souřadnice; při kladném b tato souřadnice zřejmě stále klesá, a to od hodnoty y do hodnoty $y^* = y - b$; při záporném b naopak tato souřadnice stále stoupá, a to zase od hodnoty y do hodnoty $y^* = y - b$ (která je při záporném b větší než y). Proto jsou vzorce (2) správné, ať již jsou čísla a, b kladná či záporná. Samozřejmě jsou správné také, když a nebo b je rovné nule; je-li $a = 0$, odpadne prvý krok, je-li $b = 0$, odpadne druhý krok.

Když kombinujeme vzorec (4·1) se vzorcem (3·1), dospějeme k výrazu

$$+\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{4·2}$$

pro vzdálenost bodu $(a; b)$ od bodu $(x; y)$. Neboť v nové soustavě souřadnic, v které bod $(a; b)$ je počátkem, bude podle vzorce (4·1) míti bod $(x; y)$ nové souřadnice $x - a$, $y - b$, které dosadíme do vzorce (3·1).

5. Některé geometrické příbuznosti. Geometrickou příbuzností rozumíme pravidlo, které každému bodu A přiřadí určitý nový bod A', zvaný obraz bodu A. V tomto odstavci si krátce promluvíme o třech velmi jednoduchých geometrických příbuznostech. Budeme si tyto příbuznosti definovati analyticky, t. j. tak, že udáme pravidlo, podle něhož se ze souřadnic x, y libovolného bodu A vypočtou souřadnice x', y' jeho obrazu A'.

První příklad. Analytické pravidlo zní

$$x' = x,\ y' = -y.$$

To je patrně překlopení kolem osy x nebo, jak se také říká, osová souměrnost, u které osa x je osou souměrnosti. Každý bod na ose x splyne se svým obrazem; body nad osou x mají obrazy pod osou x; body pod osou x mají obrazy nad osou x.

Druhý příklad. Analytické pravidlo zní

$$x' = -x,\ y' = y.$$

To je patrně překlopení kolem osy y neboli osová souměrnost, u které osa y je osou souměrnosti. Každý bod na ose y splyne se svým obrazem; body napravo od osy y mají obrazy nalevo od osy y; body nalevo od osy y mají obrazy napravo od osy y.

Třetí příklad. Analytické pravidlo zní

$$x' = -x,\ y' = -y.$$

To je středová souměrnost, při které je počátek středem souměrnosti. Počátek O splyne se svým obrazem; je-li A libovolný jiný bod, leží jeho obraz A' na přímce OA tak, že bod O je právě uprostřed mezi body A, A'. Abychom z bodu $A = (x; y)$ dostali jeho obraz $A' = (-x; -y)$, musíme změnit znamení obou souřadnic; to můžeme provésti tak, že nejdříve změníme znamení při x a potom při y; to znamená geometricky, že bod A' dostaneme tím, že napřed překlopíme bod A kolem osy y a potom bod, který takto dostaneme, překlopíme kolem osy x. Můžeme také provésti změny znamení v obráceném pořádku, tedy napřed překlopit kolem osy x a potom kolem osy y.

6. Přímky procházející počátkem. Vraťme se k obr. 1. Přímka OX je v něm vodorovná a proto ji budeme považovat za osu x; počátkem bude ovšem v obrazci vyznačený bod O. Je-li $B = (x; y)$ libovolný bod na rameni OZ úhlu $\alpha = \sphericalangle XOZ$, jest $x = \overline{OA}$, $y = \overline{AB}$. Víme, že poměr $y : x = \overline{AB} : \overline{OA}$ je konstanta; tato konstanta je $\operatorname{tg} \alpha$, ale pro stručnost ji označme k, pišme tedy

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (6{\cdot}1)$$

Tedy pro všecky naše body $B = (x; y)$ je splněna rovnice

$$y = kx. \qquad (6{\cdot}2)$$

Ty body B, kterých jsme si dosud všímali, leží na přímce OZ, ale nevyplní celou přímku OZ. Chceme-li dostati celou přímku OZ, musíme ji prodloužit za bod O, t. j. k bodům $B = (x; y)$ musíme ještě připojit body C, které dostaneme z bodů B pomocí středové souměrnosti o středu O. Z odst. 5 víme, že $C = (-x; -y)$. Protože

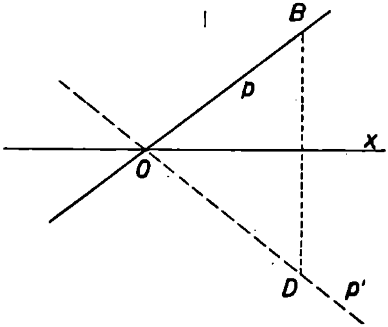
$$\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$

a protože souřadnice x, y bodu B vyhovují rovnici (6·2), vyhovují téže rovnici také souřadnice bodu C. Protože samozřejmě i souřadnice bodu O rovnici (2) vyhovují, máme výsledek, že pro každý bod $(x; y)$ přímky OZ je splněna rovnice (6·2). Jiné body už rovnici (6·2) vyhovovat nemohou. Neboť je-li dán bod $(x; y)$, který rovnici (6·2) vyhovuje, uvažme, že jistě je na přímce OZ bod, jehož první souřadnice se rovná danému číslu x; druhá souřadnice toho bodu se však podle toho, co už víme, dá počítat pomocí rovnice (6·2) a musí se tedy rovnat danému číslu y, t. j. obě daná čísla x, y jsou souřadnicemi jistého bodu přímky OZ, neboli daný bod $(x; y)$ leží na přímce OZ. Protože tedy souřadnice každého bodu přímky OZ vyhovují rovnici (6·2) a protože také každý bod, jehož souřadnice rovnici (6·2) vyhovují, leží na přímce OZ, říkáme, že (6·2) je rovnice přímky OZ. Abychom mohli v určitém případě rovnici (6·2) napsat, potřebujeme pouze znát číslo k, které se jmenuje směrnice přímky OZ. Víme, že se směrnice k počítá ze vzorce (6·1), v kterém α znamená úhel přímky OZ s osou x.

Ale jedné věci si musíme všimnout! Je-li dán počátek O a ovšem i vodorovná osa x a je-li dán ostrý úhel α, existují v rovině **dvě** přímky, které procházejí počátkem a svírají s osou x úhel α. V obr. 4 je ta z nich, kterou jsme se dosud zabývali, vytažena plně a označena p, a druhá je vyčárkována a označena p'. Z přímky p vznikne přímka p' překlopením kolem osy x. Je-li D bod souměrně sdružený s bodem $B = (x; y)$ vzhledem k ose x, víme z odst. 5, že $D = (x; -y)$. Protože rovnice přímky p je $y = kx$, je patrně

$$y = -kx$$

rovnice přímky p'. Směrnicí přímky p' rozumíme záporné číslo $-k$. Tedy směrnice je kladná, když probíhajíce přímku zleva doprava, probíháme ji zdola nahoru neboli když většímu x odpovídá větší y, a směrnice je záporná, když probíhajíce přímku zleva doprava, probíháme ji shora dolů neboli když většímu x odpovídá menší y.

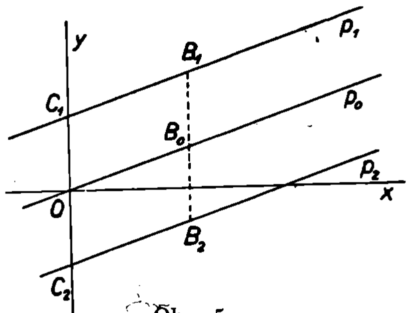


Obr. 4.

Můžeme tedy říci, že při každé volbě čísla k, nevyjímajíc čísla záporná, znamená (6·2) rovnici určité přímky jdoucí počátkem. To platí i pro $k = 0$, neboť $y = 0$ je zřejmě rovnice osy x. Má každá přímka jdoucí počátkem rovnici tvaru (6·2)? Kladná odpověď by byla ukvapená; ke svislé přímce jdoucí počátkem, t. j. k ose y, nedospějeme z rovnice (6·2) při žádné volbě čísla k. To je ovšem samozřejmé: vedeme-li počátkem přímku p ve směru jiném než svislém, je na přímce p ke každému x určitý bod, jehož prvá souřadnice je rovna x, a rovnice (6·2) udává právě předpis, podle něhož se ze souřadnice x počítá souřadnice y; naproti tomu je u všech bodů na ose y souřadnice x rovna nule, takže neexistuje předpis, podle něhož by se souřadnice y počítala ze souřadnice x.

Aby rovnice (6·1) měla všeobecnou platnost, činíme následující znaménkové dohody. Mějme libovolnou přímku p a označme α úhel této přímky s osou x. Je-li přímka p svislá, je α úhel pravý; říkáme, že přímka p nemá směrnici a symbolu $\operatorname{tg}\alpha$ nedáváme žádný numerický význam. Je-li přímka p vodorovná, je $\alpha = 0$ a $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Je-li konečně přímka p kosá k ose x, tedy α úhel ostrý, dáme úhlu α znamení plus nebo minus podle toho, zda probíhajíce p zleva doprava, probíháme ji zdola nahoru, či shora dolů. Stejné znamení jako α má také $\operatorname{tg}\alpha$. Potom platí vzorec (1) pro směrnici přímky p, není-li ovšem p svislá. Při tom nemusí přímka p procházeti počátkem. Přímky mezi sebou rovnoběžné mají stejné směrnice (nejsou-li svislé). Směrnice přímky zůstane beze změny, změníme-li počátek souřadnic.

7. Rovnice přímky. Dosud jsme mluvili pouze o přímkách jdoucích počátkem. Nechť nyní p je libovolná přímka. Je-li p svislá, mají všecky její body stejnou souřadnici x; je-li a numerická hodnota souřadnice x, leží také obráceně každý bod (a, y) na přímce p; proto je $x = a$ rovnice přímky p. Není-li přímka p svislá, má určitou směrnici k (viz konec odst. 6).



Obr. 5.

Přímka p protne pak osu y v určitém bodě C. Souřadnice x bodu C je rovna nule; souřadnici y bodu C si označme l, takže $C = (0; l)$. Může býti $l = 0$ nebo $l > 0$ nebo $l < 0$; je-li $l = 0$, prochází p počátkem O; je-li $l > 0$, leží bod C nad bodem O, a je-li $l < 0$, leží bod C pod bodem O. Vzdálenost $\overline{OC}$ je ve všech případech rovna číslu $|l|$. (V obr. 5 je $l > 0$ u přímky p_1, $l < 0$ u přímky p_2.)

Rovnici přímky p si můžeme odvoditi takto. Veďme počátkem O rovnoběžku p_0 s přímkou p. Přímky p a p_0 mají stejnou směrnici k. Ke každému číslu x máme na přímce p bod B a na přímce p_0 bod B_0 s první souřadnicí rovnou x. Druhou souřadnici označme y u bodu B, y_0 u bodu B_0, takže $B = (x; y)$, $B_0 = (x; y_0)$. V případě $l > 0$ leží (viz obr. 5) bod B ve vzdálenosti l nad bodem B_0, v případě $l < 0$ leží bod B ve vzdálenosti $|l|$ pod bodem B_0;

proto je v obou případech $y = y_0 + l$ (a to platí ovšem i v případě $l = 0$, neboť potom B splyne s B_0). My však známe rovnici přímky p_0, t. j. víme, že $y_0 = kx$. Protože $y = y_0 + l$, jest

$$y = kx + l. \tag{7·1}$$

Tedy pro každý bod $(x; y)$ přímky p platí rovnice (7·1). Protože je na přímce p ke každému číslu x určitý bod $(x; y)$, a protože (7·1) je předpis, jímž z čísla x počítáme číslo y, vidíme, že rovnice (7·1) je splněna jen tehdy, když bod $(x; y)$ leží na přímce p. Proto je (7·1) rovnice přímky p. Ostatně můžeme ještě říci určitěji: Když bod $(x; y)$ neleží na přímce p, leží buďto nad přímkou p nebo pod ní. Zřejmě je v prvém případě

$$y > kx + l$$

a ve druhém

$$y < kx + l.$$

Obráceně buďtež dána dvě libovolná čísla k a l. Pak můžeme napsati rovnici (7·1). Na ose y si sestrojme bod $C = (0; l)$. Dále určeme úhel α z rovnice

$$\operatorname{tg} \alpha = k, \tag{7·2}$$

při čemž se řídíme znaménkovým pravidlem vysvětleným v odst. 6. Vedeme-li si bodem C přímku p, která tvoří s osou x úhel α (pozor na znamení úhlu α!), je patrně (7·1) rovnicí přímky p.

Rovnice (7·1), v které k a l jsou určitá daná čísla, dává předpis, jímž ke každému číslu x můžeme počítati určité číslo y, t. j. rovnice (7·1) definuje funkci y proměnné x. Funkce takového tvaru se jmenuje lineární funkce.*)

Promluvme si ještě o této geometrické úloze. Daným bodem $A = (a; b)$ je vedena přímka p daného směru; jak zní rovnice

*) Určitěji se říkává lineární celistvá funkce; lineární lomená funkce má tvar $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, kde a, b, c, d jsou daná čísla $(c \neq 0)$.

přímky p? Je-li přímka p svislá, je žádaná rovnice $x = a$. Vyloučíme-li tento případ, má přímka p určitou směrnici k, kterou počítáme ze vzorce (7·2). Prochází-li přímka p počátkem, je její rovnice $y = kx$. Neprochází-li přímka p počátkem, můžeme si počátek posunouti do bodu A. Označíme-li si hvězdičkou souřadnice v posunuté soustavě, jest $y^* = kx^*$ rovnice přímky p v posunuté soustavě. Tedy podle (4·1) rovnice přímky p v původní soustavě je

$$y - b = k\,(x - a). \tag{7·3}$$

Rovnici (7·3) bychom mohli uvésti na tvar (7·1), kde $l = b - ka$. Můžeme však také psáti rovnici (7·3) ve tvaru

$$\frac{y - b}{x - a} = k, \tag{7·4}$$

při čemž ovšem vlastně vylučujeme jeden bod přímky p, totiž bod $A = (a; b)$, neboť levá strana rovnice (7·4) je bezvýznamná pro $x = a$.

Jak zní rovnice přímky p, která spojuje bod $A = (a; b)$ s bodem $P = (x_0; y_0)$? (Dané body A a P buďtež mezi sebou různé.) Je-li $x_0 = a$, je přímka p svislá a její rovnice je $x = a$. Vyloučíme-li tento případ, má přímka p rovnici tvaru (7·3), kde si ovšem směrnici k musíme vypočítati. To je lehké, neboť v každém bodě $(x; y)$ přímky p, mimo bod A, musí platiti vztah (7·4), zejména v bodě P. Tedy přímka p má rovnici (7·3), do které je nutno dosaditi

$$k = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}. \tag{7·5}$$